

Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija

Blanuša, Danilo

Doctoral thesis / Disertacija

1942

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:168:177010>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-27**



Repository / Repozitorij:

[FER Repository - University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing repository](#)



Dr.sc. Maja Blanuša
Kneza Trpimira 40
10432 Lug Samoborski
OIB

Dozvoljavam Knjižnici Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu (OIB **57029260362**) da disertaciju mojeg oca, čiji sam pravni sljednik, prof. Danila Blanuše, „Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija“, Tehnički fakultet u Zagrebu, 1942.g., prenese u digitalni oblik i javno objavi putem interneta.

U Lugu Samoborskom, 25. 07. 2010.



Ing. Danilo Blauša :

JEDNA VRST INTEGRALNIH TEOREMA BESSELOVIH FUNKCIJA

U V O D

Polazna točka za istraživanja, sadržana u ovoj radnji, bio je poznat elektrotehnički problem: Na početak beskonačnog električnog voda priključi se u nekom momentu napon, koji je zadan kao funkcija vremena. Onda će se uzduž toga voda širiti elektromagnetički val, koji tehničar smatra određenim, ako su nadjene funkcije, koje daju napon i struju u ovisnosti od mjesta i vremena. Diferencijalna jednačba, koja određuje tok vala, je poznata telegrafaska jednačba. Za rješavanje ovog problema mogu se upotrijebiti razne metode, tako na pr. t. zv. Riemannova metoda. Pri tom se u toku rješavanja mogu dobiti zanimljivi integralni teoremi Besselovih funkcija, koji su specijalni slučajevi mnogo općenitijih takvih teorema, kojima ćemo se baviti u ovoj radnji.

Da to pokažemo, moramo skicirati rješavanje spomenutog problema po Riemannovoj metodi.

Telegrafaska jednačba glasi:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = RG\psi + (LG+RC) \frac{\partial \psi}{\partial t} + LC \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (1)$$

Pri tom znači:

R ohmov otpor po jedinici dužine

L induktivitet po jedinici dužine

C kapacitet po jedinici dužine

G odvod (vodljivost medija) po jedinici dužine

toga električnog voda. Funkcija $\psi(x,t)$ može značiti ili napon ili struju. Smatrat ćemo, da znači napon, pa će granični uvjet glasiti:

$$\psi(0,t) = 0 \quad \text{za} \quad t < 0 \quad (2)$$

$$\psi(0,t) = g(t) \quad \text{za} \quad t \geq 0 \quad (3)$$

gdje je $g(t)$ neka zadana funkcija od t , koja je definirana u intervalu $0 \leq t < \infty$ i u tom intervalu dva puta kontinuirano derivabilna.

To dakle znači, da je

napon na početku voda, t.j. za $x=0$ do časa $t=0$ jednak nuli, a od toga časa neka zadana funkcija vremena.

Početni uvjet će glasiti:

$$\psi(x,t) = 0 \quad \text{za} \quad t < 0, \quad x \geq 0 \quad (4)$$

To dakle znači, da je napon najcijelom vođu jednak nuli do časa $t=0$.

Da se problem računski što više pojednostavni, uvest ćemo nove konstante

$$\rho = \frac{LG+RC}{2LC} \quad (5)$$

$$\sigma = \left| \frac{RC-LG}{2LC} \right| \quad (6)$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (7)$$

čime jednađžba (1) dobiva oblik

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = (\rho^2 - \sigma^2) \psi + 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (8)$$

zatim uvedemo novu funkciju

$$u = \psi e^{\rho t} \quad (9)$$

i konačno provedemo transformaciju neovisnih varijabla

$$\xi = \frac{1}{2} (\sigma t + \frac{\sigma}{v} x) = \frac{\sigma}{2} (t + \frac{x}{v}) \quad (10)$$

$$\eta = \frac{1}{2} (\sigma t - \frac{\sigma}{v} x) = \frac{\sigma}{2} (t - \frac{x}{v}). \quad (11)$$

Jednađžba (8) se onda pretvara u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = u. \quad (12)$$

~~xxxxxxxx(2)xxxx(7)xxxxxxxxxxxxxxxx~~

~~$u(,) = 0 \quad \text{za} \quad 0$~~

~~$u(,) =$~~

~~(13)~~

Riješimo li (10),(11) po x i t , dobijemo

$$x = \frac{v}{c} (\xi - \eta) \tag{13}$$

$$t = \frac{1}{c} (\xi + \eta) \tag{14}$$

Pri tom pretpostavljamo $c \neq 0$, dakle prema definiciji (6) $c > 0$, dok isključujemo slučaj $c = 0$, koji daje naročito pojednostavnjenje, naime t.zv. vod bez izobličenja.

Pretpostavka $x=0$ znači prema (13) $\xi = \eta$, a $t < 0$ daje prema (14) $\xi + \eta = 2\xi < 0$, dakle $\xi < 0$, tako da (2) obzirom na (9) glasi:

$$u(\xi, \xi) = 0 \quad \text{za} \quad \xi < 0 \tag{15}$$

dok (3) prelazi u

$$u(\xi, \xi) = e^{\rho \frac{2\xi}{c}} g\left(\frac{2\xi}{c}\right) = g(\xi) \tag{16}$$

za $\xi \geq 0$

gdje sad $g(\xi)$ možemo smatrati povoljno zadanom funkcijom, koja je očito takodjer u intervalu $0 \leq \xi < \infty$ dva puta Kontinuirano derivabilna.

Uvjet (4) prelazi u

$$u(\xi, \eta) = 0 \quad \text{za} \quad \begin{matrix} \xi + \eta < 0 \\ \xi - \eta \geq 0 \end{matrix} \tag{17}$$

Doetsch je pokazao*), da rješenje ovog problema nije jednoznačno. Treba naime uočiti, da se kod hiperbolične diferencijalne jednačbe, kaošto je (12), singulariteti na rubu područja varijabiliteta, za koje tražimo rješenje, nastavljaju u unutrašnjost uzduž karakteristike. Tako će se u našem slučaju

*) G. Doetsch, Elektrische Schwingungen in einem anfänglich strom- und spannungslosen Kabel unter dem Einfluss einer Randerregung. Festschrift der Technischen Hochschule Stuttgart, Springer 1929, str.56 - 78, naročito str. 75 - 78.

~~singulariteta~~ diskontinuitet, što ga može imati $u(\xi, \xi)$ u točki $\xi=0$, nastaviti uzduž karakteristike $\eta=0$. Uzduž te karakteristike onda uopće ne postoji rješenje diferencijalne jednačbe. Izvan te karakteristike može se prema Doetschu uobičajenom rješenju našeg problema superponirati rješenje, koje fizikalno znači posljedicu udarnog pojava, koji se, grubo rečeno, sastoji u tome, da je na početku voda u času $t=0$ djelovao neizmjereno velik napon kroz neizmjereno kratko vrijeme.

Da izbjegnemo ovoj višeznačnosti rješenja, mi ćemo problem shvatiti kao granični slučaj problema, kod kojega nema singulariteta na rubu, pa stoga niti u unutrašnjosti. U tu svrhu ćemo diskontinuitet funkcije $u(\xi, \xi)$ premostiti vrlo strmim usponom, i to ovako:

Odaberemo $\varepsilon > 0$ i odredimo koeficijente cijele racionalne funkcije

5. stepena

$$h(\xi) = a_0 + a_1 \xi + a_2 \xi^2 + a_3 \xi^3 + a_4 \xi^4 + a_5 \xi^5 \quad (18)$$

tako, da bude

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = h'(\varepsilon) = h''(\varepsilon) = 0 \quad (19)$$

$$h(\varepsilon) = 1 \quad (20)$$

Račun daje

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0 \quad (21)$$

$$a_3 = \frac{10}{\varepsilon^3} \quad (22)$$

$$a_4 = -\frac{15}{\varepsilon^4} \quad (23)$$

$$a_5 = \frac{6}{\varepsilon^5} \quad (24)$$

dakle

$$h(\xi) = \frac{10}{\varepsilon^3} \xi^3 - \frac{15}{\varepsilon^4} \xi^4 + \frac{6}{\varepsilon^5} \xi^5 \quad (25)$$

i

$$h'(\xi) = \frac{30}{\varepsilon^3} \xi^2 - \frac{60}{\varepsilon^4} \xi^3 + \frac{30}{\varepsilon^5} \xi^4 = \frac{30 \xi^2}{\varepsilon^3} \left(1 - \frac{\xi}{\varepsilon}\right)^2 \quad (26)$$

Iz (26) se vidi, da je prva derivacija te funkcije izmedju 0 i ϵ pozitivna, pa da prema tome funkcija od 0 do ϵ monotono raste. Vrijedi dakle zbog (19) i (20)

$$0 \leq h(\xi) \leq 1 \quad \text{za} \quad 0 \leq \xi \leq \epsilon \quad (27)$$

Razmotrimo li sad funkciju

$$H(\xi) = h(\xi) \cdot \psi(\xi) \quad (28)$$

to iz (19) i (20) slijedi, da je

$$H(0) = H'(0) = H''(0) = 0 \quad (29)$$

$$H(\epsilon) = \psi(\epsilon) \quad (30)$$

$$H'(\epsilon) = \psi'(\epsilon) \quad (31)$$

$$H''(\epsilon) = \psi''(\epsilon) \quad (32)$$

Osim toga je zbog (27) za $0 \leq \xi \leq \epsilon$

$$0 \leq H(\xi) \leq \psi(\xi) \quad (33a)$$

ili

$$0 \geq H(\xi) \geq \psi(\xi) \quad (33b)$$

prema tome, da li je $\psi(\xi) > 0$ ili $\psi(\xi) < 0$.

Ako dakle izmedju 0 i ϵ nadomjestimo funkciju $\psi(\xi)$ funkcijom

$H(\xi)$, te smo postigli, da će obzirom na (29), (30), (31), (32) funkcija

$u(\xi, \xi)$ biti svagdje dva puta kontinuirano derivabilna, a osim toga

vrijedi (33a) odnosno (33b), tako da kod graničnog prijelaza $\epsilon \rightarrow 0$

funkcija ostaje konačna, pa je isključeno, da bi u rješenju mogle biti involvirane posljedice udarnog pojava.

Činjenicom, da je $u(\xi, \xi)$ dva puta kontinuirano derivabilna

uvjetuje, da karakteristika $\eta = 0$ nije izuzeta iz područja varijabiliteta,

u kojem rješenje postoji. ~~pa rješenje ima određene karakteristike~~ Time

otpada mogućnost višeznačnog rješenja, kako ga obrazlaže Doetsch.

Funkciju, kojoj konvergira rješenje, kada provedemo granični prijelaz $\varepsilon \rightarrow 0$, moći ćemo s pravom smatrati fizikalno ispravnim rješenjem.

Pretpostavimo dakle zasada, da je između 0 i ε funkcija $\varphi(\xi)$ nadomještена funkcijom $H(\xi)$, definiranom prema (28). Ovako modificiranu funkciju $\varphi(\xi)$ označit ćemo sa $\bar{\varphi}(\xi)$.

~~Priznak rješenja~~

Ako su tražena funkcija $u(\xi, \eta)$ i njezine prve derivacije zadane uzduž luka neke krivulje, koji svaka karakteristika siječe najviše jedamputa, to znamo, da je rješenje određeno u pravokutniku, što ga čine karakteristike, koje prolaze krajnjim točkama toga luka.

Iz (17) slijedi, da su ^udotičnom području i prve derivacije od u jednake nuli, pa to mora vrijediti i na rubu, t.j. na pravcu $\xi + \eta = 0$ za $\xi \geq 0$. Ovo potonje slijedi iz toga, što su svakako i funkcija i njezine prve derivacije u području $\xi - \eta \geq 0$ svagdje kontinuirane, budući da svagdje postoji rješenje od (12) i prema tome miješana druga derivacija.

Odaberemo li na pravcu $\xi + \eta = 0$ točke $(0,0)$ i $(\xi_1, -\xi_1)$ za $\xi_1 > 0$, to će dakle ⁿ funkcija $u(\xi, \eta)$ biti jednaka nuli u pravokutniku, koji čine karakteristike $\xi = 0, \eta = 0, \xi = \xi_1, \eta = -\xi_1$. Budući da ξ_1 možemo odabrati makar kako velik, to je jasno, da je funkcija u jednaka nuli za svako $\eta = 0, \xi \geq 0$.

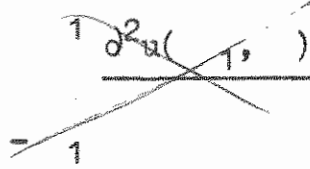
Uvjet (17) možemo dakle nadomjestiti uvjetom

$$u(\xi, \eta) = 0 \quad \text{za} \quad \eta \leq 0, \quad \xi \geq 0 \quad (34)$$

dok smo u uvjetu (16) funkciju $\varphi(\xi)$ nadomjestili funkcijom $\bar{\varphi}(\xi)$.

Mogli bismo sada potražiti rješenje, pa onda izvršiti granični prijelaz $\varepsilon \rightarrow 0$. Ipak će biti ljepše, da već sada razmotrimo, kojim uvjetima na rubu područja dano sa (16) i (34) biti podvrgnuta funkcija dobivena tim graničnim prijelazom.

Odaberemo u tu svrhu $\varepsilon_1 > 0$. Integriramo diferencijalnu jednadžbu (12) po η uzduž pravca $\xi = \xi_1$, gdje je $\xi_1 > 0$ i to od točke $A(\xi_1, -\eta_1)$, gdje je $\eta_1 > 0$, do točke $B(\xi_1, \varepsilon_1)$. Integracija lijeve strane jednadžbe (12) daje



$$\int_{-\eta_1}^{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} d\eta = \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_1, \eta=\varepsilon_1} - \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_1, \eta=-\eta_1} \quad (35)$$

dok integracija desne strane od (12) daje obzirom na (34)

$$\int_{-\eta_1}^{\varepsilon_1} u d\eta = \int_0^{\varepsilon_1} u d\eta \quad (36)$$

Budući da je obzirom na (34) drugi član na desnoj strani od (35) jednak nuli, to dobijemo

$$\int_0^{\varepsilon_1} u d\eta = \left[\frac{\partial u}{\partial \xi} \right]_{\xi=\xi_1, \eta=\varepsilon_1} \quad (37)$$

Integracija po ξ desne strane od (37) po pravcu $\eta = \varepsilon_1$ od točke $C(\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ do točke B daje:

$$\begin{aligned} \int_{\varepsilon_1}^{\xi_1} \frac{\partial u}{\partial \xi} d\xi &= u(\xi_1, \varepsilon_1) - u(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = \\ &= u(\xi_1, \varepsilon_1) - \bar{\varphi}(\varepsilon_1) \end{aligned} \quad (38)$$

Ako je \underline{U} maksimum od $|u|$ u području

$$\left. \begin{aligned} \xi &\geq \eta \\ \xi &\leq \xi_1 \\ 0 &\leq \eta \leq \varepsilon_1 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

onda slijedi iz (37), da je

$$\left| \frac{\partial u}{\partial \xi} \right|_{\substack{\xi = \xi_1 \\ \eta = \varepsilon_1}} \leq \varepsilon_1 U \quad (40)$$

To će, razumije se, vrijediti i onda, ako ξ varira između ε_1 i ξ_1 , tako da iz (38) slijedi

$$\left| u(\xi_1, \varepsilon_1) - \bar{\varphi}(\varepsilon_1) \right| \leq \varepsilon_1 (\xi_1 - \varepsilon_1) U \quad (41)$$

Provedemo li sad granični prijelaz $\varepsilon \rightarrow 0$, t.j. pretvorimo li strmi uspon u diskontinuitet, pri čemu funkcija $\bar{\varphi}$ prelazi opet u funkciju φ , i pretpostavimo, da pri tome U ostaje konačan, to (41) prelazi u

$$\left| u(\xi_1, \varepsilon_1) - \varphi(\varepsilon_1) \right| \leq \varepsilon_1 (\xi_1 - \varepsilon_1) U \quad (42)$$

Ako konačno i ε_1 konvergira prema nuli, vidimo, da će prema (42) biti

$$u(\xi, 0) = \varphi(0) \quad \text{za} \quad \xi \geq 0 \quad (43)$$

pa taj uvjet skupa s uvjetom (16) određuje rješenje problema u području

$$\left. \begin{aligned} \xi &\geq \eta \\ \eta &\geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Uvjeti (16) i (43) služiti će nam za određivanje rješenja našeg problema po Riemannovoj metodi. Jasno je, da će u tom rješenju biti sadržano i rješenje problema, kod kojega je diskontinuitet nadomješten strmim

usponom, ako je funkcija φ već sama zadovoljava uvjete (29). Iz toga rješenja stoga ne će biti teško naknadno vidjeti, da je naša pretpostavka, da U kod graničnog prijelaza $\varepsilon \rightarrow 0$ ostaje konačan, bila opravdana.

Poslije ovih priprava prelazimo na rješavanje problema po Riemannovoj metodi.

Kako je poznato, Riemannova metoda osniva se na ovom stavku:

Neka je zadan normalni oblik hiperbolične diferencijalne jednažbe

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a \frac{\partial u}{\partial \xi} + b \frac{\partial u}{\partial \eta} + c u = 0 \quad (45)$$

gdje su a, b, c funkcije od ξ i η . Adjungirana jednažba glasi:

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - a \frac{\partial v}{\partial \xi} - b \frac{\partial v}{\partial \eta} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial \xi} - \frac{\partial b}{\partial \eta} \right) v = 0 \quad (46)$$

Ako su u, v dvije funkcije od ξ i η , gdje u zadovoljava jednažbu (45), a v jednažbu (46) i ako znači

$$P = \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) + auv \quad (47)$$

$$Q = \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + buv \quad (48)$$

onda vrijedi

$$\oint (P d\eta - Q d\xi) = 0 \quad (49)$$

gdje je integracija provedena uzduž zatvorene krivulje, koja može imati konačan broj uglova, a inače je kontinuirano derivabilna.

U našem slučaju je

$$a = b = 0 \quad (50)$$

$$c = -1 \quad (51)$$

pa jednažbe (47), (48) prelaze u

$$P = \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial u}{\partial \eta} - u \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) \quad (52)$$

$$Q = \frac{1}{2} \left(v \frac{\partial u}{\partial \xi} - u \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \quad (53)$$

a (45) i (46) dobivaju isti oblik (12), t.j. jednačba (12) je samoadjungirana.

Po Riemannu se propisuje za funkciju v , da mora biti jednaka 1 u točki A, da mora vrijediti

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = bv \quad (54)$$

uzduž karakteristike, koja je paralelna s osi ξ i prolazi točkom A ,

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = av \quad (55)$$

uzduž karakteristike, koja je paralelna s osi η i prolazi točkom A.

U našem slučaju vrijedi (50), tako da ti uvjeti glase

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \quad (54a)$$

odnosno

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (55a)$$

Znamo, da su ^{ti}uvjeti, kao i uvjet (12), zadovoljeni Besselovom funkcijom nultoga reda

$$v = J_0(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}) \quad (56)$$

gdje su ξ_1, η_1 koordinate točke A.

Kao zatvorenu krivulju, uzduž koje ćemo provesti integraciju (49), odabiremo četverokut s uglovima A(ξ_1, η_1), B(η_1, η_1), C(0,0), D($\xi_1, 0$). Pri tom su ξ_1, η_1 odabrani tako, da zadovoljavaju nejednačbe

$$\xi_1 > \eta_1 > 0 \quad (57)$$

Uzduž stranice \overline{AB} je η konstantan, pa prema tome otpada prvi član integranda u jednačbi (49). Obzirom na (54a) dobijemo

$$\begin{aligned} \int_A^B &= - \int_{\xi_1}^{\eta_1} Q \, d\xi = - \frac{1}{2} \int_{\xi_1}^{\eta_1} v \frac{\partial u}{\partial \xi} \, d\xi = - \frac{1}{2} (uv)_{\xi_1}^{\eta_1} = \\ &= - \frac{1}{2} [u(\eta_1, \eta_1) - u(\xi_1, \eta_1)] = \frac{1}{2} [u(\xi_1, \eta_1) - \varphi(\eta_1)] \end{aligned} \quad (58)$$

Dalje dobijemo uzduž \overline{BC} , gdje vrijedi $\eta = \xi$

$$\int_B^C = \int_{\eta_1}^0 \left[P(\xi, \xi) d\xi - Q(\xi, \xi) d\xi \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^0 \left\{ u(\xi, \xi) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} - v(\xi, \xi) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} \right\} d\xi \quad (59)$$

Uzduž \overline{CD} je u konstantan i η konstantan. Otpada dakle prvi član integranda u (49), a drugi daje

$$\int_C^D = - \int_0^{\xi_1} Q d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} u \frac{\partial v}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{2} (uv)_0^{\xi_1} =$$

$$= \frac{1}{2} \varphi(0) \left[1 - J_0(2i\sqrt{\xi_1 \eta_1}) \right] \quad (60)$$

Uzduž \overline{DA} je ξ konstantan i vrijedi (55a), tako da dobijemo

$$\int_D^A = \int_0^{\eta_1} P d\eta = \frac{1}{2} \int_0^{\eta_1} v \frac{\partial u}{\partial \eta} d\eta = \frac{1}{2} (uv)_0^{\eta_1} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[u(\xi_1, \eta_1) - u(\xi_1, 0) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[u(\xi_1, \eta_1) - \varphi(0) \right] \quad (61)$$

Zbrojimo li integrale (58), (59), (60), (61) i stavimo taj zbroj jednak nuli, dobijemo:

$$u(\xi_1, \eta_1) = \frac{1}{2} \left[\varphi(0) J_0(2i\sqrt{\xi_1 \eta_1}) + \varphi(\eta_1) \right] + \frac{1}{2} \int_0^{\eta_1} \left\{ u(\xi, \xi) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} - v(\xi, \xi) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} \right\} d\xi. \quad (62)$$

Ovo bi bilo rješenje problema, da je poznata funkcija

$$f(\xi) = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi}. \quad (63)$$

Nameće nam se pomisao, da tu funkciju možemo odrediti, ako u (62) stavimo $\eta_1 = \xi_1$, jer onda lijeva strana jednadžbe postaje poznata. Osim toga prema (71) otpada prvi dio integranda, pa dobijemo:

$$\varphi(\xi_1) = \frac{1}{2} \left[\varphi(0) J_0(2i\xi_1) + \varphi(\xi_1) \right] - \frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} [v(\xi, \xi)]_{\eta=\xi_1} f(\xi) d\xi \quad (64)$$

Ovo je integralna jednadžba, iz koje bismo morali odrediti nepoznatu funkciju $f(\xi)$, pa je onda uvrstiti u (62), da dobijemo rješenje.

Poznato je međjutim, da se rješenje problema može dobiti i na kraći i lakši način. Rastavimo naime desnu stranu od (62) u dva dijela:

$$\Psi_1 = \frac{1}{2} \varphi(\eta_1) + \frac{1}{2} \int_0^{\eta_1} \varphi(\xi) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} d\xi \quad (65)$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2} \varphi(0) J_0(2i\sqrt{\xi_1 \eta_1}) - \frac{1}{2} \int_0^{\eta_1} v(\xi, \xi) f(\xi) d\xi \quad (66)$$

Nije teško pokazati, da Ψ_1 zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} = \Psi_1 \quad (67)$$

Znajući, da je

$$\frac{dJ_0(x)}{dx} = -J_1(x) \quad (68)$$

dobivamo obzirom na (56)

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\eta - \eta_1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}} J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}) \quad (69)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\xi - \xi_1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}} J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}) \quad (70)$$

dakle

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\eta - \xi - \eta_1 + \xi_1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}} J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}) \quad (71)$$

i

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_{\xi=\xi_1} = \frac{\xi_1 - \eta_1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi_1)(\xi_1 - \eta_1)}} J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi_1)(\xi_1 - \eta_1)}) \quad (72)$$

Iz poznatih formula

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n) = -x^{-n}J_{n+1} \quad (73)$$

i

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1} \quad (74)$$

slijedi

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n) = -x^{-n}\left(\frac{2n}{x}J_n - J_{n-1}\right) \quad (75)$$

ili za $n=1$

$$\frac{d}{dx} \frac{J_1}{x} = -\frac{2n}{x^2} J_1 + \frac{J_0}{x} \quad (76)$$

Pomoću ove formule lako se diferencira (72) po ξ_1 i dobije:

~~$$\frac{d}{d\xi_1} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\xi=\xi_1} = \frac{d}{d\xi_1} \left(\frac{\xi_1 - \eta_1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi_1)(\xi_1 - \eta_1)}} J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi_1)(\xi_1 - \eta_1)}) \right)$$~~

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\xi_1 - \xi} \left\{ (\xi_1 - \xi) \frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)}} + (\xi_1 - \eta_1) J_0(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)}) \right\}$$

(77)

Diferenciramo li ovo po η_1 upotrijebivši formule (68) i (76), slijedi po kratkom računu

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} \right\} = (\xi_1 - \eta_1) \frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)}} \quad (78)$$

Iz razvoja u red potencija

$$J_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}}{r! (r+1)!} \quad (79)$$

slijedi lako, da je

$$\left\{ \frac{J_1(x)}{x} \right\}_{x=0} = \frac{1}{2} \quad (80)$$

tako, da uvrštenje $\xi = \eta_1$ u (77) daje

~~$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} \right] \right\}_{\xi=\eta_1} = 1$$~~

XXXXXX

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} \right] \right\}_{\xi=\eta_1} = 1 \quad (81)$$

Ako dakle (65) diferenciramo po ξ_1 , to prvi član otpada, dok u drugom treba diferencirati pod znakom integracije. Diferenciramo li zatim po η_1 , to diferencijacija po gornjoj granici integrala zbog (81) daje $\frac{1}{2} \varphi(\eta_1)$, a diferencijacija pod znakom integracije daje obzirom na (78) i (72) opet stari integral izraza (65), tako da je zaista zadovoljena jednačba (67).

Stavimo li $\xi_1 = \eta_1$, to (72) pokazuje, da je integrand u (64) jednak nuli, pa dobijemo

$$\psi_1(\xi_1, \xi_1) = \frac{1}{2} \varphi(\xi_1) \quad (82)$$

Ako pak stavimo $\eta_1 = 0$, daje (65)

$$\psi_1(\xi_1, 0) = \frac{1}{2} \varphi(0) \quad (83)$$

Usporedimo li to s uvjetima (16) i (43) ^{obzirom na linearnost jednaške (67),} uvidjamo, da je ψ_1 polovica traženog rješenja. Označimo li varijable opet sa ξ, η dok za varijablu integracije pišemo x , to dakle rješenje glasi

$$u(\xi, \eta) = \varphi(\eta) + \int_0^\eta \varphi(x) (\xi - \eta) \frac{J_1(2\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)})}{\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)}} dx \quad (84)$$

Razumije se, da je ψ_2 druga polovica rješenja, tako da i (66) može poslužiti za rješenje problema, što će biti zgodno, ako je namjesto funkcije ~~φ~~ zadana funkcija f .

Iz ovako nadjenog rješenja (84) možemo naknadno izračunati funkciju $f(\xi)$, definiranu jednašbom (63), pa onda uvrstiti u jednašbu (64). Očekivat ćemo, da će ta jednašba biti identično zadovoljena. Obzirom na (56) ta jednašba zbog ~~$\eta_1 = \xi_1$~~ pojednostavnjuje i glasi:

$$\varphi(0) \cdot J_0(2\sqrt{\xi_1}) - \varphi(\xi_1) = \int_0^{\xi_1} f(\xi) J_0[2\sqrt{(\xi_1 - \xi)}] d\xi \quad (85)$$

Da odredimo funkciju $f(\xi)$, diferenciramo (84) po ξ odnosno po η , služeći se pri tom formulom (73), koja za $n=1$ glasi:

$$\frac{d}{dx} \frac{J_1}{x} = - \frac{J_2}{x} \quad (86)$$

Dobivamo:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \int_0^{\eta} \varphi(x) \left\{ \frac{J_1(2\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)})}{\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)}} - (\xi-\eta) \frac{J_2(2\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)})}{\xi-x} \right\} dx \quad (87)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \eta} = & \varphi'(\eta) + \int_0^{\eta} \varphi(x) \left\{ - \frac{J_1(2\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)})}{\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)}} - (\xi-\eta) \frac{J_2(2\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)})}{\eta-x} \right\} dx + \\ & + (\xi-\eta) \varphi(\eta), \end{aligned} \quad (88)$$

dakle

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} = f(\xi) = -\varphi'(\xi) + 2 \int_0^{\xi} \varphi(x) \frac{J_1[2i(\xi-x)]}{i(\xi-x)} dx \quad (89)$$

Uvrštenje ovog izraza u (85) daje:

$$\begin{aligned} \varphi(0) J_0(2i\xi_1) - \varphi(\xi_1) &= - \int_0^{\xi_1} \varphi'(\xi) J_0[2i(\xi_1-\xi)] d\xi + \\ &+ 2 \int_0^{\xi_1} \left\{ \int_0^{\xi} \varphi(x) \frac{J_1[2i(\xi-x)]}{i(\xi-x)} dx \right\} J_0[2i(\xi_1-\xi)] d\xi = \\ &= - \left\{ \varphi(\xi) J_0[2i(\xi_1-\xi)] \right\}_0^{\xi_1} + 2i \int_0^{\xi_1} \varphi(\xi) J_1[2i(\xi_1-\xi)] d\xi + \\ &+ 2 \int_0^{\xi_1} \varphi(x) \left\{ \int_x^{\xi_1} \frac{J_1[2i(\xi-x)]}{i(\xi-x)} J_0[2i(\xi_1-\xi)] d\xi \right\} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\varphi(\xi_1) + \varphi(0) J_0(2i\xi_1) + \\
 &+ 2i \int_0^{\xi_1} \varphi(x) \left\{ J_1[2i(\xi_1-x)] - \int_x^{\xi_1} \frac{J_1[2i(\xi-x)]}{(\xi-x)} J_0[2i(\xi_1-\xi)] d\xi \right\} dx
 \end{aligned} \tag{90}$$

Prva dva člana desne strane ove jednačbe ukidaju se s članovima lijeve strane, pa budući da je $\varphi(x)$ povoljna funkcija, to slijedi

$$\int_x^{\xi_1} \frac{J_1[2i(\xi-x)]}{(\xi-x)} J_0[2i(\xi_1-\xi)] d\xi = J_1[2i(\xi_1-x)] . \tag{91}$$

Ova jednažba vrijedi zaista identično obzirom na varijablu ξ_1 , ali to ipak nije trivijalan identitet, već je to poznat integralan teorem Besselovih funkcija.

Supstitucijom

$$\xi = -\frac{iy}{2} + x \tag{92}$$

$$\xi_1 = -\frac{it}{2} + x \tag{93}$$

jednažba (91) prelazi u

$$\int_0^t \frac{J_1(y)}{y} J_0(t-y) dy = \cancel{J_1(t)} , \tag{94}$$

a to je specijalan slučaj poznatog Kapteynovog integrala*)

$$\int_0^t J_\mu(t-x) J_\nu(x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{\nu} J_{\mu+\nu}(t) \tag{95}$$

gdje μ i ν mogu biti kompleksni brojevi, tako da je realni dio od μ veći od -1 , a realni dio od ν veći od 0 .

*) G.N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922. str. 380. Autor nije imao uvida u ovo djelo, nego je taj citat našao u: Hermann Fischer, Die Laplace-Transformation in der Theorie der Besselfunktionen. Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br. 1936. str. 9.

Sjetimo se sada, da smo našli, da je (65) polovica traženog rješenja. Jasno je, da je onda (66) druga polovica toga rješenja, pa da su dakle izrazi (65) i (66) međusobno jednaki. Napišemo li to, uvrstivši u (65) izraz (89), dobijemo:

$$\begin{aligned} & \varphi(\eta_1) + (\xi_1 - \eta_1) \int_0^{\eta_1} \varphi(\xi) \frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)}} d\xi = \\ & = \varphi(0) J_0(2i\sqrt{\xi_1 \eta_1}) + \int_0^{\eta_1} \varphi'(\xi) J_0(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)}) d\xi - \\ & - 2 \int_0^{\eta_1} \left\{ \int_0^{\xi} \varphi(x) \frac{J_1[2i(\xi - x)]}{i(\xi - x)} dx \right\} J_0(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)}) d\xi = \\ & = \varphi(0) J_0(2i\sqrt{\xi_1 \eta_1}) + \varphi(\eta_1) - \varphi(0) J_0(2i\sqrt{\xi_1 \eta_1}) + \\ & + \int_0^{\eta_1} \varphi(\xi) (\xi_1 + \eta_1 - 2\xi) \frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)}} d\xi - \\ & - 2 \int_0^{\eta_1} \varphi(x) \left\{ \int_x^{\eta_1} \frac{J_1[2i(\xi - x)]}{i(\xi - x)} J_0(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)}) d\xi \right\} dx \quad (96) \end{aligned}$$

ili

$$\int_0^{\eta_1} \varphi(x) \left\{ (\eta_1 - x) \frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1 - x)(x - \eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1 - x)(x - \eta_1)}} - \int_x^{\eta_1} \frac{J_1[2i(\xi - x)]}{i(\xi - x)} J_0(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)}) d\xi \right\} dx = 0 \quad (97)$$

Budući da je $\varphi(x)$ povoljna funkcija, mora izraz u vitičastoj zagradi biti jednak nuli. Provedemo li još supstituciju

$$\xi = \frac{i(y-t)}{2} + x \quad (98)$$

$$\xi_1 = -\frac{i(t+a)}{2} + x \quad (99)$$

$$\eta_1 = -\frac{i(t-a)}{2} + x \quad (100)$$

to slijedi

$$\int_a^t \frac{J_1(t-y)}{t-y} J_0(\sqrt{y^2-a^2}) dy = (t-a) \frac{J_1(\sqrt{t^2-a^2})}{\sqrt{t^2-a^2}} \quad (101)$$

Ovaj integralni teorem Besselovih funkcija izgleda da nije poznat.

Za $a=0$ prelazi supstitucijom $y=t-x$ u poznati teorem (94).

Zamislamo sada, da je umjesto funkcije $\varphi(\xi)$ zadana funkcija $f(\xi)$ i vrijednost $\varphi(0)$. Time je na osnovu izraza (66) takodjer određeno rješenje problema, a funkcija $\varphi(\xi)$ može se odrediti prema (85). Izjednačimo li opet izraze (65) i (66), uvrstivši za $\varphi(\xi)$ izraz određen prema (85), dobijemo:

$$\begin{aligned} \varphi(0) J_0(2i\eta_1) - \int_0^{\eta_1} f(x) J_0[2i(\eta_1-x)] dx + (\xi_1-\eta_1) \int_0^{\eta_1} \varphi(0) J_0(2i\xi) \cdot \\ \cdot \frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}} d\xi - (\xi_1-\eta_1) \int_0^{\eta_1} \left\{ \int_0^{\xi} f(x) J_0[2i(\xi-x)] dx \right\} \cdot \\ \cdot \frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}} d\xi = \varphi(0) J_0(2i\sqrt{\xi_1\eta_1}) - \int_0^{\eta_1} f(x) J_0(2\sqrt{(\xi_1-x)(x-\eta_1)}) dx \end{aligned} \quad (102)$$

ili, ako u dvostrukom integralu obrnemo slijed integracija i sredimo,

$$\begin{aligned}
\varphi(0) & \left\{ J_0(2i\eta_1) - J_0(2i\sqrt{\xi_1\eta_1}) + (\xi_1 - \eta_1) \int_0^{\eta_1} J_0(2i\xi) \frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}} d\xi \right\} - \\
& - \int_0^{\eta_1} f(x) \left\{ J_0[2i(\eta_1-x)] - J_0(2\sqrt{(\xi_1-x)(x-\eta_1)}) + \right. \\
& \left. + (\xi_1 - \eta_1) \int_x^{\eta_1} J_0[2i(\xi-x)] \frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}} d\xi \right\} dx \quad (103)
\end{aligned}$$

Budući da se vrijednost $\varphi(0)$ i funkcija $f(\xi)$ mogu neovisno jedna od druge povoljno odabrati, to moraju oba izraza u vitičastim zagradama svaki za sebe biti jednakanuli. Prvi prelazi supstitucijom

$$\xi = \frac{i(y-t)}{2} \quad (104)$$

$$\xi_1 = -\frac{i(t+a)}{2} \quad (105)$$

$$\eta_1 = -\frac{i(t-a)}{2}, \quad (106)$$

a drugi supstitucijom (99), (98), (100) u oblik

$$\int_a^t J_0(t-y) \frac{J_1(\sqrt{y^2-a^2})}{\sqrt{y^2-a^2}} dy = \frac{1}{a} \left[J_0(t-a) - J_0(\sqrt{t^2-a^2}) \right]. \quad (107)$$

I ovo je integralan teorem Besselovih funkcija, za koji smatramo, da je nov. Stavimo li $a=0$, to lijeva strana jednažbe (107) prelazi u lijevu stranu jednažbe (94). Na desnoj strani od (107) dobijemo neodređen oblik, koji možemo izračunati pomoću de l'Hôpitalovog pravila uz pomoć (68), pa vidimo, da izlazi desna strana od (94). I ovdje dakle $a=0$ daje poznati specijalni slučaj (94).

Za naše svrhe bit će zgodnije, da se ne služimo Besselovim funkcijama prve vrste J_n , kao što smo to dosada činili, već funkcijama Λ_n , koje dobijemo, ako funkcije J_n podijelimo s prvim članom njihovog razvoja u red potencija. Te su dakle funkcije definirane ovako:*)

$$\Lambda_n(x) = n! \left(\frac{x}{2}\right)^{-n} J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n!}{r! (n+r)!} \left(\frac{ix}{2}\right)^{2r}. \quad (108)$$

Budući da ćemo odsada ^{gotovo}isključivo upotrebljavati ove funkcije, to ćemo ih bez točnije napomene nazivati Besselovim funkcijama.

Pomoću tih funkcija nadjeni integralni teoremi (101) i (107) dobivaju oblik

$$\int_a^t \Lambda_1(t-y) \Lambda_0(\sqrt{y^2-a^2}) dy = (t-a) \Lambda_1(\sqrt{t^2-a^2}) \quad (109)$$

i

$$\int_a^t \Lambda_0(t-y) \Lambda_1(\sqrt{y^2-a^2}) dy = \frac{2}{a} \left[\Lambda_0(t-a) - \Lambda_0(\sqrt{t^2-a^2}) \right]. \quad (110)$$

Poznato je, da se integral oblika

$$K = \int_0^t f(t-x) g(x) dx \quad (111)$$

zove kompozicijom (njem. Faltung). Operaciju, kojom tvorimo iz funkcija $f(t)$ i $g(t)$ taj integral, zvat ćemo komponiranjem i označiti je zvjezdicom, dakle

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-x) g(x) dx. \quad (112)$$

Osnovno je svojstvo te operacije, da je komutativna, što se odmah razabire

*) Prema Jahnke - Emde, Funktionentafeln, Teubner 1933, str. 194.

supstitucijom $x=t-y$. Lijeva strana od (109) može se smatrati (takvom) kompozicijom, ako stavimo

$$f(t) = \Lambda_1(t) \quad (113)$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t < a \\ \Lambda_0(\sqrt{t^2-a^2}) & \text{za } t \geq a \end{cases} \quad (114)$$

a lijeva strana od (110) ima oblik kompozicije, ako stavimo

$$f(t) = \Lambda_0(t) \quad (115)$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t < a \\ \Lambda_1(\sqrt{t^2-a^2}) & \text{za } t \geq a \end{cases} \quad (116)$$

Naša će zadaća biti, da istražimo općenitije kompozicije, gdje je stavljeno

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t < a \\ -t^r \Lambda_m(c\sqrt{t^2-a^2}) & \text{za } t \geq a \end{cases} \quad (117)$$

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t < b \\ t^s \Lambda_n(c\sqrt{t^2-b^2}) & \text{za } t \geq b \end{cases} \quad (118)$$

Ta će dakle kompozicija glasiti

$$K_{m,n}^{r,s}(t) = \int_b^{t-a} (t-x)^r \Lambda_m(c\sqrt{(t-x)^2-a^2}) x^s \Lambda_n(c\sqrt{x^2-b^2}) dx \quad (119)$$

Posveopćenje se sastoji u tome, što su u obim Bešselovim funkcijama argumenti korijeni iz kvadratičnih izraza varijable, a nesamo u jednoj, dalje smo dodali kao faktor potenciju varijable. Pri tom su r, s, m, n cijeli pozitivni brojevi ili nula. Faktor c nije bitno posveopćenje, jer se može lako ukloniti supstitucijom $x = \frac{\bar{x}}{c}$, $t = \frac{\bar{t}}{c}$, $a = \frac{\bar{a}}{c}$, $b = \frac{\bar{b}}{c}$.

Ipak ćemo taj faktor ostaviti, jer će biti zanimljivo vidjeti, na koji način ulazi u razne formule.

Pokazat će se, da se te kompozicije daju dijelom izraziti pomoću Besselovih funkcija nultoga i prvoga reda, kao što je to kod (109) i (110), a dijelom ćemo još morati uzeti u pomoć neke integrale preko takvih funkcija.

Poslije toga provest ćemo dalje posveopćenje, koje se sastoji u tome, da ćemo razmatrati kompozicije od povoljnog broja faktora poput (117) i (118). I ove će se kompozicije dati izraziti na sličan način.

Dokaz tako dobivenih integralnih teorema ne će biti osnovan na dosada iznesenim metodama, već će biti proveden pomoću Laplace-ove transformacije. Teoremi (109) i (110) bit će sadržani u tim rezultatima kao specijalni slučajevi i time još jednom na drugi način dokazani.

Nastojat ćemo, da ti integralni teoremi, a i druge relacije, koje ovise o općem indeksu n , budu dane nesamo rekurzivnim jednažbama, već i izravnim formulama, gdje je to ikako provedivo.

Za izvode i dokaze u vezi s tim integralnim teoremima trebat ćemo često pomoćne stavke, čiji dokaz bi prekidao nit razmatranja, pa su zato ti pomoćni stavci odijeljeni od glavnih razmatranja. Radnja se prema tome dijeli u tri dijela. U prvom dijelu dokazat ćemo razne stavke opće naravi, koji nemaju veze s Besselovim funkcijama. U drugom dijelu su skupljeni stavci o Besselovim funkcijama, koji su potrebni za glavna razmatranja o integralnim teoremima, obradjenim u trećem dijelu. Neki od stavaka, danih u drugom dijelu, a možda i neki iz prvog dijela, bit će matematički zanimljivi i bez obzira na njihovu primjenu u trećem dijelu.

I. D I OR a z n i s t a v c i o p ć e n a r a v i .1. Izračunavanje raznih suma.

A/ Razmatrajmo polinome dviju varijabla

$$Q(x,y) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2m+2k)! x^{m+k} y^{2k}}{(2k)! (m+k)! (n-k)!} \quad (120)$$

i

$$\bar{Q}(x,y) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2m+2k+2)! x^{m+k+1} y^{2k+1}}{(2k+1)! (m+k+1)! (n-k)!} \quad (121)$$

Integrirat ćemo (120) $2m$ puta po y od 0 do y i diferenciramo zatim m puta po x . Isto tako ćemo (121) integrirati $(2m+1)$ puta po y od 0 do y i zatim $(m+1)$ puta diferencirati po x . Slijedi:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m} \left(\int_0^y dy \right)^{2m} Q(x,y) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k y^{2m+2k}}{k! (n-k)!} = \frac{1}{n!} y^{2m} (1-xy^2)^n \quad (122)$$

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} \left(\int_0^y dy \right)^{2m+1} \bar{Q}(x,y) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^k y^{2m+2k+2}}{k! (n-k)!} = \frac{1}{n!} y^{2m+2} (1-xy^2)^n \quad (123)$$

Integriramo sad (122) m puta po x od 0 do x i diferenciramo po tom $2m$ puta po y , isto tako integriramo (123) $(m+1)$ puta po x od 0 do x i diferenciramo $(2m+1)$ puta po y i dobijemo

$$Q(x,y) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} \left\{ y^{2m} \left(\int_0^x dx \right)^m (1-xy^2)^n \right\} \quad (124)$$

$$\bar{Q}(x,y) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial y^{2m+1}} \left\{ y^{2m+2} \left(\int_0^x dx \right)^{m+1} (1-xy^2)^n \right\} \quad (125)$$

Postepeno izračunavanje višestrukih integrala daje:

$$\int_0^x dx (1-xy^2)^n = -\frac{(1-xy^2)^{n+1}}{(n+1)y^2} + \frac{1}{(n+1)y^2} \quad (126)$$

$$\int_0^x (dx)^2 (1-xy^2)^n = \frac{(1-xy^2)^{n+2}}{(n+1)(n+2)y^4} - \frac{1}{(n+1)(n+2)y^4} + \frac{x}{(n+1)y^2} \quad (127)$$

i t.d., dakle

$$\int_0^x (dx)^m (1-xy^2)^n = \frac{(-1)^m n! (1-xy^2)^{n+m}}{(n+m)! y^{2m}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k} n! x^k}{(n+m-k)! k! y^{2m-2k}} \quad (128)$$

$$\int_0^x (dx)^{m+1} (1-xy^2)^n = \frac{(-1)^{m+1} n! (1-xy^2)^{n+m+1}}{(n+m+1)! y^{2m+2}} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^{m+k+1} n! x^k}{(n+m-k+1)! k! y^{2m-2k+2}} \quad (129)$$

Prema (124), (125) vrijedi dakle:

$$Q(x,y) = (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} \left\{ \frac{(1-xy^2)^{n+m}}{(n+m)!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k x^k y^{2k}}{(n+m-k)! k!} \right\} \quad (130)$$

$$\bar{Q}(x,y) = (-1)^{m+1} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial y^{2m+1}} \left\{ \frac{(1-xy^2)^{n+m+1}}{(n+m+1)!} + \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k x^k y^{2k}}{(n+m-k+1)! k!} \right\} \quad (131)$$

Budući da su sume u zagradama polinomi varijable y $(2m-2)$ -toga odnosno $2m$ -toga stepena, to otpadaju kod diferencijacije, pa ostaje

$$Q(x,y) = (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} \frac{(1-xy^2)^{n+m}}{(n+m)!} \quad (132)$$

$$\bar{Q}(x,y) = (-1)^{m+1} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial y^{2m+1}} \frac{(1-xy^2)^{n+m+1}}{(n+m+1)!} \quad (133)$$

Stavimo li $x=1$, to možemo pisati:

$$Q(1,y) = \frac{(-1)^n}{(n+m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} \left\{ (y+1)^{n+m} (y-1)^{n+m} \right\} = (-1)^n 2^{n+m} \frac{\partial^{m-n}}{\partial y^{m-n}} P_{n+m}(y) \quad (134)$$

$$\bar{Q}(1,y) = \frac{(-1)^n}{(n+m+1)!} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial y^{2m+1}} \left\{ (y+1)^{n+m+1} (y-1)^{n+m+1} \right\} = (-1)^n 2^{n+m+1} \frac{\partial^{m-n}}{\partial y^{m-n}} P_{n+m+1}(y) \quad (135)$$

gdje je $P_n(y)$ n -ti Legendre-ov polinom.

višestruku

Razvijmo sad te izraze po pravilu za diferencijaciju produkta i pretpostavimo $m \geq n$:

$$\begin{aligned} Q(1,y) &= \frac{(-1)^n}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} \frac{\partial^k (y+1)^{n+m}}{\partial y^k} \frac{\partial^{2m-k} (y-1)^{n+m}}{\partial y^{2m-k}} = \\ &= \frac{(-1)^n}{(n+m)!} \sum_{k=m-n}^{k=n+m} \binom{2m}{k} \frac{(n+m)! (y+1)^{n+m-k}}{(n+m-k)!} \frac{(n+m)! (y-1)^{n-m+k}}{(n-m+k)!} \end{aligned} \quad (136)$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}(1,y) &= \frac{(-1)^n}{(n+m+1)!} \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \frac{\partial^k (y+1)^{n+m+1}}{\partial y^k} \frac{\partial^{2m-k+1} (y-1)^{n+m+1}}{\partial y^{2m-k+1}} = \\ &= \frac{(-1)^n}{(n+m+1)!} \sum_{k=m-n}^{k=n+m+1} \binom{2m+1}{k} \frac{(n+m+1)! (y+1)^{n+m-k+1}}{(n+m-k+1)!} \frac{(n+m+1)! (y-1)^{n-m+k}}{(n-m+k)!} \end{aligned} \quad (137)$$

Stavimo li $y=1$, preostaje od tih suma samo po jedan član:

$$\begin{aligned} Q(1,1) &= \frac{(-1)^n}{(n+m)!} \binom{2m}{m-n} \frac{(n+m)! 2^{2n} (n+m)!}{(2n)!} = \frac{(-1)^n (2m)! (n+m)! 2^{2n} (n+m)!}{(n+m)! (m-n)! (n+m)! (2n)!} = \\ &= \frac{(-1)^n 2^{2n} (2m)!}{(2n)! (m-n)!} \end{aligned} \quad (138)$$

i slično

$$\bar{Q}(1,1) = \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (2m+1)!}{(2n+1)! (m-n)!} \quad (139)$$

Budući da izrazi u zagradi u (134) i (135) imaju za $y=1$ $(n+m)$ -struku odnosno $(n+m+1)$ -struku nultočku, to su $Q(1,y)$ i $\bar{Q}(1,y)$ za $n > m$ jednaki nuli. Stavimo li u (120) i (121) $x=y=1$ i usporedimo sa (138) i (139), dobijemo dakle :

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2m+2k)!}{(2k)! (m+k)! (n-k)!} = \begin{matrix} 0 & \text{za } n > m & (140) \\ \frac{(-1)^n 2^{2n} (2m)!}{(2n)! (m-n)!} & \text{za } n \leq m & (141) \end{matrix}$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k (2m+2k+2)!}{(2k+1)! (m+k+1)! (n-k)!} = \begin{matrix} 0 & \text{za } n > m & (142) \\ \frac{(-1)^n 2^{2n+1} (2m+1)!}{(2n+1)! (m-n)!} & \text{za } n \leq m & (143) \end{matrix}$$

B/ Razmatrajmo polinom

$$Q(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} x^{2n-k+1}}{2^{n-k} (2n-k+1)(n-k)! k!} \quad (144)$$

Diferencijacija po x daje

$$Q'(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} x^{2n-k}}{2^{n-k} (n-k)! k!} = \frac{1}{n!} x^n \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n \quad (145)$$

dakle

$$Q(1) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k} (2n-k+1)(n-k)! k!} = \frac{1}{n!} \int_0^1 x^n \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n dx \quad (146)$$

Supstitucijom $y = 2-x$ dobijemo

$$\int_0^1 x^n \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n dx = \int_1^2 y^n \left(1 - \frac{y}{2}\right)^n dy \quad (147)$$

ili

$$\int_0^1 x^n \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n dx = \frac{1}{2} \int_0^2 x^n \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n dx \quad (148)$$

Parcijalna integracija daje:

$$\int_0^2 x^n \left(1 - \frac{x}{2}\right)^n dx = \frac{n}{2(n+1)} \int_0^2 x^{n+1} \left(1 - \frac{x}{2}\right)^{n-1} dx = \dots = \frac{(n!)^2}{2^n (2n)!} \int_0^2 x^{2n} dx =$$

$$= \frac{2^{n+1} (n!)^2}{(2n+1)!} \quad (149)$$

Prema (146), (148) i (149) slijedi

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k} (2n-k+1) (n-k)! k!} = \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \quad (150)$$

C/ Razmatrajmo razvoj

$$-\log \left[1 - (2xy+y^2) \right] = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2xy+y^2)^r}{r} \quad (151)$$

Binomni poučak daje

$$(2xy+y^2)^r = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} (2x)^s y^{2r-s} \quad (152)$$

Uvedemo li novi indeks sumacije

$$n = 2r-s \quad (153)$$

to dobijemo

$$(2xy+y^2)^r = \sum_{n=r}^{2r} \binom{r}{2r-n} (2x)^{2r-n} y^n \quad (154)$$

Ovo ćemo uvrstiti u (151) i potražiti sve n-te potencije od x.

Obzirom na (154) vrijedi

$$r \leq n \leq 2r \quad (155)$$

pa stoga samo oni članovi od (151) dolaze u obzir, za koje je

$$\frac{n}{2} \leq r \leq n, \quad (156)$$

tako da je koeficijent C_n u razvoju

$$-\log [1 - (2xy+y^2)] = \sum_{n=1}^{\infty} C_n y^n \quad (157)$$

dan sumom

$$C_n = \sum_r \frac{1}{r} \binom{r}{2r-n} (2x)^{2r-n} \quad (158)$$

gdje sumu treba protegnuti preko svih vrijednosti od r , koje zadovoljavaju nejednadžbu (156). Uvedemo li novi indeks sumacije

$$k = n-r \quad (159)$$

to se (156) pretvara u

$$0 \leq k \leq \frac{n}{2} \quad (160)$$

i (158) glasi

$$C_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n-k} \binom{n-k}{n-2k} (2x)^{n-2k} \quad (161)$$

Pri tom uglata zagrada kao gornja granica sume znači, kao što je to uobičajeno, najveći cijeli broj, koji nije veći od broja u zagradi.

Iz

$$1 - (2xy+y^2) = [1 - y(x+\sqrt{x^2+1})] [1 - y(x-\sqrt{x^2+1})] \quad (162)$$

slijedi

$$-\log [1 - (2xy+y^2)] = -\log [1 - y(x+\sqrt{x^2+1})] - \log [1 - y(x-\sqrt{x^2+1})]. \quad (163)$$

Razvijemo li desnu stranu u red potencija, dobijemo

$$-\log [1 - (2xy+y^2)] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{ (x + \sqrt{x^2+1})^n + (x - \sqrt{x^2+1})^n \right\} y^n \quad (164)$$

Poredba sa (157) i (161) daje relaciju

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{n-k} \binom{n-k}{n-2k} (2x)^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(n-k-1)! (2x)^{n-2k}}{(n-2k)! k!} = \frac{1}{n} \left\{ (x + \sqrt{x^2+1})^n + (x - \sqrt{x^2+1})^n \right\} \quad (165)$$

Ova se relacija, istina, može dobiti i na drugi način. Stavimo li naime

$$x = \sinh \varphi \quad (166)$$

to je

$$\frac{1}{2} \left\{ (x + \sqrt{x^2 + 1})^n + (x - \sqrt{x^2 + 1})^n \right\} = \frac{\cosh n\varphi}{\sinh n\varphi} \quad (167)$$

prema tome, da li je n tak ili lih. Pod istim uvjetima je dalje

$$\frac{\cosh n\varphi}{\sinh n\varphi} = 2^{n-1} \left\{ \sinh^n \varphi + \frac{n(n-1)}{2(2n-2)} \sinh^{n-2} \varphi + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 4 (2n-2)(2n-4)} \sinh^{n-4} \varphi + \dots \right\} \quad (168)$$

što je s obzirom na (166) identično sa (165), kako se lako vidi.*)

Funkcija

$$y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^n + (x - \sqrt{x^2 + 1})^n \quad (169)$$

može se još lako razviti po potencijama od x , ako se primijeti, da ta funkcija zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(x^2 + 1) y'' + xy' - n^2 y = 0 \quad (170)$$

Zaista, ako se ta jednadžba opetovano diferencira, dobije se lako

$$(x^2 + 1) y^{(s+2)} + (2s+1) y^{(s+1)} + (s^2 - n^2) y^{(s)} = 0 \quad (171)$$

ili za $x=0$

$$y^{(s+2)}(0) + (2s+1) y^{(s+1)}(0) + (s^2 - n^2) y^{(s)}(0) = 0 \quad (172)$$

iz čega se mogu postepeno izračunati diferencijalni kvocijenti, potrebni **Maclaurinov** za ~~Taylorov~~ razvoj.***) Možemo obratno (172) upotrijebiti i za to, da potpunom indukcijom dokažemo ispravnost koeficijenata sume (165).

Ipak držimo, da je način, kako smo ga dali, i koji izvire iz logaritmičkog reda, matematički zanimljiv.

*) Ovakav izvod daju na pr. Whittaker - Watson, A course of modern analysis, Cambridge 1935., str. 375, u vezi s Neumannovim razvojem po Besselovim funkcijama. Ipak, razmatranja, koja daje na pr. Hobson, A treatise on plane trigonometry, Cambridge 1928., str. 104, 105, ~~nisu nimalo jednostavnija od naših~~ za izvod formule (168) našeg teksta, nisu nimalo jednostavnija od naših.
 **) Jordan, Cours d'analyse I, Paris 1909., str. 154.

D/ Nadomjestimo li u (165) x sa ix , pomnožimo zatim sa x^{n-2m-2} i stavimo

$$x = \sqrt{y} \quad (173)$$

to dobijemo

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 2^{n-2k} (n-k-1)! y^{n-m-k-1}}{(n-2k)! k!} =$$

$$= \frac{1}{n} (\sqrt{y})^{n-2m-2} \left\{ (\sqrt{y} + i\sqrt{1-y})^n + (\sqrt{y} - i\sqrt{1-y})^n \right\} \quad (174)$$

Integriramo li ovu jednadžbu po y m puta od 0 do y upotrijebivši poznatu formulu

$$\int_0^y (dy)^m f(y) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^y (y-\xi)^{m-1} f(\xi) d\xi \quad (175)$$

to slijedi

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 2^{n-2k} (n-m-k-1)! y^{n-k-1}}{(n-2k)! k!} =$$

$$= \frac{1}{n} \int_0^y (dy)^m (\sqrt{y})^{n-2m-2} \left\{ (\sqrt{y} + i\sqrt{1-y})^n + (\sqrt{y} - i\sqrt{1-y})^n \right\} =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{(m-1)!} \int_0^y (y-\xi)^{m-1} (\sqrt{\xi})^{n-2m-2} \left\{ (\sqrt{\xi} + i\sqrt{1-\xi})^n + (\sqrt{\xi} - i\sqrt{1-\xi})^n \right\} d\xi . \quad (176)$$

Stavimo $y=1$ i uvedimo novu varijablu integracije

$$\xi = \cos^2 t . \quad (177)$$

Dobijemo lako

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 2^{n-2k} (n-m-k-1)!}{(n-2k)! k!} = \frac{1}{n} \frac{4}{(m-1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} t \cos^{n-2m-1} t \cos nt dt . \quad (178)$$

Pri tom je pretpostavljeno

$$1 \leq m \leq \frac{n-1}{2} \quad (179)$$

Treba sad izračunati integral na desnoj strani od (178). U tu ćemo svrhu izvesti ovu prijetvorbu:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} t \cos^{n-r-1} t e^{\pm i n t} dt = \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} t \cos^{n-r-1} t (\sin^2 t + \cos^2 t) e^{\pm i n t} dt = \\ & = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r+1} t \cos^{n-r-1} t e^{\pm i n t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} t \cos^{n-r+1} t e^{\pm i n t} dt = \\ & = \left\{ -\frac{\cos^{n-r} t \sin^r t e^{\pm i n t}}{n-r} \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{r}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} t \cos^{n-r+1} t e^{\pm i n t} dt \pm \\ & \pm \frac{i n}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r} t e^{\pm i n t} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} t \cos^{n-r+1} t e^{\pm i n t} dt = \\ & = \frac{n}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} t \cos^{n-r+1} t e^{\pm i n t} dt \pm \frac{i n}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r} t e^{\pm i n t} dt = \\ & = \frac{n}{n-r} \left\{ \pm \frac{e^{\pm i n t}}{i n} \sin^{r-1} t \cos^{n-r+1} t \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} \mp \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2} t \cos^{n-r+2} t e^{\pm i n t} dt \pm \\ & \pm \frac{n-r+1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r} t e^{\pm i n t} dt \pm \frac{i n}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r} t e^{\pm i n t} dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mp \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2} t \cos^{n-r+2} t e^{\pm i n t} dt \pm \frac{i(r-1)}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r} t e^{\pm i n t} dt = \\
&= \mp \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2} t \cos^{n-r} t (1 - \sin^2 t) e^{\pm i n t} dt \pm \\
&\quad \pm \frac{i(r-1)}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r} t e^{\pm i n t} dt = \\
&= \mp \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2} t \cos^{n-r} t e^{\pm i n t} dt \pm \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r} t e^{\pm i n t} dt \pm \\
&\quad \pm \frac{i(r-1)}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r} t e^{\pm i n t} dt = \\
&= \mp \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2} t \cos^{n-r} t e^{\pm i n t} dt \quad (180)
\end{aligned}$$

ili, još jednom kratko napisano,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} t \cos^{n-r-1} t e^{\pm i n t} dt = \pm \frac{i(r-1)}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2} t \cos^{n-r} t e^{\pm i n t} dt \quad (180a)$$

Kod toga računa je pretpostavljeno, da je

$$2 \leq r \leq n-1 \quad (181)$$

Za $r=2$ (180a) glasi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^{n-3} t e^{\pm i n t} dt = \pm \frac{i}{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t e^{\pm i n t} dt. \quad (182)$$

S druge strane možemo pisati

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^{n-3} t e^{\pm i n t} dt &= \left\{ -\frac{\cos^{n-2} t}{n-2} e^{\pm i n t} \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} \pm \frac{i n}{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t e^{\pm i n t} dt = \\ &= \frac{1}{n-2} \pm \frac{i n}{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t e^{\pm i n t} dt. \end{aligned} \quad (183)$$

Uvrstimo li to u (182), slijedi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t e^{\pm i n t} dt = \pm \frac{i}{n-1}. \quad (184)$$

Ova jednačba je obzirom na (181) izvedena pod pretpostavkom $n > 2$.
Međutim ona vrijedi i za $n=2$, jer u tom slučaju prelazi u

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\pm i 2 t} dt = \pm i \quad (185)$$

što je ispravno.

Polazeći od (184) dobivamo postepenom primjenom rekurzivne jednačbe (180a):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} t \cos^{n-r-1} t e^{\pm i n t} dt = (\pm i)^r \frac{(r-1)! (n-r-1)!}{(n-1)!}. \quad (186)$$

Ova jednačba vrijedi pod pretpostavkom (181), pod kojom vrijedi i rekurziona jednačba (180a). Međutim, (186) vrijedi i za $r=1$, $n \geq 2$, jer u tom slučaju prelazi u (184), odnosno (185). Prema tome možemo za nju dopustiti

$$1 \leq r \leq n-1 \quad . \quad (187)$$

Odaberemo li u formuli (186) jedamput gornji, a jedamput dolnji predznak i zbrojimo dobivene formule, slijedi lako

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} t \cos^{n-r-1} t \cos nt \, dt = \cos \frac{r\pi}{2} \frac{(r-1)! (n-r-1)!}{(n-1)!} \quad (188)$$

Ako je r tak broj, dakle

$$r = 2m \quad (189)$$

to (187) prelazi u

$$1 \leq m \leq \frac{n-1}{2} \quad (190)$$

a (188) u

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} t \cos^{n-2m-1} t \cos nt \, dt = (-1)^m \frac{(2m-1)! (n-2m-1)!}{(n-1)!} \quad (191)$$

Time je određen integral u (178), pa dobijemo da uz uvjet (190) vrijedi:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k 2^{n-2k} (n-m-k-1)!}{(n-2k)! k!} = (-1)^m \frac{2 (2m)! (n-2m-1)!}{n! m!} \quad (192)$$

Nadomjestimo li u (164) i (165) x sa ix i y sa iy , to dobijemo

$$-\log(1 + 2xy + y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n-k-1)! (2x)^{n-2k}}{(n-2k)! k!} \right\} y^n \quad (193)$$

Diferenciramo li ovu jednadžbu m puta po x , dobijemo

$$\frac{(-1)^m (m-1)! (2y)^m}{(1+2xy+y^2)^m} = \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \left\{ \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n-k-1)! 2^m (2x)^{n-m-2k}}{(n-m-2k)! k!} \right\} y^n \quad (194)$$

Pri tom je u sumi po n prvih $m-1$ članova otpalo, jer razvoj lijeve strane u red potencija počinje sa y^m , a gornja granica sume po k određena je time, što zbog diferenciranja otpadaju potencije od x do uključivo $(m-1)$ -toga stepena. Stavimo li $x=1$, to lijeva strana daje:

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^m (m-1)! (2y)^m}{(1+y)^{2m}} &= (-1)^m 2^m (m-1)! \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-2m}{r} y^{r+m} = \\ &= (-1)^m 2^m (m-1)! \sum_{n=m}^{\infty} \binom{-2m}{n-m} y^n = (-1)^m 2^m (m-1)! \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m} (n+m-1)!}{(2m-1)! (n-m)!} y^n = \\ &= (-1)^m 2^{m+1} m! \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m} (n+m-1)!}{(2m)! (n-m)!} y^n \end{aligned} \quad (195)$$

Poredba koeficijenata s desnom stranom od (194) uz $x=1$ daje

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k (n-k-1)! 2^{n-m-2k}}{(n-m-2k)! k!} = \frac{2^m m! (n+m-1)!}{(2m)! (n-m)!} \quad (196)$$

gdje je naravno $n \geq m$. Nadomjestimo li n sa $n+m$, to ovaj uvjet prelazi

$$u \quad n \geq 0 \quad (197)$$

i dobijemo

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 2^{n-2k} (n+m-k-1)!}{(n-2k)! k!} = \frac{2^m m! (n+2m-1)!}{(2m)! n!} \quad (198)$$

Pri tom bi zbog lijeve strane od (194) trebalo pretpostaviti $m \geq 1$, no (198) vrijedi i za $m=0$, što slijedi iz (165) za $x=1$.

U tom slučaju (198) postaje identična sa (192) za $m=0$, tako da se uvjet (190) može proširiti na

$$0 \leq m \leq \frac{n-1}{2} \quad (199)$$

Uz taj uvjet dakle vrijedi jednačba (192), koju opetujemo:

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 2^{n-2k} (n-m-k-1)!}{(n-2k)! k!} = (-1)^m \frac{2 (2m)! (n-2m-1)!}{n! m!} \quad (200)$$

Pokazat ćemo sad još, da se jednačbe (198) i (200) daju sažeti u jednu, ako upotrijebimo gama-funkciju.

Znamo, da je

$$\Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \Gamma(2m) \quad (201)$$

i da vrijedi

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (202)$$

ako p nije cio broj; dakle za $p = m + \frac{1}{2}$

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(-m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \pi\left(m + \frac{1}{2}\right)} \quad (203)$$

Iz (201) i (203) dobijemo

$$\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}} \frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m}} \frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)} \quad (204)$$

$$\Gamma\left(-m + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi} 2^{2m-1} \Gamma(m)}{\sin \pi\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2m)} = \frac{\sqrt{\pi} 2^{2m} \Gamma(m+1)}{\sin \pi\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2m+1)} \quad (205)$$

Na temelju toga mogu se formule (198) i (200) spojiti u formulu

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^k 2^{n-2k} (n-m-k-1)!}{(n-2k)! k!} = \frac{(-1)^m 2^{2m+1} \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) (n-2m-1)!}{\sqrt{\pi} n!} \quad (206)$$

$$\text{za } m \leq \frac{n-1}{2}$$

gdje sad m može poprimiti i negativne cijele vrijednosti.

E/ Razmatrajmo polinom

$$R(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2n-2k+q}}{2n-2k+q} \binom{n}{k} (-1)^k. \quad (207)$$

Pri tom je n realan nenegativan cio broj, dok q može biti koji bilo kompleksan broj, za koji su svi nazivnici sume (207) različiti od nule, t.j.

$$q \neq 0, -2, -4, \dots, -2n. \quad (208)$$

Diferencijacija polinoma (207) po x daje:

$$R'(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{2n-2k+q} = x^{q-1} (x^2-1)^n. \quad (209)$$

Integriramo li to od 0 do 1 , dobijemo:

$$\begin{aligned} R(1) &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2n-2k+q} \binom{n}{k} = \int_0^1 x^{q-1} (x^2-1)^n dx = \\ &= \left\{ \frac{x^q}{q} (x^2-1)^n \right\}_{x=0}^{x=1} - \frac{2n}{q} \int_0^1 x^{q+1} (x^2-1)^{n-1} dx = \dots \\ \dots &= \frac{(-1)^n 2^n n!}{q (q+2)(q+4)\dots (q+2n-2)} \int_0^1 x^{q+2n-1} dx = \\ &= \frac{(-1)^n 2^n n!}{q (q+2)(q+4)\dots (q+2n)} = \frac{1}{2} \frac{(-1)^n n!}{\frac{q}{2} \frac{q+2}{2} \frac{q+4}{2} \dots \frac{q+2n}{2}}. \end{aligned} \quad (210)$$

Ako je q negativan tak broj, koji prema (208) mora biti apsolutno veći od $2n$, možemo pisati

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2n-2k+q} \binom{n}{k} = \frac{1}{2} \frac{-n!}{\left(-\frac{q}{2}\right) \left(-\frac{q+2}{2}\right) \dots \left(-\frac{q+2n}{2}\right)} = - \frac{n! \left(-\frac{q}{2} - n + 1\right)!}{2 \left(-\frac{q}{2}\right)!} \quad (211)$$

Za sve ostale slučajeve vrijedi očito oblik

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{n-2k+q}} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^n n! \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{q}{2} + n + 1\right)}. \quad (212)$$

Ako je q pozitivan čak broj, ta se formule može pisati

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{n-2k+q}} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^n n! \left(\frac{q}{2} - 1\right)!}{2 \left(\frac{q}{2} + n\right)!}. \quad (213)$$

Ako je q pozitivan lih broj, dobijemo pomoću (204)

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{n-2k+q}} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^n 2^{2n+1} n! (q-1)! \left(\frac{q+1}{2} + n\right)!}{\frac{q-1}{2}! (q+1+2n)!} \quad (214)$$

što se naravno može izvesti izravno iz (210).

Neka je konačno q negativan lih broj, to iz (210) ili pomoću (205) iz (212) dobijemo oblik

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{n-2k+q}} \binom{n}{k} = - \frac{2^{2n+1} \left(-\frac{q-1}{2}\right)! \left[-(2n+q+1)\right]! n!}{\left[-(q-1)\right]! \left(-\frac{2n+q+1}{2}\right)!} \quad (215)$$

ako je

$$-q > 2n, \quad (216)$$

a oblik

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2^{n-2k+q}} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^{n+\frac{q-1}{2}} 2^{2n+1} \left(-\frac{q-1}{2}\right)! \left(\frac{2n+q+1}{2}\right)! n!}{\left[-(q-1)\right]! (2n+q+1)!} \quad (217)$$

ako je

$$-q < 2n, \quad (218)$$

F/ Razmatrajmo polinom

$$S(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{n+q-k}}{n+q-k} (-1)^k \binom{n}{k} \quad (219)$$

gdje je q kompleksan broj, za koji su nazivnici sume (219) različiti od nule, t.j.

$$q \neq 0, -1, -2, \dots, -n. \quad (220)$$

Analogno kao prije dobivamo:

$$S'(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} x^{n+q-k-1} = x^{q-1} (x-1)^n \quad (221)$$

$$S(1) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n+q-k} \binom{n}{k} = \int_0^1 x^{q-1} (x-1)^n dx =$$

$$= \left\{ \frac{x^q}{q} (x-1)^n \right\}_{x=0}^{x=1} - \frac{n}{q} \int_0^1 x^q (x-1)^{n-1} dx = \dots$$

$$\dots = \frac{(-1)^n n!}{q(q+1)(q+2)\dots(q+n-1)} \int_0^1 x^{q+n-1} dx =$$

$$= \frac{(-1)^n n!}{q(q+1)(q+2)\dots(q+n)} \quad (222)$$

Ako je q pozitivan cio broj možemo pisati

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n+q-k} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^n n! (q-1)!}{(q+n)!} = \frac{(-1)^n}{q \binom{q+n}{n}}. \quad (223)$$

Ako je $q < -n$ lako dobijemo

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n+q-k} \binom{n}{k} = - \frac{n! (-q-n-1)!}{(-q)!} = \frac{n!}{q \binom{-q-1}{n}}. \quad (224)$$

Ne bi bilo teško izvesti i formule za slučaj pozitivnog ili negativnog polucijelog q .

2. Uvjeti, pod kojim se primjenom operacija $\frac{1}{x_k} \frac{d}{dx_k}$ ($k=1,2,\dots,n$)
 poništava m -ta potencija sume od n varijabla x_1, x_2, \dots, x_n .

Razmatrajmo sumu od n varijabla ($n \geq 1$)

$$X = \sum_{k=1}^n x_k \quad (225)$$

Uvest ćemo nove varijable y_k jednačbama

$$x_k = \sqrt{2y_k} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (226)$$

tako da vrijedi

$$\frac{1}{x_k} \frac{d}{dx_k} = \frac{d}{dy_k} \quad (k=1,2,\dots,n) \quad (227)$$

Prema polinomnom stavku je onda m -ta potencija sume (225) ($m \geq 0$)

$$X^m = (\sqrt{2})^m \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{y_k} \right)^m = \sum \frac{(\sqrt{2})^m m!}{k_1! k_2! \dots k_n!} y_1^{\frac{k_1}{2}} y_2^{\frac{k_2}{2}} \dots y_n^{\frac{k_n}{2}}, \quad (228)$$

gdje se sumacija proteže preko svih varijacija (k_1, k_2, \dots, k_n) n -toga razreda s ponavljanjem, tvorenih iz nenegativnih cijelih brojeva, koji zadovoljavaju uvjet

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = m. \quad (229)$$

Umjesto da pitamo, pod kojim uvjetima će se m -ta potencija sume (225) poništiti primjenom operacija $\frac{1}{x_k} \frac{d}{dx_k}$ ($k=1,2,\dots,n$), možemo sad istražiti, pod kojim uvjetima će se poništiti izraz (228) primjenom operacija $\frac{d}{dy_k}$ ($k=1,2,\dots,n$).

Ustanovimo ponajprije, da se $y^{\frac{k}{2}}$ može samo onda opetovanim diferenciranjem po y poništiti, ako je eksponent cio broj, t.j. ako je k tak broj.

Pretpostavimo, da je $m < n$. Od indeksa k_1, \dots, k_n može u svakom članu izraza (228) samo njih m biti od nule različito, jer bi inače

njihova suma bila veća od \underline{m} , u protuslovlju sa (229). Nijedan član dakle ne ovisi od više nego \underline{m} varijabla. Ako primijenimo na izraz (228) bilo koju $\underline{m}+1$ različitu diferencijaciju (227), svaki je član diferenciran po barem jednoj varijabli y_k , o kojoj uopće ne ovisi, tako da moraju svi članovi, dakle cijela suma, iščeznuti. Primijenimo li, naprotiv, samo \underline{m} različitih diferencijacija (227), pa makar i po više puta, to je lako pokazati, da izraz (228) sigurno ne će iščeznuti. Budući da u sumi (228) nema dva člana, gdje bi sve potencije od y_k imale iste eksponente, a primjenom diferencijacije po nekom y_k se snižava stepen dotičnog y_k u svim članovima za isti broj jedinica, (ukoliko pri tom koji član ne otpada), to ni poslije diferencijacije nema dva člana s istim potencijama varijabla y_k . Suma može dakle samo onda iščeznuti, ako postignemo, da svi članovi pojedince iščeznu. Potražimo li onaj član, za koji su svi indeksi k_r , koji pripadaju varijablama y_r , po kojim diferenciramo, jednaki $\underline{1}$, to je jasno, da taj član ne može iščeznuti, jer nijedan od eksponentata dotičnih varijabla nije cio broj.

Prelazimo na slučaj $m \geq n$.

Neka je pri tom $\underline{m-n}$ tak broj. Onda sigurno ima članova, za koje su svi indeksi lihi, na pr.

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 1, \quad s_n = m-n+1 \quad (230)$$

u suglasnosti sa (229), pri čemu je $\underline{m-n+1}$ lih broj, jer je $\underline{m-n}$ tak broj. Kad su svi indeksi lihi, onda nijedan eksponent nije cio broj, pa dotični član, pa stoga niti cijela suma ne mogu iščeznuti.

Neka je sad $\underline{m-n}$ lih broj. U tom slučaju ne može biti članova sa istim lihim indeksima. To bi naime značilo

$$k_r \equiv 1 \pmod{2} \quad \text{za} \quad r = 1, \dots, n. \quad (231)$$

Zbrojimo li te kongruencije, slijedi

$$\sum_{r=1}^n k_r = m \equiv n \pmod{2} \quad (232)$$

ili

$$m-n \equiv 0 \pmod{2} \quad (233)$$

u protuslovlju s pretpostavkom.

Ima dakle u svakom članu barem jedan y_r s takim k_r , pa se dotični član može poništiti $\left(\frac{k_r}{2} + 1\right)$ -strukom diferencijacijom po dotičnom y_r . Primijene li se sve diferencijacije, koje su potrebne za poništavanje pojedinih članova, na cijelu sumu, to će cijela suma iščeznuti. Pita se, koji je najmanji broj diferencijacija, kojima se može postići.

Jasno je ponajprije, da treba diferencirati po svim y_r barem jednomputa. Ako naime ne bismo po nekom y_r diferencirali, mogli bismo pronaći član, u kojem bi dotični k_r bio tak, dok bi svi ostali indeksi bili lihi, pa se taj član ne bi mogao poništiti. Takovih članova ima, na pr. poput (230), gdje je sad $\frac{m-n+1}{2}$ tak broj, jer je $\frac{m-n}{2}$ lih broj. Za sve članove, koji ne sadržavaju sve y_r , dostatno je jednokratno diferenciranje po svakom y_r , jer se član sigurno poništava diferencijacijom po jednom y_r , koji ne sadržava. Razmatramo li dakle samo članove, koji sadržavaju sve y_r , to je najveći eksponent, koji neki stanoviti y_r u takvom članu može imati, jednak $\frac{m-n+1}{2}$, jer je onda dotični indeks $\frac{m-n+1}{2}$, dok ostali indeksi moraju biti barem jednaki 1, a suma im mora biti m . U takvom članu je taj eksponent $\frac{m-n+1}{2}$ ujedno i jedini, koji je cio, jer je $\frac{m-n+1}{2}$ tak broj, dok su svi ostali eksponenti jednaki $\frac{1}{2}$. Taj se dakle član može poništiti samo $\left(\frac{m-n+1}{2} + 1\right)$ -strukom diferencijacijom po dotičnom y_r . Budući da taj zaključak vrijedi analogno za svaki y_r , to vidimo, da moramo po svakom y_r diferencirati $\frac{m-n+3}{2}$ puta. Dobijemo konačno

STAVAK I.2. Da se primjenom operacija (227) poništi m -ta potencija sume (225) potrebno je i dovoljno,

A/ ako je $m < n$, da se primijeni $\frac{m+1}{2}$ različitih operacija (227), svaka jednomputa,

B/ ako je $m \geq n$, a $m-n$ lih broj, da se primijene sve operacije (227), i to svaka $\frac{m-n+3}{2}$ puta.

Ako je $m \geq n$, a $m-n$ tak broj, nemoguće je primjenom operacija (227) poništiti m -tu potenciju sume (225).

3. Formula za iteriranu operaciju $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$.

Dokazat ćemo formulu

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n f(x) = \frac{1}{x^{2n}} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} (2n-k-1)!}{2^{n-k} (n-k)! (k-1)!} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) \quad (n \geq 1). \quad (234)$$

Vidi se lako, da je formula ispravna za $n=1$. Pretpostavimo, da vrijedi za neki n i pokušajmo dokazati, da onda mora vrijediti i za $n+1$.

Izvršimo u tu svrhu na jednadžbu (234) operaciju $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$. Budući da je

$$\frac{1}{x} \frac{d}{dx} x^{k-2n} \frac{d^k}{dx^k} f(x) = -(2n-k) x^{k-2(n+1)} \frac{d^k}{dx^k} f(x) + x^{k+1-2(n+1)} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} f(x). \quad (236)$$

to dobijemo

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x) &= \frac{1}{x^{2(n+1)}} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n+1-k} (2n-k)!}{2^{n-k} (n-k)! (k-1)!} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} (2n-k-1)!}{2^{n-k} (n-k)! (k-1)!} x^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} f(x) \right\}. \quad (237) \end{aligned}$$

U ovoj jednadžbi uvodimo novi indeks sumacije za drugu sumu, stavivši

$$\bar{k} = k+1, \quad (238)$$

pa naknadno mjesto \bar{k} opet pišemo k , tako da (237) dobije oblik

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x) &= \frac{1}{x^{2(n+1)}} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n+1-k} (2n-k)!}{2^{n-k} (n-k)! (k-1)!} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) + \right. \\ &+ \left. \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^{n-k-1} (2n-k)!}{2^{n+1-k} (n+1-k)! (k-2)!} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right\}. \quad (239) \end{aligned}$$

Zbrojimo li koeficijente istih potencija u tim sumama za $2 \leq k \leq n$, slijedi:

$$\begin{aligned}
& \frac{(-1)^{n+1-k} (2n-k)!}{2^{n-k} (n-k)! (k-1)!} + \frac{(-1)^{n-k-1} (2n-k)!}{2^{n+1-k} (n+1-k)! (k-2)!} = \\
& = \frac{(-1)^{n+1-k} (2n-k)!}{2^{n+1-k} (n+1-k)! (k-1)!} [2(n+1-k) + k-1] = \\
& = \frac{(-1)^{n+1-k} [2(n+1)-k-1]!}{2^{n+1-k} (n+1-k)! (k-1)!} \quad (240)
\end{aligned}$$

Ovaj koeficijent je za $k=1$ identičan s dotičnim koeficijentom prve sume, a za $k=n+1$ s dotičnim koeficijentom druge sume, tako da možemo pisati

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x) = \frac{1}{x^{2(n+1)}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1-k} [2(n+1)-k-1]!}{2^{n+1-k} (n+1-k)! (k-1)!} x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) \quad (241)$$

a to isto se dobije, ako se u (234) indeks n povisi za jednu jedinicu. Time je dokaz formule (234) potpunom indukcijom proveden.

Stavimo li

$$f'(x) = \varphi(x) \quad (242)$$

dakle

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x) = \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{x} \varphi(x)\right) \quad (243)$$

i uvedemo u sumi (241) novi indeks sumacije

$$k_1 = k-1 \quad (244)$$

pišući naknadno opet k mjesto k_1 , dobijemo

$$\left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{x} \varphi(x)\right) = \frac{1}{x^{2n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k} (2n-k)!}{2^{n-k} (n-k)! k!} x^k \frac{d^k}{dx^k} \varphi(x) \quad (245)$$

za $n \geq 0$

4. Jedan granični prijelaz u vezi s iteriranom operacijom $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$.

Pomoću formule (234) dobijemo za cijele $n \geq 1$, $m \geq 0$

$$\begin{aligned} \frac{d^{2n+m-1}}{dx^{2n+m-1}} \left\{ x^{2n+m-1} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \right\} &= \frac{d^{2n+m-1}}{dx^{2n+m-1}} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} (2n-k-1)!}{2^{n-k} (n-k)! (k-1)!} x^{k+m-1} \frac{d^k}{dx^k} f(x) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} (2n-k-1)!}{2^{n-k} (n-k)! (k-1)!} \sum_{r=0}^{2n+m-1} \binom{2n+m-1}{r} \frac{d^r}{dx^r} x^{k+m-1} \frac{d^{2n+m-r+k-1}}{dx^{2n+m-r+k-1}} f(x) \end{aligned} \quad (246)$$

Stavimo li $x=0$, ostaju samo članovi za koje je $r=k+m-1$, dakle

$$\frac{d^{k+m-1}}{dx^{k+m-1}} x^{k+m-1} = (k+m-1)! \quad (247)$$

pa prema tome

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^{2n+m-1}}{dx^{2n+m-1}} \left\{ x^{2n+m-1} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \right\} &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} (2n-k-1)! (2n+m-1)! (k+m-1)!}{2^{n-k} (n-k)! (k-1)! (k+m-1)! (2n-k)!} \cdot \\ &\quad \cdot f^{(2n)}(0) = \\ &= f^{(2n)}(0) \cdot (2n+m-1)! \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k} (n-k)! (k-1)! (2n-k)} \end{aligned} \quad (248)$$

Uvedemo li u zadnjoj sumi novi indeks sumacije

$$\bar{k} = k-1 \quad (249)$$

i uzmemo u obzir jednadžbu (150), slijedi:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k} (n-k)! (k-1)! (2n-k)} &= \sum_{\bar{k}=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-1-\bar{k}}}{2^{n-\bar{k}+1} (n-1-\bar{k})! \bar{k}! [2(n-1)-\bar{k}+1]} = \\ &= \frac{2^{n-1} (n-1)!}{(2n-1)!} = \frac{2^n n!}{(2n)!} \end{aligned} \quad (250)$$

Prema (248) dakle vrijedi za $n \geq 1$, $m \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^{2n+m-1}}{dx^{2n+m-1}} \left\{ x^{2n+m-1} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n f(x) \right\} = (2n+m-1)! \frac{2^n n!}{(2n)!} f^{(2n)}(0) \quad (251)$$

Stavimo li $n = \bar{n}+1$ i uvedemo oznaku prema (242) i (243), pa naknadno opet pišemo \underline{n} mjesto \bar{n} , to dobijemo za $n \geq 0$, $m \geq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{d^{2n+m+1}}{dx^{2n+m+1}} \left\{ x^{2n+m+1} \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{1}{x} \varphi(x) \right) \right\} &= (2n+m+1)! \frac{2^{n+1} (n+1)!}{(2n+2)!} \varphi^{(2n+1)}(0) = \\ &= (2n+m+1)! \frac{2^n n!}{(2n+1)!} \varphi^{(2n+1)}(0) \end{aligned} \quad (252)$$

5. Svojstva diferencijalnih operatora $\frac{1}{g_k(x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k}$ i njima inverznih

integralnih operatora.

Diferencijalne i integralne operatore, koje ćemo razmotriti, primjenjivat ćemo na funkcije od $n+1$ varijabla $f(t; x_1, x_2, \dots, x_n)$, za koje pretpostavljamo, da su po tim varijablama dovoljan broj puta derivabilne.

Definiramo operatore $D_{g_k(x_k)}$ jednačbom

$$D_{g_k(x_k)} f(t; x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{g_k(x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k} f(t; x_1, \dots, x_n) \quad (k=1, 2, \dots, n), \quad (253)$$

a operatore $S_{g_k(x_k)}$ jednačbom

$$S_{g_k(x_k)} f(t; x_1, \dots, x_n) = \int_{t-X+x_k}^{x_k} g_k(y) f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) dy \quad (k=1, \dots, n) \quad (254)$$

gdje smo stavili

$$X = \sum_{k=1}^n x_k, \quad (255)$$

a $g_k(x)$ su neke povoljno zadane /dovoljan broj puta/ derivabilne funkcije, koje su od nule različite u području varijabiliteta, u kojem operiramo.

Jasno je, da će simbolično množenje tih operatora, pod kojim se razumijeva postepeno izvršivanje dotičnih operacija, zadovoljavati asocijativni zakon. Dalje je očito, da operatori $D_{g_k(x_k)}$ medju sobom komutiraju. Pokazat ćemo, da i operatori $S_{g_k(x_k)}$ medju sobom komutiraju. Prema definiciji (254) slijedi

$$\begin{aligned} & S_{g_k(x_k)} S_{g_1(x_1)} f(t; x_1, \dots, x_n) = \\ & = \int_{t-X+x_k}^{x_k} g_k(z) \left[\int_{t-X+x_k+x_1-z}^{x_1} g_1(y) f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, z, x_{k+1}, \dots, x_{l-1}, y, x_{l+1}, \dots, x_n) dy \right] dz \end{aligned}$$

Donja granica unutarnjeg integrala bila bi prema (254) $t-X+x_1$, no budući da je x_k nadomješten sa z , to mjesto X moramo pisati $X-x_k+z$.

Analogno je

$$\begin{aligned}
 & S_{g_1}(x_1) S_{g_k}(x_k) f(t; x_1, \dots, x_n) = \\
 = & \int_{t-X+x_1}^{x_1} g_1(y) \left[\int_{t-X+x_k+x_1-y}^{x_k} g_k(z) f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, z, x_{k+1}, \dots, x_{l-1}, y, x_{l+1}, \dots, x_n) dz \right] dy.
 \end{aligned} \tag{257}$$

Lako je vidjeti, da je područje dvostruke integracije (256) u koordinatnom sustavu (y, z) omeđeno trokutom s uglovima (x_1, x_k) , $(t-X+x_1, x_k)$ i $(x_1, t-X+x_k)$. To isto područje integracije vrijedi i za (257), t.j. granice integrala u (257) su upravo one, koje bismo dobili izmjenom slijeda integracija u (256), Prema tome je zaista

$$S_{g_k}(x_k) S_{g_1}(x_1) f(t; x_1, \dots, x_n) = S_{g_1}(x_1) S_{g_k}(x_k) f(t; x_1, \dots, x_n) \tag{258}$$

ili simbolički

$$S_{g_k}(x_k) S_{g_1}(x_1) = S_{g_1}(x_1) S_{g_k}(x_k) \tag{259}$$

Na temelju definicija (253) i (254) je očito, da vrijedi

$$D_{g_k}(x_k) S_{g_k}(x_k) f(t; x_1, \dots, x_n) = f(t; x_1, \dots, x_n) \tag{260}$$

ili simbolički

$$D_{g_k}(x_k) S_{g_k}(x_k) = I \tag{261}$$

ako I znači "jedinični" operator, koji reproducira funkciju.

Isti operatori, primijenjeni obratnim slijedom, daju

$$\begin{aligned}
 & S_{g_k}(x_k) D_{g_k}(x_k) f(t; x_1, \dots, x_n) = \\
 = & \int_{t-X+x_k}^{x_k} g_k(y) \frac{1}{g_k(y)} \frac{\partial}{\partial y} f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) dy = \\
 = & f(t; x_1, \dots, x_n) - f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, t-X+x_k, x_{k+1}, \dots, x_n).
 \end{aligned} \tag{262}$$

Ako dakle hoćemo, da operatori $S_{g_k(x_k)}$ i $D_{g_k(x_k)}$ za jedan stanoviti k komutiraju, mora vrijediti

$$f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, t-X+x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (263)$$

t.j. funkcija mora iščezavati, ako njezina varijabla x_k poprima vrijednost

$$t-X+x_k = t - (x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n) \quad (264)$$

ili drugim riječima, ako je

$$x_k = t - (x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n) \quad (265)$$

ili

$$t = X \quad (266)$$

Mora dakle biti

$$\left\{ f(t; x_1, \dots, x_n) \right\}_{t=X} = 0 \quad (267)$$

Ovaj je uvjet neovisan o tome, o kojem k se radi, tako da pod tim uvjetom komutira svaki operator $S_{g_k(x_k)}$ sa svojim pripadnim $D_{g_k(x_k)}$.

Jedan pogled na (254) dostaje, da se uvidi, da će taj uvjet primjerice ispunjavati svaka funkcija, koja je nastala primjenom nekog operatora $S_{g_k(x_k)}$ na funkciju, koja taj uvjet ne mora ispunjavati.

Neka je sad $k \neq 1$, onda dobijemo

$$\begin{aligned} & D_{g_1(x_1)} S_{g_k(x_k)} f(t; x_1, \dots, x_n) = \\ & = \frac{1}{g_1(x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{t-X+x_k}^{x_k} g_k(y) f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) dy = \\ & = \frac{1}{g_1(x_1)} g_k(t-X+x_k) f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, t-X+x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) + \\ & + \frac{1}{g_1(x_1)} \int_{t-X+x_k}^{x_k} g_k(y) \frac{\partial}{\partial x_1} f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) dy = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{g_1(x_1)} g_k(t-X+x_k) f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, t-X+x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) + \\ + S_{g_k(x_k)} D_{g_1(x_1)} f(t; x_1, \dots, x_n) \quad (268)$$

Ako dakle hoćemo, da $D_{g_1(x_1)}$ i $S_{g_k(x_k)}$ komutiraju, mora vrijediti ili

$$g_k(t-X+x_k) = 0, \quad (269)$$

što bi značilo ograničenje područja varijabiliteta, ili opet mora vrijediti uvjet (267).

Razmotrimo li još i operator $\frac{\partial}{\partial t}$, to je po sebi razumljivo, da komutira s operatorima $D_{g_k(x_k)}$, dok za komutiranje s operatorima $S_{g_k(x_k)}$ sasvim analognom prijetvorbom kao (268) opet dobijemo uvjet (267). Možemo dakle izreći

STAVAK I.5. Od operatora $\frac{\partial}{\partial t}$, $D_{g_k(x_k)}$ ($k=1, \dots, n$) i $S_{g_k(x_k)}$

($k=1, \dots, n$), definiranih prema (253) i (254), komutiraju bilo koja dva međusobno, ako funkcija, na koju se primjenjuju, zadovoljava uvjet (267). Taj je uvjet napose zadovoljen, ako je funkcija $f(t; x_1, \dots, x_n)$ nastala primjenom jednog operatora $S_{g_k(x_k)}$ na neku drugu funkciju $F(t; x_1, \dots, x_n)$, koja ne mora zadovoljavati uvjet (267). Prema tome u nekom operatorskom produktu sigurno komutiraju bilo koja dva susjedna od svih spomenutih operatora, ako se tik do njih na desno nalazi jedan operator $S_{g_k(x_k)}$. U svakom slučaju komutiraju operatori $\frac{\partial}{\partial t}$, $D_{g_k(x_k)}$ ($k=1, \dots, n$) međusobno i operatori $S_{g_k(x_k)}$ ($k=1, \dots, n$) međusobno.

6. Posveopćenje formule za n-struku integraciju.

Tvrdimo, da vrijedi:

$$\begin{aligned}
 S_{g_k(x_k)}^m f(t; x_1, \dots, x_n) &= \\
 &= \frac{1}{(m-1)!} \int_{t-X+x_k}^{x_k} \left[\int_y^{x_k} g_k(z) dz \right]^{m-1} g_k(y) f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) dy \\
 & \qquad \qquad \qquad (k=1, \dots, n) \qquad \qquad \qquad (270)
 \end{aligned}$$

Jednačba je očito ispravna za $m=1$, jer je onda identična sa(254).

Pretpostavimo, da je ispravna za neki $\underline{m-1}$. Diferenciramo li desnu i lijevu stranu od (270) po x_k , vidimo lako, da dobijemo istu formulu, ali za $\underline{m-1}$, a tu smo pretpostavili kao ispravnu. Derivacije lijeve i desne strane od (270) su dakle jednake. Osim toga je (270) ispravna za specijalnu vrijednost varijable x_k i to za

$$x_k = t-X+x_k = t - (x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n). \quad (271)$$

Za tu vrijednost je naime desna strana od (270) jednaka nuli. Lijevu stranu možemo shvatiti kao rezultat operacije $S_{g_k(x_k)}$ izvršene na funkciju $S_{g_k(x_k)}^{m-1} f(t; x_1, \dots, x_n)$, pa prema (254) za tu specijalnu vrijednost od x_k mora također biti jednaka nuli. Time je dokaz formule (270) potpunom indukcijom proveden.

Ako je funkcija $g_k(x_k)$ identično jednaka jedan, to operator $S_{g_k(x_k)}$ znači običnu integraciju po x_k od $t-X+x_k$ do x_k , tako da formula (270) daje:

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{t-X+x_k}^{x_k} dx_k \right)^m f(t; x_1, \dots, x_n) &= \\
 &= \frac{1}{(m-1)!} \int_{t-X+x_k}^{x_k} (x_k - y)^{m-1} f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) dy \\
 & \qquad \qquad \qquad (271)
 \end{aligned}$$

što odgovara poznatoj formuli za n-struku integraciju

$$\left(\int_c^x dx \right)^m f(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_c^x (x-y)^{m-1} f(y) dy \quad (273)$$

Specijalizirajmo sad funkcije $f(t; x_1, \dots, x_n)$ utoliko, da pretpostavimo, da te funkcije ovise samo o sumi varijabla x_1, \dots, x_n , t.j. razmatrajmo funkcije $f(t, X)$. Jednadžba (270) onda glasi:

$$S_{g_k(x_k)}^m f(t, X) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{t-X+x_k}^{x_k} \left[\int_y^{x_k} g_k(z) dz \right]^{m-1} g_k(y) f(t, X-x_k+y) dy \quad (k=1, \dots, n) \quad (274)$$

Uvedemo li nove varijable integracije

$$y = u + x_k \quad (275)$$

$$z = v + x_k, \quad (276)$$

to (274) možemo pisati u obliku

$$S_{g_k(x_k)}^m f(t, X) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^{t-X} \left[\int_0^u g_k(v+x_k) dv \right]^{m-1} g_k(u+x_k) f(t, u+X) du \quad (277)$$

Označimo

$$F_k(x) = \left[\int_0^x g_k(v+x_k) dv \right]^{m_k-1} g_k(x+x_k) \quad (k=1, \dots, n) \quad (278)$$

i definirajmo funkciju $\Phi_s(x)$, nastalu s-strukim komponiranjem ($s \leq n$) u smislu jednadžbe (112):

$$\Phi_s(x) = F_1(x) * F_2(x) * \dots * F_s(x) \quad (279)$$

Tvrdimo, da vrijedi

$$\begin{aligned} S_{g_s(x_s)}^{m_s} S_{g_{s-1}(x_{s-1})}^{m_{s-1}} \dots S_{g_1(x_1)}^{m_1} f(t, X) &= \left(\prod_{r=1}^s S_{g_r(x_r)}^{m_r} \right) f(t, X) = \\ &= \frac{(-1)^{\sum_{r=1}^s m_r}}{\prod_{r=1}^s (m_r-1)!} \int_0^{t-X} \Phi_s(y) f(t, y+X) dy \quad (280) \end{aligned}$$

Ova je formula ispravna za $s=1$. U tom slučaju kompozicija (279) ima samo jedan faktor, tako da je

$$\Phi_1(x) = F_1(x). \quad (281)$$

Pretpostavimo, da (280) vrijedi za neki s i izvršimo na obje strane operaciju $S_{s+1}^{m_{s+1}}$ upotrijebivši formulu (277) i oznaku (278):

$$\begin{aligned} & \prod_{r=1}^{s+1} S_{g_r}^{m_r}(x_r) f(t, X) = \\ & = \frac{(-1)^{s+1}}{\prod_{r=1}^{s+1} (m_r - 1)!} \int_0^{t-X} \left\{ F_{s+1}(u) \int_0^{t-X-u} \Phi_s(y) f(t, y+u+X) dy \right\} du. \end{aligned} \quad (282)$$

Uvedimo mjesto varijable integracije y varijablu z :

$$z = y + u. \quad (283)$$

Dobijemo

$$\left(\prod_{r=1}^{s+1} S_{g_r}^{m_r}(x_r) \right) f(t, X) = \frac{(-1)^{s+1}}{\prod_{r=1}^{s+1} (m_r - 1)!} \int_0^{t-X} \left\{ F_{s+1}(u) \int_u^{t-X} \Phi_s(z-u) f(t, z+X) dz \right\} du. \quad (284)$$

Područje dvostrake integracije je u ravnini (z, u) trokut s uglovima $(0, 0)$, $(t-X, 0)$, $(t-X, t-X)$. Izmjena slijeda integracija daje

$$\left(\prod_{r=1}^{s+1} S_{g_r}^{m_r}(x_r) \right) f(t, X) = \frac{(-1)^{s+1}}{\prod_{r=1}^{s+1} (m_r - 1)!} \int_0^{t-X} f(t, z+X) \left\{ \int_0^z F_{s+1}(u) \Phi_s(z-u) du \right\} dz \quad (285)$$

Budući da je

$$\int_0^z F_{s+1}(u) \phi_s(z-u) du = F_{s+1}(z) * \phi_s(z) = \phi_{s+1}(z), \quad (286)$$

to je jednačba (285) identična s formulom (280), ako u potonjoj nadomjestimo \underline{s} sa $\underline{s+1}$. Time je dokaz formule (280) potpunom indukcijom proveden.

Stavimo li u smislu (272)

$$\begin{aligned} f(t; x_1, \dots, x_n) &= \left(\int_{t-X+x_k}^{x_k} dx_k \right)^{q+1} \varphi(t; x_1, \dots, x_n) = \\ &= \frac{1}{q!} \int_{t-X+x_k}^{x_k} (x_k-y)^q \varphi(t; x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) dy, \quad (287) \end{aligned}$$

to očitno vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^r}{\partial x_k^r} f(t; x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{1}{(q-r)!} \int_{t-X+x_k}^{x_k} (x_k-y)^{q-r} \varphi(t; x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) dy \quad (r \leq q) \quad (288) \end{aligned}$$

i

$$\frac{\partial^{q+1}}{\partial x_k^{q+1}} f(t; x_1, \dots, x_n) = \varphi(t; x_1, \dots, x_n). \quad (289)$$

Prema (288) mora biti

$$\frac{\partial^r}{\partial x_k^r} f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, t-X+x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0 \quad (r \leq q) \quad (290)$$

ili

$$\left\{ \frac{\partial^r}{\partial x_k^r} f(t; x_1, \dots, x_n) \right\}_{t=X} = 0 \quad (r \leq q) \quad (290a)$$

Stavimo sad u formuli (270)

$$g_k(x_k) = x_k \quad (291)$$

i prema tome

$$\int_y^{x_k} g_k(z) dz = \int_y^{x_k} z dz = \frac{x_k^2 - y^2}{2} \quad (292)$$

Uvrstimo (291), (292) i (287) u (270), pa provedemo q+1 puta parcijalnu integraciju uzevši u obzir (290), to konačno dobijemo:

$$\begin{aligned} S_{x_k}^m f(t; x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{1}{m! 2^m} \int_{t-X+x_k}^{x_k} \left[\left(\int_{x_k}^y dy \right)^q (x_k^2 - y^2)^m \right] \frac{d^{q+1}}{dy^{q+1}} f(t; x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) dy \quad (293) \end{aligned}$$

ili u smislu (273) i (289)

$$\begin{aligned} S_{x_k}^m f(t; x_1, \dots, x_n) &= \\ &= \frac{1}{m! (q-1)! 2^m} \int_{t-X+x_k}^{x_k} \left[\int_{x_k}^y (y-z)^{q-1} (x_k^2 - z^2)^m dz \right] \varphi(t; x_1, \dots, x_{k-1}, y, x_{k+1}, \dots, x_n) dy \quad (294) \end{aligned}$$

Da izračunamo nutarnji integral, razvijemo oba faktora integranda po binomnom poučku:

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^y (y-z)^{q-1} (x_k^2 - z^2)^m dz &= \\ \int_{x_k}^y \sum_{s=0}^{q-1} y^s z^{q-s-1} (-1)^{q-s-1} \binom{q-1}{s} \cdot \sum_{r=0}^m x_k^{2r} z^{2m-2r} (-1)^{m-r} \binom{m}{r} dz &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{x_k}^y \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{r=0}^m (-1)^{m+q-r-s-1} \binom{m}{r} \binom{q-1}{s} x_k^{2r} z^{2m-2r+q-s-1} y^s dz = \\
&= \left\{ \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{r=0}^m (-1)^{m+q-r-s-1} \binom{m}{r} \binom{q-1}{s} \frac{1}{2m-2r+q-s} x_k^{2r} z^{2m-2r+q-s} y^s \right\}_{z=x_k}^{z=y} = \\
&= \sum_{r=0}^m \left[(-1)^{m+q-r-1} \binom{m}{r} x_k^{2r} y^{2m-2r+q} \cdot \sum_{s=0}^{q-1} (-1)^s \frac{1}{2m-2r+q-s} \binom{q-1}{s} \right] - \\
&- \sum_{s=0}^{q-1} \left[(-1)^{m+q-s-1} \binom{q-1}{s} x_k^{2m+q-s} y^s \cdot \sum_{r=0}^m (-1)^r \frac{1}{2m-2r+q-s} \binom{m}{r} \right]. \quad (295)
\end{aligned}$$

Pišemo li u (212) $\underline{q-s}$ mjesto \underline{q} , dobijemo, ako još \underline{n} nadomjestimo sa \underline{m} :

$$\sum_{r=0}^m \frac{(-1)^r}{2m-2r+q-s} \binom{m}{r} = \frac{(-1)^m m! \Gamma\left(\frac{q-s}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{q-s}{2} + m + 1\right)}. \quad (296)$$

U (223) nadomjestimo \underline{q} sa $\underline{2m-2r+1}$, a \underline{n} sa $\underline{q-1}$, pa dobijemo

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=0}^{q-1} \frac{(-1)^s}{2m-2r+q-s} \binom{q-1}{s} = \frac{(-1)^{q-1} (q-1)! (2m-2r)!}{(2m-2r+q)!} = \\
&= \frac{(-1)^{q-1} q! (2m-2r)!}{q (2m-2r+q)!} = \frac{(-1)^{q-1}}{q (2m-2r+q)}. \quad (297)
\end{aligned}$$

Uvrstimo li (296) i (297) u (295), dobijemo za nutarnji integral od (294) izraz:

$$\begin{aligned}
&\int_{x_k}^y (y-z)^{q-1} (x_k^2 - z^2)^m dz = \sum_{r=0}^m \frac{(-1)^{m-r} \binom{m}{r}}{q \binom{2m-2r+q}{q}} x_k^{2r} y^{2m-2r+q} + \\
&+ \sum_{s=0}^{q-1} (-1)^{q-s} \frac{\binom{q-1}{s} m! \Gamma\left(\frac{q-s}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{q-s}{2} + m + 1\right)} x_k^{2m+q-s} y^s. \quad (298)
\end{aligned}$$

Uvedemo li u prvoj sumi novi indeks sumacije

$$s = m-r \quad (299)$$

i izmijenimo slijed suma, to dobijemo

$$\begin{aligned} & \int_{x_k}^y (y-z)^{q-1} (x_k^2 - z^2)^m dz = \\ & = \sum_{s=0}^{q-1} \frac{(-1)^{q-s} m! \binom{q-1}{s} \Gamma\left(\frac{q-s}{2}\right)}{2 \Gamma\left(\frac{q-s}{2} + m + 1\right)} x_k^{2m+q-s} y^s + \\ & + \sum_{s=0}^m \frac{(-1)^s \binom{m}{s}}{q \binom{q+2s}{q}} x_k^{2m-2s} y^{q+2s}. \end{aligned} \quad (300)$$

Time je izraz poredan po potencijama od y .

Izvest ćemo sad na temelju (280) još jednu formulu. U tu svrhu ponajprije primjećujemo, da se (280) može još nešto posveopćiti utoliko, što nije potrebno, da se razni operatori $S_{g_k}(x_k)$ odnose na razne varijable x_k , već se može i na istu varijablu x_k odnositi više raznih operatora s raznim eksponentima, na pr. $S_{g_{1,k}}^{m_1,k}(x_k)$, $S_{g_{2,k}}^{m_2,k}(x_k)$ i t.d. Dokaz tako posveopćene formule ostaje isti, pri čemu će sad za istu varijablu biti više funkcija $F_{1,k}(x)$, $F_{2,k}(x)$ i t.d., definirane prema (278), koje sve treba komponirati prema (279).

Razumijevamo pod $j(x_k)$ funkciju, koja je identično jednaka jedan, dakle

$$j(x_k) \equiv 1. \quad (301)$$

Prema (254) i (274) onda možemo pisati

$$S_j^{q+1}(x_k) \varphi(t, X) = \left(\int_{t-X+x_k}^{x_k} dx_k \right)^{q+1} \varphi(t, X) = \frac{1}{q!} \int_{t-X+x_k}^{x_k} (x_k - y)^q \varphi(t, X - x_k + y) dy \quad (302)$$

Uvedemo li u posljednjem integralu novu varijablu integracije

$$z = X - x_k + y, \quad (303)$$

dobijemo

$$S_{j(x_k)}^{q+1} \varphi(t, X) = \frac{1}{q!} \int_t^X (X-z)^q \varphi(t, z) dz. \quad (304)$$

Vidimo, da rezultat opet ovisi samo o sumi \underline{X} varijabla x_1, \dots, x_n , pa je svejedno, po kojoj varijabli x_k smo proveli n -struku integraciju.

Možemo dakle pisati

$$f(t, X) = S_{j(x_k)}^{q+1} \varphi(t, X) = \frac{1}{q!} \int_t^X (X-z)^q \varphi(t, z) dz = \frac{(-1)^{q+1}}{q!} \int_X^t (z-X)^q \varphi(t, z) dz \quad (305)$$

Izvršimo li na ovu funkciju operacije jednačbe (280), dobijemo

$$\begin{aligned} \left(\prod_{r=1}^s S_{g_r(x_r)}^{m_r} \right) f(t, X) &= \left(\prod_{r=1}^s S_{g_r(x_r)}^{m_r} \right) \cdot S_{j(x_k)}^{q+1} \varphi(t, X) = \\ &= \frac{(-1)^{q+1}}{q! \prod_{r=1}^s (m_r - 1)!} \int_0^{t-X} \phi(y) \varphi(t, y+X) dy \end{aligned} \quad (306)$$

gdje je

$$\phi(x) = F_1(x) * \dots * F_s(x) * H(x), \quad (307)$$

a $H(x)$ je obzirom na (301) i (278) definiran sa

$$H(x) = \left[\int_0^x j(v+x_k) dv \right]^q j(x+x_k) = x^q. \quad (308)$$

Pretpostavimo još, da je

$$g_r(x_r) = x_r \quad (r=1, \dots, s) \quad (309)$$

i stavimo

$$x_1 = x_2 = \dots = x_s = 0. \quad (310)$$

Moglo bi se posumnjati, da li je limes izraza (306), kad varijable (310) konvergiraju prema nuli, jednak vrijednosti, koja se dobije, ako se u gornjoj granici integrala u (306) i pod znakom integracije te varijable stave jednake nuli, i da li je svejedno, kojim slijedom te varijable konvergiraju prema nuli. Ako međjutim uočimo, da se te varijable iz funkcije $\varphi(t, y+X)$, za koju smo pretpostavili samo integrabilnost, daju ukloniti supstitucijom

$$y+X = z, \quad (311)$$

koja daje

$$\int_0^{t-X} \varphi(y) \varphi(t, y+X) dy = \int_X^t \varphi(z-X) \varphi(t, z) dz \quad (312)$$

i ako uzmemo u obzir, da ^{je} prema (301), (309), (278) i (307) $\varphi(z-X)$ cijela racionalna funkcija varijabla (310), to je jasno, da integrand u (312) ne može imati takvih singulariteta, koje bi stavili u pitanje naš postupak.

Umjesto da varijable (310) stavimo jednake nuli u gotovoj funkciji $\varphi(y)$ u (306), možemo to, s istih razloga, učiniti već u funkcijama $F_1(x), \dots, F_s(x)$ i $H(x)$, iz kojih je $\varphi(x)$ komponiran, a u tim samim funkcijama to možemo učiniti već u integrandu prije izvršene integracije. Dobijemo tako

$$\left[F_k(x) \right]_{x_1=\dots=x_s=0} = \left[\int_0^x v dv \right]^{m_k-1} x = \frac{x^{2m_k-1}}{2^{m_k-1}} \quad (313)$$

$$(k = 1, \dots, s)$$

dok $H(x)$ ostaje nepromijenjen, jer ne ovisi ni o kojoj od varijabla (310):

$$\left[H(x) \right]_{x_1=\dots=x_s=0} = x^q. \quad (314)$$

Vidimo, da bismo isto takve funkcije $F_k(x)$ i $H(x)$ dobili, da smo umjesto operacije $S_{x_1}^{m_1} \dots S_{x_s}^{m_s} S_j^{q+1}$ izvršili operaciju

$$\frac{1}{2^{m_1+\dots+m_s-s}} S_{j(x_k)}^{2m_1} \dots S_{j(x_k)}^{2m_s} S_{j(x_k)}^{q+1} \quad (315)$$

Medjutim, ova operacija bi dođuše dala ispravne $F_k(x)$ i $H(x)$, ali bi u smislu jednađbe (280) dala pred integralom faktor

$$\frac{(-1)^{2m_1+\dots+2m_s+q+1}}{q! \prod_{r=1}^s (2m_r-1)!} = \frac{(-1)^{q+1}}{q! \prod_{r=1}^s (2m_r-1)!} \quad (316)$$

umjesto faktora pred integralom u (306). Da to korigiramo, moramo dakle umjesto operacije (315) izvršiti operaciju

$$\frac{(-1)^{\sum_{r=1}^s m_r} \prod_{r=1}^s (2m_r-1)!}{2^{m_1+\dots+m_s-s} \prod_{r=1}^s (m_r-1)!} S_{j(x_k)}^{2m_1} \dots S_{j(x_k)}^{2m_s} S_{j(x_k)}^{q+1} \quad (317)$$

Osim toga treba i u \underline{X} staviti varijable (310) jednake nuli, t.j. ako označimo

$$(X)_{x_1=\dots=x_s=0} = X_0 = x_{s+1}+\dots+x_n, \quad (318)$$

treba nadomjestiti \underline{X} sa \underline{X}_0 . Izvršimo li dakle operaciju (317) na funkciju $\varphi(t, X_0)$, dobili smo željeni rezultat. No budući da je

$$S_{j(x_k)}^{2m_1} \dots S_{j(x_k)}^{2m_s} S_{j(x_k)}^{q+1} = S_{j(x_k)}^{2m_1+\dots+2m_s+q+1}, \quad (319)$$

a prema (280) bit će

$$S_{j(x_k)}^{2m_1+\dots+2m_s+q+1} \varphi(t, X_0) = \frac{(-1)^{2m_1+\dots+2m_s+q+1}}{(2m_1+\dots+2m_s+q)!} \int_0^{t-X_0} \frac{1}{\Phi(y)} \varphi(t, y+X_0) dy =$$

$$= \frac{(-1)^{q+1}}{(2m_1 + \dots + 2m_s + q)!} \int_{X_0}^t \bar{\Phi}(z - X_0) \varphi(t, z) dz, \quad (320)$$

gdje je prema (279), (278), (301)

$$\bar{\Phi}(x) = \bar{H}(x) = x^{2m_1 + \dots + 2m_s + q}, \quad (321)$$

to dobijemo konačno obzirom na (305), (306), (309) i (310):

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{r=1}^s S_{X_r}^{m_r} \right\}_X \int_X^t (z-X)^q \varphi(t, z) dz \Big|_{x_1 = \dots = x_s = 0} = \\ & = \frac{q!}{(2m_1 + \dots + 2m_s + q)!} \prod_{r=1}^s \frac{(-1)^{m_r} (2m_r - 1)!}{2^{m_r - 1} (m_r - 1)!} \int_{X_0}^t (z - X_0)^{2m_1 + \dots + 2m_s + q} \varphi(t, z) dz \end{aligned} \quad (322)$$

Na temelju jednadžbe (204) može se ovo pisati i u obliku

$$\begin{aligned} & \left\{ \prod_{r=1}^s S_{X_r}^{m_r} \right\}_X \int_X^t (z-X)^q \varphi(t, z) dz \Big|_{x_1 = \dots = x_s = 0} = \\ & = \frac{q!}{(2m_1 + \dots + 2m_s + q)!} \left(\prod_{r=1}^s \frac{(-1)^{m_r} 2^{m_r} \Gamma(m_r + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \right) \int_{X_0}^t (z - X_0)^{2m_1 + \dots + 2m_s + q} \varphi(t, z) dz. \end{aligned} \quad (322a)$$

Ovaj oblik ima prednost, da su za $\underline{m_r}$ dopuštene nesamo cijele pozitivne vrijednosti kao u (322), već i vrijednost nula, kako se lako razabire pomoću relacije $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

7. Odredjivanje limesa sume pomoću primjene de l'Hopitalovog pravila na pojedine članove, koji pojedince ne moraju imati limes.

Dokazujemo

STAVAK I.7. Neka je

$$F(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x) \quad (323)$$

i neka su $F(x)$, $(x-a)^m f_1(x)$, \dots , $(x-a)^m f_n(x)$ funkcije, koje su u nekoj točki $x=a$ i njezinoj okolini kontinuirano derivabilne do m -toga reda, dok funkcije $f_1(x)$, \dots , $f_n(x)$ to u točki $x=a$ ne moraju biti. Onda vrijedi:

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a) = \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^m f_1(x)] \right\}_{x=a} + \dots + \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^m f_n(x)] \right\}_{x=a} \quad (324)$$

Pomnožimo i razdijelimo jednadžbu (323) sa $(x-a)^m$:

$$\frac{(x-a)^m F(x)}{(x-a)^m} = \frac{(x-a)^m f_1(x)}{(x-a)^m} + \dots + \frac{(x-a)^m f_n(x)}{(x-a)^m} \quad (325)$$

Lijeva strana ima za $x=a$ neodređeni oblik $\frac{0}{0}$, pa je prema de l'Hopitalovom pravilu

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^m F(x)}{(x-a)^m} &= F(a) = \frac{\left\{ \frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^m F(x)] \right\}_{x=a}}{\left[\frac{d^m}{dx^m} (x-a)^m \right]_{x=a}} = \\ &= \frac{\left\{ \frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^m F(x)] \right\}_{x=a}}{m!} \end{aligned} \quad (326)$$

No budući da je

$$\frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^m F(x)] = \frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^m f_1(x)] + \dots + \frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^m f_n(x)] \quad (327)$$

i budući da prema pretpostavkama svaki član desne strane od (327) ima limes za $x \rightarrow a$, to je time jednačba (324) dokazana.

Vidimo, da se na pojedine članove desne strane od (325) može primijeniti de l'Hopitalovo pravilo, kao da se radi o neodređenim oblicima $\frac{0}{0}$, premda brojnici ne moraju biti jednaki nuli i premda same funkcije $f_1(x), \dots, f_n(x)$ ne moraju imati konačan limes za $x \rightarrow a$.

Stavak vrijedi i za funkcije kompleksne varijable z . U tom slučaju će se naravno raditi o analitičnim funkcijama, tako da funkcije $f_1(z), \dots, f_n(z)$ mogu u točki $z=a$ imati polove do najviše m -toga reda.

Kao primjer uzmimo identitet

$$cx + d = \frac{(2c-2)x^3 + 3}{x^2} + \frac{2x^3 + 2dx^2 - 2x - 3}{x^2} + \frac{2cx^2 - 4dx + 3}{x} - \frac{3cx^2 - 3dx + 1}{x} \quad (328)$$

gdje smo dakle stavili

$$F(x) = cx + d \quad (329)$$

$$f_1(x) = \frac{(2c-2)x^3 + 3}{x^2} \quad (330)$$

$$f_2(x) = \frac{2x^3 + 2dx^2 - 2x - 3}{x^2} \quad (331)$$

$$f_3(x) = \frac{2cx^2 - 4dx + 3}{x} \quad (332)$$

$$f_4(x) = -\frac{3cx^2 - 3dx + 1}{x} \quad (333)$$

Odredimo limes za $x \rightarrow a=0$. Lijeva strana daje

$$\lim_{x \rightarrow a} (cx+d) = d \quad (334)$$

Primijenimo dokazani stavak na desnu stranu. Imamo $n=4$, $a=0$, $m=2$,

$$x^2 f_1(x) = (2c-2)x^3 + 3 \quad (335)$$

$$x^2 f_2(x) = 2x^3 + 2dx^2 - 2x - 3 \quad (336)$$

$$x^2 f_3(x) = 2cx^3 - 4dx^2 + 3x \quad (337)$$

$$x^2 f_4(x) = -3cx^3 + 3dx^2 - x \quad (338)$$

i prema (324)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (cx+d) &= \frac{[6(2c-2)x]_{x=0}}{2!} + \frac{[12x+4d]_{x=0}}{2!} + \frac{[12cx-8d]_{x=0}}{2!} + \\ &+ \frac{[-18cx+6d]_{x=0}}{2!} = 0 + 2d - 4d + 3d = d \quad (339) \end{aligned}$$

u skladu sa (334).

II. D I ORazne relacije između
Besselovih funkcija1. Nekoliko temeljnih relacija između Besselovih funkcija.

Ponavljamo definiciju (108) funkcija $\Lambda_n(z)$ proširujući je na slučaj, gdje n ne mora biti cio pozitivan broj:

$$\Lambda_n(z) = \Gamma(n+1) \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{r! \Gamma(n+r+1)} \left(\frac{iz}{2}\right)^{2r}. \quad (340)$$

Is poznatih relacija*)

$$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z) \quad (341)$$

$$\frac{d}{dz} \left\{ z^{-n} J_n(z) \right\} = -z^{-n} J_{n+1}(z) \quad (342)$$

Iako je uz pomoć (340) izvesti nekoliko relacija za funkcije $\Lambda_n(z)$:

$$\Lambda_{n+1}(cz) = \frac{4n(n+1)}{c^2 z^2} \left[\Lambda_n(cz) - \Lambda_{n-1}(cz) \right] \quad (343)$$

$$\Lambda_{n+1}(c\sqrt{f(z)}) = \frac{4n(n+1)}{c^2 f(z)} \left[\Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) - \Lambda_{n-1}(c\sqrt{f(z)}) \right] \quad (344)$$

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(cz) = -\frac{c^2 z}{2(n+1)} \Lambda_{n+1}(cz) \quad (345)$$

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) = -\frac{c^2}{4(n+1)} \frac{df(z)}{dz} \Lambda_{n+1}(c\sqrt{f(z)}) \quad (346)$$

*) Gray, Mathews and MacRobert, A treatise on Bessel functions, Macmillan and Co., London 1931, str.16.

Iz (345) i (343) slijedi:

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(cz) = - \frac{2n}{z} \left[\Lambda_n(cz) - \Lambda_{n-1}(cz) \right] \quad (347)$$

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) = - \frac{n f'(z)}{f(z)} \left[\Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) - \Lambda_{n-1}(c\sqrt{f(z)}) \right]. \quad (348)$$

2. Opća relacija između triju Besselovih funkcija, čiji se
indeksi razlikuju za cijele brojeve. *)

Neka su zasad a, b, c tri cijela broja, koja zadovoljavaju
uvjet

$$a > b > c \geq 0 . \quad (349)$$

Tvrdimo, da onda vrijedi relacija

$$A_{b,c} J_a(z) - A_{a,c} J_b(z) + A_{a,b} J_c(z) = 0 \quad (350)$$

gdje znači

$$A_{b,c} = \sum_{w=0}^{\left\lfloor \frac{b-c-1}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^w (b-c-w-1)! (b-w-1)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{b-c-2w-1} w! (b-c-2w-1)! (c+w)!} \quad (351)$$

$$A_{a,c} = \sum_{w=0}^{\left\lfloor \frac{a-c-1}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^w (a-c-w-1)! (a-w-1)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{a-c-2w-1} w! (a-c-2w-1)! (c+w)!} \quad (352)$$

$$A_{a,b} = \sum_{w=0}^{\left\lfloor \frac{a-b-1}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^w (a-b-w-1)! (a-w-1)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{a-b-2w-1} w! (a-b-2w-1)! (b+w)!} \quad (353)$$

Indeksi koeficijenata A ukazuju na to, da je koeficijent svake Besselove funkcije u (350) ovisan samo o indeksima ostalih dviju Besselovih funkcija. Izrazi u uglatim zagradama, kao gornje granice suma, uvijek znače najveći cijeli broj, koji nije veći od broja u zagradi.

Da formula (350) dobije više simetrije, uzet ćemo sada, da su a, b, c tri različita pozitivna cijela broja, od kojih jedan smije biti jednak nuli, ali koji ne moraju biti poredani po veličini prema (349). Stavimo dalje

$$p = |b-c| , \quad q = |c-a| , \quad r = |a-b| . \quad (354)$$

*) Usporedi: Dodatak 1 i 2 na kraju radnje.

Onda vrijedi:

$$M_{b,c} J_a(z) + M_{c,a} J_b(z) + M_{a,b} J_c(z) = 0 \quad (355)$$

gdje je

$$M_{b,c} = \operatorname{sgn}(b-c) \sum_{w=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (p-w-1)! \left(\frac{b+c+p}{2} - w-1\right)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{p-2w-1} w! (p-2w-1)! \left(\frac{b+c-p}{2} + w\right)!} \quad (356)$$

$$M_{c,a} = \operatorname{sgn}(c-a) \sum_{w=0}^{\left[\frac{q-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (q-w-1)! \left(\frac{c+a+q}{2} - w-1\right)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{q-2w-1} w! (q-2w-1)! \left(\frac{c+a-q}{2} + w\right)!} \quad (357)$$

$$M_{a,b} = \operatorname{sgn}(a-b) \sum_{w=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (r-w-1)! \left(\frac{a+b+r}{2} - w-1\right)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{r-2w-1} w! (r-2w-1)! \left(\frac{a+b-r}{2} + w\right)!} \quad (358)$$

Ako vrijedi uvjet (349), to je jednađžba (355) identična sa (350). No budući da je jednađžba (355) s vrijednostima (356), (357), (358) invarijantna obzirom na povoljne (nesamo ciklične) zamjene između a, b, c , o čemu je lako uvjeriti se, to ona mora vrijediti općenito, t.j. bez obzira na uvjet (349), ako je ispravna jednađžba (350).

Da skiciramo dokaz jednađžbe (350) polazimo od rekurzione jednađžbe Besselovih funkcija (341), koju pišemo u obliku

$$J_{b+1}(z) - \frac{b}{\frac{z}{2}} J_b(z) + J_{b-1}(z) = 0 \quad (359)$$

Lako se vidi, da je (359) specijalan slučaj od (350), t.j. da vrijedi

$$A_{b,b-1} J_{b+1}(z) - A_{b+1,b-1} J_b(z) + A_{b+1,b} J_{b-1}(z) = 0 \quad (360)$$

Dalje se na temelju (359) lako izračuna, da vrijede jednađžbe

$$J_{b+2}(z) - \left[\frac{b(b+1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} - 1 \right] J_b(z) + \frac{b+1}{\frac{z}{2}} J_{b-1}(z) = 0 \quad (361)$$

$$\frac{b-1}{\frac{z}{2}} J_{b+1}(z) - \left[\frac{b(b-1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} - 1 \right] J_b(z) + J_{b-2}(z) = 0 \quad (362)$$

$$\frac{b-1}{\frac{z}{2}} J_{b+2}(z) - \left[\frac{(b+1)b(b-1)}{\left(\frac{z}{2}\right)^2} - \frac{2b}{\frac{z}{2}} \right] J_b(z) + \frac{b+1}{\frac{z}{2}} J_{b-2}(z) = 0. \quad (363)$$

I te su jednačbe specijalni slučajevi od (350), t.j. vrijedi:

$$A_{b,b-1} J_{b+2}(z) - A_{b+2,b-1} J_b(z) + A_{b+2,b} J_{b-1}(z) = 0 \quad (364)$$

$$A_{b,b-2} J_{b+1}(z) - A_{b+1,b-2} J_b(z) + A_{b+1,b} J_{b-2}(z) = 0 \quad (365)$$

$$A_{b,b-2} J_{b+2}(z) - A_{b+2,b-2} J_b(z) + A_{b+2,b} J_{b-2}(z) = 0. \quad (366)$$

Na temelju jednačaba (360), (364), (365), (366) provest ćemo dokaz relacije (350) potpunom indukcijom.

Pretpostavimo, da za neki $s \geq 1$ vrijede jednačbe

$$A_{b,b-1} J_{b+s}(z) - A_{b+s,b-1} J_b(z) + A_{b+s,b} J_{b-1}(z) = 0 \quad (367)$$

$$A_{b,b-1} J_{b+s+1}(z) - A_{b+s+1,b-1} J_b(z) + A_{b+s+1,b} J_{b-1}(z) = 0. \quad (368)$$

Za $s=1$ su te jednačbe identične sa (360), (364) i prema tome ispravne. Dokažemo li, da iz njih slijedi

$$A_{b,b-1} J_{b+s+2}(z) - A_{b+s+2,b-1} J_b(z) + A_{b+s+2,b} J_{b-1}(z) = 0, \quad (369)$$

to smo time dokazali potpunom indukcijom, da vrijedi (367) za svako $s \geq 1$.

Iz (360) slijedi

$$J_{b+s+2}(z) - \frac{b+s+1}{z} J_{b+s+1}(z) + J_{b+s}(z) = 0. \quad (370)$$

Eliminacija veličine $J_{b+s}(z)$ i $J_{b+s+1}(z)$ iz (367), (368), (370) daje

$$\begin{aligned} A_{b,b-1} J_{b+s+2}(z) - \left(\frac{b+s+1}{z} A_{b+s+1,b-1} - A_{b+s,b-1} \right) J_b(z) + \\ + \left(\frac{b+s+1}{z} A_{b+s+1,b} - A_{b+s,b} \right) J_{b-1}(z) = 0. \end{aligned} \quad (371)$$

Na temelju (351) daje jednostavan račun, da vrijedi

$$\frac{b+s+1}{z} A_{b+s+1,b-1} - A_{b+s,b-1} = A_{b+s+2,b-1}. \quad (372)$$

Kod provedbe ove verifikacije treba na to paziti, da izraz u uglatoj zagradi (gornja granica sume) može biti cio ili polucio.

Ako u (372) pišemo b+1 umjesto b i s-1 umjesto s, dobijemo

$$\frac{b+s+1}{z} A_{b+s+1,b} - A_{b+s,b} = A_{b+s+2,b-1}. \quad (373)$$

Uvrstimo li (372) i (373) u (371), dobijemo (369), pa smo time dokazali, da (367) vrijedi za svaki $s \geq 1$.

Pretpostavimo dalje, da za neki $s \geq 1$ vrijede jednadžbe

$$A_{b,b-2} J_{b+s}(z) - A_{b+s,b-2} J_b(z) + A_{b+s,b} J_{b-2}(z) = 0 \quad (374)$$

$$A_{b,b-2} J_{b+s+1}(z) - A_{b+s+1,b-2} J_b(z) + A_{b+s+1,b} J_{b-2}(z) = 0. \quad (375)$$

Za $s=1$ ove su jednadžbe identične sa (365), (366) i prema tome ispravne. Moramo opet pokazati, da se može provesti povišenje od s.

Eliminiramo iz (374), (375), (370) veličine $J_{b+s}(z)$ i $J_{b+s+1}(z)$ i dobijemo

$$A_{b,b-2} J_{b+s+2}(z) - \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} A_{b+s+1,b-2} - A_{b+s,b-2}\right) J_b(z) + \\ + \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} A_{b+s+1,b} - A_{b+s,b}\right) J_{b-2}(z) = 0 \quad (376)$$

Ako u (372) pišemo b-1 umjesto b i s+1 umjesto s, slijedi

$$\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} A_{b+s+1,b-2} - A_{b+s,b-2} = A_{b+s+2,b-2} \quad (377)$$

Uvrstimo (377) i (373) u (376) i dobijemo

$$A_{b,b-2} J_{b+s+2}(z) - A_{b+s+2,b-2} J_b(z) + A_{b+s+2,b} J_{b-2}(z) = 0 \quad (378)$$

Povišenje od s je time provedeno, pa je time dokazano, da jednačba (374) vrijedi za svaki $s \geq 1$.

Pretpostavimo sad, da za $1 \leq t \leq b-2$ vrijede jednačbe

$$A_{b,b-t} J_{b+s}(z) - A_{b+s,b-t} J_b(z) + A_{b+s,b} J_{b-t}(z) = 0 \quad (379)$$

$$A_{b,b-t-1} J_{b+s}(z) - A_{b+s,b-t-1} J_b(z) + A_{b+s,b} J_{b-t-1}(z) = 0 \quad (380)$$

Za $t=1$ te su jednačbe identične sa (367) i (374), koje smo već dokazali. Treba pokazati, da je moguće povišenje od t.

Iz (360) slijedi

$$J_{b-t}(z) - \frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} J_{b-t-1}(z) + J_{b-t-2}(z) = 0 \quad (381)$$

Eliminacija veličina $J_{b-t}(z)$ i $J_{b-t-1}(z)$ iz (379),(380),(381) daje

$$\left(\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} A_{b,b-t-1} - A_{b,b-t}\right) J_{b+s}(z) - \\ - \left(\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} A_{b+s,b-t-1} - A_{b+s,b-t}\right) J_b(z) + A_{b+s,b} J_{b-t-2}(z) = 0 \quad (382)$$

Analogno kao kod (372) može se na temelju (351) računom provjeriti, da vrijedi

$$\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} A_{b,b-t-1} - A_{b,b-t} = A_{b,b-t-2} \quad (383)$$

Dalje, ako pišemo $b+s$ mjesto b i $t+s$ mjesto t , slijedi

$$\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} A_{b+s,b-t-1} - A_{b+s,b-t} = A_{b+s,b-t-2} \quad (384)$$

Uvrstimo li (383) i (384) u (382), dobijemo

$$A_{b,b-t-2} J_{b+s}(z) - A_{b+s,b-t-2} J_b(z) + A_{b+s,b} J_{b-t-2}(z) = 0 \quad (385)$$

Time je povišenje od t provedeno, pa je time dokazano, da jednačba (379) vrijedi za svaki t , za koji je $1 \leq t \leq b-2$. Međutim, i jednačba (385) vrijedi uz taj uvjet, t.j. ona vrijedi na pr. za $t = b-3$ i $t = b-2$, a ti su slučajevi identični s jednačbom (379) za $t = b-1$, odnosno $t = b$, tako da (379) vrijedi za $1 \leq t \leq b$.

Budući da je (379) samo drukčije napisana jednačba (350), to je time dokaz proveden.

Jednačbe (350) i (355) vrijede i onda, ako su a, b, c tri kompleksna broja, koja zadovoljavaju uvjet, da su njihove razlike realni cijeli brojevi, i da nijedan od ta tri broja nije realan negativan broj. Formule (356), (357), (358) će onda glasiti:

$$M_{b,c} = \operatorname{sgn}(b-c) \sum_{w=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (p-w-1)! \Gamma\left(\frac{b+c+p}{2} - w\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{p-2w-1} w! (p-2w-1)! \Gamma\left(\frac{b+c-p}{2} + w+1\right)} \quad (386)$$

$$M_{c,a} = \operatorname{sgn}(c-a) \sum_{w=0}^{\left[\frac{q-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (q-w-1)! \Gamma\left(\frac{c+a+q}{2} - w\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{q-2w-1} w! (q-2w-1)! \Gamma\left(\frac{c+a-q}{2} + w+1\right)} \quad (387)$$

$$M_{a,b} = \operatorname{sgn}(a-b) \sum_{w=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (r-w-1)! \Gamma\left(\frac{a+b+r}{2} - w\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{r-2w-1} w! (r-2w-1)! \Gamma\left(\frac{a+b-r}{2} + w+1\right)}. \quad (388)$$

Ako hoćemo oblik relacije prema (350), treba biti ispunjen analogon uvjeta (349). Ako su α, β, γ realni dijelovi brojeva a, b, c , onda taj analogon glasi

$$\alpha > \beta > \gamma \quad (389)$$

Formule (351), (352), (353) za taj slučaj glase:

$$A_{b,c} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{b-c-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (b-c-w-1)! \Gamma(b-w)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{b-c-2w-1} w! (b-c-2w-1)! \Gamma(c+w+1)} \quad (390)$$

$$A_{a,c} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{a-c-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (a-c-w-1)! \Gamma(a-w)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{a-b-2w-1} w! (a-b-2w-1)! \Gamma(b+w+1)} \quad (391)$$

$$A_{a,b} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{a-b-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (a-b-w-1)! \Gamma(a-w)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{a-b-2w-1} w! (a-b-2w-1)! \Gamma(b+w+1)}. \quad (392)$$

Dokaz se opet vodi na temelju rekurzione jednačbe (360), koja vrijedi i za kompleksne indekse Besselovih funkcija. Kod verifikacije jednačaba (372) i (383) služit ćemo se, po potrebi, karakterističnim svojstvom gama-funkcije

$$\Gamma(z+1) = z \Gamma(z). \quad (393)$$

Vrijedi još spomenuti, da su kvocijenti od dvije gama-funkcije u jednačbama (386), (387), (388), (390), (391), (392) cijeli realni brojevi, što lako slijedi pomoću (393) iz pretpostavke, da su razlike brojeva a, b, c cijeli brojevi.

> Pribilježimo sad najvažniji specijalni slučaj jednačbe (350), a to je $a = n, b = 1, c = 0$:

$$\begin{aligned}
J_n(z) &= J_1(z) \sum_{w=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w [(n-w-1)!]^2}{\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2w-1} (w!)^2 (n-2w-1)!} - \\
&- J_0(z) \sum_{w=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(-1)^w (n-w-2)! (n-w-1)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{n-2w-2} w! (w+1)! (n-2w-2)!} . \quad (394)
\end{aligned}$$

Ova formula dopušta zanimljivu primjenu (koja nema veze s našim kasnijim razlaganjima) na izračunavanje jedne specijalne kontinuantе:

Pišimo u rekurzionoj jednađžbi (341) za Besselove funkcije

$\frac{(n-1)(n-2)}{(-1)^2} K_{n-1}$ mjesto $J_n(z)$ i $\frac{1}{x}$ mjesto $\frac{z}{2}$, to ova prelazi u

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} K_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} nx K_{n-1} - (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} K_{n-2} \quad (395)$$

ili

$$K_n = (-1)^{n-1} nx K_{n-1} + K_{n-2} \quad (396)$$

Formula (394) daje, ako još n nadomjestimo sa $n+1$,

$$\begin{aligned}
K_n &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left\{ K_0 \sum_{w=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^w [(n-w)!]^2 x^{n-2w}}{(w!)^2 (n-2w)!} + \right. \\
&+ K_{-1} \sum_{w=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (n-w-1)! (n-w)! x^{n-2w-1}}{w! (w+1)! (n-2w-1)!} \left. \right\} . \quad (397)
\end{aligned}$$

Štavimo sad

$$K_{-1} = 0, \quad K_0 = 1, \quad (398)$$

to se na temelju (396) može K_n za $n \geq 1$ izraziti na poznati način kao n -redna determinanta:

$$K_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 3x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (-1)^{n-1} nx \end{vmatrix} \quad (399)$$

Uvrstimo li (398) u (397), dobijemo

$$K_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^w [(n-w)!]^2 x^{n-2w}}{(w!)^2 (n-2w)!} \quad (400)$$

Time je dakle kontinuant (399) razvijena po potencijama od x . *)

Moramo još spomenuti jedan važni specijalni slučaj jednadžbe (350), za koji su već poznate formule. Stavimo jedamput

$$a = k + \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2} \quad (401)$$

a drugi put

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -(k + \frac{1}{2}) \quad (402)$$

i sjetimo se poznatih formula

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \quad (403)$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \quad (404)$$

$$\Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k}} \frac{(2k)!}{k!} \quad (\text{vidi (204)}) \quad (405)$$

$$\Gamma(-k + \frac{1}{2}) = (-1)^k \sqrt{\pi} 2^{2k} \frac{k!}{(2k)!} \quad (\text{vidi (205)}) \quad (406)$$

Dobijemo na temelju (390), (391), (392) ove dvije formule:

*) Ova kontinuant potpada pod definiciju kontinuant, kako se nalazi u Kowalewski, Determinantentheorie, Leipzig 1909, str. 152. Nešto je šira definicija kontinuant u Perron, Kettenbrüche, Leipzig u. Berlin 1929, str. 11, (15). Na temelju jednačaba (21), str. 12. Perronove knjige, koje odgovaraju našoj rekurzionoj jednadžbi (359), i pomoću (23) str. 14. i (36), str. 16. rečene knjige nije teško vidjeti, da su i naši izrazi (351), (352), (353) kontinuant, i da bi se na pr. mjesto našeg $A_{a,b}$ prema Perronovim oznakama moglo pisati

$$A_{a-b-2,b} = K \left(\begin{matrix} -1, & -1, \dots, -1 \\ \frac{2(b+1)}{z}, & \frac{2(b+2)}{z}, & \dots, & \frac{2(a-1)}{z} \end{matrix} \right) \cdot$$

Naš izraz (353) daje dakle razvoj te kontinuant po potencijama od z .

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin z \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^w (2k-2w)!}{(2z)^{k-2w} (k-2w)! (2w)!} - \right. \\ \left. - \cos z \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^w (2k-2w-1)!}{(2z)^{k-2w-1} (k-2w-1)! (2w+1)!} \right\} \quad (407)$$

$$J_{-(k+\frac{1}{2})}(z) = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos z \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^w (2k-2w)!}{(2z)^{k-2w} (k-2w)! (2w)!} + \right. \\ \left. + \sin z \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^w (2k-2w-1)!}{(2z)^{k-2w-1} (k-2w-1)! (2w+1)!} \right\} \quad (408)$$

gdje je k pozitivan cio broj.

Stavimo li

$$n = k + \frac{1}{2} \quad (409)$$

to možemo ove dvije formule sažeti u jednu:

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin \left[z - \frac{\pi}{4} (2n-2k-1) \right] \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{(-1)^w (2k-2w)!}{(2z)^{k-2w} (k-2w)! (2w)!} - \right. \\ \left. - \cos \left[z - \frac{\pi}{4} (2n-2k-1) \right] \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^w (2k-2w-1)!}{(2z)^{k-2w-1} (k-2w-1)! (2w+1)!} \right\}. \quad (410)$$

Poznat je jedan drugi oblik ove formule:*)

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos \left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) U_n(z) + \sin \left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) V_n(z) \right\} \quad (411)$$

gdje je

*) Gray, Mathews and MacRobert, l.c. str. 18.

$$U_n(z) = 1 + \sum_{w=1} \frac{(-1)^w (4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\dots [4n^2-(4w-1)^2]}{(2w)! 2^{6w} z^{2w}} \quad (412)$$

$$V_n(z) = \sum_{w=1} \frac{(-1)^w (4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\dots [4n^2-(4w-3)^2]}{(2w-1)! 2^{6w-3} z^{2w-1}} \quad (413)$$

gdje indeks sumacije ide dotle, dok se u brojnicima članova suma ne pojave faktori, koji su jednaki nuli.

Nije teško produkte u tim formulama izraziti pomoću faktorijela i dokazati, da je to samo drugi oblik formule (410).

Poznat je još jedan oblik, koji je bliži našim formulama (407), (408):*)

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin \left(z - \frac{\pi k}{2} \right) \sum_{v=0}^{\left[\frac{k}{2} \right]} \frac{(-1)^v (k+2v)!}{(2v)! (k-2v)! (2z)^{2v}} + \right. \\ \left. + \cos \left(z - \frac{\pi k}{2} \right) \sum_{v=0}^{\left[\frac{k-1}{2} \right]} \frac{(-1)^v (k+2v+1)!}{(2v+1)! (k-2v-1)! (2z)^{2v+1}} \right\} \quad (414)$$

$$J_{-(k+\frac{1}{2})}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos \left(z + \frac{\pi k}{2} \right) \sum_{v=0}^{\left[\frac{k}{2} \right]} \frac{(-1)^v (k+2v)!}{(2v)! (k-2v)! (2z)^{2v}} - \right. \\ \left. - \sin \left(z + \frac{\pi k}{2} \right) \sum_{v=0}^{\left[\frac{k-1}{2} \right]} \frac{(-1)^v (k+2v+1)!}{(2v+1)! (k-2v-1)! (2z)^{2v+1}} \right\} \quad (415)$$

Da se pokaže istovjetnost s našim formulama (407), (408) treba sumaciju provesti obratnim slijedom, t.j. tako, da eksponent od z pada, kad indeks sumacije raste.

*) R.O. Kuzmin, Bessleevi funkcii, Glavnaja redakcija obščetehničeskoj literaturi, Leningrad - Moskva, 1935. str. 59.

5. Izrazi za m-te derivacije funkcija $\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2})$ i $\Lambda_n[c(t-z)]$.

Prema (345) i (346) vrijedi:

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n[c(t-z)] = \frac{c^2(t-z)}{2(n+1)} \Lambda_{n+1}[c(t-z)] \quad (416) \quad 222$$

i

$$\frac{d}{dz} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = \frac{c^2 z}{2(n+1)} \Lambda_{n+1}(c\sqrt{t^2-z^2}). \quad (417) \quad 223$$

Diferenciramo li (416) m puta, dobijemo očito članove oblika $a(t-z)^p \Lambda_{n+q}[c(t-z)]$, ako kod diferenciranja Λ -funkcije derivaciju uvijek izrazimo prema (416). Ako smo do jednog od tih članova došli time, da smo u bilo kojem slijedu diferencirali po potenciji od $t-z$ svega w puta, a po Λ -funkciji svega $m-w$ puta, i ako uočimo, da diferenciranje po potenciji od $t-z$ snižava njezin eksponent za jednu jedinicu, a diferenciranje Λ -funkcije povisuje za jednu jedinicu eksponent potencije i red Λ -funkcije, to je jasno, da dotični član ima oblik $(-1)^w a_w (t-z)^{m-2w} \Lambda_{n+m-w}[c(t-z)]$. Dobivamo dakle

$$\frac{d^m}{dz^m} \Lambda_n[c(t-z)] = \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} (-1)^w a_w (t-z)^{m-2w} \Lambda_{n+m-w}[c(t-z)]. \quad (418) \quad 229$$

Gornja granica sume je određena time, da eksponent potencije od $t-z$ ne može postati negativan. Sasvim analogno razmatranje može se provesti na temelju (417), pa se dolazi do jednadžbe

$$\frac{d^m}{dz^m} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} a_w z^{m-2w} \Lambda_{n+m-w}(c\sqrt{t^2-z^2}) \quad (419) \quad 230$$

gdje su a_w isti koeficijenti kao u (418). Da te koeficijente odredimo, provest ćemo ovo razmatranje:

Razvijemo $\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2})$ prema (340) po $c\sqrt{t^2-z^2}$ u red potencija i nadomjestimo potencije od t^2-z^2 njihovim binomnim razvojem:

$$\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} \sum_{v=0}^w (-1)^v \binom{w}{v} t^{2w-2v} z^{2v}}{w! (n+w)!} \quad (420) \quad 231$$

ili

$$\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \sum_{w=0}^{\infty} \sum_{v=0}^w \frac{(-1)^{w+v} \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} t^{2w-2v} z^{2v}}{v! (w-v)! (n+w)!} \quad (421) \quad 232$$

Razlikujemo slučajeve takog i lihog m i stavljamo u prvom slučaju

$$m = 2r \quad (422) \quad 233$$

a u drugom slučaju

$$m = 2r+1 \quad (423) \quad 234$$

Diferenciramo li (421) m puta, dobijemo prema (422) odnosno (423)

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \sum_{w=r}^{\infty} \sum_{v=r}^w \frac{(-1)^{w+v} \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} (2v)! t^{2w-2v} z^{2v-2r}}{(2v-2r)! v! (w-v)! (n+w)!} \quad (424) \quad 235$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \sum_{w=r+1}^{\infty} \sum_{v=r+1}^w \frac{(-1)^{w+v} \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} (2v)! t^{2w-2v} z^{2v-2r-1}}{(2v-2r-1)! v! (w-v)! (n+w)!} \quad (425) \quad 236$$

Uvedemo li sad nove indekse sumacije

$$\bar{v} = v-r-1 \quad (426) \quad 237$$

$$\bar{w} = w-r-1, \quad (427) \quad 238$$

to dobijemo:

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{\bar{w}=0}^{\infty} \sum_{\bar{v}=0}^{\bar{w}} \frac{(-1)^{\bar{w}+\bar{v}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}} (2\bar{v}+2r)! t^{2\bar{w}-2\bar{v}} z^{2\bar{v}}}{(2\bar{v})! (\bar{v}+r)! (\bar{w}-\bar{v})! (n+r+\bar{w})!} \quad (428) \quad 239$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{\bar{w}=0}^{\infty} \sum_{\bar{v}=0}^{\bar{w}} \frac{(-1)^{\bar{w}+\bar{v}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}+1} (2\bar{v}+2r+2)! t^{2\bar{w}-2\bar{v}} z^{2\bar{v}+1}}{(2\bar{v}+1)! (\bar{v}+r+1)! (\bar{w}-\bar{v})! (n+r+\bar{w}+1)!} \quad (429) \quad 240$$

Stavimo $z=t$:

$$\left\{ \frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) \right\}_{z=t} = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} A_w t^{2w}}{(n+r+w)!} \quad (430) \quad 241$$

gdje je

$$A_w = \sum_{v=0}^w \frac{(-1)^v (2v+2r)!}{(2v)! (v+r)! (w-v)!} \quad (431) \quad 242$$

2

$$\left\{ \frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) \right\}_{z=t} = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w+1} B_w t^{2w+1}}{(n+r+w+1)!} \quad (432) \quad 243$$

gdje je

$$B_w = \sum_{v=0}^w \frac{(-1)^v (2v+2r+2)!}{(2v+1)! (v+r+1)! (w-v)!} \quad (433) \quad 244$$

Prema (140), (141), (142), (143) vrijedi:

$$0 \quad \text{za } w > r \quad (434) \quad 245$$

$$A_w = \frac{(-1)^w 2^{2w} (2r)!}{(2w)! (r-w)!} \quad \text{za } w \leq r \quad (435) \quad 245$$

$$0 \quad \text{za } w > r \quad (436) \quad 246$$

$$B_w = \frac{(-1)^w 2^{2w+1} (2r+1)!}{(2w+1)! (r-w)!} \quad \text{za } w \leq r \quad (437) \quad 246$$

Uvrštenje u ²⁴¹(430) i ²⁴³(432) daje

$$\left\{ \frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) \right\}_{z=t} = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} (2r)! \sum_{w=0}^r \frac{c^{2w} t^{2w}}{(2w)! (r-w)! (n+r+w)!} \quad (438) \quad 247$$

$$\left\{ \frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) \right\}_{z=t} = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} (2r+1)! \sum_{w=0}^r \frac{c^{2w+1} t^{2w+1}}{(2w+1)! (r-w)! (n+r+w+1)!} \quad (439) \quad 248$$

Uvedemo li novi indeks sumacije i to

$$\bar{w} = r-w \quad (450) \quad 249$$

to možemo obje formule sažeti u jednu upotrijebivši ²³³(422), ²⁴⁴(423):

$$\left\{ \frac{\partial^m}{\partial z^m} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) \right\}_{z=t} = n! \left(\frac{c}{2}\right)^m m! \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{c^{m-2w} t^{m-2w}}{(m-2w)! w! (n+m-w)!} \quad (451) \quad 250$$

Stavimo li u ²³⁰(419) $z=t$ i uočimo, da je prema ²³¹(340)

$$\Lambda_n(0) = 1, \quad (452) \quad 251$$

to (slijedi)

$$\left\{ \frac{\partial^m}{\partial z^m} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) \right\}_{z=t} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_w t^{m-2w} \quad (453) \quad 252$$

Poredba od ²⁵⁰(451) i ²⁵²(453) daje tražene koficijente a_w :

$$a_w = \frac{n! m! c^{2m-2w}}{2^m w! (m-2w)! (m+n-w)!} \quad (454) \quad 253$$

Uvrstimo li to u ²¹⁹(418) i ²²⁰(419), dobijemo konačno:

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} \Lambda_n [c(t-z)] = \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^w n! m! c^{2m-2w} (t-z)^{m-2w} \Lambda_{n+m-w} [c(t-z)]}{2^m w! (m-2w)! (n+m-w)!} \quad (455)$$

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m} \Lambda_n (c\sqrt{t^2-z^2}) = \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{n! m! c^{2m-2w} z^{m-2w} \Lambda_{n+m-w} (c\sqrt{t^2-z^2})}{2^m w! (m-2w)! (n+m-w)!} \quad (456)$$

Stavimo li u (456)

$$z = i\bar{t}, \quad t = i\bar{z} \quad (457)$$

i naknadno opet ispustimo poprečne crte nad z i t , dobijemo:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m} \Lambda_n (c\sqrt{t^2-z^2}) = \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{m-w} n! m! c^{2m-2w} t^{m-2w} \Lambda_{n+m-w} (c\sqrt{t^2-z^2})}{2^m w! (m-2w)! (n+m-w)!} \quad (458)$$

Zanimljive su još dvije relacije, koje istina kasnije ne ćemo trebati:

Budući da se u (428) i (429) radi o apsolutno konvergentnim redovima, to možemo članove poredati kako hoćemo. Uvedimo dakle novi indeks sumacije ~~mjesto~~ w :

$$\bar{w} = w+v, \quad (459)$$

Slijedi:

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} \Lambda_n (c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v} (2v+2r)! z^{2v}}{(2v)! (v+r)!} \sum_{\bar{w}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\bar{w}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}} t^{2\bar{w}}}{\bar{w}! (n+r+v+\bar{w})!} \quad (460)$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} \Lambda_n (c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v+1} (2v+2r+2)! z^{2v+1}}{(2v+1)! (v+r+1)!} \sum_{\bar{w}=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\bar{w}} \left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}} t^{2\bar{w}}}{\bar{w}! (n+r+v+\bar{w}+1)!} \quad (461)$$

ili obzirom na (340):

$$\frac{d^{2r}}{dz^{2r}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v} (2v+2r)! z^{2v}}{(2v)! (v+r)! (n+r+v)!} \Lambda_{n+r+v}(ct)$$

(462) 161

$$\frac{d^{2r+1}}{dz^{2r+1}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n! \left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v+1} (2v+2r+2)! z^{2v+1}}{(2v+1)! (v+r+1)! (n+r+v+1)!} \Lambda_{n+r+v+1}(ct)$$

(463) 162

Ove formule su razvoji po potencijama od z , ...

Handwritten notes:
 ...
 ...
 ...

4. Redukcija integrala $\int_X^t x^n \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx$.

Ako u (343) stavimo $n=1$, $z = \sqrt{t^2-x^2}$ i jednačbu pomnožimo sa x^n , dobijemo

$$\begin{aligned} x^n \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) &= \\ &= x^n \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) + \frac{c^2 x^{n+2}}{8} \Lambda_2(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{c^2 t^2 x^n}{8} \Lambda_2(c\sqrt{t^2-x^2}) \end{aligned} \quad (464) \quad 263$$

Dalje slijedi iz (346)

$$x \Lambda_{n+1}(c\sqrt{t^2-x^2}) = \frac{2(n+1)}{c^2} \frac{d}{dx} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) \quad (465) \quad 264$$

i prema tome parcijalnom integracijom

$$\begin{aligned} \int_X^t x^n \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx &= \\ &= \frac{2t^{n-1}}{c^2} - \frac{2x^{n-1}}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{2(n-1)}{c^2} \int_X^t x^{n-2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \end{aligned} \quad (466) \quad 265$$

$$\begin{aligned} \int_X^t x^{n+2} \Lambda_2(c\sqrt{t^2-x^2}) dx &= \\ &= \frac{4t^{n+1}}{c^2} - \frac{4x^{n+1}}{c^2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{4(n+1)}{c^2} \int_X^t x^n \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \\ &= \frac{4t^{n+1}}{c^2} - \frac{4x^{n+1}}{c^2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{8(n+1)t^{n-1}}{c^4} + \frac{8(n+1)x^{n-1}}{c^4} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) + \\ &+ \frac{8(n+1)(n-1)}{c^4} \int_X^t x^{n-2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \end{aligned} \quad (467) \quad 266$$

$$\int_X^t x^n \Lambda_2(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{4t^{n-1}}{c^2} - \frac{4x^{n-1}}{c^2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{8(n-1)t^{n-3}}{c^4} +$$

$$+ \frac{8(n-1)x^{n-3}}{c^4} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) + \frac{8(n-1)(n-3)}{c^4} \int_X^t x^{n-4} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx . \quad (468) \quad 267$$

Pri tom za $n \geq 4$ vrijede sve tri jednačbe (466), (467), (468).

Za $n=3$ otpada u jednačbi (468) zadnji član, dok ostale dvije vrijede nepromijenjeno, za $n=2$ jednačba (466) vrijedi nepromijenjeno, isto tako (467), dok umjesto (468) dolazi

$$\int_X^t x^2 \Lambda_2(c\sqrt{t^2-x^2}) dx =$$

$$= \frac{4t}{c^2} - \frac{4x}{c^2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{4}{c^2} \int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \quad (469) \quad 268$$

Za $n=1$ u (466) otpada zadnji član, isto tako u (467), dok u (468) otpadaju zadnja tri člana.

Integriramo li (464) po x od X do t i nadomjestimo integrale na desnoj strani pomoću (466), (467), (468), odnosno (469), dobijemo za $n=1$:

$$\int_X^t x \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{t^2-x^2}{2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) , \quad (470) \quad 269$$

Za $n=2$:

$$\int_X^t x^2 \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{1}{c^2} \int_X^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx + \frac{t^2}{2} \int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx +$$

$$+ \frac{x(t^2-x^2)}{2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) + \frac{x}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{t}{c^2} , \quad (471) \quad 270$$

za $n=3$, uzevši još u obzir (470),²⁶⁹

$$\int_X^t x^3 \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{4}{c^2} \int_X^t x \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx - \frac{2(t^2-x^2)}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) +$$

$$+ \frac{x^2(t^2-x^2)}{2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) = \left(\frac{2}{c^2} + \frac{x^2}{2}\right)(t^2-x^2) \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{2(t^2-x^2)}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})$$

(472) 271

za $n \geq 4$:

$$\int_X^t x^n \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{(n-1)^2}{c^2} \int_X^t x^{n-2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx -$$

$$- \frac{(n-1)(n-3)t^2}{c^2} \int_X^t x^{n-4} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx - \frac{(n-1)x^{n-3}(t^2-x^2)}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) +$$

$$+ \frac{x^{n-1}(t^2-x^2)}{2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}).$$

(473) 272

Razmotrimo sad nešto općenitije slijed veličina

Q_0, Q_1, Q_2, \dots , od kojih su prve četiri, t.j. Q_0, Q_1, Q_2, Q_3 , zadane, dok su ostale određene rekurzionom jednačinom

$$Q_n = \frac{(n-1)^2}{c^2} Q_{n-2} - \frac{(n-1)(n-3)t^2}{c^2} Q_{n-4} + (n-1)x^{n-3}R + x^{n-3}T$$

(474) 273

gdje su R i T zadane veličine. Jasno je, da Q_1 i Q_3 određuju sve Q_n s lihim n , dok Q_0 i Q_2 određuju sve Q_n s takim n .

Stavimo li za lihe n

$$n = 2m+1,$$

(475) 274

to (474) dobije oblik

$$Q_{2m+1} = \frac{4m^2}{c^2} Q_{2m-1} - \frac{4m(m-1)t^2}{c^2} Q_{2m-3} + 2mx^{2m-2}R + x^{2m-2}T.$$

(476) 275

Za takli n stavimo

$$n = 2m$$

(477) 276

i dobijemo mjesto (474)

$$Q_{2m} = \frac{(2m-1)^2}{c^2} Q_{2m-2} - \frac{(2m-1)(2m-3)t^2}{c^2} Q_{2m-4} + (2m-1)X^{2m-3}R + X^{2m-3}T.$$

(478) 277

Prema rečenom (474) vrijedi za $n \geq 4$, tako da (476) i (478) vrijede za $m \geq 2$.

Pvrdimo, da za $m \geq 2$ vrijede ove direktne formule:

$$Q_{2m+1} = Q_1 \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} +$$

$$+ Q_3 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ \sum_{\substack{r,s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}}^{r+2s \leq m} (R + \frac{T}{2r}) \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m! (m-r-s)! (m-s)! X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s)! (r-1)! s! (r+s)! c^{2m-2r-2s}}$$

(479) 278

$$Q_{2m} = Q_0 \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{s (-1)^s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s}}{(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}} +$$

$$+ Q_2 \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{2^{2m-2s-1} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ \sum_{\substack{r,s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}}^{r+2s \leq m} (R + \frac{T}{2r-1}) \frac{(-1)^s (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}}$$

(480) 279

Stavimo li u tim formulama $m = 2$, to je lako vidjeti, da se za taj slučaj podudaraju s formulama (476), (478), t.j. glase:

$$Q_5 = \frac{16}{c^2} Q_3 - \frac{8t^2}{c^2} Q_1 + 4X^2R + X^2T \quad (481) \quad 280$$

$$Q_4 = \frac{9}{c^2} Q_2 - \frac{3t^2}{c^2} Q_0 + 3XR + XT \quad (482) \quad 281$$

Dalje za $m = 3$ formule (476) i (478) uz primjenu od (481) i (482) daju:

$$Q_7 = Q_3 \left(\frac{576}{c^4} - \frac{24t^2}{c^2} \right) - \frac{288t^2}{c^4} Q_1 + R \left(\frac{144X^2}{c^2} + 6X^4 \right) + T \left(\frac{36X^2}{c^2} + X^4 \right) \quad (483) \quad 282$$

$$Q_6 = Q_2 \left(\frac{225}{c^4} - \frac{15t^2}{c^2} \right) - \frac{75t^2}{c^4} Q_0 + R \left(\frac{75X}{c^2} + 5X^3 \right) + T \left(\frac{25X}{c^2} + X^3 \right) \quad (484) \quad 283$$

Lako je vidjeti, da i (479) i (480) za $m=3$ daju te iste izraze.

Formule (479), (480) su dakle ispravne za $m=2$ i $m=3$. Treba još dokazati, da za $m \geq 4$ zadovoljavaju rekurzivne jednadžbe (476), (478). Provest ćemo taj dokaz za (479).

Ivrstimo izraz (479) u (476) i uzmimo najprije u obzir članove s Q_1 . Dobijemo

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} = \\ & = \frac{4m^2}{c^2} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} (m-1)! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s-2}} + \\ & + \frac{2m(2m-2)}{c^2} \sum_{s=2}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} (m-2)! (m-s-2)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-2)! s! c^{2m-2s-2}} \quad (485) \quad 284 \end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj sumi stavili $s=\bar{s}-1$ i naknadno ispustili neparečnu crtu nad s . Time je postignuto, da eksponent od t u općem članu svih triju suma bude isti. Pretpostavimo sad

$$2 \leq s \leq \frac{m-1}{2} \quad (486)$$

i svedimo opće članove suma na zajednički nazivnik $(m-2s)!(s-1)!(s+1)!c^{2m-2s}$

Brojnici onda daju

$$\begin{aligned} (-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-1)!(m-s+1)!t^{2s} &= 4m^2(m-2s)(-1)^s 2^{2m-2s-2}(m-1)!(m-s-2)! \\ &\cdot (m-s)!t^{2s} + 2m(2m-2)(-1)^s (s-1)(s+1)2^{2m-2s-2}(m-2)!(m-s-2)!(m-s)!t^{2s} \end{aligned} \quad (487)$$

Podijelimo li s $(-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-2)!(m-s)!t^{2s}$, dobijemo

$$(m-s-1)(m-s+1) = m(m-2s) + (s-1)(s+1) \quad (488)$$

što je ispravno. Za $s=1$ posljednja suma ne pridonosi ništa, a ostale dvije daju

$$-\frac{2^{2m-2} m!(m-2)!m!t^2}{(m-2)!0!2!c^{2m-2}} = -\frac{4m^2 2^{2m-4}(m-1)!(m-3)!(m-1)!t^2}{(m-3)!0!2!c^{2m-2}} \quad (489)$$

što je ispravno. Za slučaj takog m može biti $s = \frac{m}{2} = p$, pa u tom slučaju prva suma desno u (485) ne pridonosi ništa, a druge dvije daju

$$\frac{(-1)^p 2^{2p}(2p)!(p-1)!(p+1)!t^{2p}}{0!(p-1)!(p+1)!c^{2p}} = \frac{4p(4p-2)(-1)^p 2^{2p-2}(2p-2)!(p-2)!p!t^{2p}}{0!(p-2)!p!c^{2p}} \quad (490)$$

što je ispravno. Jednadžba (485) dakle vrijedi.

Uzmimo sad u obzir članove s Q_3 :

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} m!(m-s-1)!(m-s)!t^{2s}}{(m-2s-1)!s!(s+1)!c^{2m-2s-2}} + \\ &+ \frac{4m^2}{c^2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-4}(m-1)!(m-s-2)!(m-s-1)!t^{2s}}{(m-2s-2)!s!(s+1)!c^{2m-2s-4}} + \\ &+ \frac{2m(2m-2)}{c^2} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-4}(m-2)!(m-s-2)!(m-s-1)!t^{2s}}{(m-2s-1)!(s-1)!s!c^{2m-2s-4}} \end{aligned} \quad (491)$$

I ovdje smo u zadnjoj sumi stavili $s = \bar{s}-1$ i umjesto \bar{s} opet pisali s . Neka je

$$1 \leq s \leq \frac{m-2}{2}. \quad (492) \quad 291$$

Svedemo opće članove na nazivnik $(m-2s-1)!s!(s+1)!c^{2m-2s-2}$.

Brojnici daju

$$\begin{aligned} (-1)^s 2^{2m-2s-2} m!(m-s-1)!(m-s)!t^{2s} &= (m-2s-1)4m^2(-1)^s 2^{2m-2s-4}(m-1)!(m-s-2)! \\ &\cdot (m-s-1)!t^{2s} + 2m(2m-2)s(s+1)(-1)^s 2^{2m-2s-4}(m-2)!(m-s-2)!(m-s-1)!t^{2s}. \end{aligned} \quad (493) \quad 292$$

Razdijelimo sa $(-1)^s 2^{2m-2s-2} m!(m-s-2)!(m-s-1)!t^{2s}$, pa dobijemo

$$(m-s-1)(m-s) = (m-2s-1)m + s(s+1) \quad (494) \quad 293$$

što je ispravno. Za $s=0$ dobijemo

$$\frac{2^{2m-2} m!(m-1)!m!}{(m-1)!0!1!c^{2m-2}} = \frac{4m^2 2^{2m-4} (m-1)!(m-2)!(m-1)!}{(m-2)!0!1!c^{2m-2}} \quad (495) \quad 294$$

što je ispravno. Za slučaj lihog m može biti $s = \frac{m-1}{2} = p$,

pa dobijemo

$$\frac{(-1)^p 2^{2p} (2p+1)!p!(p+1)!t^{2p}}{0!p!(p+1)!c^{2p}} = \frac{2(2p+1)4p(-1)^p 2^{2p-2} (2p-1)!(p-1)!p!t^{2p}}{0!(p-1)!p!c^{2p}} \quad (496) \quad 295$$

što je ispravno. Jednadžba (491) dakle vrijedi.

Uzmimo dalje u obzir članove sa R :

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{r,s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0 \\ r+2s \leq m}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m!(m-r-s)!(m-s)!X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s)!(r-1)!s!(r+s)!c^{2m-2s}} = \\ &= \frac{4m^2}{c^2} \sum_{\substack{r,s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0 \\ r+2s \leq m-1}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-1)!(m-r-s-1)!(m-s-1)!X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s-1)!(r-1)!s!(r+s)!c^{2m-2s-2}} + \\ &+ \frac{4m(m-1)}{c^2} \sum_{\substack{r,s \\ r \geq 2 \\ s \geq 1 \\ r+2s \leq m}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-2)!(m-r-s-1)!(m-s-1)!X^{2r-2} t^{2s}}{(m-r-2s)!(r-1)!(s-1)!(r+s-1)!c^{2m-2s-2}} + 2mX^{2m-2} \end{aligned} \quad (497) \quad 296$$

gdje je u zadnjoj sumi opet stavljeno $s = \bar{s}-1$ i zatim mjesto \bar{s} pisano s . Neka je

$$2 \leq r \leq m-3 \quad (498) \quad 197$$

$$1 \leq s \leq \frac{m-r-1}{2} \quad (499) \quad 198$$

dakle

$$r+2s \leq m-1 \quad (500) \quad 199$$

Svedemo opće članove suma u ²⁹⁶ (497) na zajednički nazivnik

$(m-r-2s)!(r-1)!s!(r+s)!c^{2m-2s}$. Brojnici daju:

$$\begin{aligned} & (-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m!(m-r-s)!(m-s)! X^{2r-2} t^{2s} = \\ & 4m^2(m-r-2s)(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-1)!(m-r-s-1)!(m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s} + \\ & + 4m(m-1)s(r+s)(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1} (m-2)!(m-r-s-1)!(m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s}. \end{aligned} \quad (501) \quad 300$$

Dioba sa $(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m!(m-r-s-1)!(m-s-1)! X^{2r-2} t^{2s}$ daje

$$(m-r-s)(m-s) = m(m-r-2s) + s(r+s) \quad (502) \quad 301$$

što je ispravno. Neka je dalje

$$2 \leq r \leq m-1 \quad (503) \quad 302$$

$$s = 0 \quad (504) \quad 303$$

Dobijemo

$$\frac{2^{2m-2r+1} m!(m-r)!m!}{(m-r)!(r-1)!0!r!} = \frac{4m^2 2^{2m-2r-1} (m-1)!(m-r-1)!(m-1)!}{(m-r-1)!(r-1)!0!r!} \quad (505) \quad 304$$

što je ispravno. Ako je

$$r+2s = m, \quad r = m-2s \quad (506) \quad 305$$

$$r \geq 2, \quad s \geq 1, \quad (507) \quad 306$$

slijedi

$$\frac{(-1)^s 2^{2s+1} m!s!(m-s)!}{0!(m-2s-1)!s!(m-s)!} = \frac{4m(m-1)(-1)^s 2^{2s-1} (m-2)!(s-1)!(m-s-1)!}{0!(m-2s-1)!(s-1)!(m-s-1)!} \quad (508) \quad 307$$

što je ispravno. Neka je konačno

$$r = m, \quad s = 0 \quad (509) \quad 308$$

to imamo

$$\frac{2 m! 0! m! X^{2m-2}}{0!(m-1)!0!m!} = 2m X^{2m-2} \quad (510) \quad 309$$

što je ispravno. Formula ²⁹⁶ (497) dakle vrijedi.

Članovi s T daju istu jednačbu (497), samo što su opći članovi suma podijeljeni sa $2r$, a zadnji član desne strane jednačbe podijeljena je sa $2m$. Očito i tu račun potvrđuje ispravnost. Time je konačno dokazana formula (479).

Postupak za dokaz formule (480) sasvim je analogan.

Uvrstimo (480) u (478) i uzmemo u obzir članove s Q_0 :

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s}}{(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}} = \\ & = \frac{(2m-1)^2}{c^2} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s s (2m-2)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{(m-s-1) 2^{2m-2s-2} (m-1)! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s-2}} + \\ & + \frac{(2m-1)(2m-3)}{c^2} \sum_{s=2}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (s-1) (2m-4)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{(m-s-1) 2^{2m-2s-2} (m-2)! (m-2s)! (2s-1)! c^{2m-2s-2}}. \quad (511) \end{aligned}$$

Pretpostavimo (486) i svedimo opće članove na nazivnik

$(m-s)(m-s-1) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}$. Brojnici daju

$$\begin{aligned} & (m-s-1)(-1)^s s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s} = (2m-1)^2 (m-s) 2^{2m} (m-2s) (-1)^s s \cdot \\ & \cdot (2m-2)! (2m-2s-1)! t^{2s} + (2m-1)(2m-3)(m-s) 2^{2m} (m-1) 2s (2s+1) (-1)^s \cdot \\ & \cdot (s-1) (2m-4)! (2m-2s-1)! t^{2s}. \quad (512) \end{aligned}$$

Dioba sa $(-1)^s s (2m)! (2m-2s)! t^{2s}$ daje

$$(m-s-1)(2m-2s+1) = (m-2s)(2m-1) + (s-1)(2s+1) \quad (513)$$

što je ispravno. Za $s=1$ sledi iz (511)

$$- \frac{1 \cdot (2m)! (2m-1)! t^2}{(m-1) 2^{2m-2} m! (m-2)! 3! c^{2m-2}} = - \frac{(2m-1)^2 1 (2m-2)! (2m-3)! t^2}{(m-2) 2^{2m-4} (m-1)! (m-3)! 3! c^{2m-2}} \quad (514)$$

što je ispravno. Za slučaj takog m može biti $s = \frac{m}{2} = p$, i dobijemo

$$\frac{(-1)^p p(4p)!(2p+1)!t^{2p}}{p!2^{2p}(2p)!0!(2p+1)!c^{2p}} = \frac{(4p-1)(4p-3)(-1)^p(p-1)(4p-4)!(2p-1)!t^{2p}}{(p-1)2^{2p-2}(2p-2)!0!(2p-1)!c^{2p}} \quad (515) \quad 314$$

što je ispravno. Jednadžba (511) dakle vrijedi.

Članovi s Q_2 daju:

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (2m)!(2m-2s-1)!t^{2s}}{2^{2m-2s-1} m!(m-2s-1)!(2s+1)!c^{2m-2s-2}} = \\ & = \frac{(2m-1)^2}{c^2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (2m-2)!(2m-2s-3)!t^{2s}}{2^{2m-2s-3} (m-1)!(m-2s-2)!(2s+1)!c^{2m-2s-4}} + \\ & + \frac{(2m-1)(2m-3)}{c^2} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (2m-4)!(2m-2s-3)!t^{2s}}{2^{2m-2s-3} (m-2)!(m-2s-1)!(2s-1)!c^{2m-2s-4}}. \quad (516) \quad 315 \end{aligned}$$

Pretpostavimo (492) i svedimo opće članove na nazivnik $2^{2m-2s-1} m!(m-2s-1)!(2s+1)!c^{2m-2s-2}$. Brojnici daju

$$\begin{aligned} (-1)^s (2m)!(2m-2s-1)!t^{2s} &= (2m-1)^2 2^{2m(m-2s-1)} (-1)^s (2m-2)!(2m-2s-3)!t^{2s} + \\ &+ (2m-1)(2m-3) 2^{2m(m-1)2s(2s+1)} (-1)^s (2m-4)!(2m-2s-3)!t^{2s}. \quad (517) \quad 316 \end{aligned}$$

Dioba sa $(-1)^s (2m)!(2m-2s-3)!$ daje

$$(2m-2s-2)(2m-2s-1) = 2(m-2s-1)(2m-1) + 2s(2s+1) \quad (518) \quad 317$$

što je ispravno. Za $s=0$ slijedi iz (516)

$$\frac{(2m)!(2m-1)!}{2^{2m-1} m!(m-1)!1!c^{2m-2}} = \frac{(2m-1)^2 (2m-2)!(2m-3)!}{2^{2m-3} (m-1)!(m-2)!1!c^{2m-2}} \quad (519) \quad 318$$

što je ispravno. Za slučaj lihog m može biti $s = \frac{m-1}{2} = p$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^p (4p+2)!(2p+1)!t^{2p}}{2^{2p+1} (2p+1)!0!(2p+1)!c^{2p}} = \frac{(4p+1)(4p-1)(-1)^p (4p-2)!(2p-1)!t^{2p}}{2^{2p-1} (2p-1)!0!(2p-1)!c^{2p}} \quad (520) \quad 319$$

što je ispravno. Jednadžba (516) dakle vrijedi.

članovi sa R daju:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}} = \\
 & = \frac{(2m-1)^2}{c^2} \sum_{\substack{r+s \leq m-1 \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s (m-r-s-1)! (2m-2)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s-1} (m-r-2s-1)! (m-1)! (2r-2)! (m-s-1)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s-2}} + \\
 & + \frac{(2m-1)(2m-3)}{c^2} \sum_{\substack{r+s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 1}} \frac{(-1)^s (m-r-s-1)! (2m-4)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s-1)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s-1} (m-r-2s)! (m-2)! (2r-2)! (m-s-1)! (2r+2s-2)! (s-1)! c^{2m-2r-2s-2}} + \\
 & + (2m-1) X^{2m-3} \tag{521} \quad 320
 \end{aligned}$$

Neka vrijedi ⁴⁹⁷ (498), ⁴⁹⁸ (499), ⁴⁹⁹ (500), i svedimo opće članove na nazivnik $(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}$.

Brojnici daju

$$\begin{aligned}
 & (-1)^s (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s} = \\
 & = (2m-1)^2 2^2 (m-r-2s) m (m-s) (-1)^s (m-r-s-1)! (2m-2)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s)! \cdot \\
 & \cdot X^{2r-3} t^{2s} + (2m-1)(2m-3) 2^2 m (m-1) (m-s) (2r+2s) (2r+2s-1) s (-1)^s (m-r-s-1)! \cdot \\
 & \cdot (2m-4)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s-1)! X^{2r-3} t^{2s} \tag{522} \quad 321
 \end{aligned}$$

Dioba sa $(-1)^s (m-r-s-1)! (2m)! (r-1)! (2m-2s-2)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}$ daje

$$(m-r-s)(2m-2s)(2m-2s-1) = (2m-1)2(m-r-2s)(m-s) + 2(m-s)(2r+2s-1)s \tag{523} \quad 322$$

što je ispravno. Pretpostavimo dalje ³⁰² (503), ³⁰³ (504), to dobijemo

$$\begin{aligned}
 & \frac{(m-r)! (2m)! (r-1)! (2m)! r! X^{2r-3}}{2^{2m-2r+1} (m-r)! m! (2r-2)! m! (2r)! 0! c^{2m-2r}} = \\
 & = \frac{(2m-1)^2 (m-r-1)! (2m-2)! (r-1)! (2m-2)! r! X^{2r-3}}{2^{2m-2r-1} (m-r-1)! (m-1)! (2r-2)! (m-1)! (2r)! 0! c^{2m-2r}} \tag{524} \quad 323
 \end{aligned}$$

što je ispravno. Ako vrijedi ³⁰⁵ (506), ³⁰⁶ (507), slijedi

$$\frac{(-1)^s s! (2m)! (m-2s-1)! (2m-2s)! (m-s)! X^{2m-4s-3} t^{2s}}{2^{2s+1} 0! m! (2m-4s-2)! (m-s)! (2m-2s)! s! c^{2s}} =$$

$$= \frac{(2m-1)(2m-3)(-1)^s (s-1)! (2m-4)! (m-2s-1)! (2m-2s-2)! (m-s-1)! X^{2m-3} t^{2s}}{2^{2s-1} 0! (m-2)! (2m-4s-2)! (m-s-1)! (2m-2s-2)! (s-1)! c^{2s}} \quad (525) \quad 324$$

što je ispravno. Pretpostavimo li konačno ³⁰⁸ (509), to imamo

$$\frac{0! (2m)! (m-1)! (2m)! m! X^{2m-3}}{2^0 0! m! (2m-2)! m! (2m)! 0!} = (2m-1) X^{2m-3} \quad (526) \quad 325$$

što je ispravno. Formula ³²⁰ (521) dakle vrijedi.

Članovi s \underline{T} daju istu ³²⁰ ~~jednačbu~~ ³²⁰ (521), samo što su opći članovi suma podijeljeni s $\underline{2r-1}$, a zadnji član desne strane jednačbe podijeljen sa $\underline{2m-1}$. Očito i ovdje račun potvrđuje ispravnost.

Time je konačno i formula ³²⁹ (480) dokazana.

Stavimo sad

$$Q_n = \int_X^t x^n \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (527) \quad 326$$

$$R = - \frac{t^2-x^2}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) \quad (528) \quad 327$$

$$T = X^2 \frac{t^2-x^2}{2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) \quad (529) \quad 328$$

i prema ³²⁶ (527), ²⁶⁷ (470), ²⁷⁰ (471), ²⁷¹ (472)

$$Q_0 = \int_X^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \quad (530) \quad 329$$

$$Q_1 = \frac{t^2-x^2}{2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) \quad (531) \quad 330$$

$$Q_2 = \frac{1}{c^2} \int_X^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx + \frac{t^2}{2} \int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx +$$

$$+ \frac{X(t^2-x^2)}{2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) + \frac{X}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{t}{c^2} \quad (532) \quad 331$$

$$Q_3 = \left(\frac{2}{c^2} + \frac{X^2}{2}\right) (t^2-x^2) \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{2(t^2-x^2)}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) \quad (533) \quad 332$$

Uvrstimo li ³⁷⁶(527), ⁴²⁷(528), ³¹⁸(529) u ²⁷³(474), dobijemo prvotnu rekurzivnu jednačbu ²⁷²(473), pa prema tome uvrštenje izraza ²⁷⁶(527) do ³³²(533) u formule ²⁷⁸(479), ²⁷⁹(480) mora dati direktne formule za redukciju integrala $\int_X^t x^n \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx$.

Uvrstimo spomenute izraze najprije u ²⁷⁸(479). Tvrdimo, da se dobivena formula može dovesti u oblik

$$\begin{aligned} & \int_X^t x^{2m+1} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \\ & = \frac{t^2-x^2}{2} \left\{ \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) \sum_{\substack{r,s \\ r \geq 0 \\ s \geq 0}}^{r+2s \leq m} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s)! (m-s)! x^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s)! r! s! (r+s)! c^{2m-2r-2s}} \right. \\ & \left. - \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) \sum_{\substack{r,s \\ r \geq 0 \\ s \geq 0}}^{r+2s \leq m-1} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s-1)! (m-s)! x^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s-1)! r! s! (r+s+1)! c^{2m-2r-2s}} \right\} \\ & \qquad \qquad \qquad \text{za } m \geq 1 \qquad \qquad \qquad (534) \end{aligned}$$

Uvrštenje naime daje ponajprije oblik

$$\begin{aligned} & \int_X^t x^{2m+1} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \\ & = \frac{t^2-x^2}{2} \left\{ \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} \right. \\ & + \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s}} \\ & \left. + \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} m! (m-s-1)! (m-s)! x^2 t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s-2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s}} - \\
& - \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) \sum_{\substack{r,s \\ r \geq 1 \\ s \geq 0 \\ r+2s \leq m-1}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s-1)! (m-s)! x^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s-1)! r! s! (r+s+1)! c^{2m-2r-2s}} + \\
& + \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) \sum_{\substack{r,s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0 \\ r+2s \leq m}} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m! (m-r-s)! (m-s)! x^{2r} t^{2s}}{(m-r-2s)! r! s! (r+s)! c^{2m-2r-2s}} \} \quad (535) \quad 334
\end{aligned}$$

pri čemu smo u predzadnjoj sumi stavili $r = \bar{r}+1$ i naknadno pisali opet \underline{r} mjesto \bar{r} , te zasad pretpostavili $m \geq 2$.

Zbrojimo li prvu i drugu sumu izraza (535), to nije teško dokazati, da vrijedi:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s}}{(m-2s)! (s-1)! (s+1)! c^{2m-2s}} + \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s}}{(m-2s-1)! s! (s+1)! c^{2m-2s}} = \\
& = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m! [(m-s)!]^2 t^{2s}}{(m-2s)! (s!)^2 c^{2m-2s}} \quad (536) \quad 335
\end{aligned}$$

Ako je naime

$$1 \leq s \leq \frac{m-1}{2} \quad (537) \quad 336$$

i ako svedemo opće članove suma u (536) na zajednički nazivnik $(m-2s)! s! (s+1)! c^{2m-2s}$, to brojnici daju

$$\begin{aligned}
& s(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s+1)! t^{2s} + \\
& + (m-2s)(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)! t^{2s} = \\
& = (s+1)(-1)^s 2^{2m-2s} m! [(m-s)!]^2 t^{2s}. \quad (538) \quad 337
\end{aligned}$$

Dioba sa $(-1)^s 2^{2m-2s} m! (m-s-1)! (m-s)!$ daje

$$(m-s+1)s + m-2s = (m-s)(s+1) \quad (539) \quad 338$$

što je ispravno. Ako je $s=0$, dobijemo

$$\frac{2^{2m} m! (m-1)! m!}{(m-1)! 0! 1! c^{2m}} = \frac{2^{2m} m! (m!)^2}{m! (0!)^2 c^{2m}} \quad (540) \quad 339$$

što je ispravno. Za slučaj da je m tak broj, možemo još staviti $s = \frac{m}{2} = p$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^p 2^{2p} (2p)! (p-1)! (p+1)! t^{2p}}{0! (p-1)! (p+1)! c^{2p}} = \frac{(-1)^p 2^{2p} (2p)! (p!)^2 t^{2p}}{0! (p!)^2 c^{2p}} \quad (541) \quad 340$$

što je ispravno. Jednažba (536) dakle vrijedi.

Sad možemo usporediti (534) sa (535). Članovi prve sume u (534), za koje je $r \geq 2$, daju zadnju sumu u (535). Članovi prve sume u (534), za koje je $r=1$, daju treću sumu u (535). Članovi prve sume u (534), za koje je $r=0$, daju zbroj prve i druge sume u (535) u obliku (536). Članovi druge sume u (534), za koje je $r \geq 1$, daju predzadnju sumu u (535). Članovi druge sume u (534), za koje je $r=0$, daju četvrtu sumu u (535). Time je formula (534) dokazana. Ona vrijedi za $m \geq 2$, kao formula (479), iz koje je proizašla, a i za $m=1$, kako pokazuje poredba sa (472).

Uvrstimo li (528), (529), (530), (532) u (480), to se dobiveni izraz može dovesti u oblik

$$\begin{aligned} & \int_X^t x^{2m} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \\ & = \int_X^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s)! t^{2s}}{2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s)! c^{2m-2s}} + \\ & + \int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s+2}}{2^{2m-2s} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s-2}} + \\ & + \int_X^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{2^{2m-2s-1} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s}} + \end{aligned}$$

$$+ (t^2 - X^2) \Lambda_0(c\sqrt{t^2 - X^2}).$$

$$\cdot \sum_{\substack{r+2s \leq m \\ r, s \\ r \geq 2 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^{s+1} (m-r-s)! (2m)! (r-1)! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-3} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r-2)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s+2}} +$$

$$+ (t^2 - X^2) \Lambda_1(c\sqrt{t^2 - X^2}).$$

$$\cdot \sum_{\substack{r+2s \leq m \\ r, s \\ r \geq 1 \\ s \geq 0}} \frac{(-1)^s (m-r-s)! (2m)! r! (2m-2s)! (r+s)! X^{2r-1} t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} (m-r-2s)! m! (2r)! (m-s)! (2r+2s)! s! c^{2m-2r-2s}} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{s+1} (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s+1}}{2^{2m-2s-1} m! (m-2s-1)! (2s+1)! c^{2m-2s}} \quad \text{za } m \geq 2 \quad (542) \quad 341$$

Da se to uvidi, zbrojimo najprije izraze, koje daju Q_0 i prvi član izraza (532) za Q_2 :

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{s(-1)^s (2m)! (2m-2s+1)! t^{2s}}{(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}} + \\ & + \frac{1}{c^2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s-1)! t^{2s}}{2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s)! c^{2m-2s}} = \\ & = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (2m)! (2m-2s)! t^{2s}}{2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s)! c^{2m-2s}}. \end{aligned} \quad (543) \quad 342$$

U svrhu dokaza ove relacije pretpostavimo (537) i sredimo opće članove suma u (543) na nazivnik $(m-s) 2^{2m-2s} m! (m-2s)! (2s+1)! c^{2m-2s}$.

Brojnici daju:

$$s(-1)^s(2m)!(2m-2s+1)!t^{2s} + (m-s)2(m-2s)(-1)^s(2m)!(2m-2s-1)!t^{2s} =$$

$$= (m-s)(2s+1)(-1)^s(2m)!(2m-2s)!t^{2s} \quad (544) \quad 343$$

dioba sa $(-1)^s(2m)!(2m-2s)!t^{2s}$ daje

$$s(2m-2s+1) + (m-2s) = (m-s)(2s+1) \quad (545) \quad 344$$

što je ispravno. Ako je $s=0$, dobijemo

$$\frac{(2m)!(2m-1)!}{2^{2m-1}m!(m-1)!1!c^{2m}} = \frac{(2m)!(2m)!}{2^{2m}m!m!0!c^{2m}} \quad (546) \quad 345$$

što je ispravno. U slučaju, da je m tak broj, može biti $s = \frac{m}{2} = p$,

što daje

$$\frac{p(-1)^p(4p)!(2p+1)!t^{2p}}{p2^{2p}(2p)!0!(2p+1)!c^{2p}} = \frac{(-1)^p(4p)!(2p)!t^{2p}}{2^{2p}(2p)!0!(2p)!c^{2p}} \quad (547) \quad 346$$

što je ispravno. Jednadžba (543) dakle vrijedi.

Izrazi, koji potječu od Q_0 i od prvog člana izraza za Q_2 , daju prema tome prvu sumu u (542). Drugi član izraza za Q_2 daje drugu sumu u (542). Treći član izraza za Q_2 daje članove pete sume u (542), za koje je $r=1$. Četvrti član izraza za Q_2 daje treću sumu u (542). Peti član izraza za Q_2 daje šestu (zadnju) sumu u (542). Suma, koja je pomnožena sa R , odgovara četvrtoj sumi u (542), a suma pomnožena sa T odgovara članovima pete sume u (542), za koje je $r \geq 2$. Formula (542) je time dokazana i vrijedi za $m \geq 2$, kao formula (480), iz koje je proizašla.

5. Redukcija integrala $\int_X^t \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) dx$.

Za kraću oznaku stavimo

$$P_n = \int_X^t \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (548) \quad 347$$

Uvrstimo li u (344) t^2-x^2 mjesto $f(z)$, snizimo n za jednu jedinicu, pomnožimo jednadžbu sa t^2-x^2 i integriramo od X do t , to slijedi

$$t^2 P_n - \int_X^t x^2 \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{4n(n-1)}{c^2} P_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{c^2} P_{n-2}. \quad (549) \quad 348$$

Parcijalna integracija na temelju (346) daje:

$$\begin{aligned} \int_X^t x^2 \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) dx &= \left\{ \frac{2n}{c^2} x \Lambda_{n-1}(c\sqrt{t^2-x^2}) \right\}_{x=X}^{x=t} - \frac{2n}{c^2} P_{n-1} = \\ &= \frac{2nt}{c^2} - \frac{2nX}{c^2} \Lambda_{n-1}(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{2n}{c^2} P_{n-1}. \end{aligned} \quad (550) \quad 349$$

Uvrstimo li to u (549), slijedi rekurziona jednadžba

$$P_n = \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} P_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} P_{n-2} - X \frac{2n}{c^2 t^2} \Lambda_{n-1}(c\sqrt{t^2-X^2}) + 2t \frac{n}{c^2 t^2}. \quad (551) \quad 350$$

S pomoću nje dobije se lako

$$P_2 = \frac{4}{c^2 t^2} P_1 - \frac{8}{c^2 t^2} P_0 - X \frac{4}{c^2 t^2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) + 2t \frac{2}{c^2 t^2} \quad (552) \quad 351$$

$$\begin{aligned} P_3 &= \left(\frac{72}{c^4 t^4} - \frac{24}{c^2 t^2} \right) P_1 - \frac{144}{c^4 t^4} P_0 - X \frac{6}{c^2 t^2} \Lambda_2(c\sqrt{t^2-X^2}) - \\ &- X \frac{72}{c^4 t^4} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) + 2t \left(\frac{36}{c^4 t^4} + \frac{3}{c^2 t^2} \right). \end{aligned} \quad (553) \quad 352$$

Tvrdimo, da je za $n \geq 2$ općenito

$$P_n = A_n P_1 + B_n P_0 + X \sum_{r=1}^{n-1} C_{n,r} \Lambda_r(c\sqrt{t^2-x^2}) + 2tD_n \quad (554) \quad 353$$

ili

$$\int_X^t \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = A_n \int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) dx + B_n \int_X^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx + \\ + X \sum_{r=1}^{n-1} C_{n,r} \Lambda_r(c\sqrt{t^2-x^2}) + 2tD_n \quad (555) \quad 354$$

gdje znači:

$$A_n = \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s)!}{(n-2s+1)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s}} \quad (556)$$

$$B_n = \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-1)!}{(n-2s)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s}} \quad (557) \quad 355$$

$$C_{n,r} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s+1} n! (n-r-s-1)! (2n-2s-2)! (r+s)!}{r! s! (n-r-2s-1)! (n-s-1)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s}} \quad (558) \quad 357$$

$$D_n = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n! (2n-2s-2)!}{s! (n-s-1)! (ct)^{2n-2s}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s} n! (2n-2s-2)!}{(2s)! (n-2s-1)! (ct)^{2n-2s}} \quad (559) \quad 358$$

U zadnjem izrazu otpada za $n = 2$ druga suma.

U svrhu dokaza treba se najprije uvjeriti, da te formule za $n=2$ i $n=3$ daju izraze (552), (553). Dalje ih treba uvrstiti u rekursivnu jednadžbu (551). Uzmimo najprije u obzir članove s P_1 , t.j. članove, koji potječu od izraza (556):

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s)!}{(n-2s+1)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s}} = \\
& = \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-2} (n-1)! (2n-2s-2)!}{(n-2s)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s-2}} - \\
& - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2s-4} (n-2)! (2n-2s-2)!}{(n-2s+1)! (2s-4)! (ct)^{2n-2s-2}} \quad , \quad (560) \quad 359
\end{aligned}$$

pri čemu smo u zadnjoj sumi stavili $s=\bar{s}-1$ i naknadno pisali opet \underline{s} mjesto \bar{s} . Pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n}{2} \quad (561) \quad 360$$

i svedimo opće članove na zajednički nazivnik $(n-2s+1)! (2s-2)! (ct)^{2n-2s}$.

Brojnici onda daju

$$\begin{aligned}
(-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s)! &= 2n(2n-3)(n-2s+1)(-1)^{s+1} 2^{2s-2} (n-1)! (2n-2s-2)! - \\
&- 4n(n-1)(2s-2)(2s-3)(-1)^s 2^{2s-4} (n-2)! (2n-2s-2)! \quad . \quad (562) \quad 361
\end{aligned}$$

Dioba sa $(-1)^{s+1} 2^{2s-2} n! (2n-2s-2)!$ daje

$$(2n-2s)(2n-2s-1) = 2(2n-3)(n-2s+1) + (2s-2)(2s-3) \quad , \quad (563) \quad 362$$

što je ispravno. Za $s=1$ dobijemo

$$\frac{n!(2n-2)!}{(n-1)!0!(ct)^{2n-2}} = \frac{2n(2n-3)(n-1)!(2n-4)!}{(n-2)!0!(ct)^{2n-2}} \quad , \quad (564) \quad 363$$

što je ispravno. Ako je \underline{n} lih broj, može biti $s = \frac{n+1}{2} = p$,

pa dobijemo

$$\frac{(-1)^{p+1} 2^{2p-2} (2p-1)! (2p-2)!}{0! (2p-2)! (ct)^{2p-2}} = \frac{4(2p-1)(2p-2)(-1)^{p+1} 2^{2p-4} (2p-3)! (2p-4)!}{0! (2p-4)! (ct)^{2p-2}} \quad , \quad (565) \quad 364$$

što je ispravno.

Analogno uzmimo sad u obzir članove s P_0 , t.j. koji potječu od izraza (557):

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-1)!}{(n-2s)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s}} = \\ & = \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2s} (n-1)! (2n-2s-3)!}{(n-2s-1)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s-2}} - \\ & - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{s-1} 2^{2s-2} (n-2)! (2n-2s-3)!}{(n-2s)! (2s-3)! (ct)^{2n-2s-2}}. \end{aligned} \quad (566) \quad 365$$

Pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n-1}{2} \quad (567) \quad 366$$

i svedimo na zajednički nazivnik $(n-2s)! (2s-1)! (ct)^{2n-2s}$.

Brojnici daju

$$\begin{aligned} (-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-1)! &= 2n(2n-3)(n-2s)(-1)^s 2^{2s} (n-1)! (2n-2s-3)! - \\ &- 4n(n-1)(2s-1)(2s-2)(-1)^{s-1} 2^{2s-2} (n-2)! (2n-2s-3)! . \end{aligned} \quad (568) \quad 367$$

Dioba sa $(-1)^s 2^{2s} n! (2n-2s-3)!$ daje

$$(2n-2s-1)(2n-2s-2) = 2(2n-3)(n-2s) + (2s-1)(2s-2), \quad (569) \quad 368$$

što je ispravno. Za $s=1$ slijedi

$$- \frac{2^2 n! (2n-3)!}{(n-2)! 1! (ct)^{2n-2}} = - \frac{2n(2n-3) 2^2 (n-1)! (2n-5)!}{(n-3)! 1! (ct)^{2n-2}}, \quad (570) \quad 369$$

što je ispravno. Ako je n tak broj, može biti $s = \frac{n}{2} = p$, pa slijedi

$$\frac{(-1)^p 2^{2p} (2p)! (2p-1)!}{0! (2p-1)! (ct)^{2p}} = - \frac{8p(2p-1) (-1)^{p-1} 2^{2p-2} (2p-2)! (2p-3)!}{0! (2p-3)! (ct)^{2p}}, \quad (571) \quad 370$$

što je ispravno.

Uzmimo sad u obzir članove, koji potječu od ³⁵⁷ (558) za jedan ²⁰ stanovit \bar{d} r . Pretpostavimo ponajprije

$$1 \leq r \leq n-3. \quad (572) \quad 371$$

Dobijemo

$$\begin{aligned} & \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n-r-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s+1} n! (n-r-s-1)! (2n-2s-2)! (r+s)!}{r! s! (n-r-2s-1)! (n-s-1)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s}} = \\ & = \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n-r-2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s+1} (n-1)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s)!}{r! s! (n-r-2s-2)! (n-s-2)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s-2}} - \\ & - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n-r-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2s-1} (n-2)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s-1)!}{r! (s-1)! (n-r-2s-1)! (n-s-2)! (2r+2s-2)! (ct)^{2n-2r-2s-2}} \end{aligned} \quad (573) \quad 372$$

Neka je

$$1 \leq s \leq \frac{n-r-2}{2} \quad (574) \quad 373$$

i svedimo opće članove na nazivnik

$$r! s! (n-r-2s-1)! (n-s-1)! (2r+2s)! (ct)^{2n-2r-2s}.$$

Brojnici daju

$$\begin{aligned} & (-1)^{s+1} 2^{2s+1} n! (n-r-s-1)! (2n-2s-2)! (r+s)! = \\ & = 2n(2n-3)(n-r-2s-1)(n-s-1)(-1)^{s+1} 2^{2s+1} (n-1)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s)! - \\ & - 4n(n-1)s(n-s-1)(2r+2s)(2r+2s-1)(-1)^s 2^{2s-1} (n-2)! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s-1)! \end{aligned} \quad (575) \quad 374$$

Dioba sa $(-1)^{s+1} 2^{2s+2} (n-s-1)n! (n-r-s-2)! (2n-2s-4)! (r+s)!$ daje

$$(n-r-s-1)(2n-2s-3) = (2n-3)(n-r-2s-1) + s(2r+2s-1) \quad (576) \quad 375$$

što je ispravno. Za $s=0$ dobijemo

$$-\frac{2n!(n-r-1)!(2n-2)!r!}{r!0!(n-r-1)!(n-1)!(2r)!(ct)^{2n-2r}} = -\frac{2n(2n-3)2(n-1)!(n-r-2)!(2n-4)!r!}{r!0!(n-r-2)!(n-2)!(2r)!(ct)^{2n-2r}}, \quad (577) \quad 376$$

što je ispravno. Ako je $n-r-1$ tak broj, može biti

$$s = \frac{n-r-1}{2} = p, \text{ pa dobijemo}$$

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^{p+1}2^{2p+1}(2p+r+1)!p!(2p+2r)!(r+p)!}{r!p!0!(p+r)!(2r+2p)!(ct)^{2p+2}} &= \\ &= \frac{4(2p+r+1)(2p+r)(-1)^{2p+1}2^{2p-1}(2p+r-1)!(p-1)!(2p+2r-2)!(r+p-1)!}{r!(p-1)!0!(p+r-1)!(2r+2p-2)!(ct)^{2p+2}}, \end{aligned} \quad (578) \quad 377$$

što je ispravno.

Ako je

$$r = n-2, \quad (579) \quad 378$$

otpada zadnja suma, a u ostalim je moguća samo vrijednost $s=0$, pa

dobijemo

$$-\frac{2n!1!(2n-2)!(n-2)!}{(n-2)!0!1!(n-1)!(2n-4)!(ct)^4} = -\frac{2n(2n-3)2(n-1)!0!(2n-4)!(n-2)!}{(n-2)!0!0!(n-2)!(2n-4)!(ct)^4}, \quad (580) \quad 379$$

što je ispravno.

Ako je

$$r = n-1 \quad (581) \quad 380$$

dobijemo samo sumu na lijevoj strani sa $s = 0$, ali prema rekursivnoj

jednadžbi (551) pridolazi još na desnoj strani sumand $-\frac{2n}{c^2t^2}$,

dakle

$$-\frac{2n!0!(2n-2)!(n-1)!}{(n-1)!0!0!(n-1)!(2n-2)!(ct)^2} = -\frac{2n}{c^2t^2}, \quad (582) \quad 381$$

što je ispravno. Time su članovi, koji potječu od (558) uzeti

u obzir. Svi ostali članovi, koji dakle potječu od (559), daju:

$$\begin{aligned}
& \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n!(2n-2s-2)!}{s!(n-s-1)!(ct)^{2n-2s}} + \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s} n!(2n-2s-2)!}{(2s)!(n-2s-1)!(ct)^{2n-2s}} = \\
& = \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{n-2} \frac{(n-1)!(2n-2s-4)!}{s!(n-s-2)!(ct)^{2n-2s-2}} + \\
& + \frac{2n(2n-3)}{c^2 t^2} \sum_{s=1}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s} (n-1)!(2n-2s-4)!}{(2s)!(n-2s-2)!(ct)^{2n-2s-2}} - \\
& - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{n-2} \frac{(n-2)!(2n-2s-4)!}{(s-1)!(n-s-2)!(ct)^{2n-2s-2}} - \\
& - \frac{4n(n-1)}{c^2 t^2} \sum_{s=2}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s 2^{2s-2} (n-2)!(2n-2s-4)!}{(2s-2)!(n-2s-1)!(ct)^{2n-2s-2}} + \frac{n}{c^2 t^2} \quad \text{B} \\
& \qquad \qquad \qquad (n = 4, 5, 6, \dots) \quad \cdot \quad (583) \quad 382
\end{aligned}$$

Zadnja suma otpada za $n=4$.

za

$$s = 1$$

(584) 383

dobijemo

$$\begin{aligned}
& \frac{n!(2n-4)!}{1!(n-2)!(ct)^{2n-2}} + \frac{2^2 n!(2n-4)!}{2!(n-3)!(ct)^{2n-2}} = \\
& = \frac{2n(2n-3)(n-1)!(2n-6)!}{1!(n-3)!(ct)^{2n-2}} + \frac{2n(2n-3)2^2(n-1)!(2n-6)!}{2^2(n-4)!(ct)^{2n-2}} \quad \cdot \quad (585) \quad 384
\end{aligned}$$

Svedimo na nazivnik $2(n-2)!(ct)^{2n-2}$. Brojčnici daju

$$\begin{aligned}
& 2n!(2n-4)! + (n-2)2^2 n!(2n-4)! = 2(n-2)2n(2n-3)(n-1)!(2n-6)! + \\
& + (n-2)(n-3)2n(2n-3)2^2(n-1)!(2n-6)! \quad \cdot \quad (586) \quad 385
\end{aligned}$$

Dioba ss $2n!(2n-4)(2n-6)!$ daje

$$(2n-5) + 2(n-2)(2n-5) = (2n-3) + 2(n-3)(2n-3) \quad \cdot \quad (587) \quad 386$$

što je ispravno.

Za

$$s \geq 2$$

(588) 381

uzmimo najprije u obzir samo prvu sumu lijevo i prvu i treću sumu desno u ³⁸²jednažbi (583). Zajednički nazivnik će biti $s!(n-s-1)!(ct)^{2n-2s}$, a pretpostavlja se

$$2 \leq s \leq n-2 \quad (589) \quad 385$$

Brojnici daju

$$\begin{aligned} n!(2n-2s-2)! &= 2n(2n-3)(n-s-1)(n-1)!(2n-2s-4)! - \\ &- 4n(n-1)s(n-s-1)(n-2)!(2n-2s-4)! . \end{aligned} \quad (590) \quad 389$$

Dioba sa $n!(2n-2s-2)(2n-2s-4)!$ daje

$$n-2s-3 = (2n-3) - 2s , \quad (591) \quad 390$$

što je ispravno. Za $s = n-1$ treba uzeti u obzir i zadnji član u (583):

$$\frac{n!0!}{(n-1)!0!(ct)^2} = \frac{n}{c^2t^2} \quad (592) \quad 391$$

I ovo je ispravno.

Uzmimo sad u obzir drugu sumu lijevo i drugu i četvrtu sumu desno u ³⁹²(583) i pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n-2}{2} . \quad (593) \quad 392$$

Zajednički nazivnik je $(2s)!(n-2s-1)!(ct)^{2n-2s}$, a brojnici daju

$$\begin{aligned} (-1)^{s+1}2^{2s}n!(2n-2s-2)! &= 2n(2n-3)(n-2s-1)(-1)^{s+1}2^{2s}(n-1)!(2n-2s-4)! - \\ &- 4n(n-1)2s(2s-1)(-1)^s2^{2s-2}(n-2)!(2n-2s-4)! . \end{aligned} \quad (594) \quad 393$$

Dioba sa $(-1)^{s+1}2^{2s+1}n!(2n-2s-4)!$ daje

$$(n-s-1)(2n-2s-3) = (2n-3)(n-2s-1) + s(2s-1) , \quad (595) \quad 394$$

što je ispravno. Za slučaj, da je $\frac{n-1}{2}$ tak broj, može biti $s = \frac{n-1}{2} = p$, pa druga suma lijevo i četvrtu suma desno u ³⁹⁵(583) daju

$$\frac{(-1)^{p+1}2^{2p}(2p+1)!(2p)!}{(2p)!0!(ct)^{2p+2}} = - \frac{4(2p+1)2p(-1)^p2^{2p-2}(2p-1)!(2p-2)!}{(2p-2)!0!(ct)^{2p+2}} , \quad (596) \quad 395$$

što je ispravno. Time je cijeli dokaz proveden.

- 110 -

$$6. \text{ Redukcija integrala } \int_X^t x^m \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) dx .$$

Izvršimo li na temelju (346) parcijalnu integraciju

$$\int_X^t x^m \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{2n}{c^2} \left\{ t^{m-1} - x^{m-1} \Lambda_{n-1}(c\sqrt{t^2-x^2}) \right\} -$$

$$- \frac{2n(m-1)}{c^2} \int_X^t x^{m-2} \Lambda_{n-1}(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \quad (597) \quad (346)$$

dovoljan broj puta, dolazimo bez poteškoća do ovih formula:

a/ za $m=2r$ i $r \leq n$:

$$\int_X^t x^{2r} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) dx =$$

$$= \sum_{s=1}^r \frac{(-1)^{s+1} n!(2r)!(r-s)!}{c^{2s} (n-s)! r! (2r-2s+1)!} \left\{ t^{2r-2s+1} - x^{2r-2s+1} \Lambda_{n-s}(c\sqrt{t^2-x^2}) \right\} +$$

$$+ (-1)^r \frac{n!(2r)!}{c^{2r} (n-r)! r!} \int_X^t \Lambda_{n-r}(c\sqrt{t^2-x^2}) dx . \quad (598) \quad (347)$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti pomoću (555).

b/ za $m=2r$ i $r > n$:

$$\int_X^t x^{2r} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) dx =$$

$$= \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{s+1} n!(2r)!(r-s)!}{c^{2s} (n-s)! r! (2r-2s+1)!} \left\{ t^{2r-2s+1} - x^{2r-2s+1} \Lambda_{n-s}(c\sqrt{t^2-x^2}) \right\} +$$

$$+ (-1)^n \frac{n!(2r)!(r-n)!}{c^{2n} r! (2r-2n)!} \int_X^t x^{2r-2n} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx . \quad (599) \quad (348)$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti pomoću (542).

c/ za $m = 2r+1$ i $r < n$:

$$\int_X^t x^{2r+1} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{r+1} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-1} n! r!}{c^{2s} (n-s)! (r-s+1)!} \left\{ t^{2r-2s+2} x^{2r-2s+2} \Lambda_{n-s}(c\sqrt{t^2-x^2}) \right\} \quad (600)$$

d/ za $m = 2r+1$ i $r \geq n$:

$$\int_X^t x^{2r+1} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) dx =$$

$$= \sum_{s=1}^n \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-1} n! r!}{c^{2s} (n-s)! (r-s+1)!} \left\{ t^{2r-2s+2} x^{2r-2s+2} \Lambda_{n-s}(c\sqrt{t^2-x^2}) \right\} +$$

$$+ (-1)^n \frac{2^{2n} n! r!}{c^{2n} (r-n)!} \int_X^t x^{2r-2n+1} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx. \quad (601)$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti pomoću (534).

7. Derivacije po t integrala $\int_K^t x^n \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx$.

Služeći se kraticom (548) tvrdimo, da vrijedi

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} P_0 = f_n(t) P_0 + g_n(t) P_1 + \dots \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (602)$$

gdje je za $r = 0, 1, 2, \dots$

$$f_{2r}(t) = (-1)^r c^{2r} \quad (603)$$

$$g_{2r}(t) = 0 \quad (604)$$

$$f_{2r+1}(t) = 0 \quad (605)$$

$$g_{2r+1}(t) = \frac{(-1)^{r+1} c^{2r+2} t}{2} \quad (606)$$

a tečkice na desnoj strani od (602) znače članove, koji ne sadržavaju integrala. Jednačba (602) je očito ispravna za $n=0$, što odgovara $r=0$ u (603), (604). Pretpostavimo, da je ispravna za neki n i diferenciramo jednačbu po t . Pomoću (346) dobijemo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ f_n(t) P_0 + g_n(t) P_1 + \dots \right\} &= \\ &= f'_n(t) P_0 + f_n(t) - \frac{c^2 t}{2} f_n(t) P_1 + g'_n(t) P_1 + g_n(t) - \frac{c^2 t}{4} g_n(t) P_2 + \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (607)$$

Uvrstimo li (552), slijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ f_n(t) P_0 + g_n(t) P_1 + \dots \right\} &= \\ &= \left[f'_n(t) + \frac{2}{t} g_n(t) \right] P_0 + \left[g'_n(t) - \frac{c^2 t}{2} f_n(t) - \frac{1}{t} g_n(t) \right] P_1 + \dots \end{aligned} \quad (608)$$

Prema tome funkcije $f_n(t)$, $g_n(t)$ zadovoljavaju rekurzione jednačbe

$$f_{n+1}(t) = f'_n(t) + \frac{2}{t} g_n(t) \quad (609)$$

$$g_{n+1}(t) = g'_n(t) - \frac{c^2 t}{2} f_n(t) - \frac{1}{t} g_n(t). \quad (610)$$

Lako je uvjeriti se, da izrazi (603), (604), (605), (606) zadovoljavaju ove rekurzivne jednačbe, čime je dokaz proveden.

Tvrdimo dalje, da vrijedi:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (tP_1) = \varphi_n(t) P_0 + \psi_n(t) P_1 + \dots \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (611)$$

gdje je za $r=0,1,2,\dots$

$$\varphi_{2r}(t) = 0 \quad (612)$$

$$\psi_{2r}(t) = (-1)^r c^{2r} t \quad (613)$$

$$\varphi_{2r+1}(t) = (-1)^r 2 c^{2r} \quad (614)$$

$$\psi_{2r+1}(t) = 0. \quad (615)$$

Iz (605), (606) slijedi za $r=0$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_0 = -\frac{c^2}{2} tP_1 + \dots \quad (616)$$

dakle

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} (tP_1) = -\frac{2}{c^2} \frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} P_0 + \dots = -\frac{2}{c^2} \left[f_{n+1}(t) P_0 + g_{n+1}(t) P_1 \right] + \dots \quad (617)$$

ili

$$\varphi_n(t) = -\frac{2}{c^2} f_{n+1}(t) \quad (618)$$

$$\psi_n(t) = -\frac{2}{c^2} g_{n+1}(t) \quad (619)$$

čime je dokaz proveden.

Ograničimo li se na članove najviših potencija od t , koji su pomnoženi sa P_0 ili P_1 , to dobijemo na temelju (542), (602) i (611):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} \int_X^t x^{4n} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ t^{2n} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 + \right. \\ & + 4nr t^{2n-1} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} P_0 - \frac{n(2n+1)}{2} t^{2n-1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) - \\ & \left. - nr(2n+1)(2n-1) t^{2n-2} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} (tP_1) \right\} + \dots = \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ (-1)^r c^{2r} t^{2n} P_0 + \right. \\ & + (-1)^r 2nr c^{2r} t^{2n} P_1 - (-1)^r \frac{n(2n+1)}{2} c^{2r} t^{2n} P_1 - \\ & \left. - (-1)^{r-1} 2nr(2n+1)(2n-1) c^{2r-2} t^{2n-2} P_0 \right\} + \dots = \\ & = \frac{(-1)^{n+r} (4n)!}{2^{2n} c^{2n-2r} (2n)!} \left\{ t^{2n} P_0 + \frac{n(4r-2n-1)}{2} t^{2n} P_1 \right\} + \dots \quad (620) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} \int_X^t x^{4n} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ t^{2n} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} P_0 + \right. \\ & + 2n(2r+1) t^{2n-1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 - \frac{n(2n+1)}{2} t^{2n-1} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} (tP_1) - \\ & \left. - \frac{n(2r+1)(2n+1)(2n-1)}{2} t^{2n-2} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) \right\} = \\ & = \frac{(-1)^n (4n)!}{2^{2n} c^{2n} (2n)!} \left\{ (-1)^{r+1} \frac{1}{2} c^{2r+2} t^{2n+1} P_1 + (-1)^r 2n(2r+1) c^{2r} t^{2n-1} P_0 + \right. \\ & \left. + (-1)^{r+1} n(2n+1) c^{2r} t^{2n-1} P_0 + (-1)^{r+1} \frac{n(2r+1)(2n+1)(2n-1)}{2} c^{2r} t^{2n-1} P_1 \right\} + \dots = \\ & = \frac{(-1)^{n+r} (4n)!}{2^{2n} c^{2n-2r} (2n)!} \left\{ n(4r-2n+1) t^{2n-1} P_0 - \frac{c^2}{2} t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots \quad (621) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} \int_x^t x^{4n+2} \bigwedge_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ 2(n+1)(2n+1)t^{2n} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 + \right.$$

$$+ 8nr(n+1)(2n+1)t^{2n-1} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} P_0 + c^2 t^{2n+1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) +$$

$$\left. + 2r(2n+1)c^2 t^{2n} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} (tP_1) \right\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ (-1)^r 2(n+1)(2n+1)c^{2r} t^{2n} P_0 + \right.$$

$$+ (-1)^r 4nr(n+1)(2n+1)c^{2r} t^{2n} P_1 + (-1)^r c^{2r+2} t^{2n+2} P_1 +$$

$$\left. + (-1)^{r-1} 4r(2n+1)c^{2r} t^{2n} P_0 \right\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^{n+r} (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n-2r+2} (2n+1)!} \left\{ 2(2n+1)(n-2r+1)t^{2n} P_0 + c^2 t^{2n+2} P_1 \right\} + \dots$$

(622) 121

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} \int_x^t x^{4n+2} \bigwedge_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx = \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ 2(n+1)(2n+1)t^{2n} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} P_0 + \right.$$

$$+ 4n(n+1)(2n+1)(2r+1)t^{2n-1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_0 + c^2 t^{2n+1} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} (tP_1) +$$

$$\left. + (2n+1)(2r+1)c^2 t^{2n} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) \right\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^n (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n+2} (2n+1)!} \left\{ (-1)^{r+1} (n+1)(2n+1)c^{2r+2} t^{2n+1} P_1 + \right.$$

$$+ (-1)^r 4n(n+1)(2n+1)(2r+1)c^{2r} t^{2n-1} P_0 + (-1)^r 2c^{2r+2} t^{2n+1} P_0 +$$

$$\left. + (-1)^r (2n+1)(2r+1)c^{2r+2} t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^{n+r} (4n+2)!}{2^{2n+2} c^{2n-2r} (2n+1)!} \left\{ 2 t^{2n+1} P_0 + (2n+1)(2r-n)t^{2n+1} P_1 \right\} + \dots$$

(623) 122

III. D I OIntegralni teoremi Besselovih
funkcija.1. Jedna temeljna Laplaceova transformacija.

U Laplaceovoj transformaciji

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} F(t) dt \quad (624) \quad 1$$

zvat ćemo $F(t)$ prvotnom funkcijom (njem. "Objektfunktion"), a $f(s)$ izvedenom funkcijom (njem. "Resultatfunktion").

Doetsch daje u svojoj knjizi o Laplaceovoj transformaciji*) na stranama 401 do 403 tablicu prvotnih funkcija s pripadnim izvedenim funkcijama. Pod brojem 38 te tablice dane su funkcije

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq \alpha \\ J_0(k\sqrt{t^2 - \alpha^2}) & \text{za } t > \alpha \end{cases} \quad (625) \quad 2$$

$$f(s) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{s^2+k^2}}}{\sqrt{s^2+k^2}} \quad (626) \quad 3$$

s naznakom $\alpha \geq 0$, k povoljan, apscisa konvergencije $\beta = 0$.
To dakle znači, da je Laplaceov integral (624) s funkcijom (625) konvergentan za $\text{Re}(s) > 0$, a divergentan za $\text{Re}(s) < 0$. Ovo je međutim ispravno samo onda, ako je k realan broj, što u Doetschovoj tablici nije naznačeno, a nije naznačeno ni na str. 373 spomenute

*) G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplacetransformation, Springer, Berlin 1937.

2, V. S. (iz knjige I²)

knjige, gdje je ta transformacija napisana ovako:*)

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\sigma \tau} J_0(k\sqrt{\tau^2 - \alpha^2}) d\tau = \frac{e^{-\alpha\sqrt{\sigma^2 + k^2}}}{\sqrt{\sigma^2 + k^2}} \quad (\alpha \geq 0, \sigma > 0, \underline{k} \text{ povoljan}) \quad (627)$$

Ova je formula utoliko specijalnija, što se traži $\sigma > 0$, dakle σ realan, dok naznaka za apscisu kongergencije $\beta = 0$ u tablici dopušta kompleksan s (koj~~e~~ odgovara varijabli σ), za koj~~e~~ je $\text{Re}(s) > 0$.

- *) Kao izvor se tamo navodi G.N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922, str. 416, formula (4), u kojoj treba supstituirati $t^2 - y^2 = \tau^2$, $a = \sigma$, $b = k$, $y^2 = -\alpha^2$.
 Autor nije imao uvida u tu knjigu.

Možemo još ukazati na R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Teubner, Leipzig und Berlin 1937, str. 110, formula (18), koja glasi

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k^2}|z|} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - k^2}} \quad (627a)$$

gdje je $R = \sqrt{r^2 + z^2}$. Naznačeno je, da $\sqrt{\lambda^2 - k^2}$ mora imati

takav predznak, da bude $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \sqrt{\lambda^2 - k^2} = +1$. Citirano je

A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 28, 665, 1909. Nedostaje diskusija dopustivih vrijednosti od \underline{k} . Očito je, da se integral ne mijenja, ako \underline{k} nadomjestimo sa $-\underline{k}$, dok se lijeva strana ^{ne mijenja} jednadžbe mijenja. Može se pokazati, da imaginarni dio od \underline{k} mora biti veći od nule. Ako je \underline{k} čisto imaginaran i taj imaginarni dio pozitivan, stavimo $k = i\alpha$, čime je $\alpha > 0$, dalje stavimo $|z| = \sigma$, $r = c$, $\lambda = +\sqrt{\tau^2 - \alpha^2}$, $R = \sqrt{r^2 + z^2} = \sqrt{c^2 + z^2}$, pa dobijemo (527), gdje samo piše \underline{c} mjesto \underline{k} . Ako \underline{k} nije čisto

Uvjet, da \underline{k} treba da bude realan, ne da se ni iz čega naslutiti, jer se u toj tablici za konstante u raznim funkcijama dopuštaju kompleksne vrijednosti, što je vidljivo iz funkcija pod brojevima 4 do 9, gdje su apscise konvergencije ovisne o realnim, odnosno imaginarnim dijelovima dotičnih konstanta.

S obzirom na to, da je jednačina (627) temelj naših daljih razmatranja, to ćemo provesti točnu diskusiju konvergencije toga Laplaceovog integrala za slučaj kompleksnog \underline{k} , premda nam ne će svi ti rezultati biti potrebni.

imaginarni, dobijemo istu formulu, ali s kompleksnim α , a krivulja integracije polazi od α i teži prema $+\infty$. Formula (627) je i za taj slučaj ispravna, što se neposredno uvidja analitičkim produživanjem.

Formula (627a) dana je i u Frank - Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Vieweg, Braunschweig 1935, II. sv. str. 924, formula (11). Ni ovdje nisu diskutirane dopustive vrijednosti od \underline{k} , samo je na strani 923 kod formule (9a) primjedba, da \underline{k} mora biti odabran, tako, da

integrand integrala $\int_0^{\infty} e^{i(k+\lambda \cos \beta) \rho} d\rho$ iščezava za $\rho = \infty$, što se posti- zava sličnim predznakom od \underline{k} , odnosno za realan \underline{k} time, da se λ odabere kompleksan. Očito je, da se to slaže s našom primjedbom, da imaginarni dio od \underline{k} mora biti pozitivan. Kompleksan λ za formulu (627a) nema smisla, jer je to realna varijabla integracije.

Dalje se nalaz^e u I. sv. istog djela (1930) str. 825, formule (32), (31), koje glase:

$$k v \int_0^{\infty} e^{-p\alpha - \rho \left(\alpha + \frac{x}{v} \right)} J_0 \left(i \rho \sqrt{\alpha^2 + 2\alpha \frac{x}{v}} \right) d\alpha = \frac{1}{p.H(x,p)} \quad (627b)$$

Napišimo integral u (627) s našim kasnijim oznakama:

$$L = \int_x^{\infty} e^{-st} J_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dt \quad (x \geq 0) \quad (628)$$

i stavimo općenito

$$s = s_1 + is_2 \quad (629)$$

$$c = c_1 + ic_2 \quad (630)$$

Budući da je prema (340)

$$J_0(z) = J_0(-z) \quad (631)$$

to možemo promjenom predznaka od c uvijek postići, da bude

$$c_2 > 0 \quad (632)$$

ili

$$c_1 > 0, \quad c_2 = 0 \quad (633)$$

Konvergencija integrala (628) na donjoj granici nije u pitanju,

sa

$$\frac{1}{H(x,p)} = K v \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2\varphi}{p}}} e^{-\frac{xp}{v} \left[\sqrt{1 + \frac{2\varphi}{p}} - 1 \right]} \quad (627c)$$

Na citiranom mjestu je u eksponentu eksponencijalne funkcije pod integralom pomutnjom ispušten sumand $-p\alpha$. [I ovdje je citirano A. Sommerfeld, Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie, Ann. d. Phys. 28 (1909), str. 665 ff., naročito str. 683.] Stavimo li u (627b), (627c) $\varphi = -ik$, $p = \sigma + ik$, $\frac{x}{v} = \beta$, $\alpha = \tau - \beta$, dobijemo opet formulu (627), u kojoj samo piše β mjesto α .

jer je tamo prema (340) integrand kontinuiran. Radi se dakle o konvergenciji obzirom na gornju granicu. Poslužit ćemo se asimptotičkim razvojem*)

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \left[\sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{(\nu, 2m)}{(2z)^{2m}} + o(|z|^{-2M}) \right] - \right. \\ \left. - \sin\left(z - \frac{\nu}{2}\pi - \frac{\pi}{4}\right) \left[\sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m \frac{(\nu, (2m+1))}{(2z)^{2m+1}} + o(|z|^{-2M-1}) \right] \right\} \quad (634)$$

gdje znači

$$(\nu, m) = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2) \dots [4\nu^2 - (2m-1)^2]}{2^{2m} m!}, \quad (\nu, 0) = 1 \quad (635)$$

a pretpostavlja se

$$-\pi < \arg z < \pi \quad (636)$$

Ovaj potonji uvjet bit će za nas ispunjen obzirom na (633) i obzirom na to, da je $\sqrt{t^2 - x^2} \geq 0$.

Stavimo li u (634) ¹¹

$$\nu = 0, \quad M = 1, \quad (637)$$

to dobijemo

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \left[1 + o(|z|^{-2}) \right] - \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \left[-\frac{1}{8z} + o(|z|^{-3}) \right] \right\} = \\ = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \frac{e^{i(z - \frac{\pi}{4})} + e^{-i(z - \frac{\pi}{4})}}{2} \left[1 + o(|z|^{-2}) \right] - \frac{e^{i(z - \frac{\pi}{4})} - e^{-i(z - \frac{\pi}{4})}}{2} \left[-\frac{1}{8z} + o(|z|^{-3}) \right] \right\} =$$

*) R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Teubner, Leipzig und Berlin 1937, str. 47.

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi z}} \left\{ e^{i(z - \frac{\pi}{4})} \left[1 + o(|z|^{-1}) \right] + e^{-i(z - \frac{\pi}{4})} \left[1 + o(|z|^{-1}) \right] \right\}. \quad (638)$$

Uvrstimo li sad

$$z = c \sqrt{t^2 - x^2} = (c_1 + ic_2)t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} \quad (639)$$

i uočimo, da zbog

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{c \sqrt{t^2 - x^2}}{t} = c \quad (640)$$

iz egzistencije konačnog $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup \left[c \sqrt{t^2 - x^2} f(t) \right]$ očito slijedi
i egzistencija konačnog $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup [t f(t)]$, t.j. da mjesto

$O(|c \sqrt{t^2 - x^2}|^{-1})$ možemo pisati $O(t^{-1})$, to dobijemo

$$\begin{aligned} J_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) &= \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi z}} \frac{1}{t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} \left\{ e^{ic_1 t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} e^{-c_2 t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} \left[1 + o(t^{-1}) \right] \right\} + \\ &+ \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} \left\{ e^{-ic_1 t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} e^{c_2 t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} \left[1 + o(t^{-1}) \right] \right\}, \quad (641) \end{aligned}$$

tako da za integrand od (628) vrijedi asimptotički razvoj

$$\begin{aligned} e^{-st} J_0(c \sqrt{t^2 - x^2}) &= \frac{e^{-i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} \left\{ e^{i(c_1 - s_2)t} e^{ic_1 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} \right. \\ &\cdot e^{-(c_2 + s_1)t} e^{-c_2 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} \left. \left[1 + o(t^{-1}) \right] \right\} + \\ &+ \frac{e^{i \frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{t \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} \left\{ e^{-i(c_1 + s_2)t} e^{-ic_1 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} \right. \end{aligned}$$

- 122 -

$$\cdot e^{(c_2-s_1)t} e^{c_2 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} \left[1 + o(t^{-1}) \right] \quad (643) \quad 19$$

Zbog

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) = 0 \quad (644) \quad 20$$

vrijedi

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{ic_1 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-ic_1 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-c_2 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{c_2 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} = 1 \end{aligned} \quad (645) \quad 21$$

Dalje je očitno

$$\left| e^{i(c_1-s_2)t} \right| = \left| e^{-i(c_1+s_2)t} \right| = 1 \quad (646) \quad 22$$

i

$$\frac{1}{\sqrt{t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} \right)}} = o\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (647) \quad 23$$

Pretpostavimo li sad

$$s_1 > c_2 \quad (648) \quad 24$$

to se vidi obzirom na (632), da eksponenti eksponencijalnih funkcija $e^{-(c_2+s_1)t}$ i $e^{(c_2-s_1)t}$ postaju negativni i da integral mora biti apsolutno konvergentan.

Pretpostavimo dalje

$$s_1 = c_2 > 0 \quad (649) \quad 25$$

$$s_2 = -c_1 \quad (650) \quad 26$$

to se vidi, da funkcija $e^{-(c_2+s_1)t}$ i sad ima negativan eksponent

i da će stoga prvi sumand izraza na desnoj strani od (643) dati apsolutno konvergentan integral. Drugi sumand tog izraza će glasiti

$$S_2 = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}c} \frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} \left\{ e^{-ic_1 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right)} + e^{ic_2 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right)} \right\} [1 + o(t^{-1})] \quad (651)$$

Obzirom na (645) i (647) dat će član $o(t^{-1})$ u uglatoj zagradi apsolutno konvergentan integral.

Prema (645) možemo staviti

$$e^{-ic_1 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right)} + e^{ic_2 t \left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right)} = 1 + \delta_1 + i\delta_2 \quad (652)$$

gdje je

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_1 = 0 \quad (653)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \delta_2 = 0 \quad (654)$$

t.j. za povoljno maleni zadani ε može se naći T tako, da za

$$t > T \quad (655)$$

vrijedi

$$|\delta_1| < \varepsilon \quad (656)$$

i prema tome

$$1 + \delta_1 > 1 - \varepsilon \quad (657)$$

Budući da je osim toga

$$\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} > \frac{1}{\sqrt{t}} \quad (658)$$

to je

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t} \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} e^{-ic_1 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} e^{c_2 t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t} \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} (1 + \delta_1) > \frac{1 - \varepsilon}{\sqrt{t}} \quad \text{za } t > T \quad (659)$$

i prema tome taj dio daje divergentan integral. Integral (628) je dakle pod pretpostavkom (649), (650) divergentan, tako da je po poznatim stavcima*) apscisa konvergencije, a ujedno i apscisa apsolutne konvergencije

$$\beta = c_2. \quad (660)$$

U točki $s_1 = c_2 > 0$, $s_2 = -c_1$ pravca konvergencije $s_1 = c_2 > 0$ divergira dakle integral (628). Preostaje još istražiti, da li je taj integral konvergentan u ostalim točkama pravca konvergencije. (Svakako on u tim točkama ne može biti apsolutno konvergentan, jer pravac apsolutne konvergencije pripada ili sav, ili ne pripada nikako području apsolutne konvergencije**). Konačno još treba posebno diskutirati slučaj $c_2 = 0$.

Pretpostavimo dakle ponajprije

$$s_2 = c_2 > 0 \quad (661)$$

$$s_2 \neq -c_1. \quad (662)$$

*) Doetsch, l.c. 3. pogl. § 2. str. 13 itd.

**) Doetsch, l.c. str. 15.

Prvi sumand izraza na desnoj strani od (643) dat će zbog (660) apsolutno konvergentan integral, isto tako dio drugog sumanda, koji je pomnožen sa $O(t^{-1})$. Preostaje još izraz

$$R = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{\sqrt{t} \sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} e^{-i(c_1+s_2)t} e^{(c_2-ic_1)t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} \quad (663)$$

Red potencija

$$\begin{aligned} y &= t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right) = -t \left(\frac{x^2}{2t^2} + \frac{x^4}{8t^4} + \frac{x^6}{16t^6} + \frac{3x^8}{128t^8} + \dots \right) = \\ &= - \left(\frac{x^2}{2t} + \frac{x^4}{8t^3} + \dots \right) \end{aligned} \quad (664)$$

možemo uvrstiti u razvoj

$$e^{(c_2-ic_1)y} = 1 + \frac{(c_2-ic_1)y}{1!} + \frac{(c_2-ic_1)^2 y^2}{2!} + \dots, \quad (665)$$

što je dozvoljeno, jer je za dovoljno veliki t red (664) apsolutno konvergentan i suma apsolutnih vrijednosti njegovih članova manja od radija konvergencije reda (665)*). (Taj radij konvergencije je neizmjerljivo velik). Dobijemo dakle

$$\begin{aligned} e^{(c_2-ic_1)t \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}} - 1 \right)} &= 1 - (c_2-ic_1) \left(\frac{x^2}{2t} + \frac{x^4}{8t^3} + \dots \right) + \\ &+ \frac{1}{2!} (c_2-ic_1)^2 \left(\frac{x^2}{2t} + \frac{x^4}{8t^3} + \dots \right)^2 - \frac{1}{3!} (c_2-ic_1)^3 \left(\frac{x^2}{2t} + \frac{x^4}{8t^3} + \dots \right)^3 + \dots = \end{aligned}$$

*) Usporedi na pr. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, Berlin 1922, str. 173.

$$= 1 - (c_2 - ic_1) \frac{x^2}{2t} + (c_2 - ic_1)^2 \frac{x^4}{8t^2} - (c_2 - ic_1) \left[1 + \frac{1}{6}(c_2 - ic_1)^2 x^2 \right] \frac{x^4}{8t^3} + \dots \quad (666) \quad 42$$

Dalje vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{t^2}}} = 1 + \frac{x^2}{4t^2} + \frac{5x^4}{32t^4} + \frac{15x^6}{128t^6} + \dots \quad (667) \quad 43$$

Produkt apsolutno konvergentnih redova (666) i (667) daje

$$\begin{aligned} R &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-i(c_1+s_2)t} \left\{ 1 - (c_2 - ic_1) \frac{x^2}{2t} + \left[(c_2 - ic_1)^2 \frac{x^2}{2} + 1 \right] \frac{x^2}{4t^2} - \dots \right\} = \\ &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{e^{-i(c_1+s_2)t}}{\sqrt{t}} \left[1 + o(t^{-1}) \right]. \quad (668) \quad 44 \end{aligned}$$

Dio toga izraza, koji je pomnožen sa $o(t^{-1})$ daje očitno apsolutno konvergentan integral, a ostali dio za $c_1 + s_2 \neq 0$ (vidi (652)) uvjetno konvergentan integral, što je lako dokazati*). Prema tome je pod uvjetima (661), (662) integral (628) uvjetno konvergentan.

Pretpostavimo konačno

$$s_1 = c_2 = 0 \quad (669) \quad 45$$

$$c_1 > 0. \quad (670) \quad 46$$

Za

$$s_2 = -c_1 \quad (671) \quad 47$$

daje drugi član od (643) divergentan integral, što smo već prije

(*) Taj integral je dobro poznat. Zna se daje

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1+i).$$

Usporedi C. Jordan, Cours d'analyse de l'école polytechnique, Gauthier-Villard, Paris 1913, II. sv. str. 201.

dokazali (neovisno od toga, da li vrijedi (661) ili (669)).
Prvi član će dati uvjetno konvergentan integral, (a ne apsolutno konvergentan, kao pod pretpostavkom (661)), što slijedi na analogan način, kao što je bio upotrijebljen, da se izvede (668). Integral (628) je dakle pod pretpostavkom (669), (670), (671) divergentan.

Za

$$s_2 = c_1 \quad (672) \quad 48$$

uz (669), (670) dat će prvi član od (643) divergentan integral, a drugi član uvjetno konvergentan, dakle je integral (628) divergentan. Ako ne vrijedi ni (671) ni (672), dat će oba člana od (643) uvjetno konvergentne integrale, tako da je integral (628) konvergentan. Vidi se dakle, da je za $c_2 = 0$ na pravcu konvergencije $s_1 = 0$ integral (628) divergentan u dvije točke, $s_2 = -c_1$ i $s_2 = c_1$.

Slučaj

$$c_1 = c_2 = 0 \quad (673) \quad 49$$

je trivijalan, jer je onda Besselova funkcija u integralu (628) identično jednaka jedan.

Oslobodimo li se pretpostavke (632), odnosno (633), to možemo dobivene rezultate izraziti ovako:

STAVAK III.1.

Stavimo li

$$c = c_1 + ic_2 \quad (674) \quad 50$$

to je apscisa konvergencije integrala

$$L = \int_x^\infty e^{-st} J_0(c\sqrt{t^2 - x^2}) dt \quad (675) \quad 51$$

dana sa

$$\beta = |c_2| \quad (676) \quad 52$$

Ako je

$$c_2 \neq 0 \quad (677) \quad 53$$

to je integral na pravcu konvergencije svagdje uvjetno konvergentan, osim u točki $(|c_2|, -c_1 \operatorname{sgn} c_2)$, gdje je divergentan.

Ako je

$$c_2 = 0, \quad c_1 \neq 0, \quad (678) \quad 54$$

integral je na pravcu konvergencije svagdje uvjetno konvergentan, osim u točkama $(0, c_1)$, $(0, -c_1)$, gdje je divergentan.

Slučaj

$$c_1 = c_2 = 0 \quad (679) \quad 55$$

je trivijalan i integral je u tom slučaju na cijelom pravcu konvergencije divergentan.

Potpunosti radi primjećujemo, da je analogno kod Laplaceovih transformacija, koje odgovaraju funkcijama pod brojem 34 i 35 Doetschove tablice, i koje glase

$$\int_0^{\infty} e^{-st} \frac{J_{\nu}(at)}{t} dt = \frac{(\sqrt{s^2 + a^2} - s)^{\nu}}{\nu a^{\nu}} \quad (\operatorname{Re}(\nu) > 0) \quad (680) \quad 56$$

i

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^{\nu} J_{\nu}(at) dt = \frac{(2a)^{\nu} \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} (s^2 + a^2)^{\nu + \frac{1}{2}}} \quad (\operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}) \quad (681) \quad 57$$

apscisa konvergencije dana apsolutnom vrijednošću imaginarnog dijela konstante a , i samo je onda jednaka nuli, kao što je tamo naznačeno, ako je ta konstanta realna.

2. Kompozicija dviju ili više Besselovih funkcija nultoga reda.

Jednačba (627), napisana s oznakama prema (628), glasi:

$$\int_x^\infty e^{-st} J_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dt = \frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{\sqrt{s^2+c^2}} \quad (x \geq 0, \operatorname{Re}(s) > |\operatorname{Im}(c)|, \\ c \text{ dovoljan}) \quad (682)$$

gdje smo uzeli još u obzir stavak III.1.-

Integriramo li ovu jednačbu po x od x do ∞ , izmijenivši na lijevoj strani slijed integracija, što je očito dopušteno, to dobijemo:

$$\int_x^\infty \left[\int_x^\infty e^{-st} J_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dt \right] dx = \int_x^\infty \left[e^{-st} \int_x^t J_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \right] dt = \\ = \int_x^\infty \frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{\sqrt{s^2+c^2}} dx = \frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{s^2+c^2} \quad (683)$$

Prema tome u Laplaceovoj transformaciji (624) odgovara prvotnoj funkciji

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x \\ t \int_x^t J_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx & \text{za } t > x \end{cases} \quad (684)$$

izvedena funkcija

$$f(s) = \frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{s^2+c^2} \quad (685)$$

Prema poznatim stavcima*) operaciji komponiranja u području prvotnih

*) Doetsch, l.e. str. 161. stavak IV b.

funkcija odgovara operacija množenja u područja izvedenih funkcija.

Neka su $x_1 \geq 0$ i $x_2 \geq 0$ dva realna parametra i neka je

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_1 \\ J_0(c\sqrt{t^2-x_1^2}) & \text{za } t > x_1 \end{cases} \quad (686) \quad 62$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_2 \\ J_0(c\sqrt{t^2-x_2^2}) & \text{za } t > x_2 \end{cases} \quad (687) \quad 63$$

Tvorino u smislu (112) kompozicija

$$\begin{aligned} K_{0,0}^{0,0}(t;x_1,x_2) &= \int_0^t F_1(y) F_2(t-y) dy = \\ &= \int_{x_1}^{t-x_2} J_0(c\sqrt{y^2-x_1^2}) J_0(c\sqrt{(t-y)^2-x_2^2}) dy \quad (t > x_1+x_2) \end{aligned} \quad (688) \quad 64$$

Prvotnim funkcijama (686), (687) odgovaraju prema (625), (626) izvedene funkcije

$$f_1(s) = \frac{e^{-x_1\sqrt{s^2+c^2}}}{\sqrt{s^2+c^2}} \quad (689) \quad 65$$

$$f_2(s) = \frac{e^{-x_2\sqrt{s^2+c^2}}}{\sqrt{s^2+c^2}} \quad (690) \quad 66$$

dok kompoziciji $K_{0,0}^{0,0}(t;x_1,x_2)$ kao prvotnoj funkciji odgovara njihov produkt

$$f_1(s) f_2(s) = \frac{e^{-(x_1+x_2)\sqrt{s^2+c^2}}}{s^2+c^2} \quad (691) \quad 67$$

kao izvedena funkcija. S druge strane prema (684), (685) izvedenoj funkciji (691) odgovara kao prvotna funkcija integral

$$I = \int_{x_1+x_2}^t J_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (692) \quad 68$$

Budući da je k zadanoj izvedenoj funkciji prvotna funkcija jednoznačno određena^{*}, to mora kompozicija (688) biti identična s integralom (692), t.j. dobijemo integralan teorem Besselovih funkcija, u kojem ćemo prema (340) pisati Λ_0 mjesto J_0 :

$$\begin{aligned}
 K_{0,0}^{0,0}(t; x_1, x_2) &= \int_{x_1}^{t-x_2} \Lambda_0(c\sqrt{y^2-x_1^2}) \Lambda_0(c\sqrt{(t-y)^2-x_2^2}) dy = \\
 &= \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad . \quad (693)
 \end{aligned}$$

Analitičkim produživanjem lako je uvidjeti, da ova relacija vrijedi i onda, kad nije ispunjena pretpostavka, da su x_1 , x_2 i t realni brojevi s uvjetom $t > x_1+x_2$, pa to mogu biti tri povoljna kompleksna broja, a krivulja integracije bilo koja krivulja, koja se može rektificirati, (na pr. po odsječcima glatka krivulja), a spaja točke, koje su dane donjim i gornjim granicama integrala. Drugi korijeni, koji se pojavljuju u argumentima funkcija, samo su prividni, jer je Λ_0 taka funkcija, kako proizlazi iz (340). Integrali u (693) su stoga očito cijele analitičke funkcije.

Istina je, da se u tom posveopćenju prvi integral u (693) više ne može smatrati kompozicijom u strogom smislu jednačbe (112). Ipak ćemo pridržati taj izraz i u ovom slučaju.

Provede li se postupak integriranja po x od x do ∞ , koji je od (682) doveo do (683), r puta, to se dolazi do relacije

$$\int_x^\infty \left[e^{-st} \left(\int_x^t dx \right)^r J_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx \right] dt = \frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{(\sqrt{s^2+c^2})^{r+1}} \quad . \quad (694)$$

^{*}) Ako zahtijevamo, da bude kontinuirana. Vidi Doetsch, l.c. str 34.

Izvešti još u obzir (273), možemo dakle reći, da prvotnoj funkciji

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x \\ \frac{1}{(r-1)!} \int_x^t (y-x)^{r-1} J_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy & \text{za } t > x \end{cases} \quad (695)$$

odgovara izvedena funkcija

$$f(s) = \frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{(\sqrt{s^2+c^2})^{r+1}} \quad (696)$$

Neka su dalje $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_r \geq 0$ realni parametri. Onda prvotnim funkcijama

$$F_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_k \\ J_0(c\sqrt{t^2-x_k^2}) & \text{za } t > x_k \end{cases} \quad (k=1, \dots, r) \quad (697)$$

odgovaraju izvedene funkcije

$$f_k(s) = \frac{e^{-x_k\sqrt{s^2+c^2}}}{\sqrt{s^2+c^2}} \quad (k=1, \dots, r) \quad (698)$$

Kompozicija funkcija (697) glasi:

$$\begin{aligned} K_{0, \dots, 0}^{0, \dots, 0}(t; x_1, \dots, x_r) &= F_1(t) * F_2(t) * \dots * F_r(t) = \\ &= \int_0^t dy_1 F_1(t-y_1) \int_0^{y_1} dy_2 F_2(y_1-y_2) \dots \int_0^{y_{r-2}} dy_{r-2} F_{r-2}(y_{r-2}-y_{r-1}) \int_0^{y_{r-1}} dy_{r-1} \\ &\quad \cdot F_{r-1}(y_{r-2}-y_{r-1}) F_r(y_{r-1}) \quad (699) \end{aligned}$$

Ivrstimo li funkcije (697), to se lako vidi, da će odbacivanje onih dijelova integrala, za koje su integrandi jednaki nuli, značiti, da se pojedine varijable integracije kreću u ovim granicama:

$$x_r \leq y_{r-1} \leq y_{r-2} - x_{r-1} \tag{700} \quad 76a$$

$$x_r + x_{r-1} \leq y_{r-2} \leq y_{r-3} - x_{r-2} \tag{701} \quad 76b$$

$$x_r + x_{r-1} + x_{r-2} \leq y_{r-3} \leq y_{r-4} - x_{r-3} \tag{702} \quad 76c$$

.....

$$x_r + x_{r-1} + \dots + x_3 \leq y_2 \leq y_1 - x_2 \tag{703} \quad 76d$$

$$x_r + x_{r-1} + \dots + x_2 \leq y_1 \leq t - x_1 \tag{704} \quad 76e$$

Dobijemo dakle, zamijenivši J_0 sa Λ_0 :

$$\begin{aligned}
 & K_{0, \dots, 0}^{0, \dots, 0}(t; x_1, \dots, x_r) = \\
 & = \int_{\sum_{k=2}^r x_k}^{t-x_1} dy_1 \Lambda_0(c\sqrt{(t-y_1)^2 - x_1^2}) \int_{\sum_{k=3}^r x_k}^{y_1-x_2} dy_2 \Lambda_0(c\sqrt{(y_1-y_2)^2 - x_2^2}) \dots \\
 & \dots \int_{x_r+x_{r-1}}^{y_{r-3}-x_{r-2}} dy_{r-2} \Lambda_0(c\sqrt{(y_{r-3}-y_{r-2})^2 - x_{r-2}^2}) \int_{x_r}^{y_{r-2}-x_{r-1}} dy_{r-1} \Lambda_0(c\sqrt{(y_{r-2}-y_{r-1})^2 - x_{r-1}^2}) \\
 & \qquad \qquad \qquad \cdot \Lambda_0(c\sqrt{y_{r-1}^2 - x_r^2}) \tag{705} \quad 77
 \end{aligned}$$

gdje je u smislu (704)

$$t > \sum_{k=1}^r x_k \tag{705} \quad 78$$

Ovoj kompoziciji odgovara kao izvedena funkcija produkt funkcija (698) :

$$f_1(s) f_2(s) \dots f_r(s) = \frac{e^{-(x_1+x_2+\dots+x_r)\sqrt{s^2+c^2}}}{(\sqrt{s^2+c^2})^r} \tag{707} \quad 79$$

Stavimo li još

$$X = \sum_{k=1}^r x_k \quad (708)$$

to možemo dakle prema (695) i (696) zaključiti, da je

$$K_{0, \dots, 0}^{0, \dots, 0}(t; x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{(r-2)!} \int_X^t (y-X)^{r-1} \Lambda_0(c|\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (709)$$

pod pretpostavkom, da je $t > X$. Razumijevamo li pod

$K_{0, \dots, 0}^{0, \dots, 0}(t; x_1, \dots, x_r)$ izraz (705) i onda, ako su t, x_1, x_2, \dots, x_r dovoljni kompleksni brojevi, koji dakle više ne zadovoljavaju uvjet $t > X$, to se opet analitičkim produživanjem uviđa, da (709) vrijedi i u tom slučaju.

3. Rekurzivne jednačbe za kompoziciju dviju Besselovih funkcija višega reda.

Za ovo, što slijedi, pretpostavlja se prema potrebi, da su parametri x_1, x_2, \dots od nule različiti. Slučajevi, kod kojih iščezavanje jednog ili više tih parametara dovodi do poteškoća, raspraviti će se na kasnijem mjestu.

Razmatrajmo kompoziciju

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = \int_{x_1}^{t-x_2} y^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2-x_1^2}) (t-y)^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-y)^2-x_2^2}) dy, \quad (710)$$

pri čemu su m_1, m_2, n_1, n_2 nenegativni cijeli brojevi, t, x_1, x_2 dovoljni kompleksni brojevi, a krivulja integracije bilo koja krivulja, koja se može rektificirati, a spaja točke x_1 i $t-x_2$.

Za slučaj, da su t, x_1, x_2 nenegativni realni brojevi i $t > x_1+x_2$, možemo (710) shvatiti kao kompoziciju funkcija

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_1 \\ t^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{t^2-x_1^2}) & \text{za } t > x_1 \end{cases} \quad (711)$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_2 \\ t^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{t^2-x_2^2}) & \text{za } t > x_2 \end{cases} \quad (712)$$

U tom slučaju komutativni zakon za operaciju komponiranja daje

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = K_{n_2, n_1}^{m_2, m_1}(t; x_2, x_1). \quad (713)$$

Analitičkim produživanjem slijedi, da (713) vrijedi i za povoljne kompleksne vrijednosti od t, x_1, x_2 , a slijedi to i izravno iz (710)

supstitucijom $z=t-y$.

Diferenciramo li (710) po x_1 i uzmemo u obzir (346),
to dobijemo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) &= \\ &= -x_1^{m_1} (t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) + \frac{c^2 x_1}{2(n_1+1)} K_{n_1+1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) \end{aligned} \quad (714)$$

ili

$$\begin{aligned} K_{n_1+1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) &= \\ &= \frac{2(n_1+1)}{c^2 x_1} \left\{ \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial x_1} + x_1^{m_1} (t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) \right\} \end{aligned} \quad (715)$$

i analogno

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) &= \\ &= \frac{2(n_2+1)}{c^2 x_2} \left\{ \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial x_2} + x_2^{m_2} (t-x_2)^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) \right\} \end{aligned} \quad (716)$$

U (715) i (716) se pretpostavlja $x_1 \neq 0$ odnosno $x_2 \neq 0$.

Ove jednačbe daju mogućnost postepenog povišavanja donjih indeksa kompozicije.

Diferenciramo li (710) po t , slijedi obzirom na (346):

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t} &= (t-x_2)^{m_1} x_2^{m_2} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) + m_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(t; x_1, x_2) - \\ &- \frac{c^2}{2(n_2+1)} K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2) \end{aligned} \quad (717)$$

ili

$$K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2) =$$

$$= \frac{2(n_2+1)}{c^2} \left\{ (t-x_2)^{m_1} x_2^{m_2} \Lambda_{n_1} \left(c \sqrt{(t-x_2)^2 - x_1^2} \right) + m_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(t; x_1, x_2) - \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t} \right\} \quad (718)$$

i analogno obzirom na (713)

$$K_{n_1+1, n_2}^{m_1+1, m_2}(t; x_1, x_2) = \frac{2(n_1+1)}{c^2} \left\{ (t-x_1)^{m_2} x_1^{m_1} \Lambda_{n_2} \left(c \sqrt{(t-x_1)^2 - x_2^2} \right) + m_1 K_{n_1, n_2}^{m_1-1, m_2}(t; x_1, x_2) - \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t} \right\} \quad (719)$$

Uvrstimo li u (718) za $K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2+1}$ izraz, koji daje (716), dobijemo:

$$\frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2)}{\partial x_2} = x_2 \left\{ m_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(t; x_1, x_2) - \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2)}{\partial t} \right\} \quad (720)$$

Integriramo li po x_2 i odredimo donju granicu integrala tako, da integral iščezava za $t = x_1 + x_2$, kao u (710), to slijedi:

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2) =$$

$$= \int_{t-x_1}^{x_2} y \left\{ m_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(t; x_1, y) - \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, y)}{\partial t} \right\} dy \quad (721)$$

i analogno

$$K_{n_1, n_2}^{m_1+1, m_2}(t; x_1, x_2) = \int_{t-x_2}^{x_1} y \left\{ m_1 K_{n_1, n_2}^{m_1-1, m_2}(t; y, x_2) - \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; y, x_2)}{\partial t} \right\} dy. \quad (722)$$

Zadnje dvije jednačbe dopuštaju postepeno povisivanje gornjih indeksa kompozicije. Jednačbe vrijede i za $m_2=0$, odnosno $m_1=0$, kada otpada prvi član u vitičastoj zagradi u integrandu. To se razabire, ako se cijeli izvod provede pod tom pretpostavkom.

Dajemo još neke rekurzivne jednačbe, koje mogu prema potrebi korisno poslužiti. Prema (344) vrijedi:

$$(y^2 - x_1^2) \Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2 - x_1^2}) = \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2} \left\{ \Lambda_{n_1-1}(c\sqrt{y^2 - x_1^2}) - \Lambda_{n_1-2}(c\sqrt{y^2 - x_1^2}) \right\}. \quad (723)$$

Pomnožimo li ovu jednačbu sa $y^{m_1}(t-y)^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-y)^2 - x_2^2})$ i integriramo po y od x_1 do $t-x_2$, dobijemo

$$K_{n_1, n_2}^{m_1+2, m_2} = x_1^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} + \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2} (K_{n_1-1, n_2}^{m_1, m_2} - K_{n_1-2, n_2}^{m_1, m_2}) \quad (724)$$

i analogno

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+2} = x_2^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2} + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2} (K_{n_1, n_2-1}^{m_1, m_2} - K_{n_1, n_2-2}^{m_1, m_2}). \quad (725)$$

Ako u (720) povisimo m_2 za jednu jedinicu i uvrstimo izraz (725), slijedi:

$$\frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2)}{\partial t} = (m_2+1) K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) - \frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ x_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2} K_{n_1, n_2-1}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) - K_{n_1, n_2-2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) \right\} \quad (726)$$

Integracija po t daje, ako donju granicu odredimo tako, da integral iščezava za $t=x_1+x_2$,

$$\begin{aligned} & K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, x_2) = \\ & = \int_{x_1+x_2}^t \left\{ (m_2+1) K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) - \frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left\{ x_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2} \left[K_{n_1, n_2-1}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) - K_{n_1, n_2-2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) \right] \right\} \right\} dy \quad (727) \end{aligned}$$

i analogno

$$\begin{aligned} & K_{n_1, n_2}^{m_1+1, m_2}(t; x_1, x_2) = \\ & = \int_{x_1+x_2}^t \left\{ (m_1+1) K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) - \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left\{ x_1 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2} \left[K_{n_1-1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) - K_{n_1-2, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, x_2) \right] \right\} \right\} dy. \quad (728) \end{aligned}$$

4. Izravne formule za kompoziciju dviju Besselovih funkcija višega reda.

Opetovanom primjenom rekurzivne jednačbe (715) dobije se lako

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = \frac{2^{n_1} n_1!}{c} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1} K_{0, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) + \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{2^{n_1-k} n_1!}{2(n_1-k) k!} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1-k-1} \left[x_1^{m_1-1} (t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2}) \right] \quad (729)$$

i dalje

$$K_{0, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) = \frac{2^{n_2} n_2!}{c} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2} K_{0, 0}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) + \sum_{k=0}^{n_2-1} \frac{2^{n_2-k} n_2!}{2(n_2-k) k!} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{n_2-k-1} \left[x_2^{m_1-1} (t-x_2)^{m_1} \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1}) \right] \quad (730)$$

Uvrstimo li (730) u (729) i uzmemo u obzir, da je prema (346)

$$\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \Lambda_r(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1}) = \frac{c^2}{2(r+1)} \Lambda_{r+1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1}), \quad (731)$$

dakle

$$\left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{n_1} \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1}) = \frac{c^{2n_1}}{2^{n_1} n_1!} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1}), \quad (732)$$

to slijedi

$$\begin{aligned}
K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) &= \frac{2^{n_1+n_2} n_1! n_2!}{c^{2(n_1+n_2)}} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2} K_{0,0}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) + \\
&+ \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{2^{n_1-k} n_1!}{c^{2(n_1-k)} k!} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1-k-1} \left[x_1^{n_1-1} (t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2} \left(c \sqrt{(t-x_1)^2 - x_2^2} \right) \right] + \\
&+ \sum_{k=0}^{n_2-1} \frac{2^{n_2-k} n_2!}{c^{2(n_2-k)} k!} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2-k-1} \left[x_2^{n_2-1} (t-x_2)^{m_1} \Lambda_{n_1} \left(c \sqrt{(t-x_2)^2 - x_1^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{733}$$

Pri tome pretpostavljamo $n_1 > 0$ i $n_2 > 0$. Ako je primjerice $n_1 = 0$, $n_2 > 0$, otpada prva suma na desnoj strani od (733), t.j. vraćamo se na (730). Slučaj $n_1 = n_2 = 0$ je trivijalan.

Time je $K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}$ izražen pomoću $K_{0,0}^{m_1, m_2}$. Treba još izraziti $K_{0,0}^{m_1, m_2}$ pomoću $K_{0,0}^{0,0}$, koji je dan formulom (693). To ćemo provesti za općenitiji slučaj kompozicije povoljnog broja Besselovih funkcija u točki III 6, i onda specijalizacijom izvesti formulu, koju ovdje trebamo. (Vidi formulu (757)).

Zabilježimo još nešto općenitiju formulu, kojom se svodi $K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}$ na $K_{p, q}^{m_1, m_2}$, gdje je $p < n_1$, $q < n_2$. Ta formula se dobije analognim načinom kao (733) i glasi:

$$\begin{aligned}
K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) &= \\
&= \frac{2^{n_1+n_2-p-q} n_1! n_2!}{c^{2(n_1+n_2-p-q)} p! q!} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1-p} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2-q} K_{p, q}^{m_1, m_2}(t; x_1, x_2) + \\
&+ \sum_{k=0}^{n_1-p-1} \frac{2^{n_1-p-k} n_1!}{c^{2(n_1-p-k)} (p+k)!} \left(\frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1-p-k-1} \left[x_1^{n_1-1} (t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2} \left(c \sqrt{(t-x_1)^2 - x_2^2} \right) \right] + \\
&+ \sum_{k=0}^{n_2-q-1} \frac{2^{n_2-q-k} n_2!}{c^{2(n_2-q-k)} (q+k)!} \left(\frac{1}{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2-q-k-1} \left[x_2^{n_2-1} (t-x_2)^{m_1} \Lambda_{n_1} \left(c \sqrt{(t-x_2)^2 - x_1^2} \right) \right].
\end{aligned} \tag{734}$$

5. Rekurzione jednadžbe za kompoziciju povoljnog broja Besselovih funkcija višega reda.

Kao posveopćenje od (710) definiramo u analogiji sa (705) kompoziciju

$$\begin{aligned}
 & K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = \\
 & = \int_{\sum_{k=2}^r x_k}^{t-x_1} dy_1 (t-y_1)^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{(t-y_1)^2-x_1^2}) \int_{\sum_{k=3}^r x_k}^{y_1-x_2} dy_2 (y_1-y_2)^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(y_1-y_2)^2-x_2^2}) \dots \\
 & \dots \int_{x_r+x_{r-1}}^{y_{r-3}-x_{r-2}} dy_{r-2} (y_{r-3}-y_{r-2})^{m_{r-2}} \Lambda_{n_{r-2}}(c\sqrt{(y_{r-3}-y_{r-2})^2-x_{r-2}^2}) \cdot \\
 & \cdot \int_{x_r}^{y_{r-2}-x_{r-1}} dy_{r-1} \Lambda_{n_{r-1}}(c\sqrt{(y_{r-2}-y_{r-1})^2-x_{r-1}^2}) \Lambda_{n_r}(c\sqrt{y_{r-1}^2-x_r^2}), \quad (735)
 \end{aligned}$$

koja se za realne vrijednosti od t, x_1, \dots, x_r i $t > X$ (vidi (708)) može smatrati kompozicijom funkcija

$$P_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_k \\ t^{m_k} \Lambda_{n_k}(c\sqrt{t^2-x_k^2}) & \text{za } t > x_k \end{cases} \quad (k=1, \dots, r) \quad (736)$$

dok ćemo mi dopuštati i povoljne kompleksne vrijednosti od t, x_1, \dots, x_r . Diferenciramo li (735) po x_1 , dobijemo očito:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) &= -x_1 K_{n_2, \dots, n_r}^{m_1, m_2, \dots, m_r}(t-x_1; x_2, \dots, x_r) + \\ &+ \frac{c^2 x_1}{2(n_1+1)} K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \end{aligned} \quad (737)$$

Zbog komutativnog zakona za operaciju komponiranja vrijedi analogna formula za bilo koji x_k , t.j.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) &= \\ &= -x_k K_{n_1, \dots, n_{k-1}, n_{k+1}, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_{k-1}, m_{k+1}, \dots, m_r}(t-x_k; x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_r) + \\ &+ \frac{c^2 x_k}{2(n_k+1)} K_{n_1, \dots, n_{k-1}, n_k+1, n_{k+1}, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k, m_{k+1}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \end{aligned} \quad (738)$$

Diferenciramo li (735) po t , to slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) &= +x_1 K_{n_2, \dots, n_r}^{m_1, m_2, \dots, m_r}(t-x_1; x_2, \dots, x_r) + \\ &+ m_1 K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) - \frac{c^2}{2(n_1+1)} K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \end{aligned} \quad (739)$$

ili pomoću (737)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) &= m_1 K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) - \\ &- \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \end{aligned} \quad (740)$$

i analogno za bilo koji x_k :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = \\ & = m_k K_{n_1, \dots, n_{k-1}, n_k, n_{k+1}, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k-1, m_{k+1}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) - \\ & - \frac{1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} K_{n_1, \dots, n_{k-1}, n_k, n_{k+1}, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_{k-1}, m_k+1, m_{k+1}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) . \end{aligned} \quad (741)$$

Usporede li se formule (737), (738) i (739) sa (714), (717), to se vidi, da (737) do (739) vrijede i za $r=2$, ako se definira

$$K_n^m(t; x) = t^m \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) . \quad (742)$$

Razumije se, da i formule (740), (741) vrijede i za $r=2$, te u tom slučaju odgovaraju formuli (720).

U analognoj formuli (721), koji bismo dobili iz (740), bila bi integracija po prvom parametru protegnuta od $t-\bar{X}+x_1$ do x_1 , tako da integral iščezava za $t=\bar{X}$.

6. Izravne formule za kompoziciju dovoljnog broja Besselovih funkcija višega reda.

Pretpostavimo $r \geq 2$ i primijenimo na (740) operaciju S_{x_1} definiranu prema (254) sa $g_1(x_1) = x_1$. Uočimo li, da sve kompozicije (735) zadovoljavaju uvjet (267), kako se odmah uvidja, to obzirom na stavak I.5. slijedi:

$$K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = S_{x_1} \left\{ m_1 K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) - \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \right\}. \quad (743)$$

Ova jednačba vrijedi i za $m_1=0$, kad prvi član u vitičastoj zagradi otpada, analogno, kao što je to bilo kod (721), (722).

Izbjegavajmo ponajprije svaku komutaciju operatora S_{x_1} i $\frac{\partial}{\partial t}$. Označimo li kratkoće radi samo prvi gornji indeks kompozicija, dok mjesto S_{x_1} pišemo S , to postepena primjena rekurzivne jednačbe (743) daje primjerice:

$$K^4 = (3s^2 + 3s^2 \frac{\partial}{\partial t} s \frac{\partial}{\partial t} + 2s \frac{\partial}{\partial t} s^2 \frac{\partial}{\partial t} + s \frac{\partial}{\partial t} s \frac{\partial}{\partial t} s + s \frac{\partial}{\partial t} s \frac{\partial}{\partial t} s \frac{\partial}{\partial t} s \frac{\partial}{\partial t}) K^0. \quad (744)$$

Pogled na tu jednačbu nas uči, da desno od svakog $\frac{\partial}{\partial t}$ stoji S ili K^0 , i lako je vidjeti potpunom indukcijom, da to vrijedi i za bilo koju K^m . Prema stavku I.5. komutira dakle svaki $\frac{\partial}{\partial t}$ s operatorom, koji mu je na lijevo, pa stoga možemo u svakom članu operatore $\frac{\partial}{\partial t}$, počevši s onim, koji stoji najdalje na lijevo u dotičnom članu, postepeno pomicati na lijevi kraj člana. Time prelazi (744) u oblik

$$K^4 = \left[3s^2 + 6 \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 s^3 + \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^4 s^4 \right] K^0. \quad (745)$$

Općenito vrijedi, kako se dokazuje potpunom indukcijom na temelju (743):

$$\begin{aligned} & K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = \\ & = (-1)^{m_1} m_1! \sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1}{2} \right]} \frac{1}{2^k k! (m_1 - 2k)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1 - 2k} S_{x_1}^{m_1 - k} K_{n_1, m_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r). \end{aligned} \quad (746)$$

Da taj dokaz provedemo, nadovezujemo ponajprije na stavak I.5.

Tvrdimo, da izraz $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p S^q f(t; x_1, \dots, x_r)$, gdje S^q znači produkt od q operatora $S_{g_k(x_k)}$ ($k=1, \dots, r$), koji ne moraju biti međusobno jednaki, zadovoljava uvjet (267), ako to čini funkcija $f(t; x_1, \dots, x_r)$ i ako je $p \leq q$. To svakako vrijedi za $q=1$, jer je za $p=0$ izraz jednak $S \cdot f$, pa prema stavku I.5. zadovoljava (267), a za $p=1$ izraz glasi $\frac{\partial}{\partial t} S f$, pa je prema istom stavku $\frac{\partial}{\partial t} S f = S \frac{\partial}{\partial t} f$, čime je operator S na prvom mjestu, pa izraz opet zadovoljava (267).

Pretpostavimo, da je tvrdnja ispravna za neki q , to će biti dopustiva prijetvorba

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{p+1} S^{q+1} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p S \frac{\partial}{\partial t} S^q = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{p-1} S \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 S^{q-1} = \dots = S \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{p+1} S^q \quad (747)$$

čime je S došao na prvo mjesto, pa tvrdnja vrijedi i za $q+1$.

Time je tvrdnja potpunom indukcijom dokazana. Iz nje dalje slijedi, da vrijedi

$$S^n \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p S^q f = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p S^{n+q} f, \quad (748)$$

ako je $p \leq q$, a funkcija f zadovoljava (267). Čitamo li naime (747) s desna na lijevo, vidimo, da se operatori S jedan po jedan mogu s lijeve strane potencije $\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^p$ prenijeti na desnu.

Ako se dakle na izraz (746) izvrši operacija S_{x_1} , to

se ta operacija može dodati potenciji $S_{x_1}^{m_1-k}$, jer je $m_1-2k \leq m_1-k$, a kompozicija $K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r)$ zadovoljava (267).

Pretpostavljajući da (746) vrijedi za neki $m_1 \geq 1$, uvrstimo ga sad u (743) i nadomjestimo u prvoj sumi na desnoj strani k sa $k-1$. Slijedi

$$\begin{aligned} & (-1)^{m_1+1} (m_1+1)! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m_1+1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k k! (m_1-2k+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \\ &= m_1 (-1)^{m_1-1} (m_1-1)! \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m_1+1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^{k-1} (k-1)! (m_1-2k+1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \\ &- (-1)^{m_1} m_1! \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor} \frac{1}{2^k k! (m_1-2k)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r). \end{aligned} \quad (749)$$

Pretpostavimo ponajprije

$$1 \leq k \leq \frac{m_1}{2}. \quad (750)$$

Članovi s indeksom k daju

$$\frac{(-1)^{m_1+1} (m_1+1)!}{2^k k! (m_1-2k+1)!} = \frac{(-1)^{m_1-1} (m_1-1)! m_1}{2^{k-1} (k-1)! (m_1-2k+1)!} - \frac{(-1)^{m_1} m_1!}{2^k k! (m_1-2k)!}. \quad (751)$$

Dijelimo li sa $(-1)^{m_1-1} m_1!$ i množimo sa $2^k k! (m_1-2k+1)!$, to dobijemo

$$m_1+1 = 2k + m_1 - 2k + 1, \quad (752)$$

što je ispravno. Za $k=0$ dobijemo

$$\frac{(-1)^{m_1+1} (m_1+1)!}{2^0 0! (m_1+1)!} = - \frac{(-1)^{m_1} m_1!}{2^0 0! m_1!} \quad (753)$$

što je ispravno. Ako je m_1 lih broj, može biti $k = \frac{m_1+1}{2} = s$,

dakle $m_1=2s-1$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^{2s}(2s)!}{2^s s! 0!} = \frac{(-1)^{2s-2}(2s-2)!(2s-1)}{2^{s-1}(s-1)! 0!} \quad (754)$$

što je ispravno. Budući da formula (746) vrijedi za $m_1=0$ i za $m_1=1$, to je time dokazana. Razumije se, da analogna formula vrijedi za svaki od gornjih indeksa kompozicije.

Podjemo li od kompozicije, kojoj su svi gornji indeksi jednaki nuli i provedemo postepeno povišenje pojedinih indeksa prema formuli (746), to dobijemo članove s operatorskim produktima oblika

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1-2k_1} S_{x_1}^{m_1-k_1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_2-2k_2} S_{x_2}^{m_2-k_2} \dots,$$

u kojima možemo na temelju (748) sve operatore S premjestiti na desni kraj dotičnog operatorskog produkta, počevši s onima, koji su desnom kraju najbliži. Dobijemo stoga općenito

$$K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = \left(\prod_{k=1}^r (-1)^{m_k} m_k!\right) \sum_{k_1=0}^{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor} \sum_{k_2=0}^{\lfloor \frac{m_2}{2} \rfloor} \dots \sum_{k_r=0}^{\lfloor \frac{m_r}{2} \rfloor} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{s=1}^r m_s - 2k_s} \left(\prod_{v=1}^r S_{x_v}^{m_v - k_v}\right) K_{n_1, \dots, n_r}^{0, \dots, 0}(t; x_1, \dots, x_r). \quad (755)$$

Ako stavimo sve donje indese jednake nuli i uvrstimo (709), možemo pisati:

$$K_{0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = \frac{1}{(r-2)!} \left(\prod_{k=1}^r (-1)^{m_k} m_k!\right) \sum_{k_1=0}^{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor} \dots \sum_{k_r=0}^{\lfloor \frac{m_r}{2} \rfloor} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{s=1}^r m_s - 2k_s} \left(\prod_{v=1}^r S_{x_v}^{m_v - k_v}\right) \int_X (y-x)^{r-2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy. \quad (756)$$

Za $r=2$ dobije se iz toga:

$$\begin{aligned}
 & K_{0,0}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) = \\
 & = (-1)^{m_1+m_2} m_1! m_2! \sum_{k_1=0}^{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor} \sum_{k_2=0}^{\lfloor \frac{m_2}{2} \rfloor} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{m_1+m_2-2k_1-2k_2} s_{x_1}^{m_1-k_1} s_{x_2}^{m_2-k_2} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy.
 \end{aligned}
 \tag{757}$$

Ova se formula može uvrstiti u (733), pa je time dobiven izraz za

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2).$$

Na osnovu rekurzivne jednačbe (737) možemo postaviti opću

formulu, koja izražava $K_{n_1,\dots,n_r}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r)$ pomoću

$$K_{0,\dots,0}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r).$$

Neka je \underline{r} , kao i dosad, broj parova indeksa kompozicije. (Smatramo, da svaki doljni indeks s pripadnim gornjim čini par). Neka je dalje \underline{p} broj doljnjih indeksa, koji su veći od nule, dok su ostali doljni indeksi jednaki nuli. Dopuštamo $1 \leq \underline{p} \leq \underline{r}$. (Slučaj $\underline{p}=0$ je trivijalan). Radi jednostavnosti zamišljamo, da je prvih \underline{p} doljnjih indeksa veće od nule, što zbog komutativnog zakona komponiranja ne znači sužavanje općenitosti. Neka je \underline{Q} minimum dvaju brojeva \underline{p} i $\underline{r}-1$, t.j. $\underline{Q}=\underline{p}$, ako je $\underline{p} \leq \underline{r}-1$, i $\underline{Q}=\underline{r}-1$ za $\underline{p}=\underline{r}$. Neka konačno $(k_1, k_2, \dots, k_\gamma)$ znači kombinaciju γ -tog razreda ($1 \leq \gamma \leq \underline{Q}$) elemenata $1, 2, \dots, \underline{p}$, a $(s_1, s_2, \dots, s_{\underline{r}-\gamma})$ tomu komplementarna kombinacija $(\underline{r}-\gamma)$ -tog razreda, tako da su $k_1, k_2, \dots, k_\gamma, s_1, s_2, \dots, s_{\underline{r}-\gamma}$ svi elementi $1, 2, \dots, \underline{r}$. Zbog $1 \leq \gamma \leq \underline{Q}$ i jedna i druga kombinacija imaju uvijek barem jedan element. Pod sumom $\sum_{(k_1, \dots, k_\gamma)}$ sa zadanim γ

razumijevamo, da u dotičnom izrazu treba uvrstiti redom sve kombinacije indeksa (k_1, \dots, k_y) , a istodobno za indekse s_1, \dots, s_{r-y} tomu komplementarnu kombinaciju, i tako nastale izraze zbrojiti. Postavljamo sada opću formulu služeći se oznakom

$$\frac{1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} = D_{x_k}, \quad (758) \quad 130$$

koja odgovara oznaci (253).

$$\begin{aligned} & K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = \\ & \prod_{\alpha=1}^p \left(\frac{2}{c}\right)^{n_\alpha} n_\alpha! \left\{ \prod_{\beta=1}^p D_{x_\beta}^{n_\beta} K_{0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) + \right. \\ & \left. + \sum_{\gamma=1}^Q \sum_{(k_1, \dots, k_\gamma)} \prod_{\delta=1}^{r-\gamma} D_{x_{s_\delta}}^{n_{s_\delta}} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1} \dots \sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_\gamma}-1} \left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \left(\frac{2}{c}\right)^{-w_\varepsilon} \frac{1}{w_\varepsilon!} D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1} \right) \right. \\ & \left. \cdot \left[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} x_{k_\varepsilon}^{-w_\varepsilon-1} \right) K_{0, \dots, 0}^{m_{s_1}, \dots, m_{s_{r-\gamma}}}(t - \sum_{\varphi=1}^{\gamma} x_{k_\varphi}; x_{s_1}, \dots, x_{s_{r-\gamma}}) \right] \right\}. \quad (759) \quad 131 \end{aligned}$$

Opaža se, da smo umjesto komplementarne kombinacije (s_1, \dots, s_{r-y}) mogli staviti komplementarnu kombinaciju (s_1, \dots, s_{p-y}) , t.j. mogli smo ispustiti elemente s_{p+1}, \dots, s_r , jer ti elementi u produktu $\prod_{\delta=1}^{r-y}$ pridonose samo faktore $D_{x_{s_{p+1}}}^0, \dots, D_{x_{s_r}}^0$, koji znače jedinični operator, pa ih se može ispustiti. Gornja granica spomenutog produkta glasila bi onda $p-y$ umjesto $r-y$, a kompoziciju na kraju formule (759) pisali bismo

$$K_{0, \dots, 0, 0, \dots, 0}^{m_{s_1}, \dots, m_{s_{p-y}}, m_{p+1}, \dots, m_r}(t - \sum_{\varphi=1}^y x_{k_\varphi}; x_{s_1}, \dots, x_{s_{p-y}}, x_{p+1}, \dots, x_r).$$

Za kasnije svrhe nam je ipak zgodnije ostati kod oblika (759).

Treba još primijetiti, da za $r \geq p \geq r-1$, $y=p$ kompozicija na kraju formule (759) ima samo jedan par indeksa, pa se treba sjetiti definicije (742).

Da dokažemo formulu (759) pretpostavimo $r \geq 2$ i stavimo u (737) $n_1=n_2=\dots=n_r=0$. Prema (759) bi bilo za $p=1$, $n_1=1$

$$\begin{aligned} K_{1,0,\dots,0}^{m_1,m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) &= \frac{2}{c^2} \left\{ D_{x_1} K_{0,\dots,0}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) + \right. \\ &\left. + x_1^{m_1-1} K_{0,\dots,0}^{m_2,\dots,m_r}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) \right\} \end{aligned} \quad (762)$$

u skladu sa (737). Formula (759) dakle vrijedi za taj slučaj.

Pretpostavimo dalje, da je (759) dokazan, ako je $p=1$, a n_1 je neki pozitivni cijeli broj. Dokazujemo, da (759) onda vrijedi i za n_1+1 . Iz (759) bi naime slijedilo:

$$\begin{aligned} K_{n_1+1,n_2,\dots,n_r}^{m_1,m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) &= \left(\frac{2}{c^2} \right)^{n_1+1} (n_1+1)! \left\{ D_{x_1} K_{0,\dots,0}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) + \right. \\ &\left. + \sum_{w_1=0}^{n_1} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_1} \frac{1}{w_1!} D_{x_1}^{n_1-w_1} \left[x_1^{m_1-1} K_{0,\dots,0}^{m_2,\dots,m_r}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (763)$$

Izlučimo li $\frac{2}{c^2}(n_1+1)D_{x_1}$ i odvojimo član sume za $w_1=n_1$, to vidimo,

da dobijemo

$$\begin{aligned} K_{n_1+1,n_2,\dots,n_r}^{m_1,m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) &= \frac{2(n_1+1)}{c^2} D_{x_1} \left\{ \left(\frac{2}{c^2} \right)^{n_1} n_1! \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-n_1} \frac{1}{n_1!} \cdot \right. \\ &\cdot x_1^{m_1-1} K_{0,\dots,0}^{m_2,\dots,m_r}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) + \left(\frac{2}{c^2} \right)^{n_1} n_1! D_{x_1} K_{0,\dots,0}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) + \\ &\left. + \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \left(\frac{2}{c^2} \right)^{-w_1} \frac{1}{w_1!} D_{x_1}^{n_1-w_1-1} \left[x_1^{m_1-1} K_{0,\dots,0}^{m_2,\dots,m_r}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) \right] \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(n_1+1)}{c^2} D_{x_1} \left\{ x_1^{m_1-1} K_{0, \dots, 0}^{m_2, \dots, m_r}(t-x_1; x_2, \dots, x_r) + \right. \\
&\quad \left. + K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \right\} \quad (764)
\end{aligned}$$

u suglasnosti sa (737). Budući da analogni dokaz vrijedi za bilo koji x_k , to je time potpunom indukcijom dokazano, da (759) vrijedi za $p=1$.

Pretpostavimo sad, da (759) vrijedi za neki p ($1 \leq p \leq r-1$).

Dokazujemo, da onda vrijedi i za $p+1$. Neka su dakle n_1, \dots, n_p dovoljni pozitivni cijeli brojevi i neka je ponajprije $n_{p+1}=1$.

U izrazu, što ga za taj slučaj daje (759), razmotrimo članove, kod kojih je u kombinaciji (k_1, \dots, k_r) sadržan $p+1$. Indeks sumacije w_{p+1} zbog $n_{p+1}=1$ poprima samo jedinu vrijednost nula, pa se iz svih tih članova može izlučiti $x_{p+1}^{m_{p+1}-1}$ i k tome dodati faktor $\frac{2}{c^2}$ iz produkta pred vitičastom zagradom, a izraz, koji ostaje, jest očito isti onaj, što ga daje

$$K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+2}, \dots, m_r}(t-x_{p+1}; x_1, \dots, x_p, x_{p+2}, \dots, x_r)$$

prema formuli (759). Prvi član u vitičastoj zagradi, kako ga ta formula daje za ovu potonju kompoziciju, nastaje od one kombinacije (k_1, \dots, k_r) , u kojoj se nalazio samo $p+1$.

Razmotrimo dalje članove, koji odgovaraju kombinacijama (k_1, \dots, k_r) , u kojima nije sadržan $p+1$. Iz tih članova se može izlučiti $D_{x_{p+1}}$, (koji se nalazi među faktorima $D_{x_{s_r}}^{n_{s_r}}$), a taj isti faktor se može izlučiti i iz prvog člana u vitičastoj zagradi, koji bi glasio

$$\left(\prod_{\lambda=1}^{p+1} D_{x_\lambda}^{n_\lambda} \right) K_{0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = D_{x_{p+1}} \left(\prod_{\lambda=1}^p D_{x_\lambda}^{n_\lambda} \right) K_{0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r). \quad (765)$$

I ovdje dodajemo faktor $\frac{2}{c^2}$ od produkta pred vitičastom zagradom,

a izraz, koji ostaje, je prema (759) očito jednak

$$K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r).$$

Slijedi dakle

$$\begin{aligned} & K_{n_1, \dots, n_p, 1, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, m_{p+2}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = \\ & = \frac{2}{c^2} \left\{ x_{p+1}^{m_{p+1}-1} K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+2}, \dots, m_r}(t - x_{p+1}; x_1, \dots, x_p, x_{p+2}, \dots, x_r) + \right. \\ & \quad \left. + D_{x_{p+1}} K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \right\}, \quad (766) \end{aligned}$$

što odgovara formuli (738), ako se u njoj mjesto k piše $p+1$ i stavi $x_{p+1}=1$.

Budući da je u kompozicijama na desnoj strani od (766) broj od nule različitih donjih indeksa jednak p , to smo prema pretpostavci na njih s pravom primijenili formulu (759), a relacija (766) dokazuje, da je ta formula (759) ispravna i za kompoziciju na lijevoj strani, gdje je taj broj indeksa jednak $p+1$, a $(p+1)$ -ti indeks jednak jedan.

Pretpostavimo dalje, da je (759) dokazan za slučaj, da je $(p+1)$ -ti indeks n_{p+1} neki pozitivni cijeli broj. Dokazujemo, da formula onda vrijedi i onda, ako je taj indeks jednak $n_{p+1}+1$.

Primijenimo opet formulu (759) na taj slučaj, da je $(p+1)$ -ti indeks $n_{p+1}+1$. Razmotrimo članove, koje daju kombinacije (k_1, \dots, k_p) , u kojima je sadržan $p+1$, uzevši u obzir samo vrijednost indeksa sumacije $w_{p+1}=n_{p+1}$, i izlučimo $\left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_{p+1}+1} (n_{p+1}+1)!$ iz produkta pred vitičastom zagradom, a $\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_{p+1}} \frac{1}{w_{p+1}!} = \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-n_{p+1}} \frac{1}{n_{p+1}!}$ iz dotičnih članova

unutar zgrade, dakle ukupno $\frac{2}{c^2} (n_{p+1}+1)$, to dobijemo izraz, koji

prema (759) odgovara $K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r}(t-x_{p+1}; x_1, \dots, x_p, x_{p+2}, \dots, x_r)$.

Razmotrimo li sve ostale članove, to možemo izlučiti $D_{x_{p+1}}$. Ovaj se operator nalazi među faktorima $D_{x_{k_\xi}}^{n_{k_\xi} - w_\xi - 1}$, ako je $\frac{p+1}{n_{k_\xi} - w_\xi - 1}$ sadržan u kombinaciji (k_1, \dots, k_p) , pa je tada za $k_\xi = p+1$ $D_{x_{k_\xi}}$ nadomješteno sa $D_{x_{p+1}}^{n_{p+1} - w_{p+1}}$, jer je $(p+1)$ -ti indeks $n_{p+1}+1$ umjesto n_{p+1} . Tu

dakle izlučujemo $D_{x_{p+1}}$. Ako $\frac{p+1}{n_{s_\delta}}$ nije sadržan u kombinaciji (k_1, \dots, k_p) , to se među faktorima $D_{x_{s_\delta}}^{n_{s_\delta}}$ nalazi jedan, koji glasi $D_{x_{p+1}}^{n_{p+1}+1} = D_{x_{p+1}} D_{x_{p+1}}^{n_{p+1}}$. I ovdje izlučujemo $D_{x_{p+1}}$. Odvojimo li

još faktor $\frac{2}{c} (n_{p+1}+1)$ iz produkta pred vitičastom zagradom, to

preostaje izraz, koji je u smislu (759) jednak

$$K_{n_1, \dots, n_p, n_{p+1}+1, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, m_{p+2}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r).$$

Dobili smo dakle

$$\begin{aligned} & K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_{p+1}, m_{p+2}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) = \\ & = \frac{2(n_{p+1}+1)}{c^2} \left\{ x_{p+1}^{m_{p+1}-1} K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+2}, \dots, m_r}(t-x_{p+1}; x_1, \dots, x_p, x_{p+2}, \dots, x_r) + \right. \\ & \left. + D_{x_{p+1}} K_{n_1, \dots, n_{p+1}, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_{p+1}, m_{p+2}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) \right\}. \end{aligned} \tag{767}$$

Primjena formule (759) na prvu kompoziciju desne strane od (767) je opravdana, jer ta kompozicija ima samo p donjih indeksa, koji su od nule različiti, a primjena na drugu kompoziciju desne strane je opravdana prema pretpostavci, jer je $(p+1)$ -ti donji indeks n_p .

Relacija (767) dokazuje, da je onda (759) ispravna i za lijevu stranu od (767). Tim je potpunom indukcijom proveden dokaz za formulu (759).

Radi boljeg pregleda napisat ćemo tu formulu opširnije za slučaj $r=3, p=3$:

$$\begin{aligned}
 & K_{n_1, n_2, n_3}^{m_1, m_2, m_3}(t; x_1, x_2, x_3) = \\
 & = \left(\frac{2}{c}\right)^{n_1+n_2+n_3} n_1! n_2! n_3! \left\{ D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} D_{x_3}^{n_3} K_{n_1, n_2, n_3}^{m_1, m_2, m_3}(t; x_1, x_2, x_3) + \right. \\
 & + D_{x_2}^{n_2} D_{x_3}^{n_3} \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \left(\frac{2}{c}\right)^{-w_1} \frac{1}{w_1!} D_{x_1}^{n_1-w_1-1} \left[x_1^{m_1-1} K_{0, 0}^{m_2, m_3}(t-x_1; x_2, x_3) \right] + \\
 & + D_{x_1}^{n_1} D_{x_3}^{n_3} \sum_{w_2=0}^{n_2-1} \left(\frac{2}{c}\right)^{-w_2} \frac{1}{w_2!} D_{x_2}^{n_2-w_2-1} \left[x_2^{m_2-1} K_{0, 0}^{m_1, m_3}(t-x_2; x_1, x_3) \right] + \\
 & + D_{x_1}^{n_1} D_{x_2}^{n_2} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c}\right)^{-w_3} \frac{1}{w_3!} D_{x_3}^{n_3-w_3-1} \left[x_3^{m_3-1} K_{0, 0}^{m_1, m_2}(t-x_3; x_1, x_2) \right] + \\
 & + D_{x_3}^{n_3} \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \sum_{w_2=0}^{n_2-1} \left(\frac{2}{c}\right)^{-w_1-w_2} \frac{1}{w_1! w_2!} D_{x_1}^{n_1-w_1-1} D_{x_2}^{n_2-w_2-1} \left[x_1^{m_1-1} x_2^{m_2-1} \cdot \right. \\
 & \quad \left. \cdot K_0^{m_3}(t-x_1-x_2; x_3) \right] + \\
 & + D_{x_2}^{n_2} \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c}\right)^{-w_1-w_3} \frac{1}{w_1! w_3!} D_{x_1}^{n_1-w_1-1} D_{x_3}^{n_3-w_3-1} \left[x_1^{m_1-1} x_3^{m_3-1} \cdot \right. \\
 & \quad \left. \cdot K_0^{m_2}(t-x_1-x_3; x_2) \right] + \\
 & + D_{x_1}^{n_1} \sum_{w_2=0}^{n_2-1} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c}\right)^{-w_2-w_3} \frac{1}{w_2! w_3!} D_{x_2}^{n_2-w_2-1} D_{x_3}^{n_3-w_3-1} \left[x_2^{m_2-1} x_3^{m_3-1} \cdot \right. \\
 & \quad \left. \cdot K_0^{m_1}(t-x_2-x_3; x_1) \right] \left. \right\}. \tag{768}
 \end{aligned}$$

Želimo li izraziti $K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r)$ pomoću $K_{0, \dots, 0}^0(t; x_1, \dots, x_r)$ (vidi (709)), to moramo formulu (756) uvrstiti u (759).¹³¹ Pri tom treba uočiti, da se za $r-1 \leq p \leq r$ u (759)¹³¹ pojavljuju kompozicije s jednim parom indeksa, kako smo već spomenuli (usporedi (768)), dok (756) vrijedi samo za $r \geq 2$, a za $r=1$ vrijedi definicija (742). Razlog, da (756) ne vrijedi za $r=1$, leži u tom, da za taj slučaj iz (740) ne slijedi (743), jer (740) doduše vrijedi i za $r=1$, kako je lako uvjeriti se na temelju definicije (742) i formule (346), ali funkcija $K_n^m(t; x)$ ne zadovoljava uvjet (267).¹⁴² Moramo stoga u (759) za slučaj, da ima kompozicija s jednim parom indeksa, dotične članove odvojiti.

Bit će nam dalje zgodno, da dopustimo i negativne cijele potencije integralnih operatora S_{x_k} definirajući

$$S_{x_k}^{-n} = D_{x_k}^n \quad (759) \quad 139$$

Pretpostavimo dakle ponajprije $r \geq 3$ i $1 \leq p < r-1$. U tom slučaju je $Q=p$ i nema kompozicija s jednim parom indeksa. Uvrštenje od (756) u (759) daje, ako uzmemo u obzir (769):

$$\begin{aligned}
 K_{n_1, \dots, n_p, 0, \dots, 0}^{m_1, \dots, m_p, m_{p+1}, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) &= \prod_{\alpha=1}^p \left(\frac{2}{c}\right)^{n_\alpha} n_\alpha! \cdot \\
 &\cdot \left\{ \frac{1}{(r-2)!} \sum_{q_1=0}^{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor} \dots \sum_{q_r=0}^{\lfloor \frac{m_r}{2} \rfloor} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{u=1}^r (m_u - 2q_u)} \left(\prod_{v=1}^r (-1)^{m_v} m_v! S_{x_v}^{m_v - n_v - q_v} \right) (y-x)^{r-2} \Lambda_0(\sqrt{c^2 - y^2}) dy + \right. \\
 &+ \frac{1}{(r-y-2)!} \sum_{\gamma=1}^p \sum_{(k_1, \dots, k_\gamma)} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1} \dots \sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_\gamma}-1} \left(\prod_{t=1}^{\gamma} \left(\frac{2}{c}\right)^{-w_t} \frac{1}{w_t!} D_{x_{k_t}}^{n_{k_t} - w_t - 1} \right) \cdot \\
 &\cdot \left[\left(\prod_{\ell=1}^{\gamma} x_{k_\ell}^{m_{k_\ell} - 1} \right) \sum_{v_1=0}^{\lfloor \frac{m_{s_1}}{2} \rfloor} \dots \sum_{v_{r-\gamma}=0}^{\lfloor \frac{m_{s_{r-\gamma}}}{2} \rfloor} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{\phi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\phi} - 2v_\phi)} \left(\prod_{s=1}^{r-\gamma} (-1)^{m_{s_\phi}} m_{s_\phi}! S_{x_{s_\phi}}^{m_{s_\phi} - n_{s_\phi} - v_\phi} \right) \right].
 \end{aligned}$$

$$\cdot \int_{x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-y}}}^{t - (x_{k_1} + \dots + x_{k_y})} (y - x_{s_1} - \dots - x_{s_{r-y}})^{r-y-2} \Lambda_0(c \sqrt{(t - x_{k_1} - \dots - x_{k_y})^2 - y^2}) dy \Bigg\} \quad (770) / 40$$

Ako je naprotiv $r-1 \leq p \leq r$, to će biti $Q=r-1$, a članovi sa $y=r-1$ ćemo odijeliti. Dobijemo na pr. za $p=r$ ($r \geq 2$):

$$\begin{aligned} K_{n_1, \dots, n_{r-1}, 0}^{m_1, \dots, m_{r-1}, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) &= \prod_{\alpha=1}^p \left(\frac{2}{c}\right)^{n_\alpha} n_\alpha! \cdot \\ &\cdot \left\{ \frac{1}{(r-2)!} \sum_{q_1=0}^{\lfloor \frac{m_1}{2} \rfloor} \dots \sum_{q_r=0}^{\lfloor \frac{m_r}{2} \rfloor} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{u=1}^r (m_u - 2q_u)} \left(\prod_{v=1}^r (-1)^{m_v} m_v! S_{x_v}^{m_v - n_v - q_v} \right) (y-X)^{r-2} \Lambda_0(c \sqrt{t^2 - y^2}) dy + \right. \\ &+ \frac{1}{(r-y-2)!} \sum_{j=1}^{r-2} \sum_{(k_1, \dots, k_j)} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1} \dots \sum_{w_j=0}^{n_{k_j}-1} \left(\prod_{\xi=1}^j \left(\frac{2}{c}\right)^{-w_\xi} \frac{1}{w_\xi!} D_{x_{k_\xi}}^{n_{k_\xi} - w_\xi - 1} \right) \cdot \\ &\cdot \left[\left(\prod_{\xi=1}^j x_{k_\xi}^{m_{k_\xi} - 1} \right) \sum_{v_1=0}^{\lfloor \frac{m_{s_1}}{2} \rfloor} \dots \sum_{v_{r-y}=0}^{\lfloor \frac{m_{s_{r-y}}}{2} \rfloor} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{\sigma=1}^r (m_{s_\sigma} - 2v_\sigma)} \left(\prod_{s=1}^r (-1)^{m_s} m_s! S_{x_{s_s}}^{m_{s_s} - n_{s_s} - v_s} \right) \cdot \right. \\ &\cdot \int_{x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-y}}}^{t - (x_{k_1} + \dots + x_{k_y})} (y - x_{s_1} - \dots - x_{s_{r-y}})^{r-y-2} \Lambda_0(c \sqrt{(t - x_{k_1} - \dots - x_{k_y})^2 - y^2}) dy \Bigg] + \\ &+ \sum_{(k_1, \dots, k_{r-1})} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1} \dots \sum_{w_{r-1}=0}^{n_{k_{r-1}}-1} \left(\prod_{\xi=1}^{r-1} \left(\frac{2}{c}\right)^{-w_\xi} \frac{1}{w_\xi!} D_{x_{k_\xi}}^{n_{k_\xi} - w_\xi - 1} \right) D_{x_{s_1}}^{n_{s_1}} \cdot \\ &\cdot \left[\left(\prod_{\xi=1}^{r-1} x_{k_\xi}^{m_{k_\xi} - 1} \right) (t - x_{k_1} - \dots - x_{k_{r-1}})^{m_{s_1}} \Lambda_0(c \sqrt{(t - x_{k_1} - \dots - x_{k_{r-1}})^2 - x_{s_1}^2}) \right] \Bigg\} \quad (771) / 41 \end{aligned}$$

Pri tom je s_1 onaj broj izmedju brojeva $1, \dots, r$, koji nije sadržan u kombinaciji (k_1, \dots, k_{r-1}) .

Za $p=r-1$ formula ostaje formalno ista, samo što se kombinacije (k_1, \dots, k_r) tvore samo od brojeva $1, \dots, r-1$, pa u zadnjoj sumi dobijemo jedinu kombinaciju $(k_1, \dots, k_{r-1}) = (1, \dots, r-1)$ sa

$$D_{x_{s_1}}^{n_{s_1}} = D_{x_r}^{n_r} = D_{x_r}^0 = I.$$

7. Kanonički oblik integralnih teorema.

Pokušajmo desnu stranu najopćenitijeg integralnog teorema (771) izraziti pomoću što manjeg broja što jednostavnijih funkcija.

Pogledamo li zadnju višestruku sumu u vitičastoj zagradi, to vidimo, da opetovano izvršenje operacija $D_{x_{k_2}}$ i $D_{x_{s_1}}$ na izraz u uglatoj zagradi obzirom na (758), (234), (456) i (394), koja potonja formula s oznakama prema (340) glasi

$$\Lambda_n(z) = n! \left\{ \Lambda_1(z) \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^w [(n-w-1)!]^2}{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-2w} (w!)^2 (n-2w-1)!} - \Lambda_0(z) \sum_{w=0}^{\lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor} \frac{(-1)^w (n-w-2)! (n-w-1)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{2n-2w-2} w! (w+1)! (n-2w-2)!} \right\}, \quad (772)$$

daje očito funkciju oblika

$$R_0(t; x_1, \dots, x_r) \cdot \Lambda_0\left(c \sqrt{(t-x_{k_1} - \dots - x_{k_{r-1}})^2 - x_{s_1}^2}\right) + R_1(t; x_1, \dots, x_r) \cdot \Lambda_1\left(c \sqrt{(t-x_{k_1} - \dots - x_{k_{r-1}})^2 - x_{s_1}^2}\right), \quad (773)$$

gdje su R_0 i R_1 racionalne funkcije od t, x_1, \dots, x_r . Da su te funkcije racionalne, uvjetovano je napose time, što su sve potencije od z u (772) tako, tako da korijen u argumentu Besselove funkcije otpada, kad se uvrsti mjesto z u formulu (772).

Razmotrimo sad srednju višestruku sumu u vitičastoj zagradi u formuli (771). Pretpostavimo ponajprije, da je eksponent operatora $S_{x_{s_1}}$ pozitivan. Stavimo li

$$t - (x_{k_1} + \dots + x_{k_y}) = \bar{t} \quad (774)$$

$$x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-y}} = \bar{y} \quad (775)$$

$$\phi(\bar{t}, \bar{y}) = \Lambda_0\left(c \sqrt{\bar{t}^2 - \bar{y}^2}\right), \quad (776)$$

to se integral u srednjoj višestrukoj sumi u (771) nakon izvršenja operacije $S_{x_{s_1} \dots x_{s_r}}^{m_{s_1} \dots m_{s_r} - n_{s_1} \dots n_{s_r} - v_s}$ može prema (304) i (306) svesti na oblik

$$\int_0^{\bar{T}-\bar{X}} \phi(y) \varphi(\bar{T}, y+\bar{X}) dy = \int_{\bar{X}}^{\bar{T}} \phi(y-\bar{X}) \varphi(\bar{T}, y) dy = \int_{\bar{X}}^{\bar{T}} \phi(y-\bar{X}) \Lambda_0(c\sqrt{\bar{T}^2-y^2}) dy =$$

$$\int_{x_{s_1}+\dots+x_{s_{r-1}}}^{t-(x_{k_1}+\dots+x_{k_y})} \phi(y-x_{s_1}-\dots-x_{s_{r-1}}) \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_y})^2-y^2}) dy, \quad (777)$$

gdje je ϕ u smislu (307) cijela racionalna funkcija od $y, x_{s_1}, \dots, x_{s_{r-1}}$.

Izvrši li se na takav integral operacija $(\frac{\partial}{\partial T})^{m_{s_0} - 2v_\phi}$ i zatim, poslije

množenja sa $x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon} - 1}$ operacija $D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1}$, to će očito diferencijacije

pod znakom integracije obzirom na (346) povisivati indeks Λ -funkcije,

koja će biti pomnožena s cijelom racionalnom funkcijom od y, x_1, \dots, x_r ,

dok će pred dobivenim integralima stajati racionalne funkcije od

x_{k_1}, \dots, x_{k_y} . Rastavljanjem tih integrala po pojedinim potencijama

od y dokzimo na integrale oblika

$$\int_{\bar{X}}^{\bar{T}} y^m \Lambda_n(c\sqrt{\bar{T}^2-y^2}) dy, \text{ pomnožene racionalnim funkcijama od}$$

x_1, \dots, x_r , a ti se integrali prema (598) do (601), (555) i (534), (542) mogu izraziti u obliku

$$R_0 \Lambda_0(c\sqrt{\bar{T}^2-\bar{X}^2}) + R_1 \Lambda_1(c\sqrt{\bar{T}^2-\bar{X}^2}) + R_2 \int_{\bar{X}}^{\bar{T}} \Lambda_0(c\sqrt{\bar{T}^2-y^2}) dy + R_3 \int_{\bar{X}}^{\bar{T}} \Lambda_1(c\sqrt{\bar{T}^2-y^2}) dy +$$

$$+ R_4, \quad (778)$$

gdje \bar{t} i \bar{X} imaju značenje (774), (775), a R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 su racionalne funkcije od t, x_1, \dots, x_r .

Diferencijacije po gornjoj granici integrala (777) vode očit^{do}o na analogne izraze kao (773), pa ih možemo smatrati već sadržanim u (778).

Slučaj, da je eksponent od $S_{x_{s_j}}$ u (771) nula ili negativan, ne pruža nikakvih principijelnih promjena u razmatranju, jer se time samo pojednostavnjuje funkcija Φ u (777) i u smislu (769) dodaju nove operacije diferenciranja.

Prva višestruka suma u vitičastoj sagradi u (771) dopušta isto razmatranje, pa je rezultat sadržan u obliku (778) za $\gamma = 0$, u kojem slučaju je $t = \bar{t}$ i $X = \bar{X}$. Isto tako je i (773) specijalan slučaj od (778) za $\gamma = r-1$ (pri čemu je $R_2 = R_3 = R_4 = 0$), tako da se (771) može izraziti pomoću članova oblika (778). Razumije se, da to vrijedi i za slučaj (770), koji se od (771) razlikuje u tome, što stanoviti članovi fale.

Označimo sad sa N broj kombinacija nultog do $(r-1)$ -tog razreda elemenata $1, \dots, r$, i numeriramo sve te kombinacije od 1 do N . (Nije teško vidjeti, da je $N = 2^r - 1$). Neka je $(x_{k_1}, \dots, x_{k_\gamma})$ k -ta od tih kombinacija. Stavljamo

$$x_{k_1} + \dots + x_{k_\gamma} = a_k \quad (k=1, \dots, N) \quad (779)$$

$$x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}} = b_k \quad (k=1, \dots, N) \quad (780)$$

Napose neka je prva kombinacija ona, koja odgovara $\gamma = 0$, dakle kombinacija "nikakav element", koja je nultog razreda, pa je za taj slučaj

$$a_1 = 0, \quad b_1 = x_1 + \dots + x_r = X \quad (781)$$

Razumije se, da je uvijek

$$a_k + b_k = X \quad (k=1, \dots, N) \quad (782)$$

Možemo sada integralni teorem (771) dovesti u oblik

$$\begin{aligned} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r) &= \sum_{k=1}^N R_{0,k}(t; x_1, \dots, x_r) \Lambda_0(c\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \\ &+ \sum_{k=1}^N R_{1,k}(t; x_1, \dots, x_r) \Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \\ &+ \sum_{k=1}^N R_{2,k}(t; x_1, \dots, x_r) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0(c\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy + \\ &+ \sum_{k=1}^N R_{3,k}(t; x_1, \dots, x_r) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy + \\ &+ R_4(t; x_1, \dots, x_r), \end{aligned} \quad (783)$$

gdje su $R_{0,k}, R_{1,k}, R_{2,k}, R_{3,k}$ ($k=1, \dots, N$) i R_4 racionalne funkcije od t, x_1, \dots, x_r . Pri tom su obzirom na (773) svakako neki od $R_{2,k}$ i $R_{3,k}$ jednaki nuli, na što se međjutim ne obaziremo.

Oblik (783) integralnih teorema nazvat ćemo kanoničkim oblikom tih teorema. Nameće se pitanje, da li je u tom izrazu, koji je linearan obzirom na funkcije $\Lambda_0(c\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2})$, $\Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2})$,

$$\int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0(c\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy, \quad \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy, \quad (k=1, \dots, N),$$

broj

tih funkcija sveden na minimum, t.j. ne daju li se možda neke od tih funkcija linearno izraziti pomoću ostalih funkcija, s koeficijentima, koji su racionalne funkcije od t, x_1, \dots, x_r . Razumije se, da bi to

moralo vrijediti za bilo kakve vrijednosti parametara x_1, \dots, x_r , (izuzevši vrijednost nula, koju zasad isključujemo), i varijable t . Ovo je pitanje ekvivalentno s pitanjem, da li između navedenih funkcija postoji linearna relacija s koeficijentima, koje su racionalne funkcije od x_1, \dots, x_r i varijable t . Dokažemo li, da takve relacije ne može biti, to je time i dokazano, da se ne daju pojedine od navedenih funkcija izraziti linearno pomoću ostalih i da su prema tome racionalne funkcije, koje fungiraju kao koeficijenti u izrazu (783), jednoznačno određene. Na temelju takvog dokaza bit će opravdan naziv "kanonički oblik" za izraz (783).

Treba primijetiti, da za taj dokaz nisu dovoljni poznati kriteriji linearne neovisnosti (Wronskijeva i Gramova determinanta), jer koeficijenti nisu konstante, već racionalne funkcije varijable t .

Jasno je, da je dovoljno dokazati nemogućnost linearne relacije za neke specijalne vrijednosti parametara x_1, \dots, x_r . Odabiremo stoga parametre x_1, \dots, x_r tako, da bude ispunjen uvjet, da ni u kojem paru jednačaba

$$\left. \begin{array}{l} a_j = a_k \\ b_j = b_k \end{array} \right\} \quad (j \neq k; \quad j, k = 1, \dots, N) \quad (784)$$

ne budu zadovoljene obje jednačbe i da za najviše jednu vrijednost

k_1 indeksa k bude

$$b_{k_1} = 0 \quad (784a)$$

Da je moguće odabrati parametre x_1, \dots, x_r tako, da ovaj uvjet bude ispunjen, slijedi iz poznatog stavka algebre*):

"Ako su $f_1(x_1, \dots, x_r), \dots, f_n(x_1, \dots, x_r)$ bilo kakvi polinomi, koji ne iščezavaju identično, i ako je \mathbb{M} neki skup od neizmjereno mnogo veličina, na pr. skup cijelih brojeva, to se mogu ^{za} varijable x_1, x_2, \dots, x_r na neizmjereno mnogo načina

*) O. Perron, Algebra I., W. de Gruyter, Berlin u. Leipzig 1932, str. 77., stavak 29.

odabrati takve veličine $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ skupa \underline{M} , da bude

$$f_v(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \neq 0 \quad \text{za} \quad v=1, \dots, n."$$

Stavimo li za naš slučaj

$$f_{j,k}(x_1, \dots, x_r) = a_j - a_k + i(b_j^2 - b_k^2) \quad (j \neq k; \quad j, k=1, \dots, N) \quad (785)$$

to je jasno, da su prema (779), (780) te funkcije polinomi varijabla x_1, \dots, x_r , koji ne iščezavaju identično, jer bi inače za realne varijable realni dio bio $a_j - a_k$, i taj bi realni dio morao identično iščezavati, što je nemoguće, jer su a_j i a_k sume elemenata različitih kombinacija varijabla x_1, \dots, x_r . Odaberemo li za \underline{M} na pr. skup pozitivnih cijelih brojeva, to smo izbjegli vrijednost nula za parametre x_1, \dots, x_r , pa i za brojeve b_k , a primjena citiranog stavka daje mogućnost ispunjavanja željenog uvjeta.

Na temelju toga provest ćemo u slijedećoj točki dokaz nemogućnosti linearne relacije između spomenutih funkcija s koeficijentima, koji su racionalne funkcije varijable t .

8. Dokaz jednoznačnosti kanoničkog oblika integralnih teorema.

Dokazujemo

STAVAK III.8.

Neka je zadano N parova kompleksnih brojeva a_k, b_k ($k=1, \dots, N$) tako, da ni u kojem od parova jednačaba

$$\left. \begin{aligned} a_j &= a_k \\ b_j &= b_k \end{aligned} \right\} (j \neq k; j, k = 1, \dots, N) \quad (786)$$

nisu zadovoljene obje jednačžbe, i da najviše za jednu vrijednost k_1 indeksa k vrijedi

$$b_{k_1} = 0. \quad (786a)$$

Neka su dalje $R_{0,k}, R_{1,k}, R_{2,k}, R_{3,k}$ ($k=1, \dots, N$) i R_4 cijele racionalne funkcije varijable t , koje nisu sve identično jednake nuli. Onda je nemoguće, da postpji identitet oblika

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N R_{0,k} \Lambda_0(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) + \sum_{k=1}^N R_{1,k} \Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) + \\ & + \sum_{k=1}^N R_{2,k} \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}) dy + \sum_{k=1}^N R_{3,k} \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}) dy + \\ & + R_4 = 0. \end{aligned} \quad (787)$$

Jasno je, da se slučaj, da su koeficijenti R razlomljeno racionalne funkcije, koji nam treba, može svesti na ovaj, ako se identitet pomnoži sa zajedničkim mnogokratnikom svih nazivnika.

Uvest ćemo još pojednostavnjenje

$$c = 1, \quad (788)$$

koje ne znači sužavanje općenitosti, jer se to pojednostavnjenje može postići supstitucijom

$$t = \frac{\bar{t}}{c}, \quad y = \frac{\bar{y}}{c}, \quad a_k = \frac{\bar{a}_k}{c}, \quad b_k = \frac{\bar{b}_k}{c}, \quad (789)$$

koja ne narušava pretpostavke našeg stavka.

Provest ćemo najprije dokaz za slučaj $N=1$. Radi jednostavnosti ćemo staviti $a_1=0$, što ne znači sužavanje općenitosti, jer se to može postići supstitucijom

$$t = \bar{t} + a_1. \quad (790)$$

Ispustimo li još suvišne indekse, to se dakle radi o identitetu

$$R_0 \Lambda_0(\sqrt{t^2-b^2}) + R_1 \Lambda_1(\sqrt{t^2-b^2}) + R_2 \int_b^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2}) dy + R_3 \int_b^t \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2}) dy + R_4 \equiv 0. \quad (791)$$

Izvest ćemo ponajprije neke pomoćne formule. Stavimo li u (420) $n=0$, odnosno $n=1$ i integriramo po z od 0 do t , to dobijemo, ako mjesto z pišemo y :

$$\int_0^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} t^{2w+1}}{(w!)^2} \sum_{k=0}^w \frac{(-1)^k \binom{w}{k}}{2k+1} \quad (792)$$

$$\int_0^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w \left(\frac{c}{2}\right)^{2w} t^{2w+1}}{w! (w+1)!} \sum_{k=0}^w \frac{(-1)^k \binom{w}{k}}{2k+1}. \quad (793)$$

Stavimo li u (215)

$$-q = 2n+1 \quad (794)$$

i nadomjestimo n sa w , to slijedi

$$\sum_{k=0}^w \frac{(-1)^k \binom{w}{k}}{2k+1} = \frac{2^{2w+1} (w+1)! w!}{(2w+2)!} = \frac{2^{2w} (w!)^2}{(2w+1)!} \quad (795)$$

Dvrštenje u (792) i (793) daje

$$\int_0^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w c^{2w} t^{2w+1}}{(2w+1)!} = \frac{1}{c} \sin(ct) \quad (796)$$

$$\begin{aligned} \int_0^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy &= \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w 2c^{2w} t^{2w+1}}{(2w+2)!} = \frac{2}{c^2 t} \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w c^{2w+2} t^{2w+2}}{(2w+2)!} = \\ &= \frac{2}{c^2 t} [1 - \cos(ct)] \end{aligned} \quad (797)$$

Na temelju tih formula vrijedi, ako još uvedemo (788),

$$\int_b^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2}) dy = \sin t - \int_0^b \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (798)$$

$$\int_b^t \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2}) dy = \frac{2}{t} (1 - \cos t) - \int_0^b \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (799)$$

Ako u (655) stavimo $u = \sqrt{t^2 - x^2}$

$$c_2 = 0, \quad c_1 = -1 \quad (800)$$

i odijelimo realne članove od imaginarnih, to slijedi

$$\cos\left(t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right) = \cos\left(\sqrt{t^2-x^2} - t\right) = 1 - \frac{x^4}{8t^2} + \dots = 1 + o(|t|^{-2}) \quad (801)$$

$$\sin\left(t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right) = \sin\left(\sqrt{t^2-x^2} - t\right) = -\frac{x^2}{2t} - \left(1-\frac{x^2}{5}\right)\frac{x^4}{8t^3} - \dots = o(|t|^{-1}) \quad (802)$$

Pišemo li umjesto (realnog) broja x kompleksni broj b , to ovi razvoji

očito ostaju na snazi, ako je samo predznak korijena tako odabran, da bude

$$\lim_{|t| \rightarrow \infty} \sqrt{1 - \frac{b^2}{t^2}} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2 - b^2}}{t} = +1, \quad (803)$$

pri čemu i t može biti kompleksna varijabla. Vrijedi dakle

$$\cos(\sqrt{t^2 - b^2} - t) = 1 + o(|t|^{-2}) \quad (804)$$

$$\sin(\sqrt{t^2 - b^2} - t) = o(|t|^{-1}). \quad (805)$$

Možemo stoga pisati

$$\begin{aligned} \sin(\sqrt{t^2 - b^2} - \frac{\pi}{4}) &= \sin(t - \frac{\pi}{4}) \cos(\sqrt{t^2 - b^2} - t) + \cos(t - \frac{\pi}{4}) \sin(\sqrt{t^2 - b^2} - t) = \\ &= \sin(t - \frac{\pi}{4}) [1 + o(|t|^{-2})] + \cos(t - \frac{\pi}{4}) o(|t|^{-1}) \end{aligned} \quad (806)$$

i analogno

$$\cos(\sqrt{t^2 - b^2} - \frac{\pi}{4}) = \cos(t - \frac{\pi}{4}) [1 + o(|t|^{-2})] - \sin(t - \frac{\pi}{4}) o(|t|^{-1}). \quad (807)$$

Ako je imaginarni dio od t ograničen, a realni dio teži prema $\pm \infty$,

to je $|\sin(t - \frac{\pi}{4})|$ i $|\cos(t - \frac{\pi}{4})|$ ograničen, pa je očito za taj slučaj

$$\sin(t - \frac{\pi}{4}) o(|t|^{-n}) = o(|t|^{-n}) \quad (808)$$

$$\cos(t - \frac{\pi}{4}) o(|t|^{-n}) = o(|t|^{-n}) \quad (809)$$

dakle prema (806) i (807)

$$\sin(\sqrt{t^2 - b^2} - \frac{\pi}{4}) = \sin(t - \frac{\pi}{4}) + o(|t|^{-1}) \quad (810)$$

$$\cos(\sqrt{t^2 - b^2} - \frac{\pi}{4}) = \cos(t - \frac{\pi}{4}) + o(|t|^{-1}). \quad (811)$$

Iz (634) slijedi za $\nu=0$, i $\nu=1$ obzirom na (340):

$$\Lambda_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \left[1 + o(|z|^{-2})\right] + \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) o(|z|^{-1}) \right\} \quad (812) \quad 182$$

$$\Lambda_1(z) = \frac{2}{z} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \left[1 + o(|z|^{-2})\right] + \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) o(|z|^{-1}) \right\} \quad (813) \quad 183$$

Zbog (803) očito vrijedi

$$o\left(\left|\sqrt{t^2 - b^2}\right|^{-n}\right) = o(|t|^{-n}) \quad (814) \quad 184$$

Nadomjestimo li u (812), (813) z sa $\sqrt{t^2 - b^2}$, gdje je t varijabla s ograničenim imaginarnim dijelom i s realnim dijelom, koji teži prema $+\infty$, to će obzirom na (803) biti ispunjen uvjet (636) (i onda, ako je imaginarni dio od t jednak nuli), pa dobijemo pomoću (810), (811), (814)

$$\begin{aligned} \Lambda_0(\sqrt{t^2 - b^2}) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left\{ \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + o(|t|^{-1}) \right\} = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + o(|t|^{-\frac{3}{2}}) \end{aligned} \quad (815) \quad 185$$

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\sqrt{t^2 - b^2}) &= \frac{2}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left\{ \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + o(|t|^{-1}) \right\} = \\ &= \frac{2}{t} \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + o(|t|^{-\frac{5}{2}}) \end{aligned} \quad (816) \quad 186$$

Obzirom na (808), (809) slijedi također

$$\Lambda_0(\sqrt{t^2 - b^2}) = o(|t|^{-\frac{1}{2}}) \quad (817) \quad 187$$

$$\Lambda_1(\sqrt{t^2 - b^2}) = o(|t|^{-\frac{3}{2}}), \quad (818) \quad 188$$

što, drukčije rečeno, znači, da postoji konačni $\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{\frac{1}{2}} |\Lambda_0(\sqrt{t^2 - b^2})|$

i $\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{\frac{3}{2}} |\Lambda_1(\sqrt{t^2 - b^2})|$, gdje $|t|$ tako teži prema ∞ , da realni

dio teži prema $+\infty$, dok imaginarni dio ostaje ograničen.

Označuje li $M_0(t)$ maksimum od $\left| \Lambda_0(\sqrt{t^2 - \lambda^2 b^2}) \right|$, a $M_1(t)$ maksimum od $\left| \Lambda_1(\sqrt{t^2 - \lambda^2 b^2}) \right|$ obzirom na realnu varijablu λ , koja prelazi zatvoreni interval $(0,1)$, to će pod istim uvjetima očito postojati i konačni

$$\limsup_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{\frac{1}{2}} M_0(t) \quad \text{i} \quad \limsup_{|t| \rightarrow \infty} |t|^{\frac{3}{2}} M_1(t), \quad \text{ili}$$

$$M_0(t) = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \quad (819) \quad 189$$

$$M_1(t) = O(|t|^{-\frac{3}{2}}). \quad (820) \quad 190$$

Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} \left| \int_0^b \Lambda_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy \right| &= \left| \int_0^1 b \Lambda_0(\sqrt{t^2 - \lambda^2 b^2}) d\lambda \right| \leq |b| \int_0^1 \left| \Lambda_0(\sqrt{t^2 - \lambda^2 b^2}) \right| d\lambda \leq \\ &= |b| M_0(t), \end{aligned} \quad (821) \quad 191$$

dakle

$$\int_0^b \Lambda_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \quad (822) \quad 192$$

i analogno

$$\int_0^b \Lambda_1(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = O(|t|^{-\frac{3}{2}}). \quad (823) \quad 193$$

Prema (798), (799) dobivamo dakle

$$\int_0^t \Lambda_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = \sin t + O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \quad (824) \quad 194$$

$$\int_0^t \Lambda_1(\sqrt{t^2 - y^2}) dy = \frac{2}{t}(1 - \cos t) + O(|t|^{-\frac{3}{2}}). \quad (825) \quad 195$$

Poslije ovih priprava prelazimo na dokaz nemogućnosti identiteta (791).

Neka je t realna varijabla, a m najveći stepen polinoma R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 i stavimo prema tome

$$\begin{aligned} R_0 &= p_m t^m + p_{m-1} t^{m-1} + \dots \\ R_1 &= q_m t^m + q_{m-1} t^{m-1} + \dots \\ R_2 &= r_m t^m + r_{m-1} t^{m-1} + \dots \\ R_3 &= s_m t^m + s_{m-1} t^{m-1} + \dots \\ R_4 &= u_m t^m + u_{m-1} t^{m-1} + \dots \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} R_0 \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} 196a \\ 196b \\ 196c \\ 196d \\ 196e \end{array} \quad (826)$$

gdje je barem jedan od koeficijenata p_m, q_m, r_m, s_m, u_m od nule različit.

Označimo lijevu stranu identiteta (791) sa $F(t)$, to slijedi iz tog identiteta na temelju (815), (816), (824), (825), (826):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-m} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (r_m \sin t + u_m) = 0 \quad (827)$$

dakle zbog periodiciteta sinusa

$$r_m \sin t + u_m \equiv 0 \quad (828)$$

ili

$$r_m = u_m = 0 \quad (829)$$

To dakle znači, da su R_2 i R_4 najviše $(m-1)$ -tog stepena ili nula, (ako je $m=0$). Time dobijemo dalje

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-m+\frac{1}{2}} F(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) = 0, \quad (830)$$

dakle

$$p_m = 0 \quad (831)$$

I R_0 je dakle najviše $(m-1)$ -tog stepena ili nula. Slijedi dalje

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-m+1} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[r_{m-1} \sin t + 2s_m (1 - \cos t) + u_{m-1} \right] = 0, \quad (832) \quad 202$$

dakle zbog periodiciteta izraza u uglatoj zagradi

$$r_{m-1} \sin t + 2s_m (1 - \cos t) + u_{m-1} \equiv 0. \quad (833) \quad 203$$

Za $t = 0$ slijedi

$$u_{m-1} = 0, \quad (834) \quad 204$$

za $t = \pi$ dobijemo

$$s_m = 0 \quad (835) \quad 205$$

a za $t = \frac{\pi}{2}$

$$r_{m-1} = 0, \quad (836) \quad 206$$

tako da je i R_3 najviše $(m-1)$ -tog stepena ili nula, a R_2 i R_4 najviše $(m-2)$ -tog stepena ili nula. Prema tomu je dalje

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-m+\frac{3}{2}} P(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left[p_{m-1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + q_m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \right] = 0 \quad (837) \quad 207$$

dakle

$$p_{m-1} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) + q_m \sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \equiv 0. \quad (838) \quad 208$$

Za $t = \frac{\pi}{4}$ slijedi

$$p_{m-1} = 0, \quad (839) \quad 209$$

a za $t = \frac{3\pi}{4}$

$$q_m = 0. \quad (840) \quad 210$$

Time je i R_1 najviše $(m-1)$ -tog stepena ili nula, a R_0 najviše $(m-2)$ -tog stepena ili nula. Prema (829), (831), (835), (840), su dakle svi koeficijenti p_m, q_m, r_m, s_m, u_m jednaki nuli, t.j. nijedan od polinoma R_0, \dots, R_4 nije m -tog stepena, što se protivi pretpostavci. Identitet (791) je dakle nemoguć.

Da dokažemo nemogućnost općeg identiteta (787), prenijet ćemo

taj identitet pomoću Laplaceove transformacije iz područja prvotnih funkcija u područje izvedenih funkcija.

Pomnožimo ponajprije identitet s polinomom

$$G(t) = \prod_{k=1}^N (t-a_k-b_k)(t-a_k), \quad (841) \quad 211$$

koji sigurno ne iščezava identično. Stavimo li

$$R_{0,k}(t) \cdot G(t) = \bar{R}_{0,k}(t) \quad (842) \quad 212$$

$$R_{1,k}(t) \cdot G(t) = (t-a_k-b_k) \bar{R}_{1,k}(t) \quad (843) \quad 213$$

$$R_{2,k}(t) \cdot G(t) = \bar{R}_{2,k}(t) \quad (844) \quad 214$$

$$R_{3,k}(t) \cdot G(t) = (t-a_k) \bar{R}_{3,k}(t) \quad (845) \quad 215$$

$$R_4(t) \cdot G(t) = \bar{R}_4(t), \quad (846) \quad 216$$

to su i $\bar{R}_{0,k}(t), \bar{R}_{1,k}(t), \bar{R}_{2,k}(t), \bar{R}_{3,k}(t), \bar{R}_4(t)$ opet polinomi i njihovo identično iščezavanje je ekvivalentno s identičnim iščezavanjem polinoma $R_{0,k}(t), \dots, R_4(t)$. Uvedemo li još (788), to možemo mjesto identiteta (787) razmatrati identitet

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \bar{R}_{0,k}(t) \Lambda_0(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) + \sum_{k=1}^N \bar{R}_{1,k}(t) \cdot (t-a_k-b_k) \Lambda_1(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) + \\ & + \sum_{k=1}^N \bar{R}_{2,k}(t) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}) dy + \sum_{k=1}^N \bar{R}_{3,k}(t) \cdot (t-a_k) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}) dy + \\ & + \bar{R}_4(t) = 0 \quad (847) \quad 217 \end{aligned}$$

Prema (627) vrijedi

$$\int_b^{\infty} e^{-st} \Lambda_0(\sqrt{t^2-b^2}) dt = \frac{e^{-b\sqrt{s^2+1}}}{\sqrt{s^2+1}} \quad (b \geq 0, \operatorname{Re}(s) > 0) \quad (848) \quad 218$$

Kao što je spomenuto u napomeni k ~~jednadžbi~~ (627), može se analitičkim produživanjem uvidjeti, da se b može odabrati i kompleksan, pa u tom slučaju krivulja integracije počinje u točki b i teži prema $+\infty$. Možemo je napose odabrati i tako, da vodi od točke b do jedne na osi x po volji odabrane točke, a odanle uz os x prema $+\infty$.

Ako je αi imaginarni dio kompleksnog broja a , to će supstitucija

$$t = \bar{t} - a \quad (849) \quad 219$$

uvjetovati, da krivulja integracije počinje u točki $a+b$ i teži prema $\alpha i + \infty$. Uočimo li, da je integrand cijela funkcija, koja teži eksponencijalno prema nuli, kad uz ograničeni imaginarni dio realni dio od t teži prema $+\infty$, (usporedi (817)), to uvidjamo, da se na temelju Cauchyevog stavka može put integracije tako pomaknuti, da od točke $a+b$ teži prema $+\infty$. Vrijedi stoga

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} \Lambda_0(\sqrt{(t-a)^2 - b^2}) dt = \frac{e^{-b\sqrt{s^2+1} - as}}{\sqrt{s^2+1}} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0) \quad (850) \quad 220$$

Diferenciramo li ovu jednadžbu r puta po s , to slijedi

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r \Lambda_0(\sqrt{(t-a)^2 - b^2}) dt = (-1)^r \frac{d^r}{ds^r} \frac{e^{-b\sqrt{s^2+1} - as}}{\sqrt{s^2+1}} \quad (851) \quad 221$$

Diferencijacija od (850) po b daje pomoću (345)

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2 - b^2}) dt = \frac{2}{b} (e^{-(a+b)s} - e^{-b\sqrt{s^2+1} - as}). \quad (852) \quad 222$$

Diferenciramo li to po a , slijedi:

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2 - b^2}) dt = \frac{2}{b} \left[(a+b) e^{-(a+b)s} + \frac{d}{ds} e^{-b\sqrt{s^2+1} - as} \right]. \quad (853) \quad 223$$

Iz (852) i (853) slijedi

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} (t-a-b) \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2 - b^2}) dt = \frac{2}{b} \left(\frac{d}{ds} + a+b \right) e^{-b\sqrt{s^2+1} - as}. \quad (854) \quad 224$$

Diferenciramo to još r puta po s i dobijemo:

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r (t-a-b) \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2 - b^2}) dt = (-1)^r \frac{d^r}{ds^r} \left[\left(\frac{d}{ds} + a+b \right) \left\{ \frac{2}{b} e^{-b\sqrt{s^2+1} - as} \right\} \right]. \quad (855) \quad 225$$

Prema (653) vrijedi

$$\int_b^{\infty} e^{-st} \int_b^t \Lambda_0(\sqrt{t^2 - y^2}) dy dt = \frac{e^{-b\sqrt{s^2+1}}}{s^2+1} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0). \quad (856) \quad 226$$

Nadomjestimo li opet t sa $t-a$, pomaknemo shodno put integracije i diferenciramo r puta po s , to slijedi

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r \int_b^{t-a} \Lambda_0(\sqrt{(t-a)^2 - y^2}) dy dt = (-1)^r \frac{d^r}{ds^r} \frac{e^{-b\sqrt{s^2+1} - as}}{s^2+1}. \quad (857) \quad 227$$

Ako na temelju (852) provedemo prijetvorbu analognu onoj, koja je dovela od (682) do (683) i pomnožimo jednadžbu sa e^{as} , to dobijemo

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-s(t-a)} \int_b^{t-a} \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2 - y^2}) dy dt = \int_b^{\infty} \frac{2}{y} (e^{-ys} - e^{-y\sqrt{s^2+1}}) dy. \quad (858) \quad 228$$

($\operatorname{Re}(s) > 0$)

Diferencijacija po s i dioba sa e^{as} daje

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} (t-a) \int_b^{t-a} \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2 - y^2}) dy dt = \frac{2e^{-(a+b)s}}{s} - \frac{2s}{s^2+1} e^{-b\sqrt{s^2+1} - as} \quad (859) \quad 279$$

Diferenciramo tu jednadžbu r puta po s :

$$\begin{aligned} \int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r (t-a) \int_b^{t-a} \Lambda_1(\sqrt{(t-a)^2 - y^2}) dy dt &= \\ &= (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial s^r} \left\{ \frac{2e^{-(a+b)s}}{s} - \frac{2s}{s^2+1} e^{-b\sqrt{s^2+1} - as} \right\} \quad (860) \quad 280 \end{aligned}$$

Ivedemo sad kraticu

$$\begin{aligned} Q_k(t) &= \bar{R}_{0,k}(t) \Lambda_0(\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \bar{R}_{1,k}(t)(t-a_k-b_k) \Lambda_1(\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) + \\ &+ \bar{R}_{2,k}(t) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy + \bar{R}_{3,k}(t)(t-a_k) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_k)^2 - y^2}) dy \quad (861) \quad 281 \end{aligned}$$

i tvorimo izraz

$$T(s) = \sum_{k=1}^N \int_{a_k+b_k}^{\infty} e^{-st} Q_k(t) dt + \int_0^{\infty} e^{-st} R_4(t) dt \quad (862) \quad 282$$

Zamislamo, da put integracije pojedinih integrala pod sumom vodi od $\frac{a_k+b_k}{\infty}$ do 0 , (na pr. pravocrtno), i zatim od 0 po osi x prema ∞ , to će dijelovi integrala od 0 do ∞ sa zadnjim integralom od (862) prema pretpostavljenom identitetu (847) dati nulu, tako da ostaje

$$T(s) = \sum_{k=1}^N \int_{a_k+b_k}^0 e^{-st} Q_k(t) dt \quad (863) \quad 283$$

Time je postignuto, da su otpale poteškoće konvergencije, pa je stoga cijela analitička funkcija (863) jednoznačno definirana u cijeloj ravnini. (Dvoznačnost korijena u argumentima Besslovih funkcija ne dolazi do izražaja, jer su to take funkcije svojeg argumenta). Razumijevamo li pod $\bar{R}_{0,k}(-\frac{d}{ds})$ simbolički izraz, koji dobijemo, ako u polinomu $\bar{R}_{0,k}(t)$ zamijenimo općenito t^r sa $(-1)^r \frac{d^r}{ds^r}$, i analogno za $\bar{R}_{1,k}(t), \dots, \bar{R}_4(t)$, to možemo na temelju (851), (855), (857), (860) i na temelju relacije

$$\int_0^{\infty} e^{-st} t^r dt = \frac{r!}{s^{r+1}} = (-1)^r \frac{d^r}{ds^r} \frac{1}{s} \quad (864)$$

mjesto (862) pisati

$$\begin{aligned} T(s) = & \sum_{k=1}^N \left\{ \bar{R}_{0,k} \left(-\frac{d}{ds}\right) \frac{e^{-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s}}{\sqrt{s^2+1}} + \bar{R}_{1,k} \left(-\frac{d}{ds}\right) \left(\frac{d}{ds} + a_k + b_k\right) \cdot \right. \\ & \cdot \frac{2e^{-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s}}{b_k} \left. + \bar{R}_{2,k} \left(-\frac{d}{ds}\right) \frac{e^{-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s}}{s^2+1} + \right. \\ & \left. + \bar{R}_{3,k} \left(-\frac{d}{ds}\right) \left[\frac{2e^{-(a_k+b_k)s}}{s} - \frac{2s e^{-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s}}{s^2+1} \right] \right\} + \bar{R}_4 \left(-\frac{d}{ds}\right) \frac{1}{s} . \end{aligned} \quad (865)$$

Slučaj $b_{k_1} = 0$, (vidi (786a)), ne daje bitnih poteškoća. U prvom,

trećem i četvrtom članu pod sumom možemo izravno staviti $b_{k_1} = 0$, što se može učiniti već u (850), dakle i u (851), zatim u (855) i (857) te u (859) i (860). U drugom članu dobijemo mjesto

$$\frac{2e^{-b_{k_1} \sqrt{s^2+1} - a_{k_1} s}}{b_{k_1}} \text{ graničnim prijelazom } -2\sqrt{s^2+1} e^{-a_{k_1} s}, \text{ što se}$$

može provesti već u (854) i (855):

U području, u kojem su integrali u (862) konvergentni, funkcija (865) je identična s funkcijom (863), pa analitičkim produživanjem slijedi, da mora s njom biti identična svagdje, t.j. (864) je cijela analitička funkcija i prema tome ne mijenja svoju vrijednost, ako se s uzduž zatvorene krivulje povraća u prvotnu točku.

Riemannova ploha funkcije $\sqrt{s^2+1}$ ima dva razgraništa $s=i$ i $s=-i$, pa opkoljavanje svakog od tih razgraništa mijenja korijenu predznak. Odaberimo dakle zatvorenu krivulju, koja obuhvaća, recimo, $+i$, a ne obuhvaća $-i$, i zamislimo, da s prodje tu krivulju. Tim će se u (865) izmijeniti predznaci korijena. Budući da čitava funkcija (865) mora ostati ista, to će razlika dobivenog i prvotnog izraza biti jednaka nuli:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \left\{ \bar{R}_{0,k} \left(-\frac{d}{ds} \right) \frac{e^{-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s} + e^{b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s}}{\sqrt{s^2+1}} + \right. \\ & + \bar{R}_{1,k} \left(-\frac{d}{ds} \right) \left(\frac{d}{ds} + a_k + b_k \right) \left[\frac{2}{b_k} e^{-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s} - \frac{2}{b_k} e^{b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s} \right] + \\ & + \bar{R}_{2,k} \left(-\frac{d}{ds} \right) \frac{e^{-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s} - e^{b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s}}{s^2+1} + \\ & \left. + \bar{R}_{3,k} \left(-\frac{d}{ds} \right) \left[-\frac{2s}{s^2+1} e^{-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s} + \frac{2s}{s^2+1} e^{b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s} \right] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (866)$$

Ni ovdje slučaj $b_k=0$ ne daje bitnih poteškoća. Prvi član pod sumom

daje $\bar{R}_{0,k} \left(-\frac{d}{ds} \right) \frac{2e^{-a_k s}}{\sqrt{s^2+1}}$, drugi član daje

$\bar{R}_{1,k} \left(-\frac{d}{ds} \right) \left[\left(\frac{d}{ds} + a_k \right) \left(-4\sqrt{s^2+1} e^{-a_k s} \right) \right]$, a treći i četvrti član otpadaju.

Razmatrajmo kompleksne brojeve $\underline{-a_k + b_k}$ i $\underline{-a_k - b_k}$ ($k=1, \dots, N$), pri čemu je moguće, da su neki od tih brojeva međusobno jednaki, a da nije povrijeđen uvjet stavka III.8., da ni u kojem paru jednačaba (786) nisu zadovoljene obje jednačbe. Ipak ćemo sve te brojeve in abstracto razlikovati. Ako međjutim za jednu vrijednost $\underline{k_1}$ indeksa \underline{k} vrijedi (786a), to ne ćemo razlikovati dotična dva broja $\underline{-a_{k_1} + b_{k_1}}$ i $\underline{-a_{k_1} - b_{k_1}}$, koja su oba jednaka $\underline{-a_{k_1}}$, već ćemo taj broj uvrstiti samo među brojeve $\underline{-a_k + b_k}$. U tom slučaju dakle razmatramo svega $2N-1$ takvih brojeva, dok ih je inače $2N$.

Neka je ρ maksimum apsolutnih vrijednosti tih $2N$ odnosno $2N-1$ brojeva, t.j. radij najveće kružnice sa središtem u ishodištu, na kojoj leži bar jedna od točaka, koje odgovaraju tim brojevima. Odaberimo jednu od tih točaka na toj kružnici, pri čemu je moguće, da toj točki odgovara nekoliko međusobno jednakih brojeva. Neka su ti međusobno jednaki brojevi

$$\underline{-a_k + b_k} \quad \text{za indekse} \quad k = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n_1} \quad (867) \quad 237$$

$$\underline{-a_k - b_k} \quad " \quad " \quad k = \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n_2} \quad (868) \quad 238$$

Medju indeksima pod (867) može pri tom biti sadržan indeks $\underline{k_1}$.

Zajednička vrijednost tih brojeva neka je $\rho e^{i\varphi}$ ($-\pi < \varphi \leq \pi$).

Da korijeni u (866) budu jednoznačni, ograničimo se na područje izvan kružnice s nekim radijem $\underline{R} = 1$ i ustanovimo, da korijen $\sqrt{s^2 + 1}$ treba da bude pozitivan za realni pozitivni \underline{s} .

(Ta pretpostavka odgovara (803) i šutke je vrijedila već za (848)).

Možemo tada korijen razviti u red potencija po $\frac{1}{s}$:

$$\sqrt{s^2+1} = s \sqrt{1 + \frac{1}{s^2}} = s + \frac{1}{2s} - \frac{1}{8s^3} + \dots \quad (869) \quad 239$$

Funkcija $\sqrt{s^2+1} - s = \frac{1}{2s} - \frac{1}{8s^3} + \dots$ (870) 240

je dakle za $s = \infty$ regularna i jednaka nuli i stoga funkcija

$$e^{A(\sqrt{s^2+1} - s)} = e^{A\left(\frac{1}{2s} - \frac{1}{8s^3} + \dots\right)} \quad (871) \quad 241$$

gdje je A bilo kakav kompleksni broj, za $s = \infty$ regularna i jednaka jedan.

Lako se uvidja, da (866) poslije provedenih diferencijacija dobiva oblik

$$\sum_{k=1}^N \left\{ U_k(s) + \sqrt{s^2+1} V_k(s) \right\} e^{-b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s} - \sum_{k=1}^N \left\{ U_k(s) - \sqrt{s^2+1} V_k(s) \right\} e^{b_k \sqrt{s^2+1} - a_k s} = 0 \quad (872) \quad 242$$

gdje su $U(s)$ i $V(s)$ stanovite racionalne funkcije od s . Taj oblik vrijedi napose i za $k = k_1$ ($b_{k_1} = 0$), samo što će za taj indeks dio sa $U_{k_1}(s)$ otpasti, a dijelovi sa $V_{k_1}(s)$ će se zbrojiti.

Pomnožimo li (872) sa $e^{-s\varphi} e^{i\varphi}$, to možemo pisati:

$$\sum_{k=1}^N \left\{ U_k(s) + \sqrt{s^2+1} V_k(s) \right\} e^{-b_k(\sqrt{s^2+1} - s)} e^{(-a_k - b_k - \varphi e^{i\varphi})s} - \sum_{k=1}^N \left\{ U_k(s) - \sqrt{s^2+1} V_k(s) \right\} e^{b_k(\sqrt{s^2+1} - s)} e^{(-a_k + b_k - \varphi e^{i\varphi})s} = 0 \quad (873) \quad 243$$

Istražimo iz prve sume članove, za koje indeks k ima vrijednosti (868), a iz druge sume članove, kojima indeks ima vrijednosti (867).

Medju ovim potonjima može biti član s indeksom $k=k_1$, za koji je $b_{k_1}=0$. Za taj indeks izvadimo dotične članove iz obih suma, što zajedno daje $2\sqrt{s^2+1} v_{k_1}(s) e^{(-a_{k_1}-\rho e^{i\varphi})s}$. Sve ove izvadjene članove skupimo u funkciju $G_1(s)$, dok sve ostale članove skupimo u funkciju $G_2(s)$. Onda je dakle

$$G_1(s) + G_2(s) \equiv 0 \quad (874) \quad 247$$

ili

$$G_1(s) \equiv -G_2(s) \quad (875) \quad 248$$

Uzmemo li sad u obzir, da su eksponencijalne funkcije

$$e^{(-a_k - b_k - \rho e^{i\varphi})s} \quad \text{i} \quad e^{(-a_k + b_k - \rho e^{i\varphi})s} \quad \text{u članovima od } G_1(s)$$

sve jednake jedan, jer smo zajedničku vrijednost dotičnih brojeva

$-a_k - b_k$ i $-a_k + b_k$ označili sa $\rho e^{i\varphi}$, to slijedi iz (869) i (871),

da $G_1(s)$ za $s = \infty$ može imati samo nebitno singularno mjesto.

Za vrijednosti indeksa k , koje su sadržane u $G_2(s)$, vrijedi:

$$-a_k + b_k = \rho_k e^{i\varphi_k} \quad (-\pi < \varphi_k \leq \pi) \quad (876) \quad 249$$

$$-a_k - b_k = \rho_k e^{i\psi_k} \quad (-\pi < \psi_k \leq \pi) \quad (877) \quad 250$$

pri čemu je sigurno

$$\rho_k \leq \rho, \quad \rho_k \leq \rho \quad (878) \quad 251$$

jer je ρ maksimum svih apsolutnih vrijednosti tih brojeva, a u slučaju

$$\rho_k = \rho \quad \text{odnosno} \quad \rho_k = \rho \quad (879) \quad 252$$

je sigurno

$$\varphi_k \neq \varphi \quad \text{odnosno} \quad \psi_k \neq \varphi \quad (880) \quad 253$$

jer su ti brojevi različiti od $\rho e^{i\varphi}$.

Stavimo li sad u $G_2(s)$

$$s = \lambda e^{-i\varphi}, \quad (881) \quad 254$$

gdje neka bude λ pozitivan (i realan), to za eksponente eksponencijalnih funkcija dobijemo

$$\begin{aligned} (-a_k + b_k - \rho e^{i\varphi}) \lambda e^{-i\varphi} &= \lambda [(-a_k + b_k) e^{-i\varphi} - \rho] = \\ &= \lambda [\rho_k e^{i(\varphi_k - \varphi)} - \rho] = \lambda [\rho_k \cos(\varphi_k - \varphi) - \rho + i \rho_k \sin(\varphi_k - \varphi)] \end{aligned} \quad (882)$$

i analogno

$$(-a_k - b_k - \rho e^{i\psi}) \lambda e^{-i\psi} = \lambda [\rho_k \cos(\psi_k - \psi) - \rho + i \rho_k \sin(\psi_k - \psi)]. \quad (883)$$

Realni dio tih eksponenata je u slučaju (879) negativan zbog (880), a pogotovo je negativan u slučaju znaka $<$ u (878). Ako je dakle μ minimum brojeva $\rho - \rho_k \cos(\varphi_k - \varphi)$ i $\rho - \rho_k \cos(\psi_k - \psi)$ i ako je $0 < \varepsilon < \mu$, to će za $\lambda \rightarrow \infty$ $G_2(s)$ sigurno jače težiti prema nuli nego $e^{-(\mu - \varepsilon)\lambda}$, jer su eksponencijalne funkcije pomnožene s funkcijama poput (871), (869) i racionalnim funkcijama $U_k(s)$, odnosno $V_k(s)$, a sve te funkcije ne mogu težiti jače prema ∞ nego konačna potencija. Ako dakle funkcija $G_2(s)$ sadrži barem jedan član, to ona ima za $s = \infty$ sigurno bitno singularno mjesto, ukoliko ne iščezava identično. Budući da lijeva strana od (875) nema bitno singularno mjesto za $s = \infty$, to mora desna strana, pa i lijeva, identično iščezavati, t.j. vrijedi

$$G_1(s) = 0. \quad (883)$$

Kad $G_2(s)$ ne bi uopće imao članova, vrijedio bi eo ipso (883), no $G_2(s)$ ima za $N \geq 2$, (a slučaj $N=1$ smo već riješili), sigurno barem jedan član, jer bi inače svi brojevi $\underline{-a_k - b_k}$ i $\underline{-a_k + b_k}$ bili sadržani medju jednakim brojevima (867) i (868), što bi dovelo do protuslovlja s pretpostavkom stavka III.8. obzirom na jednadžbe (786).

Kako smo vidjeli, u izrazu $G_1(s)$ može biti sadržan član s indeksom $\underline{k_1}$. Ako je u $G_1(s)$ sadržan samo taj član sa $\underline{k_1}$, za koji je $\underline{g_{k_1}} = 0$, to je onda

$$G_2(s) \equiv 0 \quad (884)$$

identitet, koji odgovara identitetu (866), samo što fale članovi s indeksom $\underline{k_1}$. Na temelju toga skraćenog identiteta, koji zbog $N \geq 2$ sigurno nije bez članova, provedemo analogni postupak, koji smo proveli sa (866) i dolazimo do jedne nove funkcije $G_1(s)$, koja više ne sadrži član sa $\underline{k_1}$, (ali sigurno nije bez članova, kako proizlazi iz postupka, kojim se ta funkcija dobije).

Prema tome smo dakle svakako došli do jedne funkcije $G_1(s)$, koja sigurno ne sadržava samo član s indeksom $\underline{k_1}$.

Prema načinu, kako smo iz (873) odijelili članove za $G_1(s)$, imat će (883) oblik

$$\sum_{k=1}^{n_2} \left\{ U_{\beta_k}(s) + \sqrt{s^2+1} V_{\beta_k}(s) \right\} e^{-b_{\beta_k} \sqrt{s^2+1} - a_{\beta_k} s} - \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ U_{\alpha_k}(s) - \sqrt{s^2+1} V_{\alpha_k}(s) \right\} e^{b_{\alpha_k} \sqrt{s^2+1} - a_{\alpha_k} s} \equiv 0 \quad (885)$$

pri čemu smo faktor $e^{-s\varphi} e^{i\varphi}$ opet odbacili. Ukoliko je član s indeksom $\underline{k_1}$ sadržan u tom identitetu, on glasi prema prije spomenutom $2\sqrt{s^2+1} V_{k_1}(s) e^{-s k_1}$.

Prodje li \underline{s} iznova zatvorenu krivulju, koja uključuje $\underline{+i}$, a isključuje $\underline{-i}$, to će se predznaci korijena u (885) promijeniti, t.j. slijedi

$$\sum_{k=1}^{n_2} \left\{ U_{\beta_k}(s) - \sqrt{s^2+1} V_{\beta_k}(s) \right\} e^{b_{\beta_k} \sqrt{s^2+1} - a_{\beta_k} s} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ U_{\alpha_k}(s) + \sqrt{s^2+1} V_{\alpha_k}(s) \right\} e^{-b_{\alpha_k} \sqrt{s^2+1} - a_{\alpha_k} s} \equiv 0, \quad (886)$$

a član s indeksom k_1 , ukoliko je sadržan, glasi $-2\sqrt{s^2+1} V_{k_1}(s) e^{-a_{k_1} s}$.

Razmatrajmo sad brojeve

$$-a_k - b_k \quad \text{za indekse } k = \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1} \quad (887)$$

$$-a_k + b_k \quad \text{" " } k = \beta_1, \dots, \beta_{n_2}, \quad (888)$$

koje dobijemo iz (867) i (868) promjenom predznaka brojeva b_k .

Budući da su brojevi (867) i (868) međusobno jednaki, to su brojevi (887), (888) svi međusobno različiti. Da su dva broja (887) jednaka, t.j.

$$-a_j - b_j = -a_k - b_k, \quad (889)$$

a uz to od prije

$$-a_j + b_j = -a_k + b_k \quad (890)$$

slijedilo bi

$$a_j = a_k, \quad b_j = b_k \quad (891)$$

u protuslovlju s pretpostavkom stavka III.8. Analogno vrijedi za slučaj, da su dva broja (888) jednaka. Da je jedan broj (887) jednak jednom broju (888), bilo bi

$$-a_\alpha - b_\alpha = -a_\beta + b_\beta, \quad (892)$$

a od prije

$$-a_\alpha + b_\alpha = -a_\beta - b_\beta, \quad (893)$$

pa bi slijedilo

$$a_\alpha = a_\beta \quad \text{i} \quad b_\alpha = -b_\beta, \quad \text{dakle} \quad b_\alpha^2 = b_\beta^2 \quad (894)$$

u protuslovlju s pretpostavkom stavka III.8. Ovdje se vidi,

zašto su u (786) brojevi $\underline{b_k}$ u kvadratu. Na ovo pitanje ćemo se još kasnije osvrnuti.

Ako je $\bar{\rho}$ maksimum apsolutnih vrijednosti brojeva (887), (888), pa je $\bar{\rho} e^{i\bar{\varphi}}$ jedan od brojeva, koji imaju tu apsolutnu vrijednost, to možemo (886) pomnožiti sa $e^{-s\bar{\rho} e^{i\bar{\varphi}}}$ i dobivamo analogon relacije (873):

$$\sum_{k=1}^{n_2} \left\{ U_{\beta_k}(s) - \sqrt{s^2+1} V_{\beta_k}(s) \right\} e^{b_{\beta_k}(\sqrt{s^2+1} - s)} e^{(-a_{\beta_k} + b_{\beta_k} - \bar{\rho} e^{i\bar{\varphi}})s} -$$

$$- \sum_{k=1}^{n_1} \left\{ U_{\alpha_k}(s) + \sqrt{s^2+1} V_{\alpha_k}(s) \right\} e^{-b_{\alpha_k}(\sqrt{s^2+1} - s)} e^{(-a_{\alpha_k} - b_{\alpha_k} - \bar{\rho} e^{i\bar{\varphi}})s} = 0. \quad (266)$$

(Eventualni član indeksa k_1 naravno glasi $-2\sqrt{s^2+1} V_{k_1}(s) e^{(-a_{k_1} - \bar{\rho} e^{i\bar{\varphi}})s}$).

Ako se broj $\bar{\rho} e^{i\bar{\varphi}}$ nalazi među brojevima $-a_{\beta_k} + b_{\beta_k}$, to izvadimo član s indeksom β_k i nazovemo ga $\bar{U}_1(s)$, dok ostatak izraza (895) nazovemo $\bar{U}_2(s)$. Ako je naprotiv $\bar{\rho} e^{i\bar{\varphi}}$ sadržan među brojevima $-a_{\alpha_k} - b_{\alpha_k}$, neka je $\bar{U}_1(s)$ član s indeksom α_k , a ostatak izraza neka je $\bar{U}_2(s)$. Analognim razmatranjem kao prije dobijemo

$$\bar{U}_1(s) \equiv 0. \quad (896) \quad 267$$

Ako je $\bar{\rho} e^{i\bar{\varphi}}$ bio broj s indeksom $\underline{k_1}$, t.j. $\bar{\rho} e^{i\bar{\varphi}} = -a_{k_1}$, to nam

$$\bar{U}_2(s) \equiv 0 \quad (897) \quad 268$$

daje identitet, koji se podudara sa (886), samo što fali član s indeksom $\underline{k_1}$. Ponovimo li razmatranje, dođimo svakako do jedne funkcije $\bar{U}_1(s)$, koja ne sadržava toga člana, t.j. ima oblik

$$\left\{ U_{\alpha}(s) + \sqrt{s^2+1} V_{\alpha}(s) \right\} e^{-b_{\alpha}\sqrt{s^2+1} - a_{\alpha}s} = 0, \quad (898) \quad 269$$

ako je $\frac{e^{i\theta}}{e^{1\theta}}$ medju brojevima (887), odnosno

$$\left\{ U_{\beta}(s) - \sqrt{s^2+1} V_{\beta}(s) \right\} e^{b_{\beta}\sqrt{s^2+1} - a_{\beta}s} = 0, \quad (899) \quad 270$$

ako je $\frac{e^{i\theta}}{e^{1\theta}}$ medju brojevima (888). Prođje li s zatvorenu krivulju, koja uključuje $+i$, a isključuje $-i$, možemo u (899) promijeniti predznake korijena, tako da i tu dobijemo oblik (898). 269

Usporedimo li (873) sa (866), to je jasno, da identitet (898), koji sadrži samo članove, u kojima je u eksponentu eksponencijalne funkcije negativan predznak pred $\underline{b_{\alpha}}$, mora glasiti

$$\begin{aligned} & \bar{R}_{0,\alpha} \left(-\frac{d}{ds} \right) \frac{e^{-b_{\alpha}\sqrt{s^2+1} - a_{\alpha}s}}{\sqrt{s^2+1}} + \\ & + \bar{R}_{1,\alpha} \left(-\frac{d}{ds} \right) \left(\frac{d}{ds} + a_{\alpha} + b_{\alpha} \right) \left[\frac{2}{b_{\alpha}} e^{-b_{\alpha}\sqrt{s^2+1} - a_{\alpha}s} \right] + \\ & + \bar{R}_{2,\alpha} \left(-\frac{d}{ds} \right) \frac{e^{-b_{\alpha}\sqrt{s^2+1} - a_{\alpha}s}}{s^2+1} + \bar{R}_{3,\alpha} \left(-\frac{d}{ds} \right) \left(-\frac{2s}{s^2+1} e^{-b_{\alpha}\sqrt{s^2+1} - a_{\alpha}s} \right) = 0. \end{aligned} \quad (900) \quad 271$$

Obzirom na (851), (855), (857), (860) i na relaciju

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r dt = (-1)^r \frac{d^r}{ds^r} \frac{e^{-(a+b)s}}{s} \quad (901) \quad 272$$

može se mjesto (900) pisati

$$\begin{aligned} & \int_{a_{\alpha}+b_{\alpha}}^{\infty} e^{-st} \left\{ \bar{R}_{0,\alpha}(t) \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{\alpha})^2 - b_{\alpha}^2}) + \bar{R}_{1,\alpha}(t)(t-a_{\alpha}-b_{\alpha}) \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{\alpha})^2 - b_{\alpha}^2}) + \right. \\ & + \bar{R}_{2,\alpha}(t) \int_{b_{\alpha}}^{t-a_{\alpha}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{\alpha})^2 - y^2}) dy + \bar{R}_{3,\alpha}(t)(t-a_{\alpha}) \int_{b_{\alpha}}^{t-a_{\alpha}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{\alpha})^2 - y^2}) dy - \\ & \left. - 2\bar{R}_{3,\alpha}(t) \right\} dt = 0. \end{aligned} \quad (902) \quad 273$$

Stavimo li

$$t = \bar{t} + a_\alpha + b_\alpha \quad (903) \quad 274$$

to dolnja granica vanjskog integrala postaje nula, a ako shodno pomaknemo put integracije, gornja granica je opet $+\infty$. Time je integracija protegnuta uzduž realne osi, pa možemo upotrijebiti stavak o recipročnoj jednoznačnosti preslikavanja, što ga daje Laplaceova transformacija*). Time je izraz u zagradi, u kojem naknadno opet uvedemo \bar{t} prema (903), identično jednak nuli. To je onda relacija poput (790), tako da vrijedi

$$\bar{R}_{0,\alpha}(t) \equiv \bar{R}_{1,\alpha}(t) \equiv \bar{R}_{2,\alpha}(t) \equiv \bar{R}_{3,\alpha}(t) \equiv 0 \quad (904) \quad 275$$

i obzirom na (842) do (846):

$$R_{0,\alpha}(t) \equiv R_{1,\alpha}(t) \equiv R_{2,\alpha}(t) \equiv R_{3,\alpha}(t) \equiv 0. \quad (905) \quad 276$$

Time smo u prvotnom identitetu (787) snizili N za jednu jedinicu. Ponavljanjem toga postupka možemo sniziti N na jedan. Ukoliko postoji indeks k_1 , za koji je $b_{k_1} = 0$, to će dotični članovi ostati u tom zadnjem identitetu, u kojem je $N=1$. Budući da smo za taj slučaj već proveli dokaz, koji ne ovisi o tom, da li je $b=0$, to je time sve dokazano.

Provest ćemo još diskusiju nekih slučajeva, gdje nisu ispunjeni svi uvjeti stavka III.8.

Ako nije ispunjen uvjet, da (786a) vrijedi za najviše jednu vrijednost k_1 indeksa k , već ako je za barem dva indeksa k_1 i k_2

$$b_{k_1} = b_{k_2} = 0, \quad (906) \quad 277$$

G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplacetransformation, Springer

Berlin 1937, 3. Kap. §7.

Doetsch, A. 1937.

to se lako vidi, da postoji identitet poput (787). Prema (798) slijedi naime

$$I_1 = \int_{b_{k_1}}^{t-a_{k_1}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{k_1})^2-y^2}) dy = \int_0^{t-a_{k_1}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{k_1})^2-y^2}) dy = \sin(t-a_{k_1}) \quad (907)$$

$$I_2 = \int_{b_{k_2}}^{t-a_{k_2}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{k_2})^2-y^2}) dy = \int_0^{t-a_{k_2}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{k_2})^2-y^2}) dy = \sin(t-a_{k_2}) \quad (908)$$

a prema (799)

$$I_3 = \int_{b_{k_1}}^{t-a_{k_1}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{k_1})^2-y^2}) dy = \int_0^{t-a_{k_1}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{k_1})^2-y^2}) dy = \\ = \frac{2}{t-a_{k_1}} [1 - \cos(t-a_{k_1})] \quad (909)$$

$$I_4 = \int_{b_{k_2}}^{t-a_{k_2}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{k_2})^2-y^2}) dy = \int_0^{t-a_{k_2}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{k_2})^2-y^2}) dy = \\ = \frac{2}{t-a_{k_2}} [1 - \cos(t-a_{k_2})] \quad (910)$$

Ako u izrazu

$$\sin(t-a_{k_1}-a_{k_2}) = \cos a_{k_2} \sin(t-a_{k_1}) - \sin a_{k_2} \cos(t-a_{k_1}) = \\ = \cos a_{k_1} \sin(t-a_{k_2}) - \sin a_{k_1} \cos(t-a_{k_2}) \quad (911)$$

nadomjestimo $\sin(t-a_{k_1})$, $\sin(t-a_{k_2})$, $\cos(t-a_{k_1})$, $\cos(t-a_{k_2})$ vrijednostima prema (907), (908), (909), (910), dobijemo identitet

$$\begin{aligned} & \cos a_{k_2} I_1 - \cos a_{k_1} I_2 + \frac{1}{2} (t - a_{k_1}) \sin a_{k_2} I_3 - \\ & - \frac{1}{2} (t - a_{k_2}) \sin a_{k_1} I_4 + \sin a_{k_1} - \sin a_{k_2} = 0, \end{aligned} \quad (912) \quad 283$$

koji potpada pod oblik (787).

Ovdje istina treba primijetiti, da su koeficijenti u kanoničkom obliku integralnih teorema bile racionalne funkcije nesamo obzirom na varijablu t , već i obzirom na parametre x_1, \dots, x_r . Kad bismo za parametre a_k uvrstili izraze (779), u identitetu (912) bili bi koeficijenti doduše racionalne funkcije varijable t , ali transcendentne funkcije parametara x_1, \dots, x_r . Iz toga se vidi, da bi zahtjev, da koeficijenti ovise racionalno o parametrima, omogućio slabije uvjete (obzirom na te parametre u stavku III.8. U ovo pitanje međjutim ne ulazimo.

Pretpostavimo dalje, da u drugoj jednadžbi (785) ne pišu kvadrati, već prve potencije parametara b_k . To dakle znači, da na pr. može biti za neki k

$$a_j = a_k \quad (913) \quad 284$$

$$b_j = -b_k \neq 0. \quad (914) \quad 285$$

Funkcije za indekse j i k podudaraju se u prvoj sumi od (787), a isto tako i u drugoj sumi. Takvi se članovi dakle mogu zbrojiti. U trećoj i četvrtoj sumi će se također neki članovi moći zbrojiti, kako ćemo još vidjeti. (Pri tom još pridolaze neke trigonometrijske funkcije). Pitanje je, nisu li poslije tog zbrajanja koeficijenti opet jednoznačno određeni.

Neka ponajprije postoje barem dva para indeksa $\underline{j_1}, \underline{k_1}$ i $\underline{j_2}, \underline{k_2}$, za koje vrijedi (913) i (914).

Supstitucija

$$y = -\bar{y} \quad (915) \quad 286$$

daje

$$\int_0^b \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2}) dy = - \int_0^{-b} \Lambda_0(\sqrt{t^2-\bar{y}^2}) d\bar{y} \quad (916) \quad 287$$

dakle (obzirom na (798))

$$\int_{-b}^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2}) dy = \sin t - \int_0^{-b} \Lambda_0(\sqrt{t^2-\bar{y}^2}) d\bar{y} = \sin t + \int_0^b \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2}) dy =$$

$$\sin t + (\sin t - \int_b^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2}) dy) \quad (918) \quad 288$$

ili

$$\int_b^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2}) dy + \int_{-b}^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2}) dy = 2 \sin t \quad (919) \quad 289$$

Slično slijedi *na t₁ i t₂*

$$\int_b^t \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2}) dy + \int_{-b}^t \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2}) dy = \frac{4}{\pi} (1 - \cos t) \quad (920) \quad 290$$

Prema tome će biti

$$A \int_{b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2}) dy + A \int_{-b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2}) dy +$$

$$B \int_{b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2}) dy + B \int_{-b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2}) dy +$$

$$\begin{aligned}
& + C(t-a_{j_1}) \int_{b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2}) dy + C(t-a_{j_1}) \int_{-b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2}) dy + \\
& + D(t-a_{j_2}) \int_{b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2}) dy + D(t-a_{j_2}) \int_{-b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2}) dy - \\
& - 4C - 4D = 2A \sin(t-a_{j_1}) + 2B \sin(t-a_{j_2}) - 4D \cos(t-a_{j_1}) - 4D \cos(t-a_{j_2}) .
\end{aligned} \tag{921}$$

Stavimo li

$$A = -2c \operatorname{tg}(a_{j_1} - a_{j_2})$$

$$B = \frac{2}{\sin(a_{j_1} - a_{j_2})}$$

$$C = 1$$

$$D = 0$$

to desna strana izraza (921), u kojoj su stegnuti dotični članovi treće i četvrte sume prema (787), identično iščezava, kako se lako izračuna. U tom slučaju dakle postoji identitet oblika (786).

I ovdje su koeficijenti racionalne funkcije varijable t , ali djelomice transcendentne funkcije parametara.

Postoji li samo jedan par indeksa j, k , za koji vrijedi (913), (914), a da nema indeksa, za koji bi vrijedila jednačba (786a), dokaz jednoznačnosti se može ipak provesti, ako se članovi, koji odgovaraju u (787) tim indeksima, stegnu.

Na temelju (913), (914) vrijedi

$$\begin{aligned}
R_{0,j}(t) \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}) + R_{0,k}(t) \Lambda_0(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) &= \\
= [R_{0,j}(t) + R_{0,k}(t)] \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}) & \tag{923}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{1,j}(t) \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - b_j^2}) + R_{1,k}(t) \Lambda_1(\sqrt{(t-a_k)^2 - b_k^2}) &= \\
 &= [R_{1,j}(t) + R_{1,k}(t)] \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - b_j^2}) \quad (924) \quad 294
 \end{aligned}$$

Dalje je ²⁸⁸obzirom na (918) i ¹⁶⁶(795), ¹⁶⁷(797)

$$\begin{aligned}
 \int_{-b_j}^{t-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy &= - \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + 2\sin(t-a_j) = \\
 &= - \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + 2 \int_0^{t-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy \quad (925) \quad 295
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{-b_j}^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy &= - \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + \frac{4}{t-a_j} [1 - \cos(t-a_j)] = \\
 &= - \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + 2 \int_0^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy \quad (926) \quad 296
 \end{aligned}$$

Možemo dakle prema ²⁹³(923) do ²⁹⁶(926) članove identiteta s indeksima j i k dovesti u oblik

$$\begin{aligned}
 [R_{0,j}(t) + R_{0,k}(t)] \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - b_j^2}) + [R_{1,j}(t) + R_{1,k}(t)] \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - b_j^2}) + \\
 + [R_{2,j}(t) - R_{2,k}(t)] \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + 2R_{2,k}(t) \int_0^{t-a_j} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + \\
 + [R_{3,j}(t) - R_{3,k}(t)] \int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy + 2R_{3,k}(t) \int_0^{t-a_j} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_j)^2 - y^2}) dy \quad (927) \quad 297
 \end{aligned}$$

Uvedemo
Ako mjesto članova s indeksima \underline{j} i \underline{k} uvedemo članove s novim indeksima \underline{p} , \underline{q} s vrijednostima

$$a_p = a_j \quad (928) \quad 298$$

$$b_p = b_j \quad (929) \quad 299$$

$$R_{0,p}(t) = R_{0,j}(t) + R_{0,k}(t) \quad (930) \quad 300$$

$$R_{1,p}(t) = R_{1,j}(t) + R_{1,k}(t) \quad (931) \quad 301$$

$$R_{2,p}(t) = R_{2,j}(t) - R_{2,k}(t) \quad (932) \quad 302$$

$$R_{3,p}(t) = R_{3,j}(t) - R_{3,k}(t) \quad (933) \quad 303$$

$$a_q = a_j \quad (934) \quad 304$$

$$b_q = 0 \quad (935) \quad 305$$

$$R_{0,q}(t) = R_{1,q}(t) = 0 \quad (936) \quad 306$$

$$R_{2,q}(t) = 2R_{2,j}(t) \quad (937) \quad 307$$

$$R_{3,q}(t) = 2R_{3,j}(t) \quad (938) \quad 308$$

Uvedemo
to dobijemo upravo izraz (927). Vrijednost $b_q=0$ je dopustiva, jer smo pretpostavili, da nijedan od ostalih b_k nije jednak nuli. Stavak III.8. je dakle primjenljiv i identitet je nemoguć.

Time je diskusija naročitih slučajeva provedena.

9. Rekurzione formule za kompozicije u slučaju, da pojedini parametri iščezavaju.

Rekurzione jednačbe (715), (716), (720), (721), (722) zataje, kad je dotični parametar jednak nuli. Za taj slučaj ćemo izvesti druge rekurzione jednačbe.

Stavimo u (710) $x_2=0$ i upotrijebimo (343):

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2+2}^{m_1, m_2+2}(t; x_1, 0) &= \int_{x_1}^t y^{m_1} (t-y)^{m_2+2} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2-x_1^2}) \Lambda_{n_2+2}[c(t-y)] dy = \\ &= \frac{4(n_2+1)(n_2+2)}{c^2} \int_{x_1}^t y^{m_1} (t-y)^{m_2} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2-x_1^2}) \left\{ \Lambda_{n_2+1}[c(t-y)] - \Lambda_{n_2}[c(t-y)] \right\} dy = \\ &= \frac{4(n_2+1)(n_2+2)}{c^2} \left[K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) - K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) \right]. \quad (939) \end{aligned}$$

Nadomjestimo li u (717) $\underline{n_2}$ sa $\underline{n_2+1}$ i $\underline{m_2}$ sa $\underline{m_2+1}$, stavimo $x_2=0$ te uvrstimo izraz (939), to slijedi

$$\frac{\partial K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, 0)}{\partial t} = (m_2 - 2n_2 - 1) K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) + 2(n_2+1) K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0). \quad (940)$$

Pretpostavimo li $m_2 > 0$, diferenciramo (718), (u kojem je stavljeno $x_2=0$), po \underline{t} i uvrstimo izraz (940), to dobijemo

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2+1}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) &= \frac{2(n_2+1)}{2n_2-m_2+1} \left\{ K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) - \frac{m_2}{c^2} \frac{\partial K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(t; x_1, 0)}{\partial t} + \right. \\ &\left. + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0)}{\partial t^2} \right\} \quad (2n_2 - m_2 + 1 \neq 0, m_2 > 0). \quad (941) \end{aligned}$$

Ako je naprotiv $m_2=0$, to u ⁹⁰(718) prvi član u vitičastoj zagradi ne iščezava, kad stavimo $x_2=0$, ali iščezava drugi član. Dobijemo za taj slučaj

$$K_{n_1, n_2+1}^{m_1, 0}(t; x_1, 0) = \frac{2(n_2+1)}{2n_2+1} \left\{ K_{n_1, n_2}^{m_1, 0}(t; x_1, 0) - \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left[t^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{t^2-x_1^2}) \right] + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, 0}(t; x_1, 0)}{dt^2} \right\} \quad (942) \quad 312$$

Formule ³¹¹(941), ³¹²(942) dopuštaju postepeno povisivanje donjeg indeksa, kojemu odgovara parametar stavljen jednak nuli, pretpostavivši da je $m_2 \neq 2n_2+1$. Uz lihi m_2 može se dakle povisivanje od n_2 provesti od 0 do $\frac{m_2-1}{2}$ i od $\frac{m_2+1}{2}$ na više, dok za takvi m_2 povisivanju od n_2 nema zapreka.

Pretpostavimo sad $m_2 > 0$ i nadomjestimo u ³¹¹(941) $\underline{m_2}$ sa $\underline{m_2+1}$. Usporedba sa ⁹⁰(718), gdje zbog $x_2=0$ prvi član u zagradi otpada, daje

$$c^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, 0) + \frac{d^2}{dt^2} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, 0) = (2n_2 - m_2) m_2 K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(t; x_1, 0) - (2n_2 - 2m_2 - 1) \frac{d}{dt} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) \quad (m_2 > 0) \quad (943) \quad 313$$

Stavimo li u ³¹¹(941) $m_2=1$, $x_2=0$ i usporedimo sa ⁹⁰(718), gdje stavimo $m_2=0$, tako da otpada drugi član u zagradi, dok prvi član ne otpada, to slijedi

$$c^2 K_{n_1, n_2}^{m_1, 1}(t; x_1, 0) + \frac{d^2}{dt^2} K_{n_1, n_2}^{m_1, 1}(t; x_1, 0) = 2n_2 t^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{t^2-x_1^2}) - (2n_2-1) \frac{d}{dt} K_{n_1, n_2}^{m_1, 0}(t; x_1, 0) \quad (944) \quad 314$$

Jednadžbe ³¹³(943) i ³¹⁴(944) imaju oblik

$$c^2 f(t) + f''(t) = \varphi(t) \quad (945) \quad 315$$

pri čemu je za slučaj ³¹³(943)

$$f(x_1) = 0 \quad (946) \quad 316$$

$$f'(x_1) = 0 \quad (947) \quad 317$$

a za slučaj (944)

$$f(x_1) = 0 \quad (948) \quad 317$$

$$f'(x_1) = x_1^{m_1} \quad (949) \quad 318$$

kako proizlazi iz definicije (710) i iz jednadžbe (717), koja vrijedi i za $m_2=0$, pri čemu otpada drugi član na desnoj strani. Opće rješenje jednadžbe ³¹⁵(945) možemo varijacijom konstanta dobiti u obliku

$$f(t) = \frac{e^{ict}}{2ic} \left\{ C_1 + \int_0^t e^{-icy} \varphi(y) dy \right\} + \frac{e^{-ict}}{-2ic} \left\{ C_2 + \int_0^t e^{icy} \varphi(y) dy \right\}. \quad (950) \quad 318$$

Odredimo li konstante C_1 i C_2 pomoću ³¹⁶(946), (947), dobijemo

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2ic} \left\{ e^{ict} \int_{x_1}^t e^{-icy} \varphi(y) dy - e^{-ict} \int_{x_1}^t e^{icy} \varphi(y) dy \right\} = \\ &= \frac{1}{c} \int_{x_1}^t \varphi(y) \sin [c(t-y)] dy. \end{aligned} \quad (951) \quad 319$$

Odredimo li te konstante pomoću ³¹⁷(948), (949), to slijedi

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2ic} \left\{ e^{ic(t-x_1)} \frac{m_1}{x_1} + e^{ict} \int_{x_1}^t e^{-icy} \varphi(y) dy - e^{-ic(t-x_1)} \frac{m_1}{x_1} - \right. \\ &\quad \left. - e^{-ict} \int_{x_1}^t e^{icy} \varphi(y) dy \right\} = \frac{1}{c} \left\{ \frac{m_1}{x_1} \sin [c(t-x_1)] + \int_{x_1}^t \varphi(y) \sin [c(t-y)] dy \right\} \end{aligned} \quad (952) \quad 320$$

Uvrštenjem izraza za $\varphi(t)$ prema (943) glasi jednažba (951):

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, 0) = \frac{(2n_2 - m_2)m_2}{c} \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)] dy - \\ - \frac{2n_2 - 2m_2 - 1}{c} \int_{x_1}^t \frac{\partial}{\partial y} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)] dy \quad (m_2 > 0) \quad (953) \quad 321$$

Parcijalna integracija daje

$$\int_{x_1}^t \frac{\partial}{\partial y} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)] dy = \left\{ K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)] \right\}_{y=x_1}^{y=t} + \\ + c \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \cos[c(t-y)] dy = c \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \cos[c(t-y)] dy \quad (954) \quad 322$$

Na budući daje

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)] dy = c \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \cos[c(t-y)] dy \quad (955) \quad 323$$

to slijedi

$$\int_{x_1}^t \frac{\partial}{\partial y} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)] dy = \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)] dy \quad (956) \quad 324$$

Stavimo kao u (711)

$$F_1(t) = \begin{cases} t^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{t^2 - x_1^2}) & \text{za } t > x_1 \\ 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_1 \end{cases} \quad (957) \quad 325$$

a kao specijalne slučajeve od (712) i (686) odnosno (687)

$$F_2(t) = t^{m_2} \Lambda_{n_2}(ct) \quad (t \geq 0) \quad (958) \quad 326$$

$$F_3(t) = \Lambda_0(ct) \quad (t \geq 0) \quad (959) \quad 327$$

to je prema ³³³(112) i ³³⁴(710)

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(t; x_1, 0) = F_1(t) * F_2(t) \quad (t > x_1) \quad (960) \quad 328$$

a prema ³³³(688), ³³⁴(693), ³³⁵(795)

$$\frac{1}{c} \sin(ct) = F_3(t) * F_3(t) \quad (t \geq 0) \quad (961) \quad 329$$

Prema tome je očito za $t > x_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)] dy &= F_1(t) * F_2(t) * F_3(t) * F_3(t) = \\ &= K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2, 0, 0}(t; x_1, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (962) \quad 330$$

a analitičkim produživanjem se uvidja, da je i za bilo koji kompleksni

$$\frac{1}{c} \int_{x_1}^t K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)] dy = K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2, 0, 0}(t; x_1, 0, 0, 0) \quad (963) \quad 331$$

Jednadžba ³³¹(953) može se dakle pisati u obliku

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2+1}(t; x_1, 0) &= m_2(2n_2 - m_2) K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2-1, 0, 0}(t; x_1, 0, 0, 0) - \\ &- (2n_2 - 2m_2 - 1) \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, n_2}^{m_1, m_2, 0, 0}(t; x_1, 0, 0, 0) \quad (m_2 > 0) \end{aligned} \quad (964) \quad 332$$

³²⁰(952) slijedi Uvrštenjem izraza za $\varphi(t)$ prema ³¹⁴(944) u jednadžbu

$$\begin{aligned} K_{n_1, n_2}^{m_1, 1}(t; x_1, 0) &= \frac{1}{c} x_1^{m_1} \sin[c(t-x_1)] + \frac{2n_2}{c} \int_{x_1}^t y^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2-x_1^2}) \sin[c(t-y)] dy - \\ &- \frac{2n_2-1}{c} \int_{x_1}^t \frac{\partial}{\partial y} K_{n_1, n_2}^{m_1, 0}(y; x_1, 0) \sin[c(t-y)] dy \end{aligned} \quad (965) \quad 333$$

Analognim zaključivanjem uvidja se, da se ta jednažba može dovesti u oblik

$$K_{n_1, n_2}^{m_1, 1}(t; x_1, 0) = x_1 K_{0, 0}^{m_1, 0, 0}(t-x_1; 0, 0) + 2n_2 K_{n_1, 0, 0}^{m_1, 0, 0}(t; x_1, 0, 0) - (2n_2-1) \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, n_2, 0, 0}^{m_1, 0, 0, 0}(t; x_1, 0, 0, 0). \quad (966) \quad 334$$

309 Za kompozicije s više od dva para indeksa dobije se mjesto (939) sasvim analognim načinom

$$K_{n_1+2, n_2, \dots, n_r}^{m_1+2, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \frac{4(n_1+1)(n_1+2)}{c^2} \left[K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) - K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) \right] \quad (967) \quad 335$$

gdje je samo radi jednostavnosti prvi parametar stavljen jednak nuli umjesto drugog. Nadomjestimo li u (739), m_1 sa m_1+1 i n_1 sa n_1+1 , stavimo $x_1=0$ i uvrstimo zatim izraz (967), to dobijemo:

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = 2(n_1+1) K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) - (2n_1-m_1+1) K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r). \quad (968) \quad 336$$

Neka je sad $m_1 > 0$. Diferenciramo li (739), u kojem je stavljeno $x_1=0$, po t i uvrstimo (968), to slijedi

$$K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{m_1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \frac{2(n_1+1)}{2n_1-m_1+1} \left\{ K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) - \frac{m_1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) \right\} \quad (2n_1-m_1+1 \neq 0, m_1 > 0) \quad (969) \quad 337$$

Ako je $m_1=0$, to za $x_1=0$ u (739) ne otpada prvi član desne strane, ali otpada drugi član. U tom slučaju se dobije:

$$K_{n_1+1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \frac{2(n_1+1)}{2n_1+1} \left\{ K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) - \right. \\ \left. - \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} K_{n_2, \dots, n_r}^{m_2, \dots, m_r}(t; x_2, \dots, x_r) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) \right\} \quad (970) \quad 338$$

Formule (969), (970) dopuštaju povisivanje donjega indeksa za ove kompozicije pod analognim uvjetima kao formule (941), (942) za kompozicije s dva para indeksa.

Za povisivanje gornjega indeksa postupamo sasvim analogno kao u slučaju kompozicija s dva para indeksa. Polazeći od formule (739) umjesto (717) odnosno (718), te od (969) umjesto (941), dobijemo analogno prema (943), (944):

$$\left(c^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \\ = (2n_1 - m_1) m_1 K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) - \\ - (2n_1 - 2m_1 - 1) \frac{\partial}{\partial t} K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) \quad (m_1 > 0) \quad (971) \quad 339$$

$$\left(c^2 + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = 2n_1 K_{n_2, \dots, n_r}^{m_2, \dots, m_r}(t; x_2, \dots, x_r) - \\ - (2n_1 - 1) K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{0, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) \quad (972) \quad 340$$

Jednadžba (945) vrijedi i ovdje. Mjesto (946), (947), (948), (949) dobijemo za $m_1 > 0$ i za $m_1 = 0$

$$f(x_2 + \dots + x_r) = 0 \quad (973) \quad 341$$

$$f'(x_2 + \dots + x_r) = 0 \quad (974)$$

kako se razabire iz (735) i (739). Sasvim analogni zaključci kao kod kompozicija s dva para indeksa dovode konačno do jednačabe

$$\begin{aligned} & K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{m_1+1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = \\ & = m_1(2n_1 - m_1) K_{n_1, n_2, \dots, n_r, 0, 0}^{m_1-1, m_2, \dots, m_r, 0, 0}(t; 0, x_2, \dots, x_r, 0, 0) - \\ & - (2n_1 - 2m_1 - 1) \frac{d}{dt} K_{n_1, \dots, n_r, 0, 0}^{m_1, \dots, m_r, 0, 0}(t; 0, x_2, \dots, x_r, 0, 0) \quad (m_1 > 0) \quad (976) \quad 342 \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} & K_{n_1, n_2, \dots, n_r}^{1, m_2, \dots, m_r}(t; 0, x_2, \dots, x_r) = 2n_1 K_{n_2, \dots, n_r, 0, 0}^{m_2, \dots, m_r, 0, 0}(t; x_2, \dots, x_r, 0, 0) - \\ & - (2n_1 - 1) K_{n_1, n_2, \dots, n_r, 0, 0}^{0, m_2, \dots, m_r, 0, 0}(t; 0, x_2, \dots, x_r, 0, 0). \quad (977) \quad 343 \end{aligned}$$

Formule (941), (942), (964), (966), (969), (970), (975), (977)

omogućuju postepeno povisivanje indeksa, za koje je pripadni parametar stavljen jednak nuli. Formule su izvedene za slučaj, da je to prvi par indeksa, ali vrijede naravno analogno i ako je to bilo koji par indeksa.

Polazna točka kod tog povisivanja je formula (709), koja daje kompoziciju s bilo koliko indeksa, ako su ovi indeksi jednaki nuli. Povisivanje donjih indeksa svih potrebnih kompozicija vrši se onda na temelju formula (715), (73), ako je pripadni parametar različit od nule, a pomoću (941), (942), (969), (970), ako je jednak nuli, (pri čemu nema poteškoća, jer gornji indeks nije lih, nego jednak nuli).

Zatim se provodi povisivanje gornjih indeksa pomoću ⁹³ (721), ¹¹² (740),
ako je pripadni parametar različit od nule, a pomoću ³³² (964), ³³⁰ (966),
³⁴² (976), ³⁴³ (977), ako je jednak nuli.

Razabire se, da je postupak za slučaj, da je koji parametar jednak nuli, dosta opsežan, pa će zato biti podesnija metoda graničnog prijelaza, koju ćemo raspraviti u slijedećoj točki.

10. Granični prijelaz u izravnim formulama za kompozicije, kad pojedini parametri x_1, x_2, \dots konvergiraju prema nuli.

Želimo li u općim formulama (770), (771) neke od parametara x_1, \dots, x_r staviti jednake nuli, nailazimo na poteškoće, jer operator $D_{x_k} = \frac{1}{x_k} \frac{d}{dx_k}$ u tom slučaju gubi smisao. Očito lijeva strana u tim formulama prema definiciji (755) ne pruža nikakve poteškoće u tom pogledu, pa je vrijednost te lijeve strane, kad se stavi neke parametre jednake nuli, jednoznačno određena i jednaka limesu, koji dobivamo, ako ti parametri istodobno na bilo koji način, ili svaki za sebe u bilo kojem slijedu, konvergiraju prema nuli. Taj granični prijelaz dakle mora biti primjenljiv i na desnu stranu kao cjelinu, ali ne mora biti primjenljiv na svaki sumand desne strane. Tu ćemo se poslužiti stavkom I.7., koji je primjenljiv, jer svi sumandi desne strane imaju derivacije bilo kojeg reda i za $x_k=0$, ako ih prethodno pomnožimo dovoljno visokom potencijom dotičnog parametra x_k , koji treba konvergirati prema nuli.

Prema (324), a obzirom na formule (251) i (252) vidi se, da je rezultat postupka taj, da treba operatorsku potenciju $D_{x_k}^s = \left(\frac{1}{x_k} \frac{d}{dx_k}\right)^s$ nadomjestiti sa $\frac{2^s s!}{(2s)!} \left(\frac{d}{dx_k}\right)^{2s}$, ako je izvršena na neku funkciju $f(x_k)$, a sa $\frac{2^s s!}{(2s+1)!} \left(\frac{d}{dx_k}\right)^{2s+1}$, ako je izvršena na funkciju oblika $\frac{1}{x_k} \varphi(x_k)$, i poslije izvršenja tih diferencijacija na $f(x_k)$ odnosno $\varphi(x_k)$ staviti $x_k=0$. Slučaj, da je funkcija oblika $\frac{1}{x_k} \varphi(x_k)$, nastaje u (770) odnosno (771), kad je $m_{x_k} = 0$, jer je onda dotični faktor u uglatoj zagradi x_k^{-1} .

Time bi problem graničnog prijelaza u principu bio riješen, no mi ćemo još raspraviti neka pojednostavnjenja, koja se mogu provesti.

Zamislamo primjerice, da se u srednjem članu vitičaste zgrade na desnoj strani od ¹⁴¹(771) treba neki stanoviti x_{k_ε} staviti jednak nuli. Označimo uglatu zgradu u tom srednjem članu sa $\frac{1}{x_{k_\varepsilon}} \varphi(t, x_{k_\varepsilon})$ i stavimo

$$\varphi(t, x_{k_\varepsilon}) = x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}} \psi(t, x_{k_\varepsilon}) \quad (978) \quad 344$$

Prema prije rečenom imat ćemo nadomjestiti

$$D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1} \frac{1}{x_{k_\varepsilon}} \varphi(t, x_{k_\varepsilon}) \quad (979) \quad 345$$

sa

$$\frac{2^{n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1} (n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1)!}{(2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1)!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}} \right)^{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1} \varphi(t, x_{k_\varepsilon}) \right\}_{x_{k_\varepsilon} = 0} \quad (980) \quad 346$$

Prema (978) je

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}} \right)^{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1} \varphi(t, x_{k_\varepsilon}) = \sum_{s=0}^{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1} \binom{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1}{s} \frac{m_{k_\varepsilon}!}{(m_{k_\varepsilon} - s)!} x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon} - s} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}} \right)^{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1 - s} \psi(t, x_{k_\varepsilon}) \quad (981) \quad 347$$

ako je

$$m_{k_\varepsilon} > 2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1 \quad (982) \quad 348$$

i

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}} \right)^{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1} \varphi(t, x_{k_\varepsilon}) = \sum_{s=0}^{m_{k_\varepsilon}} \binom{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1}{s} \frac{m_{k_\varepsilon}!}{(m_{k_\varepsilon} - s)!} x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon} - s} \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}} \right)^{2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1 - s} \psi(t, x_{k_\varepsilon}) \quad (983) \quad 349$$

ako je

$$m_{k_\varepsilon} \leq 2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1 \quad (984) \quad 350$$

Stavimo li sad $x_{k_\epsilon} = 0$, to u slučaju (982) iščezne desna strana od (981), dok u slučaju (984) dobijemo

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\epsilon}} \right)^{2n_{k_\epsilon} - 2w_\epsilon - 1} \psi(t, x_{k_\epsilon}) \right\}_{x_{k_\epsilon} = 0} =$$

$$= \frac{(2n_{k_\epsilon} - 2w_\epsilon - 1)!}{(2n_{k_\epsilon} - 2w_\epsilon - m_{k_\epsilon} - 1)!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\epsilon}} \right)^{2n_{k_\epsilon} - 2w_\epsilon - m_{k_\epsilon} - 1} \psi(t, x_{k_\epsilon}) \right\}_{x_{k_\epsilon} = 0} \quad (985) \quad 351$$

Prema tomu treba izraz (979) u slučaju (982) nadomjestiti nulom, a u slučaju (984), obzirom na (980), sa

$$\frac{2^{n_{k_\epsilon} - w_\epsilon - 1} (n_{k_\epsilon} - w_\epsilon - 1)!}{(2n_{k_\epsilon} - 2w_\epsilon - m_{k_\epsilon} - 1)!} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\epsilon}} \right)^{2n_{k_\epsilon} - 2w_\epsilon - m_{k_\epsilon} - 1} \psi(t, x_{k_\epsilon}) \right\}_{x_{k_\epsilon} = 0} \quad (986) \quad 352$$

Budući da $\psi(t, x_k)$ ovisi o varijablama t i x_{k_ϵ} očitno samo u obliku linearnog izraza $t - x_{k_1} - \dots - x_{k_y}$, gdje se x_{k_ϵ} nalazi među varijablama x_{k_1}, \dots, x_{k_y} , to se može diferencijacija $\frac{\partial}{\partial x_{k_\epsilon}}$ nadomjestiti diferencijacijom $(-\frac{\partial}{\partial t})$, tako da mjesto (986) možemo

pisati

$$\frac{2^{m_{k_\epsilon} - w_\epsilon - 1} \cdot (-1)^{m_{k_\epsilon} + 1} (n_{k_\epsilon} - w_\epsilon - 1)!}{(2n_{k_\epsilon} - 2w_\epsilon - m_{k_\epsilon} - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{2n_{k_\epsilon} - 2w_\epsilon - m_{k_\epsilon} - 1} \psi(t, 0) \quad (987) \quad 353$$

Konačni je dakle efekt, da se u slučaju (982) dotični član u (771) odbaci, dok se u slučaju (984) ispušta dotični $x_{k_\epsilon}^{m_{k_\epsilon} - 1}$, a mjesto dotičnog operatora

$$D_{x_{k_\epsilon}}^{n_{k_\epsilon} - w_\epsilon - 1}$$

se piše

$$\frac{2^{n_{k_\epsilon} - w_\epsilon - 1} \cdot (-1)^{m_{k_\epsilon} + 1} (n_{k_\epsilon} - w_\epsilon - 1)!}{(2n_{k_\epsilon} - 2w_\epsilon - m_{k_\epsilon} - 1)!} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{2n_{k_\epsilon} - 2w_\epsilon - m_{k_\epsilon} - 1} \quad (989) \quad 355$$

te se konačno stavi $x_{k_2} = 0$, što se može učiniti i prije diferencijacije po t . Razumije se, da se diferencijacija po t , sadržana u (989), može sažeti s diferencijacijom

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{\varphi=1}^r (m_{s_\varphi} - 2v_\varphi), \text{ koja se nalazi u (771).}$$

Uzmimo sad, da treba jedan stanoviti broj parametara x_{s_γ} ($\gamma=1, 2, \dots, H$; $1 \leq H \leq r-\gamma$) u (771) staviti jednako nuli.

Pretpostavimo, da uz odabrane v_γ vrijedi

$$m_{s_\gamma} - n_{s_\gamma} - v_\gamma \geq 0 \quad (\gamma=1, 2, \dots, h) \tag{990} \quad 356$$

$$i \quad m_{s_\gamma} - n_{s_\gamma} - v_\gamma < 0 \quad (\gamma=h+1, \dots, H) \tag{991} \quad 357$$

gdje je $1 \leq h \leq H$, (992) 358

pa se pitajmo, čime treba nadomjestiti operaciju

$$\prod_{\gamma=1}^H (-1)^{m_{s_\gamma}} m_{s_\gamma}! S_{x_{s_\gamma}}^{m_{s_\gamma} - n_{s_\gamma} - v_\gamma} \tag{993} \quad 359$$

ako se hoće parametre x_{s_γ} ($\gamma=1, \dots, H$) staviti jednake nuli.

Primijenimo li jednadžbu (322a), dobijemo

$$\left\{ \prod_{\gamma=1}^h (-1)^{m_{s_\gamma}} m_{s_\gamma}! S_{x_{s_\gamma}}^{m_{s_\gamma} - n_{s_\gamma} - v_\gamma} \right\} \left\{ t^{-(x_{k_1} + \dots + x_{k_p})} (y - x_{s_1} - \dots - x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2} \Lambda_0(c/\sqrt{t - x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}}) \right\} \left\{ \int_{x_{s_1} = \dots = x_{s_h} = 0}^{-(x_{k_1} - \dots - x_{k_p})^2 - y^2} dy \right\} =$$

$$= \frac{(r-\gamma-2)!}{\left[r-\gamma-2+2 \sum_{\varphi=1}^h (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi} - v_\varphi) \right]!} \left(\prod_{\gamma=1}^h (-1)^{m_{s_\gamma}} 2^{n_{s_\gamma} + v_\gamma} m_{s_\gamma}! S_{x_{s_\gamma}}^{m_{s_\gamma} - n_{s_\gamma} - v_\gamma} \Gamma(m_{s_\gamma} - n_{s_\gamma} - v_\gamma + \frac{1}{2}) \right)$$

$$\int_{X_h}^{t-(x_{k_1}+\dots+x_{k_y})} (y-X_h)^{r-\gamma-2+2\sum_{\phi=1}^h (m_{s_\phi} - n_{s_\phi} - v_\phi)} \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_y})^2-y^2}) dy, \quad (994) \quad 360$$

gdje je

$$X_h = x_{s_{h+1}} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}. \quad (995) \quad 361$$

Na ovaj izraz treba još izvršiti operaciju

$$\prod_{\xi=h+1}^H (-1)^{m_{s_\xi}} m_{s_\xi}! S_{\lambda_{s_\xi}}^{m_{s_\xi} - n_{s_\xi} - v_\xi} \quad (996) \quad 362$$

koju zbog (991) i (769) treba prethodno nadomjestiti operacijom

$$\prod_{\xi=h+1}^H \frac{(-1)^{m_{s_\xi}} m_{s_\xi}! 2^{-m_{s_\xi} + n_{s_\xi} + v_\xi} (-m_{s_\xi} + n_{s_\xi} + v_\xi)!}{(-2m_{s_\xi} + 2n_{s_\xi} + 2v_\xi)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_{s_\xi}}\right)^{-2m_{s_\xi} + 2n_{s_\xi} + 2v_\xi} \quad (997) \quad 363$$

i poslije izvršenja te operacije staviti

$$x_{s_{h+1}} = \dots = x_{s_H} = 0. \quad (998) \quad 364$$

Stavimo li kratkoće radi

$$w = -m_{s_\xi} + n_{s_\xi} + v_\xi \quad (999) \quad 365$$

to obzirom na (205) vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{(-m_{s_\xi} + n_{s_\xi} + v_\xi)!}{(-2m_{s_\xi} + 2n_{s_\xi} + 2v_\xi)!} &= \frac{w!}{(2w)!} = \frac{(w-1)!}{2(2w-1)!} = \frac{\Gamma(w)}{2\Gamma(2w)} = \frac{(-1)^w \Gamma(-w + \frac{1}{2})}{2^{2w} \sqrt{\pi}} = \\ &= \frac{(-1)^{-m_{s_\xi} + n_{s_\xi} + v_\xi} \Gamma(m_{s_\xi} - n_{s_\xi} - v_\xi + \frac{1}{2})}{2^{-2m_{s_\xi} + 2n_{s_\xi} + 2v_\xi} \sqrt{\pi}} \end{aligned} \quad (1000) \quad 366$$

tako da (997) dobiva oblik

$$\prod_{s=h+1}^H \frac{(-1)^{n_{s_s} + v_s} m_{s_s}! 2^{m_{s_s} - n_{s_s} - v_s} \Gamma(m_{s_s} - n_{s_s} - v_s + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{s_s}} \right)^{-2m_{s_s} + 2n_{s_s} + 2v_s} \quad (1001) \quad 367$$

Pretpostavivši

$$q \geq \sum_{r=1}^s 2n_r \quad (1002) \quad 368$$

gdje su \underline{n}_r pozitivni cijeli brojevi, vrijedi očito

$$\left\{ \prod_{r=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial x_r} \right)^{2n_r} \right\}_X^t (z-X)^q \varphi(t, z) dz \Big|_{x_1=\dots=x_s=0} =$$

$$= \frac{q!}{(q-2n_1-\dots-2n_s)!} \int_{X_0}^t (z-X_0)^{q-2n_1-\dots-2n_s} \varphi(t, z) dz \quad (1003) \quad 369$$

dok za

$$q < \sum_{r=1}^s 2n_r \quad (1004) \quad 370$$

dobijemo lako

$$\left\{ \prod_{r=1}^s \left(\frac{\partial}{\partial x_r} \right)^{2n_r} \right\}_X^t (z-X)^q \varphi(t, z) dz \Big|_{x_1=\dots=x_s=0} =$$

$$= (-1)^{q+1} q! \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial X} \right)^{-(q-\sum_{r=1}^s 2n_r)-1} \varphi(t, X) \right\}_{X=X_0}. \quad (1005) \quad 371$$

Ako je $X_0 \neq 0$, može se naravno već unutar vitičaste zagrade staviti $X=X_0$.

Primijenimo li formule (1093) odnosno (1005) na operaciju (1001), koju treba izvršiti na izraz (994), to slijedi konačno, da iščezavanje parametara x_{s_1}, \dots, x_{s_H} znači, da u (771) treba izraz

$$\prod_{s=1}^H (-1)^{m_{s_s} - n_{s_s} - v_s} \int_{x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-y}}}^{t - (x_{k_1} + \dots + x_{k_y})} (y - x_{s_1} - \dots - x_{s_{r-y}})^{r-y-2} \Lambda_0(c\sqrt{(t - x_{k_1} - \dots - x_{k_y})^2 - y^2}) dy \quad (1006) \quad 372$$

za slučaj

$$r-y-2+2 \sum_{\varphi=1}^H (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi} - v_\varphi) \geq 0 \quad (1007) \quad 373$$

nadomjestiti izrazom

$$\frac{(r-y-2)!}{\left[r-y-2+2 \sum_{\varphi=1}^H (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi} - v_\varphi) \right]!} \prod_{s=1}^H \frac{(-1)^{n_{s_s} + v_{s_s}} 2^{m_{s_s} - n_{s_s} - v_{s_s}} m_{s_s}! \Gamma(m_{s_s} - n_{s_s} - v_{s_s} + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{X_H}^{t - (x_{k_1} + \dots + x_{k_y})} (y - X_H)^{r-y-2+2 \sum_{\varphi=1}^H (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi} - v_\varphi)} \Lambda_0(c\sqrt{(t - x_{k_1} - \dots - x_{k_y})^2 - y^2}) dy \quad (1008) \quad 374$$

gdje je

$$X_H = x_{s_{H+1}} + \dots + x_{s_{r-y}} \quad (1009) \quad 375$$

a za slučaj

$$r-y-2+2 \sum_{\varphi=1}^H (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi} - v_\varphi) < 0 \quad (1010) \quad 376$$

izrazom

$$\begin{aligned}
 & (-1)^{r-j-1} (r-j-2)! \prod_{\delta=1}^H \frac{(-1)^{n_{s_\delta} + v_\delta} m_{s_\delta}! 2^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \Gamma(m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \\
 & \cdot \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^{-[r-j-1+2 \sum_{\varphi=1}^H (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi} - v_\varphi)]} \Lambda_0(c \sqrt{(t-x_{k_1} \dots - x_{k_r})^2 - x^2}) \right\}_{x=x_H}
 \end{aligned} \quad (1011) \quad 377$$

Pojednostavnjenja, koja smo raspravili, mogu se naravno analogno primijeniti na prvi izraz u vitičastoj zagradi u (771).

U zadnjem izrazu u toj zagradi može se operator

$D_{x_{s_1}}^{n_{s_1}}$ direktno izvršiti na Besselovu funkciju $\Lambda_0(c \sqrt{(t-x_{k_1} \dots - x_{k_{r-1}})^2 - x_{s_1}^2})$ što obzirom na (732) daje

$$\begin{aligned}
 D_{x_{s_1}}^{n_{s_1}} \Lambda_0(c \sqrt{(t-x_{k_1} \dots - x_{k_{r-1}})^2 - x_{s_1}^2}) &= \\
 &= \frac{c^{2n_{s_1}}}{2^{n_{s_1}} n_{s_1}!} \Lambda_{n_{s_1}}(c \sqrt{(t-x_{k_1} \dots - x_{k_{r-1}})^2 - x_{s_1}^2})
 \end{aligned} \quad (1012) \quad 378$$

pa se naknadno može staviti $x_{s_1} = 0$, tako da se tu dobije rezultat i bez provedbe primjene stavka II.7, koja bi naravno dala isto, jer je

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{1}{m!} \left\{ \frac{d^m}{dx^m} [(x-a)^m f(x)] \right\}_{x=a} \quad (1013) \quad 379$$

ako i limes na lijevoj strani postoji. U tom slučaju ga dakle ne treba nadomjestiti limesom desne strane, kao što to činimo u smislu jednačbe (324). Prijetvorbu (1012) smo uostalom već upotrijebili

u formuli ¹⁰⁵(733) za kompozicije dviju Besselovih funkcija.

Što smo proveli za jednadžbu ¹⁴¹(771), može se naravno analogno provesti i za jednadžbu ¹⁴⁰(770), osim prijetvorbe ³⁷²(1012), koja ne dolazi u obzir, jer dotičnih članova nema.

Kad su neki parametri stavljeni jednako nuli, jasno je, da će se brojevi a_k, b_k , definirani prema ¹⁴⁹(779), ¹⁵⁰(780), tvoriti samo od onih parametara, koji nisu stavljeni jednako nuli, i da će broj članova u kanoničkom obliku biti prema tomu manji. Ako su napose svi parametri stavljeni jednako nuli, bit će samo jedan par brojeva a_k, b_k , naime $a=b=0$.

11. Kriterij za pojavljivanje integrala u kanoničkom obliku integralnih teorema.

Prema (783) mogu se kompozicije, koje razmatramo, izraziti pomoću četiri vrste transcendentnih funkcija:

$$\Lambda_0(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) \quad (1014) \quad 380$$

$$\Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) \quad (1015) \quad 381$$

$$\int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_0(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}) dy \quad (1016) \quad 382$$

$$\int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}) dy \quad (1017) \quad 383$$

Od tih su funkcija prve dvije vrste dobro poznate Besselove funkcije, za koje postoje i tablice, dok su zadnje dvije vrste manje poznate transcendentne funkcije, za koje smo u III.8. dokazali, da se ne mogu linearno izraziti pomoću prvih dviju, a ni međusobno. Da su te nove funkcije (1016), (1017) transcendentne, slijedi već iz toga, što prema (796), (797) za specijalnu vrijednost parametra b_k degeneriraju u trigonometrijske funkcije, za koje znamo, da su transcendentne.

Bit će zanimljivo istražiti, pod kojim se uvjetima u kanoničkom obliku uopće ne pojavljuju funkcije (1016), (1017), koje ćemo kratko zvati "integralima", t.j. kada će racionalne funkcije, koje u (783) fungiraju kao koeficijenti tih integrala, biti identično jednaka nuli ⁵obzirom na varijablu t za bilo koje vrijednosti parametara x_1, \dots, x_r . Pri tom ćemo uzeti u obzir i slučaj, da neki od

tih parametara imaju fiksiranu vrijednost nula.

Kao odgovor na to pitanje postavljamo

IV
STAVAK III.11.

Da u kanoničkom obliku kompozicije $K_{n_1, \dots, n_r}^{m_1, \dots, m_r}(t; x_1, \dots, x_r)$

($r \geq 2$) koeficijenti integrala budu identično jednaki nuli obzirom na varijablu t za bilo koje vrijednosti onih od parametara x_1, \dots, x_r , koji nisu stavljeni jednako nuli, potrebno je i dovoljno, da bude ispunjen jedan od ovih uvjeta:

A/ Za sve $k=1, \dots, r$ vrijedi

$$m_k < n_k, \quad (1018) \quad 384$$

a nijedan od parametara ne mora biti stavljen jednako nuli.

B/ Medju r vrijednosti $k=1, \dots, r$ ima jedna vrijednost k_1 , za koju je

$$m_{k_1} - n_{k_1} \geq 0, \quad (1019) \quad 385$$

a za sve ostale $k \neq k_1$ vrijedi

$$m_k - n_k \leq -(m_{k_1} - n_{k_1} + 1). \quad (1020) \quad 386$$

Nijedan od parametara ne mora biti stavljen jednako nuli.

C/ Medju vrijednostima $k=1, \dots, r$ ima lih broj $q > 1$ vrijednosti k_1, k_2, \dots, k_q , za koje je

$$m_{k_j} \geq 2n_{k_j} \quad (j=1, \dots, q), \quad (1021) \quad 387$$

a pripadni parametri su stavljeni jednako nuli:

$$x_{k_j} = 0 \quad (j=1, \dots, q) \quad (1022) \quad 388$$

Za sve ostale vrijednosti k_{q+1}, \dots, k_r , ukoliko ih ima, (t.j. ako nije $q=r$), vrijedi

$$m_{k_j} - n_{k_j} \leq - \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\alpha=1}^q (m_{k_\alpha} - n_{k_\alpha}) \right] \quad (j=q+1, \dots, r), \quad (1023) \quad 389$$

a pripadni parametri $x_{k_{q+1}}, \dots, x_{k_r}$ ne moraju biti stavljani jednaki nuli.

Obzirom na komutativni zakon za komponiranje možemo uvijek postići, da bude $k_1=1$, t.j. da (1019) glasi

$$m_1 - n_1 \geq 0 \quad (1024) \quad 391$$

a (1020) postane

$$m_k - n_k \leq -(m_1 - n_1 + 1) \quad (k=2, \dots, r) \quad (1025) \quad 392$$

Dalje možemo postići, da vrijednosti k_1, \dots, k_q budu prve u nizu $1, 2, \dots, r$, tako da (1021) glasi

$$m_k \geq 2n_k \quad (k=1, \dots, q) \quad (1026) \quad 393$$

a mjesto (1022) vrijedi

$$x_1 = x_2 = \dots = x_q = 0. \quad (1027) \quad 394$$

Konačno je (1023) nadomješten sa

$$m_k - n_k \leq - \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\alpha=1}^q (m_\alpha - n_\alpha) \right] \quad (k=q+1, \dots, r). \quad (1028) \quad 395$$

Time smo postigli pojednostavnjenje u pisanju.

Prije nego što pristupimo dokazu stavka, primjećujemo: Ako je za neku kompoziciju dokazano, da koeficijenti integrala identično iščezavaju, onda taj zaključak ostaje na snazi, ako bilo koje od parametara, (koji nisu već stavljeni jednako nuli), stavimo jednako nuli. Ako naime u kanoničkom obliku nema integrala ³⁸² (1016), ³⁸³ (1017), i ako neki od koeficijenata funkcija ³⁸⁰ (1014), ³⁸¹ (1015) odnosno član R_4 u ¹⁵³ (783) postaju neizmjerni, kad dotični parametri teže prema nuli, to moramo provesti granični prijelaz prema stavku II.7. Takav postupak involvira procese ^{deriviranja} diferencijacije, koji, izvršeni na funkcije ³⁸⁰ (1014), ³⁸¹ (1015), prema ^{III (a)} (346) i ¹⁴² (772) daju opet funkcije tih vrsti, tako da u kanoničkom obliku opet nema integrala ³⁸² (1016), ³⁸³ (1017). Dokazujemo li dakle, daje koji od uvjeta A/B/C dovoljan, to možemo pretpostaviti, da su samo oni parametri jednaki nuli, koji prema uvjetu to moraju biti, pa će dokaz vrijediti i za slučaj, da su još dalji parametri stavljeni jednako nuli. Ako dokazujemo, da su ti uvjeti ^{nužno} potrebni, moći ćemo za slučajeve, koji tim uvjetima nisu obuhvaćeni, pretpostaviti, da je što više parametara jednako nuli, i dokazati, da se u kanoničkom obliku pojavljuju integrali. Taj će dokaz vrijediti i onda, ako ti parametri nisu stavljeni jednako nuli, jer bi inače integrali morali nastati stavljanjem tih parametara jednako nuli, što smo vidjeli, da ne može biti.

Kratko rečeno, stavljanjem parametara jednako nuli mogu integrali iz kanoničkog oblika nestati, ali integrali ne mogu nastati, ako ih nije već bilo.

Dokazujemo najprije, da su uvjeti stavka dovoljni.

Pri tom trebamo neke zaključke, koji se daju izvesti iz stavka II.2. Zamislimo, da je u smislu ^{IV} III.7. određen kanonički

oblik integrala

$$\int_X^t (y-X)^m \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (1029) \quad 396$$

Pitamo se, pod kojim se uvjetima izvršenjem operacija D_{x_k} ($k=1, \dots, n$) na taj integral mogu ukloniti integrali u njegovom kanoničkom obliku. Razvijemo li potenciju $(y-X)^m$ po binomnom stavku i rastavimo integral (1029) na toliko sumanda, koliko taj razvoj ima članova, to je prema (470) i (534) jasno, da članovi s lihim potencijama od y ne pridonose integrala za kanonički oblik, pa naravno niti onda, ako na njih još izvršimo neke operacije D_{x_k} . Članovi s takim potencijama od y daju prema (542) izraz, koji, ako ispuštimo članove bez integrala, ima oblik

$$\begin{aligned} & (-1)^m \left\{ X^m - \binom{m}{2} f_2(t) X^{m-2} + \binom{m}{4} f_4(t) X^{m-4} - \dots \right\} \int_X^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy + \\ & + (-1)^m \left\{ X^m - \binom{m}{2} g_2(t) X^{m-2} + \binom{m}{4} g_4(t) X^{m-4} - \dots \right\} \int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \end{aligned} \quad (1030) \quad 397$$

gdje funkcije $f(t)$ i $g(t)$ znače sume, koje u (542) fungiraju kao koeficijenti integrala, a indeksi tih funkcija znače eksponent od x u integralu na lijevoj strani od (542).

Izvršimo li na izraz (1030) operacije D_{x_k} , to se vidi, da diferencijacije po donjoj granici integrala daju članove bez integrala, tako da se možemo ograničiti na pitanje, pod kojim uvjetima se izvršenjem operacija D_{x_k} može poništiti izraz oblika

$$X^m - \binom{m}{2} f_2(t) X^{m-2} + \binom{m}{4} f_4(t) X^{m-4} - \dots \quad (1031) \quad 398$$

Jasno je, da se mora poništiti koeficijent svake potencije od \underline{t} u tom izrazu, a takav koeficijent ima oblik polinoma

$$aX^m + bX^{m-2} + \dots \quad (1032) \quad 399$$

gdje neki od koeficijenata a, b, \dots mogu biti jednaki nuli. Potencija X^s je prema (225) homogena funkcija s -tog stepena varijabla x_1, \dots, x_n , pa izvršenje nekih operacija D_{x_k} na sumu (1032) snižava stepen svakog člana, koji pri tom ne iščezne, za isti broj jedinica, tako da su članovi, koji nisu iščeznuli, i poslije izvršenja tih operacija raznog stepena, i njihova suma ne može biti jednaka nuli za bilo koje vrijednosti parametara x_1, \dots, x_r . Moraju dakle svi članovi sume (1032) iščeznuti svaki za sebe, da cijela suma iščezne. Budući da svaka potencija od \underline{x} , koja dolazi u (1031), mora biti sadržana u nekom koeficijentu (1032) neke potencije od \underline{t} (uključivo nulte potencije), to će dakle (1031) primjenom operacija D_{x_k} iščeznuti identično obzirom na \underline{t} za bilo koje vrijednosti parametara x_1, \dots, x_n onda i samo onda, ako primjenom tih istih operacija iščeznu sve potencije X^m, X^{m-2}, \dots , koje se nalaze u (1031).

Za iščezavanje potencije X^m vrijede kriteriji stavka I.2. Ako je za najvišu potenciju X^m ispunjen kriterij A/ toga stavka, t.j. ako je

$$m < n \quad (1033) \quad 400$$

to je taj uvjet pogotovo ispunjen i za sve niže potencije od \underline{x} u (1031). Ako je za najvišu potenciju X^m ispunjen kriterij B/ rečenog stavka, t.j. ako je $\underline{m-n}$ lih broj, a $\underline{m \geq n}$, onda je i za sve niže potencije X^{m-2k} u (1031) $\underline{m-2k-n}$ lih broj, pa te potencije, bez obzira na to, da li je za njih $\underline{m-2k \geq n}$, iščeznu $\frac{m-n+3}{2}$ -kratnom primjenom svih operacija D_{x_k} . Te su operacije za

poništenje najviše potencije X^m ^{nutne} potrebne i dovoljne, a za poništenje nižih potencija očito pogotovo dovoljne.

Prema tome možemo ustanoviti, da su kriteriji za poništenje integrala u kanoničkom obliku od ³⁹⁶(1029) primjenom operacija D_{x_k} isti, kao kriteriji prema stavku ¹⁴¹I.2., koji su ^{nutni} potrebni i dovoljni za poništenje potencije X^m .

Prijedjimo sad na pitanje, da li je uvjet A/ ^{IV}stavka III.11. dovoljan. Promotrimo u tu svrhu prvi član vitičaste zagrade u ¹⁴⁰(770) odnosno ¹⁴¹(771). Budući da je zbog ³⁸⁴(1018)

$$m_v - n_v - q_v \leq -1 \quad (1034) \quad 401$$

to možemo prema ¹³⁹(769) pisati

$$S_{x_v}^{m_v - n_v - q_v} = D_{x_v}^{-m_v + n_v + q_v}. \quad (1035) \quad 402$$

Budući da je

$$r-2 < r \quad (1036) \quad 403$$

što odgovara uvjetu $m < n$ kriterija A/ u stavku ¹⁴⁰I.2., a primijenjeno je r raznih operacija ⁴⁰²(1035), dok prema rečenom kriteriju treba primijeniti barem $m+1$, t.j. u našem slučaju $r-2+1 = r-1$ takvih operacija, to taj član ne daje integrala za kanonički oblik.

U drugom članu u vitičastoj zagradi od ¹⁴⁰(770) odnosno ¹⁴¹(771) možemo analogno zbog ³⁸⁴(1018) staviti

$$m_s - n_s - v_s \leq -1 \quad (1037) \quad 404$$

i prema ¹³⁹(769)

$$S_{x_s}^{m_s - n_s - v_s} = D_{x_s}^{-m_s + n_s + v_s}. \quad (1038) \quad 405$$

Ovdje je broj varijabla $x_{s_1}, \dots, x_{s_{r-\gamma}}$ jednak $r-\gamma$, pa je

$$r-\gamma-2 < r-\gamma \quad (1039) \quad 406$$

analogon relacije $m < n$. Izvršeno je $r-y$ operacija (1038), što je više nego $m+1 = r-y-2+1 = r-y-1$. I ovaj član dakle ne daje integrala za kanonički oblik, a treći član u vitičastoj zagradi (771) uopće ne sadrži integrala. Time je dokazano, da je uvjet A/ stavka III.11. dovoljan pod pretpostavkom, da nijedan od parametara x_1, \dots, x_r nije stavljen jednako nuli, što se pretpostavlja u (770), (771). Pogotovo je onda taj uvjet dovoljan i onda, ako se neki ili svi ti parametri stave jednako nuli, kako smo već prije raspravili.

Pretpostavimo dalje, da vrijedi uvjet B/ stavka III.11., t.j. da vrijede (1024) i (1025).

Za članove drugog izraza u vitičastoj zagradi od (770) odnosno (771), za koje je m_1 sadržan u brojevima m_{k_1}, \dots, m_{k_y} , t.j. kad je $\underline{1}$ sadržan medju k_1, \dots, k_y , vrijedi isto razmatranje kao gore, t.j. ti članovi ne daju integrala. Ako je naprotiv u drugom izrazu vitičaste zagrade $\underline{1}$ sadržan medju brojevima s_1, \dots, s_{r-y} , t.j. m_1 medju brojevima $m_{s_1}, \dots, m_{s_{r-y}}$, moramo provesti novo razmatranje, koje će biti primjenljivo i na prvi izraz u vitičastoj zagradi.

Zamislamo, da je u drugom izrazu u vitičastoj zagradi na integral ponajprije izvršena samo operacija $S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1}$, gdje smo pretpostavili, da je $s_1=1$. Smijemo dalje pretpostaviti, da je

$$m_1-n_1-v_1 \geq 0, \quad (1040) \quad 407$$

jer inače operator $S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1}$ u smislu (769) znači diferencijaciju i stoga taj slučaj otpada pod argumentaciju, koju smo dali za slučaj uvjeta A/ stavka III.11.

Uvedimo kratice

$$X_1 = x_{s_1} + \dots + x_{s_r} \quad (1041) \quad 408$$

$$X_2 = x_{s_1} + x_{s_2} + \dots + x_{s_{r-\gamma}} = x_1 + x_{s_2} + \dots + x_{s_{r-\gamma}} \quad (1042) \quad 409$$

Prema definicijama, na str. 119. ~~onda~~ ^{koje su same prve formule (130)} vrijedi ~~onda~~

$$X_1 + X_2 = X = x_1 + \dots + x_r \quad (1043) \quad 410$$

Supstitucijom

$$z = y - X_2 + x_1 \quad (1044) \quad 411$$

možemo integral drugog izraza u vitičastoj zagradi od (770) odnosno (771) dovesti u nešto drugi oblik:

$$\int_{X_2}^{t-X_1} (y-X_2)^{r-\gamma-2} \Lambda_0(c\sqrt{(t-X_1)^2 - y^2}) dy =$$

$$= (-1)^{r-\gamma-1} \int_{t-X+x_1}^{x_1} (x_1-z)^{r-\gamma-2} \Lambda_0(c\sqrt{(t-X_1)^2 - (z+X_2-x_1)^2}) dz \quad (1045) \quad 412$$

Stavimo sad u (287) ^{π (162)}

$$n = r \quad (1045) \quad 413$$

$$q = r-\gamma-2 \quad (1047) \quad 414$$

$$\kappa = 1 \quad (1048) \quad 415$$

$$\varphi(t; z, x_2, \dots, x_r) = (-1)^{r-\gamma-1} (r-\gamma-2)! \Lambda_0(c\sqrt{(t-X_1)^2 - (z+X_2-x_1)^2}) \quad (1049) \quad 416$$

označivši varijablu y sa z . Prema (289) i (293), gdje osim (1046) do (1049) još stavimo

$$m = m_1 - n_1 - v_1 \quad (1050) \quad 417$$

dobijemo onda ^{vamo} ~~obzirom~~ ⁵ na (1045) ⁴¹²

$$\begin{aligned}
& S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1} \int_{x_2}^{t-x_1} (y-x_2)^{r-\gamma-2} \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-y^2}) dy = \\
& = \frac{(-1)^{r-\gamma-1} (r-\gamma-2)!}{(m_1-n_1-v_1)! 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{t-x+x_1}^{x_1} \left[\int_{x_1}^z dz \right]^{r-\gamma-2} (x_1^2-z^2)^{m_1-n_1-v_1} \cdot \\
& \quad \cdot \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-(z+x_2-x_1)^2}) dz \quad (1051) \quad 418
\end{aligned}$$

što u slučaju

$$\gamma = r-2 \quad (1052) \quad 419$$

(to je najveća moguća vrijednost od γ u dotičnom izrazu od (770) i (771)) daje

$$\begin{aligned}
& S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1} \int_{x_2}^{t-x_1} \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-y^2}) dy = \\
& = - \frac{1}{(m_1-n_1-v_1)! 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{t-x+x_1}^{x_1} (x_1^2-z^2)^{m_1-n_1-v_1} \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-(z+x_2-x_1)^2}) dz \quad (1053) \quad 420
\end{aligned}$$

dok u slučaju

$$\gamma < r-2 \quad (1054) \quad 421$$

možemo prijeći na oblik (294), t.j.

$$\begin{aligned}
& S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1} \int_{x_2}^{t-x_1} (y-x_2)^{r-\gamma-2} \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-y^2}) dy = \\
& = \frac{(-1)^{r-\gamma-1} (r-\gamma-2)}{(m_1-n_1-v_1)! 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{t-x+x_1}^{x_1} \left[\int_{x_1}^z (z-u)^{r-\gamma-3} (x_1^2-u^2)^{m_1-n_1-v_1} du \right] \cdot \\
& \quad \cdot \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-(z+x_2-x_1)^2}) dz \quad (1055) \quad 422
\end{aligned}$$

Ako na desnoj strani od (1053) i (1055) opet uvedemo y prema (1044), to te formule glase:

$$S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1} \int_{X_2}^{t-X_1} \Lambda_0(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy =$$

$$= \frac{1}{(m_1-n_1-v_1)! 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{X_2}^{t-X_1} [x_1^2-(y-X_2+x_1)^2]^{m_1-n_1-v_1} \Lambda_0(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy \quad (1056) \quad 423$$

$$S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1} \int_{X_2}^{t-X_1} (y-X_2)^{r-\gamma-2} \Lambda_0(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy =$$

$$= \frac{(-1)^{r-\gamma-2} (r-\gamma-2)!}{(m_1-n_1-v_1)! 2^{m_1-n_1-v_1}} \int_{X_2}^{t-X_1} \left[\int_{x_1}^{y-X_2+x_1} (y-X_2+x_1-u)^{r-\gamma-3} (x_1^2-u^2)^{m_1-n_1-v_1} du \right] \cdot \Lambda_0(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy \quad (1057) \quad 424$$

Stavimo

$$X_2 - X_1 = \bar{X}_2 = x_{s_2} + \dots + x_{s_{r-\gamma}} \quad (1058) \quad 425$$

Pretpostavimo li ponajprije (1052), to je

$$\bar{X}_2 = x_{s_2} \quad (1059) \quad 426$$

pa možemo integral u (1056) pisati u obliku

$$\int_{x_1+x_{s_2}}^{t-X_1} [x_1^2-(y-x_{s_2})^2]^{m_1-n_1-v_1} \Lambda_0(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2}) dy \quad (1060) \quad 427$$

Prema (770) odnosno (771) treba na taj integral još izvršiti operaciju

$$S_{x_{s_2}}^{m_{s_2}-n_{s_2}-v_2} = D_{x_{s_2}}^{-m_{s_2}+n_{s_2}+v_2} \quad (1061) \quad 428$$

gdje je obzirom na ³⁹²(1025) sigurno

$$-m_{s_2} + n_{s_2} + v_2 \cong m_1 - n_1 + 1 > m_1 - n_1 - v_1. \quad (1062) \quad 429$$

Razvijemo li potenciju u integralu ⁴²⁷(1060) po binomnom stavku, dobijemo integrale oblika ³⁹⁶(1029), (gdje je sad $X = x_{s_2}$). Kako smo vidjeli, možemo na te integrale primijeniti kriterije stavka II.2. Najviši eksponent će biti

$$m = 2(m_1 - n_1 - v_1) \quad (1063) \quad 430$$

a i svi ostali eksponenti su taki. Broj varijabla je jednak jedan, dakle

$$n = 1. \quad (1064) \quad 431$$

U slučaju

$$m = 0 \quad (1065) \quad 432$$

dat će diferencijacija ⁴²⁸(1061) izraz, koji ne sadrži integrala.

Ako je

$$m_1 - n_1 - v_1 > 0 \quad (1066) \quad 433$$

može prema ⁴³⁰(1063) i ⁴³¹(1064) biti $m > n$, a $m-n$ je lih broj, dakle treba prema stavku II.2.B/ izvršiti jedinu operaciju $D_{x_{s_2}}$,

i to $\frac{m-n+3}{2} = \frac{2(m_1 - n_1 - v_1) - 1 + 3}{2} = m_1 - n_1 - v_1 + 1$ puta. Prema ⁴²⁸(1061) ona je izvršena $-m_{s_2} + n_{s_2} + v_2$ puta, što je zbog ⁴²⁹(1062) barem toliko kao

$m_1 - n_1 - v_1 + 1$. U kanoničkom obliku dakle nema integrala.

Za slučaj ⁴²¹(1054) služimo se oblikom ⁴²⁴(1057). S oznakom ⁴²⁵(1058) integral nadesnoj strani od ⁴²⁴(1057) dobiva oblik

$$\int_{x_1 + \bar{x}_2}^{t - x_1} \int_{x_1}^{y - \bar{x}_2} (y - \bar{x}_2 - u)^{r-y-3} (x_1^2 - u^2)^{m_1 - n_1 - v_1} du \bigwedge_0 (c \sqrt{(t - x_1)^2 - y^2}) dy. \quad (1067) \quad 434$$

Nutarnji integral možemo razviti po potencijama od $y - \bar{x}_2$ pomoću

formule ^{T(122)} (300), čime dobijemo same integrale oblika ³⁹⁶ (1029):

$$\int_{x_1}^{y-\bar{x}_2} (y-\bar{x}_2-u)^{r-\gamma-3} (x_1^2-u^2)^{m_1-n_1-v_1} du =$$

$$= \sum_{s=0}^{r-\gamma-3} \frac{(-1)^{r-\gamma-2-s} (m_1-n_1-v_1)! (r-\gamma-3)! \binom{r-\gamma-2-s}{s} 2^{2(m_1-n_1-v_1)+r-\gamma-2-s} (y-\bar{x}_2)^s}{2 \cdot \binom{r-\gamma-s}{2} + m_1-n_1-v_1} x_1^{2(m_1-n_1-v_1)+r-\gamma-2-s} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m_1-n_1-v_1} \frac{(-1)^s \binom{m_1-n_1-v_1}{s} 2^{2(m_1-n_1-v_1)-2s} (y-\bar{x}_2)^{r-\gamma-2+2s}}{(r-\gamma-2) \binom{r-\gamma-2+2s}{r-\gamma-2}} x_1^{2(m_1-n_1-v_1)-2s} \quad (1068) \quad 435$$

U prvoj sumi je najviši eksponent $s=r-\gamma-3$, koji odgovara eksponentu \underline{m} u (1029) ³⁹⁶ i u stavku I.2. Da se ponište integrali u kanoničkom obliku, treba prema stavku II.2.A/ izvršiti $\underline{m+1}$ raznih operacija $D_{x_{s_\delta}}$, svaku barem jedamputa. Prema ¹⁴⁰ (770) odnosno ¹⁴¹ (771) ima tih operacija $\underline{r-\gamma-1}$, dakle za jednu više, nego što je potrebno, a svaka je izvršena barem jedamputa, jer je zbog ³⁸⁶ (1020) i ³⁸⁵ (1019)

$$-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_{s_\delta} \geq 1 \quad (1069) \quad 436$$

Članovi prve sume od (1068) ⁴³⁵ dakle ne pridonose integrala za kanonički oblik.

U drugoj sumi je najmanji eksponent od $\underline{y-\bar{x}_2}$ jednak $\underline{r-\gamma-2}$. Tu je $m < n$, a primijenjeno je, kako smo spomenuli, $r-\gamma-1$, dakle $\underline{m+1}$ raznih operacija $D_{x_{s_\delta}}$, što je prema stavku II.2.A/ dosta, da se uklone integrali u kanoničkom obliku. Za sve ostale potencije je $\underline{m} > n$, a $\underline{m-n} = r-\gamma-2+2s-(r-\gamma-1) = 2s-1$ lih broj, pa prema stavku II.2.B/ treba primijeniti sve operacije $D_{x_{s_\delta}}$ ($\delta=2, \dots, r-\gamma$) i to svaku $\frac{m-n+3}{2}$ puta. To je u našem slučaju

$$\frac{m-n+3}{2} = \frac{r-\gamma-2+2s-(r-\gamma-1)+3}{2} = s+1 \quad \text{puta.}$$

No budući da je $s \in m_1 - n_1 - v_1$, to je zbog (1020)

$$s+1 \in m_1 - n_1 - v_1 + 1 \in -(m_{s_5} - n_{s_5}) \in -(m_{s_5} - n_{s_5} - v_5), \quad (1069) \quad 437$$

tako da je i taj zahtjev zadovoljen i niti ovi članovi ne pridonose integrala za kanonički oblik.

Razmatranje je očito primjenljivo i na prvi član u vitičastoj zagradi u (770), (771), ako stavimo $\gamma=0$. Time je dokazano, da je uvjet B/ stavka III.11. dovoljan. To pogotovo vrijedi, ako su koji od parametara stavljeni jednako nuli.

Prelazimo na pitanje, da li je uvjet C/ stavka III.11. dovoljan. Neka dakle vrijede (1026), (1027), (1028).

Ako su koji od brojeva $1, \dots, q$ sadržani među brojevima k_1, \dots, k_γ , to će zbog (1026) za njih vrijediti (982), tako da desna strana od (981) iščezne, kako je tamo spomenuto, kad se dotični parametri prema (1027) stave jednako nuli, odnosno tih članova u smislu (770) uopće nema, ako je dotični donji indeks jednak nuli. (Razumije se, da u (770) ne bi moralo baš posljednjih $r-p$ donjih indeksa biti jednako nuli, kako smo radi jednostavnijeg pisanja pretpostavili). U tom slučaju dakle dotični članovi u (770) odnosno (771) otpadnu. Zamislimo prema tome, da su svi brojevi $1, \dots, q$ sadržani među brojevima $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, na pr. kao $s_1=1, s_2=2, \dots, s_q=q$, gdje je $q \leq r-\gamma$, (jer inače moraju neki od brojeva $1, \dots, q$ biti sadržani među k_1, \dots, k_γ). Na ovaj slučaj možemo primijeniti formulu (1008), gdje samo treba mjesto H pisati q . Zbog $\gamma \leq r-2$ i uvjeta (1026) ne može vrijediti (1010), tako da (1011) ne dolazi u obzir. (Taj izraz i onako ne bi pridonio integrala za kanonički oblik).

Ako je najprije $q = r-\gamma$, to je X_q , (koji odgovara X_H u (1008)), jednak nuli, a operatori u izrazu (1006) su svi integralni operatori, koje prema (770), (771) treba primijeniti. Budući da je q lih broj, to je i eksponent od γ u (1008) lih, pa taj izraz u smislu (534) ne daje integrala za kanonički oblik, na čemu ni primjena operatora $D_{x_{k_\varepsilon}}$ i $\frac{\partial}{\partial t}$ [prema (770), (771)] ništa ne mijenja.

Neka je dakle $q < r - \gamma$. U tom slučaju na (1008), (u kojem piše \underline{H} mjesto q), treba još primijeniti operatore

$$S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} \quad (\delta = q+1, \dots, r-\gamma).$$

U smislu stavka $\underline{II.2.}$ i formule (1029) vrijedi u ovom slučaju za broj varijabla

$$n = r - \gamma - q \quad (1070) \quad 438$$

a za eksponent pod integralom

$$m = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi) \quad (1071) \quad 439$$

Ako je $m < n$, to prema stavku $\underline{II.2.A/}$ treba da bude izvršeno barem $\underline{m+1}$ raznih operacija $D_{x_{s_\delta}}$ ($\delta = q+1, \dots, r-\gamma$), svaka barem jedamput.

Budući da je broj raznih izvršenih operacija jednaka broju varijabla \underline{n} , koji je pretpostavljen kao veći od \underline{m} , a svaka je operacija $D_{x_{s_\delta}}$

s obzirom na (769) izvršena barem jedamput, jer je zbog (1026), (1028)

i $q \geq 3$

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta \leq m_{s_\delta} - n_{s_\delta} \leq - \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi) \right] \leq - \frac{q+1}{2} < -1$$

$$(\delta = q+1, \dots, r-\gamma) \quad (1072) \quad 440$$

to je taj uvjet zadovoljen. U slučaju, da je $m \geq n$, to je prema (1070), (1071) $\underline{m-n}$ lih broj, jer je q lih, pa se može primijeniti stavak $\underline{II.2.B/}$. Broj \underline{m} je po (1071) maksimalan, ako su svi $v_\varphi = 0$, t.j.

$$m_{\max} = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi) \quad (1073) \quad 441$$

Treba dakle svaku operaciju izvršiti barem

$$\frac{m_{\max} - n + 3}{2} = \frac{q+1}{2} + \sum_{\varphi=1}^q (m_{\varphi} - n_{\varphi}) \quad (1074) \quad 442$$

puta, a to je ^Sobzirom na ⁴⁴⁰(1072) i ⁴³⁹(769) zaista učinjeno. Prema tome u drugom članu vitičaste zagrade u ⁴⁴⁰(770), ⁴⁴¹(771) nema integrala u kanoničkom obliku, a isto razmatranje vrijedi i za prvi član, ako stavimo $\gamma=0$. Ovo vrijedi pogotovo onda, ako su koji od parametara x_{q+1}, \dots, x_r stavljeni jednako nuli. Time je dokazano, da je i uvjet C/ stavka III.11. dovoljan.

Prije nego što dokažemo, da su uvjeti stavka III.11. potrebni, provest ćemo neka pomoćna razmatranja.

Recimo, da želimo sve parametre $x_{k_1}, \dots, x_{k_\gamma}$ u drugom izrazu vitičaste zagrade od ⁴⁴⁰(770), ⁴⁴¹(771) staviti jednako nuli. Ako za jedan od k_ε ($\varepsilon = 1, \dots, \gamma$) vrijedi

$$m_{k_\varepsilon} \geq 2n_{k_\varepsilon} \quad (1075) \quad 443$$

onda će ^Sobzirom na ³⁴⁸(982) svi članovi dotične sume po w_ε otpasti, t.j. članovi za dotičnu kombinaciju (k_1, \dots, k_γ) otpadaju. Možemo dakle pretpostaviti

$$m_{k_\varepsilon} < 2n_{k_\varepsilon} \quad (\varepsilon = 1, \dots, \gamma) \quad (1076) \quad 444$$

Indeks sumacije w_ε će onda trebati poprimiti samo cijele vrijednosti

$$0 \leq w_\varepsilon \leq \frac{2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1}{2} \quad (1077) \quad 445$$

jer za ostale vrijednosti na temelju ³⁴⁸(982) dotični članovi otpadaju. Prema ³⁵⁵(989) dobijemo stoga za dotičnu kombinaciju (k_1, \dots, k_γ) , a uz odabrane v_φ , kao dio drugog izraza vitičaste zagrade u ⁴⁴⁰(770), ⁴⁴¹(771):

$$\frac{1}{(r-\gamma-2)!} \sum_{w_1=0}^{\left[\frac{2n_{k_1} - m_{k_1} - 1}{2} \right]} \dots \sum_{w_\gamma=0}^{\left[\frac{2n_{k_\gamma} - m_{k_\gamma} - 1}{2} \right]} \left\{ \prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \frac{(-1)^{m_{k_\varepsilon} + 1} e^{2w_\varepsilon} 2^{n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1} (n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1)!}{w_\varepsilon! (2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon} - 1)!} \right\} \cdot \left. \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^{\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon}) - \gamma + h} \psi(t, 0, \dots, 0) \right\} \quad (1078) \quad 446$$

gdje smo radi kraćeg pisanja stavili

$$h = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - 2v_\varphi) \quad (1079) \quad 447$$

a $\psi(t, 0, \dots, 0)$ znači $\left[\psi(t, x_{k_1}, \dots, x_{k_\gamma}) \right]_{x_{k_1} = \dots = x_{k_\gamma} = 0}$, gdje je ψ izraz u uplatnj sagradi (270), (271), od kojega je odobren počet parametara λ_{k_ε} .

Opetovanom primjenom od (1056), (1057), (1058) može se $\psi(t, 0, \dots, 0)$ izraziti linearno pomoću integrala oblika

$$P = \int_{X_2}^t y^M \Lambda_0(c\sqrt{t^2 - y^2}) dy \quad (1080) \quad 448$$

sa

$$X_2 = x_{s_1} + \dots + x_{s_{r-\gamma}} \quad (1081) \quad 449$$

Pri tom možemo pretpostaviti, da je M tak broj, jer u slučaju linog M integrali (1080) prema (470), (534) ne pridonose integrala za kanonički oblik. Nadomjestit ćemo dakle $\psi(t, 0, \dots, 0)$ u izrazu (1078) integralom (1080).

Prvi slučaj. Neka je

$$M = 4n \quad (1082) \quad 450$$

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon}) - \gamma + h = 2r = N - 2 \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon \quad (1083) \quad 451$$

sa

$$N = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - \gamma + h \quad (1084) \quad 452$$

Uvrstimo li to u ^{III (408)} (620), to dobijemo

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{N-2} \sum_{\varepsilon=1}^Y w_{\varepsilon} P = \frac{(-1)^{\frac{M}{4} + \frac{N}{2} - \sum_{\varepsilon=1}^Y w_{\varepsilon}} M!}{2^{\frac{M}{2}} c^{\frac{M}{2} - N + 2 \sum_{\varepsilon=1}^Y w_{\varepsilon}} \left(\frac{M}{2}\right)!} t^{\frac{M}{2}} P_0 + \text{const. } t^{\frac{M}{2}} P_1 + \dots \quad (1085) \quad 453$$

Ako to uvedemo u ⁴⁴⁶ (1078), vidi se, da će se moći faktori $c^{2w_{\varepsilon}}$ kratiti i da pridolazi faktor $(-1)^{-w_{\varepsilon}}$, čime je omogućena provedba sumacija po w_1, \dots, w_Y , koje su naznačene u (1078), i to pomoću formule ⁴⁴⁶ (206) ^{II (52)}.
Stavimo li u ^{II (52)} (206)

$$n = 2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1 \quad (1086) \quad 454$$

$$m = n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1 \quad (1087) \quad 455$$

to dobijemo

$$\sum_{w_{\varepsilon}=0}^{\left\lfloor \frac{2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1}{2} \right\rfloor} \frac{(-1)^{w_{\varepsilon}} 2^{2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1 - 2w_{\varepsilon}} (n_{k_{\varepsilon}} - w_{\varepsilon} - 1)!}{w_{\varepsilon}! (2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1 - 2w_{\varepsilon})!} = \frac{(-1)^{n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1} 2^{2n_{k_{\varepsilon}} - 2m_{k_{\varepsilon}} - 1} \Gamma\left(n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - \frac{1}{2}\right) \cdot m_{k_{\varepsilon}}!}{\sqrt{\pi} (2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1)!} \quad (1088) \quad 456$$

gdje uvjet $m \leq \frac{n-1}{2}$ sad znači $n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1 \leq \frac{2n_{k_{\varepsilon}} - m_{k_{\varepsilon}} - 1}{2}$, što je ispravno, jer $m_{k_{\varepsilon}}$ nije negativan.

Pišimo ⁴⁵⁶ (1088) u obliku

$$\sum_{w_\varepsilon=0} \frac{\left[\frac{2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1}{2} \right] m_{k_\varepsilon} + w_\varepsilon + 1}{2} \frac{n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - 1}{2} (n_{k_\varepsilon} - w_\varepsilon - 1)!}{w_\varepsilon! (2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon} - 1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}} \frac{n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1}{2} \Gamma(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - \frac{1}{2}) \cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!} \quad (1089) \quad 457$$

i uvrstimo (1085) i (1089) u (1078). Ako označimo

$$\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}} \frac{n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1}{2} \Gamma(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - \frac{1}{2}) \cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!} \quad (1090) \quad 458$$

to dobijemo mjesto (1078), u kojem smo ψ nadomjestili integralom (1080), izraz

$$t^{\frac{M}{2}} P_0 \frac{(-1)^{\frac{M}{4} + \frac{N}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}} c^{\frac{M}{2}} \frac{M}{2}! (r-\gamma-2)!} \prod + \text{const. } t^{\frac{M}{2}} P_1 + \dots \quad (1091) \quad 459$$

Drugi slučaj. Neka je

$$M = 4n+2 \quad (1092) \quad 460$$

$$N - 2 \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon}) - \gamma + h = 2r+1. \quad (1093) \quad 461$$

Služeći se ovaj puta formulom (523) dolazimo sasvim analognim načinom do formule

$$t^{\frac{M}{2}} P_0 \frac{(-1)^{\frac{M-2}{4} + \frac{N-1}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}} c^{\frac{M}{2}} \frac{M}{2}! (r-\gamma-2)!} \prod + \text{const. } t^{\frac{M}{2}} P_1 + \dots \quad (1094) \quad 462$$

Treći slučaj. Neka je

$$M = 4n \quad (1095) \quad 463$$

$$N - 2 \sum_{\varepsilon=1}^r w_{\varepsilon} = \sum_{\varepsilon=1}^r (2n_{k_{\varepsilon}} - 2w_{\varepsilon} - m_{k_{\varepsilon}}) - \gamma + h = 2r+1 \quad (1096) \quad 464$$

Služimo se formulom (621) i računamo ovaj puta koeficijent od P_1 , pa dolazimo do oblika

$$t^{\frac{M}{2}+1} P_1 \frac{(-1)^{\frac{M}{4} + \frac{N-1}{2} + 1} M!}{2^{\frac{M}{2}+1} c^{\frac{M}{2}-N} (\frac{M}{2})! (r-\gamma-2)!} \prod + \text{const. } t^{\frac{M}{2}-1} P_0 + \dots \quad (1097) \quad 465$$

Četvrti slučaj. Neka je

$$M = 4n+2 \quad (1098) \quad 466$$

$$N - 2 \sum_{\varepsilon=1}^r w_{\varepsilon} = \sum_{\varepsilon=1}^r (2n_{k_{\varepsilon}} - 2w_{\varepsilon} - m_{k_{\varepsilon}}) - \gamma + h = 2r \quad (1099) \quad 467$$

Služimo se formulom (622) i dolazimo do oblika

$$t^{\frac{M}{2}+1} P_1 \frac{(-1)^{\frac{M}{4} + \frac{N-1}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}+1} c^{\frac{M}{2}-N} (\frac{M}{2})! (r-\gamma-2)!} \prod + \text{const. } t^{\frac{M}{2}-1} P_0 + \dots \quad (1100) \quad 468$$

Prvi i drugi slučaj mogu se sažeti u jedan oblik. U oba slučaja je $\frac{M}{2} + N$ tak broj, t.j.

$$\frac{M}{2} + N \equiv 0 \pmod{2} \quad (1101) \quad 469$$

a ta zajednička pretpostavka može biti ostvarena samo prema (1082), (1083) prvog slučaja ili prema (1092), (1093) drugog slučaja. Vrijede li (1082), (1083), to je očito

$$\frac{M}{4} + \frac{N}{2} \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N}{2} \pmod{2} \quad (1102) \quad 470$$

a vrijede li ⁴⁶⁰ (1092), ⁴⁶¹ (1093), to je

$$\frac{M-2}{4} + \frac{N-1}{2} \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N}{2} \pmod{2} \quad (1103) \quad 471$$

tako da ⁴⁵⁹ (1091) i ⁴⁶² (1094) možemo predočiti u zajedničkom obliku

$$t^{\frac{M}{2}} P_0 \frac{(-1)^{-\frac{M}{4} + \frac{N}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}} c^{\frac{M}{2} - N} \left(\frac{M}{2}\right)! (r-\gamma-2)!} \prod \quad + \text{const. } t^{\frac{M}{2}} P_1 + \dots \quad (1104) \quad 472$$

(Ne tvrdi se, da je konstanta pred ⁴⁵⁹ $t^{\frac{M}{2}} P_1$ u ⁴⁶² (1091) i (1094) ista. Ta konstanta nas dalje ne zanima).

Treći i četvrti slučaj imaju zajedničku pretpostavku, da je $\frac{M}{2} + N$ lih broj, t.j.

$$\frac{M}{2} + N \equiv 1 \pmod{2} \quad (1105) \quad 473$$

a ta pretpostavka može biti ostvarena samo prema ⁴⁶³ (1095), ⁴⁶⁴ (1096) trećeg slučaja ili prema ⁴⁶⁶ (1098), ⁴⁶⁷ (1099) četvrtog slučaja. Ako vrijede ⁴⁶³ (1095), ⁴⁶⁴ (1096), dobijemo

$$\frac{M}{4} + \frac{N-1}{2} + 1 \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2} \pmod{2} \quad (1106) \quad 474$$

a ako vrijede ⁴⁶⁶ (1098), ⁴⁶⁷ (1099), slijedi

$$\frac{M}{4} + \frac{N-1}{2} \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2} \pmod{2} \quad (1107) \quad 475$$

tako da možemo ⁴⁶⁵ (1097), ⁴⁶⁸ (1100) predočiti u zajedničkom obliku

$$t^{\frac{M}{2} + 1} P_1 \frac{(-1)^{-\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2} + 1} c^{\frac{M}{2} - N} \left(\frac{M}{2}\right)! (r-\gamma-2)!} \prod \quad + \text{const. } t^{\frac{M}{2} - 1} P_0 + \dots \quad (1108) \quad 476$$

Za kasnije svrhe treba još pretresti predznak produkta ⁴⁵⁸ (1090).

Neka je za stanovite vrijednosti od ϵ , na pr. za $\epsilon = 1, \dots, \delta$

$$n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - 1 \geq 0 \quad (\epsilon = 1, \dots, \delta), \quad (1109) \quad 477$$

dok je za sve ostale vrijednosti od ϵ

$$n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - 1 < 0 \quad (\epsilon = \delta + 1, \dots, \gamma). \quad (1110) \quad 479$$

Razdvajamo onda produkt (1090):

$$\prod = \prod_1 \prod_2 \quad (1111) \quad 479$$

$$\prod_1 = \prod_{\epsilon=1}^{\delta} \frac{(-1)^{n_{k_\epsilon}} 2^{n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - 1} \Gamma(n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - \frac{1}{2}) \cdot m_{k_\epsilon}!}{\sqrt{\pi} (2n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - 1)!} \quad (1112) \quad 480$$

$$\prod_2 = \prod_{\epsilon=\delta+1}^{\gamma} \frac{(-1)^{n_{k_\epsilon}} 2^{n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - 1} \Gamma(n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - \frac{1}{2}) \cdot m_{k_\epsilon}!}{\sqrt{\pi} (2n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - 1)!} \quad (1113) \quad 481$$

S obzirom na (1109) i (204) možemo pisati

$$\prod_1 = \prod_{\epsilon=1}^{\delta} \frac{(-1)^{n_{k_\epsilon}} (2n_{k_\epsilon} - 2m_{k_\epsilon} - 2)! m_{k_\epsilon}!}{2^{n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - 1} (2n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - 1)! (n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - 1)!} \quad (1114) \quad 482$$

a obzirom na (1110) i (205)

$$\prod_2 = \prod_{\epsilon=\delta+1}^{\gamma} \frac{(-1)^{m_{k_\epsilon} + 1} 2^{m_{k_\epsilon} - n_{k_\epsilon} + 1} (m_{k_\epsilon} - n_{k_\epsilon} + 1)! m_{k_\epsilon}!}{(2m_{k_\epsilon} - 2n_{k_\epsilon} + 2)! (2n_{k_\epsilon} - m_{k_\epsilon} - 1)!} \quad (1115) \quad 483$$

Prema tome je

$$\operatorname{sgn} \prod_1 = (-1)^{\sum_{\varepsilon=1}^S n_{k\varepsilon}} \quad (1116) \quad 484$$

$$\operatorname{sgn} \prod_2 = (-1)^{y-S + \sum_{\varepsilon=S+1}^X m_{k\varepsilon}} \quad (1117) \quad 485$$

iz čega proizlazi predznak čitavog produkta.

Prelazimo sada na dokaz, da su uvjeti stavka III.11. potrebni, t.j. da u svim slučajevima, koji tim uvjetima nisu obuhvaćeni, kanonički oblik sadrži barem jedan integral.

a/. Pretpostavimo, da vrijede uvjeti C/ stavka IV.11., samo s tom razlikom, da nisu svi parametri x_1, \dots, x_q stavljeni jednako nuli, kako bi prema (1027) trebalo biti, već da je jedan od tih parametara, na pr. x_1 , povoljan, dok ćemo sve druge parametre uključivo x_{q+1}, \dots, x_r staviti jednako nuli.

Neka dakle vrijedi, da je $q > 1$ lih, neka vrijedi (1026) i (1028), a (1027) neka je nadomješten sa

$$x_2 = x_3 = \dots = x_r = 0 \quad (1118) \quad 486$$

Budući da je x_1 jedini parametar, koji je stavljen jednako nuli, to s obzirom na (779), (780), (781) kao gornje granice integrala (1016), (1017) u kanoničkom obliku dolaze u obzir samo t i $t-x_1$. Provest ćemo dokaz, da u kanoničkom obliku ima sigurno integral s gornjom granicom t , t.j. sa $a=0$, $b=x_1$.

Takav integral se očito može pojaviti samo u članovima od (770), (771), gdje je x_1 sadržan medju $x_{s_1}, \dots, x_{s_{r-y}}$. No i x_2, \dots, x_q moraju tu biti sadržani, jer inače dotični član zbog (1026) i (982) otpada, kad se dotični parametar stavi jednako nuli, odnosno uopće nema

toga člana, ako je dotični donji indeks jednak nuli, kako se razabire iz (770). Neka je dakle, recimo,

$$x_{s_1} = x_1, \quad x_{s_2} = x_2, \quad \dots, \quad x_{s_q} = x_q. \quad (1119) \quad 487$$

Pretpostavimo ponajprije, da je

$$r - \gamma > q \quad (1120) \quad 488$$

t.j., da medju x_{s_δ} ($\delta = 1, \dots, r - \gamma$) osim x_1, \dots, x_q ima još jedan ili više parametara $x_{s_{q+1}}, \dots, x_{s_{r-\gamma}}$. Označimo prema tome

$$r - \gamma - q = \chi \geq 1. \quad (1121) \quad 489$$

Izvršimo na integral u drugom članu vitičaste zagrade u (770), najprije operacije $S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta}$ ($\delta = 2, \dots, q$) i stavimo

dotične parametre jednako nuli. Budući da je $q \geq 3$, $r - \gamma > q$, $0 \leq v_\delta \leq m_{s_\delta}$, a vrijedi (1026), to se lako vidi, da je uvjet (1007), u kojem sad φ poprima vrijednosti od $\underline{2}$ do \underline{q} , sigurno ispunjen, tako da dobijemo izraz (1008), gdje φ i $\underline{\delta}$ poprimaju vrijednosti od $\underline{2}$ do \underline{q} , a \underline{X}_H je nadomješten sa

$$\bar{X}_{2,q} = (\bar{X}_2)_{x_2 = \dots = x_q = 0} = x_{s_{q+1}} + \dots + x_{s_{r-\gamma}} \quad (1122) \quad 490$$

t.j. dobijemo integral oblika

$$\int_{\bar{X}_{2,q}}^{t - \bar{X}_1} (y - \bar{X}_{2,q})^{r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi)} \Lambda_0(c\sqrt{(t - \bar{X}_1)^2 - y^2}) dy. \quad (1123) \quad 491$$

Ako na ovaj integral primijenimo operaciju $S_{x_1}^{m_1 - n_1 - v_1}$ to dobijemo

u analogiji s formulom ⁴⁷⁴ (1057) odnosno ⁴³⁴ (1067) te ⁴³⁵ (1068) same integrale oblika

$$\int_{x_1 + \bar{X}_{2,q}}^{t - X_1} (y - \bar{X}_{2,q})^R \Lambda_0(c \sqrt{(t - X_1)^2 - y^2}) dy \quad (1124) \quad 492$$

Treba pri tom svagdje eksponentat $r - \gamma - 2$ nadomjestiti eksponentom u (1125), tako da je najveća vrijednost indeksa sumacije s u prvoj sumi

(1068) ⁴³⁵ $r - \gamma - 3 + 2 \sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi)$, a u drugoj sumi eksponentat od

$y - \bar{X}_{2,q}$ glasi $r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi) + 2s$. Očito je eksponentat

R najviši u drugoj sumi za $v_1 = v_2 = \dots = v_q$, $s = m_1 - n_1$, dakle

$$R_{\max} = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi) + 2(m_1 - n_1) = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi) \quad (1125) \quad 493$$

Primijenimo sad na integrale oblika ⁴⁹² (1124) operatore $S_{x_\delta}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_{s_\delta}}$ ($\delta = q+1, \dots, r - \gamma$) i stavimo dotične parametre jednako nuli. ³⁹⁵ ¹³⁹ ⁴⁹² Obzirom na (1028), a u smislu (769) stavimo

$$S_{x_\delta}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_{s_\delta}} = D_{x_\delta}^{-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_{s_\delta}} \quad (1126) \quad 494$$

i nadomjestimo ih prema razlaganjima ~~III.10. na str. 203~~ sa

$$\frac{2^{-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_{s_\delta}} (-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_{s_\delta})!}{(-2m_{s_\delta} + 2n_{s_\delta} + 2v_{s_\delta})!} \left(\frac{\partial}{\partial x_{s_\delta}} \right)^{-2m_{s_\delta} + 2n_{s_\delta} + 2v_{s_\delta}} \quad (1127) \quad 495$$

Formula ³⁶⁴ (1003) nije neposredno primjenljiva, jer donja granica integrala ⁴⁹² (1124) nije $\bar{X}_{2,q}$, već $x_1 + \bar{X}_{2,q}$, tako da diferencijacije po donjoj granici integrala daju članove, koji ne otpadaju, kao što

je to u slučaju formule ³⁶⁹ (1005). Ipak ti dodatni članovi ne sadržavaju više integrala, i jasno je, da će i sada uvjet analogan sa ³⁷⁰ (1004) biti dovoljan, da dobijemo izraz bez integrala. Taj bi uvjet glasio

$$R < 2 \sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta) \quad (1128) \quad 496$$

Prema ⁴⁹³ (1125) je

$$R \leq R_{\max} = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi) \quad (1129) \quad 497$$

Dalje je

$$\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (-m_{s_\delta} + n_{s_\delta}) \leq \sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta) \quad (1130) \quad 498$$

Obzirom na ³⁹⁵ (1028) i ⁴⁸⁹ (1121) vrijedi

$$\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (-m_{s_\delta} + n_{s_\delta}) \geq \chi \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi) \right] \quad (1131) \quad 499$$

dakle

$$\begin{aligned} 2 \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi) + 2 \sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (m_{s_\delta} - n_{s_\delta}) &\leq -\chi(q+1) - 2(\chi-1) \sum_{\varphi=1}^q (m_\varphi - n_\varphi) \leq \\ &\leq -\chi(q+1) = -(r-\gamma-q)(q+1) \quad (1132) \quad 500 \end{aligned}$$

Razmotrimo li parabolu

$$y = -(r-\gamma-x)(x+1) \quad (1133) \quad 501$$

i stavimo

$$y = r-\gamma-2 \quad (1134) \quad 502$$

to slijedi

$$x_1 = \frac{r-\gamma-1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2}{r-\gamma-1}} \right] \quad (1135) \quad 503$$

$$x_2 = \frac{r-\gamma-1}{2} \left[1 - \sqrt{1 + \frac{2}{r-\gamma-1}} \right] \quad (1136) \quad 504$$

Budući da je q lih broj veći od jedan, a ⁴⁴⁵ obzirom na (1077), slijedi ^{blazi}

$$3 \leq q \leq r-\gamma-1 \quad (1137) \quad 505$$

dakle svakako

$$r-\gamma-1 > 0 \quad (1138) \quad 506$$

Jasno je, da ~~je~~ za

$$x_1 > x > x_2 \quad \text{vrijedi} \quad (1139) \quad 507$$

$$y < r-\gamma-2 \quad (1140) \quad 508$$

Obzirom na ⁵⁰⁶ (1138) vrijedi prema ⁵⁰³ (1135), ⁵⁰⁴ (1136)

$$x_1 > r-\gamma-1 \quad (1141) \quad 509$$

$$x_2 < 0 \quad (1142) \quad 510$$

dakle možemo na temelju ⁵⁰⁷ (1139) i ⁵⁰⁵ (1137) pisati

$$x_1 > r-\gamma-1 \geq q \geq 3 > 0 > x_2 \quad (1143) \quad 511$$

pa je stoga prema ⁵⁰¹ (1133) i ⁵⁰² (1140) za naš q

$$-(r-\gamma-q)(q+1) < r-\gamma-2 \quad (1144) \quad 512$$

Prema ⁴⁹⁷ (1129), ⁵⁰⁰ (1132), ⁵¹² (1144) i ⁴⁹⁸ (1130) vrijedi dakle

$$R \leq R_{\max} = r-\gamma-2 + 2 \sum_{\varphi=1}^q (m_{\varphi} - n_{\varphi}) < 2 \sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (-m_{s_{\delta}} + n_{s_{\delta}}) \leq 2 \sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma} (-m_{s_{\delta}} + n_{s_{\delta}} + v_{\delta}), \quad (1145) \quad 513$$

a to je traženi uvjet ⁴⁹⁶ (1128). Slučaj $r-\gamma > q$ dakle ne daje integra-
la za kanonički oblik. Razmatranje naravno vrijedi i za prvi član

vitičaste zagrade u ^{140 141} (770), (771), ako stavimo $\gamma=0$.

Pretpostavimo dakle sada

$$r-\gamma = q \geq 3. \quad (1146) \quad 574$$

($r-\gamma < q$ ne dolazi u obzir, jer bi onda neki od parametara x_1, \dots, x_q bili medju $x_{k_1}, \dots, x_{k_\gamma}$, a taj slučaj smo već prije odbacili).

⁵⁷⁴ (1146) određuje jednoznačno γ , q određuje i kombinaciju $(s_1, \dots, s_{r-\gamma})$, jer u njoj moraju biti sadržani brojevi $1, \dots, q$, t.j. ta kombinacija je identična s kombinacijom $(1, \dots, q)$.

Jasno je, da je prema ⁴⁹⁰ (1122) sada

$$\bar{x}_{2,q} = 0. \quad (1147) \quad 575$$

Integrali ⁴⁹² (1124), koji potječu od članova druge sume ⁴³⁵ (1068), u kojoj je, kako smo spomenuli, $r-\gamma-2$ nadomješten sa $r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi)$, imaju svi lihe eksponente R , jer je zbog ⁵⁷⁴ (1146) sa q i $r-\gamma$ lih. Ti integrali prema ^{III(254)} (470), ^{III 348} (534) ne prienose integrala za kanonički oblik. Medju članovima prve sume ⁴³⁵ (1068) ima naprotiv i potencijâ uz odabrane v_φ s takim eksponentima. Najveća vrijednost eksponenta \underline{s} / \sqrt{e} , kako smo spomenuli, $r-\gamma-3+2\sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi - v_\varphi)$, a ta je taka, jer je $r-\gamma$ lih, i ² \underline{s} prima svoju najveću vrijednost za $v_2 = \dots = v_q = 0$, t.j. imamo za taki \underline{R}

$$R_{\text{tak max}} = M = r-\gamma-3+2\sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi) = q-3+2\sum_{\varphi=2}^q (m_\varphi - n_\varphi) \equiv 0. \quad (1148) \quad 576$$

Na dotični integral treba u smislu ³⁵³ (987) još izvršiti stanovite diferencijacije po t , tako da se radi o izrazu poput ⁴⁴⁶ (1078). Prema ⁴³² (1104) odnosno ⁴⁷⁶ (1108) dobijemo dakle za kanonički oblik ili $t^{\frac{M}{2}} P_0$ ili $t^{\frac{M}{2}+1} P_1$ s koeficijentom, koji je očitno od nule različit,

(jer je i faktor, koji potječe iz ⁴³⁵(1068) od nule različit), uz eventualno još druge članove s nižim potencijama od t . Integrali ⁴⁹²(1124) s manjim takvim eksponentom R , dakle sa

$$R \leq M-2 \quad (1149) \quad 577$$

daju prema ⁴⁷²(1104) i ⁴⁷⁶(1108) članove s najvišom potencijom od t oblika $t^{\frac{M}{2}-1} P_0$ odnosno $t^{\frac{M}{2}} P_1$. Članovi $t^{\frac{M}{2}} P_0$ ili $t^{\frac{M}{2}+1} P_1$, koje nam je dao integral s eksponentom M , sigurno su dakle jedini te vrsti, pa budući da im je koeficijent od nule različit, kako smo spomenuli, to je time dokaz proveden, da u kanoničkom obliku ima barem jedan integral. To vrijedi pogotovo onda, ako koji od parametara x_2, \dots, x_r nisu stavljeni jednako nuli.

b/ Pretpostavimo, da je

$$m_k \geq n_k \quad (k=1, \dots, q) \quad (1150) \quad 578$$

gdje je q lih broj, za koji ovaj put dopuštamo i vrijednost $q=1$. (Za nekoje ili sve vrijednosti $1, \dots, q$ može vrijediti dapače $m_k \geq 2n_k$). Neka dalje postoji barem jedna vrijednost $k = k_f > q$, za koju je

$$m_{k_f} - n_{k_f} > - \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{k=1}^q (m_k - n_k) \right] \quad (1151) \quad 579$$

a najviše jedna vrijednost $k = k_g > q$, za koju je

$$m_{k_g} \geq 2n_{k_g} \quad (1152) \quad 520$$

(Medju vrijednostima $k = q+1, \dots, r$ može biti takvih, za koje je $m_k \geq n_k$. Ako ima takva vrijednost, ili ako za jednu od njih vrijedi dapače ⁵²⁰(1152), tada je tom vrijednošću već zadovoljen uvjet ⁷⁹(1151)). Konačno neka budu svi parametri stavljeni jednako nuli.

Dokazat ćemo, da u kanoničkom obliku ima integrala.

Uzmimo opet u razmatranje drugi izraz vitičaste zagrade u (770), (771). Jasno je najprije, da među s_1, \dots, s_{r-y} moraju biti sadržani svi oni indeksi k , za koje je $m_k \geq 2n_k$, jer bi inače članovi za $x_k=0$ u smislu (981) otpali, ako je $n_k > 0$, jer za njih vrijedi (982), a uopće ih nema, ako je $n_k=0$, kako se vidi (770). Uzet ćemo povrh toga među s_1, \dots, s_{r-y} još i sve one indekse k , za koje je $m_k \geq n_k$, ali $m_k < 2n_k$.

Budući da su svi parametri stavljeni jednako nuli, to će primjena operatorâ $S_{x_{s_\varphi}}^{-m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi} - v_\varphi}$ prema (994) dati integral oblika

$$\int_0^t (r-y-2+2 \sum_{\varphi=1}^{r-y} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi} - v_\varphi)) \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (1153) \quad 521$$

na koji u smislu (1078) treba još izvršiti stanovite diferencijacije po t .

Ako je $r-y$ tak broj, bit će eksponent u tom integralu tak i budući da smo za s_1, \dots, s_{r-y} odabrali sve one vrijednosti, za koje je $m_{s_\varphi} \geq n_{s_\varphi}$, to je za $v_1 = \dots = v_{r-y} = 0$ ovo i najveći tak eksponent, koji se može pojaviti. U smislu (1104), (1108) kanonički će oblik dakle sadržavati $t^{\frac{M}{2}} P_0$ ili $t^{\frac{M}{2}+1} P_1$ sa

$$M = r-y-2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-y} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) \quad (1154) \quad 522$$

Ako je naprotiv $r-y$ lih broj, eksponent će biti lih i članovi (1153) dakle prema (470), (534) ne pridonose integrala za kanonički oblik. U tom slučaju moramo potražiti članove s najvećim takim eksponentom

pod znakom integracije. Za to moramo broj $r-\gamma$ ili povećati ili smanjiti. Treba dakle iz indeksa k_1, \dots, k_γ preseliti još neke indekse medju $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, ili iz ovih nekoje indekse preseliti medju k_1, \dots, k_γ . Preseljenjem nekog indeksa k_ε u $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, za koji je $m_{k_\varepsilon} < n_{k_\varepsilon}$, povećava se $r-\gamma$ za 1, tako da se eksponent smanjuje za $2(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - 1 \geq 1$, dok se preseljenjem nekog indeksa s_δ , za koji je $m_{s_\delta} \geq n_{s_\delta}$, medju k_1, \dots, k_γ eksponent smanjuje za $2(m_{s_\delta} - n_{s_\delta}) + 1 \geq 1$. Budući da želimo smanjiti eksponent za što manje, svakako ćemo izvesti samo jedno preseljenje, čime će se naš lihi eksponent smanjiti za lih broj, tako da će postati tak. Pri tom smo naravno sve v_0 stavili jednako nuli, jer konačni takvi eksponent treba da bude što veći.

Ako se prebacuje jedan indeks iz k_1, \dots, k_γ u $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, zvat ćemo to preseljenjem prve vrsti. Pri tom se γ promijenio u γ_1 , tako da je

$$\gamma_1 = \gamma - 1. \quad (1155) \quad 523$$

Prebacuje li se indeks iz $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$ u k_1, \dots, k_γ , neka se to zove preseljenje druge vrsti, a γ se pri tom mijenja u γ_2 , tako da je

$$\gamma_2 = \gamma + 1. \quad (1156) \quad 524$$

Treba sada dokazati:

- 1/ Da uvijek postoji barem jedna mogućnost preseljenja, koja vodi do integrala, čiji je koeficijent od nule različit.
- 2/ Da su u slučaju, kad ima više mogućnosti preseljenja, koje vode do istog najvećeg takog eksponenta, koeficijenti dotičnih istovrsnih integrala za kanonički oblik svi istog predznaka, pa se ne mogu međusobno ukinuti.

Ad 1/. Neka ima osim ⁵¹⁸ (1150) još daljih indeksa, za koje je $m_k \geq n_k$, koje smo, prema prije rečenom, uvrstili medju $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$.

Mora ih biti tak broj, dakle barem dva, jer bi inače zbog lihog q ispao $r-\gamma$ tak, a taj slučaj smo već uzeli u obzir. Od tih dvaju ili više indeksa može prema pretpostavkama najviše za jedan vrijediti $m_k \geq 2n_k$, dakle ima i barem jedan, za koji je $m_k \geq n_k$, ali $m_k < 2n_k$. Taj se posljednji indeks može preseliti među k_1, \dots, k_γ , a da dotični članovi onda ne otpadnu. Eksponent poslije preseljenja je

$$\bar{M} = r-\gamma_2 - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma_2} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}), \quad (1157) \quad 525$$

koji sigurno nije negativan, jer je $m_{s_\varphi} \geq n_{s_\varphi}$ za sve φ , pa budući da ima barem jedan indeks ⁵¹⁸ (1150) (jer je $q \geq 1$), a barem je jedan dalji, koji nije sadržan u ⁵¹⁸ (1150), ali je za nj $m_k \geq n_k$, preostao među $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, to je ⁵¹⁸ $r-\gamma_2 \geq 2$. To preseljenje druge vrsti dakle zaista vodi do člana ⁵¹⁸ (1153), koji može pridonijeti integrala za kanonički oblik.

Ako naprotiv osim ⁵¹⁸ (1150) nema nijednog indeksa, za koji je $m_k \geq n_k$, to ipak prema pretpostavkama ima barem jedan indeks k_f , za koji vrijedi ⁵¹⁹ (1151). Taj se nalazi među k_1, \dots, k_γ , pa ćemo ga preseliti među $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$. Budući da je sad $r-\gamma = q$, to će biti $r-\gamma_1 = q+1$, a eksponent će postati

$$\begin{aligned} \bar{M} &= r-\gamma_1 - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) + 2(m_{k_f} - n_{k_f}) = \\ &= q-1 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) + 2(m_{k_f} - n_{k_f}). \end{aligned} \quad (1158) \quad 526$$

Prema ⁵¹⁹ (1151) vrijedi

$$m_{k_f} - n_{k_f} \geq - \left[\frac{q+1}{2} + \sum_{k=1}^q (m_k - n_k) \right] + 1 \quad (1159) \quad 527$$

ili

$$2(m_{k_f} - n_{k_f}) \geq -q+1 - 2 \sum_{k=1}^q (m_k - n_k) / \quad (1160) \text{ } 528$$

dakle je

$$N \geq q-1 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) - q + 1 - 2 \sum_{k=1}^q (m_k - n_k) = 0 \quad (1161) \text{ } 529$$

Ni ovdje dakle eksponent ne može biti negativan, t.j. ovo preseljenje prve vrsti daje član oblika (1153)⁵²¹, koji može pridonijeti integrala za kanonički oblik. Time je pokazano, da uvijek ima barem jedno preseljenje, koje vodi do cilja.

Ad 2/. Kako smo rekli, medju $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$ su stavljeni svi indeksi k , za koje je $m_k \geq n_k$, (medju kojima se nalaze i oni, za koje je dapače $m_k \geq 2n_k$), dok se svi drugi indeksi nalaze medju k_1, \dots, k_γ . Za preseljenje prve vrsti dolaze u obzir oni od indeksa k izmedju k_1, \dots, k_γ , za koje je izraz $2(n_k - m_k) - 1$ što manji, jer se za tu vrijednost smanjuje eksponent pod integralom (1153)⁵²¹. Za preseljenje druge vrsti dolaze u obzir indeksi s izmedju $s_1, \dots, s_{r-\gamma}$, za koje je izraz $2(m_s - n_s) + 1$ što manji, jer se za toliko smanjuje rečeni eksponent, a osim toga mora biti $m_s < 2n_s$, jer inače poslije preseljenja svi članovi otpadaju, kako smo spomenuli.

Neka je μ_1 minimum izraza $2(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - 1$ ($\varepsilon = 1, \dots, \gamma$), a μ_2 minimum izraza $2(m_{s_\delta} - n_{s_\delta}) + 1$ ($\delta = 1, \dots, r-\gamma$), za koje je $m_{s_\delta} < 2n_{s_\delta}$. Ako je $\mu_1 < \mu_2$, dolaze u obzir samo preseljenja prve vrsti, ako je $\mu_1 > \mu_2$, samo preseljenja druge vrsti, a ako je $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ dolaze u obzir obje vrsti preseljenja. Pretpostavit ćemo taj najopćenitiji slučaj. Neka izraz $2(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - 1$ poprimi taj

minimum za nekoliko vrijednosti indeksa k_ε , na pr. za $k_\varepsilon = a$, $k_\varepsilon = b$ i t.d., t.j.

$$2(n_a - m_a) - 1 = 2(n_b - m_b) - 1 = \dots = \mu. \quad (1162) \quad 530$$

Izraz $2(m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) + 1$ neka ~~oprim~~ primi taj minimum za neke vrijednosti $s_\varphi = \alpha$, $s_\varphi = \beta$ i t.d., za koje je $m_{s_\varphi} < 2n_{s_\varphi}$, t.j.

$$2(m_\alpha - n_\alpha) + 1 = 2(m_\beta - n_\beta) + 1 = \dots = \mu. \quad (1163) \quad 531$$

Sva preseljenja ~~prve vrste~~ pojedinih indeksa a, b, \dots i α, β, \dots dovode do istog najvećeg takog eksponenta

$$M = r - \gamma - 2 + 2 \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} (m_{s_\varphi} - n_{s_\varphi}) - \mu. \quad (1164) \quad 532$$

Pitanje je ~~ponajprije~~, da li će za integrale kanoničkog oblika, koji su pomnoženi najvećom potencijom od t , biti primjenljiva formula (1104) ili (1108). Označimo li u smislu (1084), (1079) sa N_1 i h_1 dotične izraze poslije preseljenja prve vrste indeksa a , a sa N_2 i h_2 te izraze poslije preseljenja druge vrste indeksa α , i analogno dotične veličine γ_1 i γ_2 prema (1155) i (1156), to je očito s obzirom na $v_\varphi = 0$

$$h_1 = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} + m_a \quad (1165) \quad 533$$

$$h_2 = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} - m_\alpha \quad (1166) \quad 534$$

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - (2n_a - m_a) - \gamma_1 + h_1 = \\ &= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) - (2n_a - m_a) - (\gamma - 1) + \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} + m_a = \\ &= N + 2(m_a - n_a) + 1 \end{aligned} \quad (1167) \quad 535$$

$$\begin{aligned}
 N_2 &= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) + (2n_\alpha - m_\alpha) - \gamma_2 + h_2 = \\
 &= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon}) + 2n_\alpha - m_\alpha - (\gamma+1) + \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} - m_\alpha = \\
 &= N - 2(m_\alpha - n_\alpha) - 1
 \end{aligned}
 \tag{1168}$$

dakle

$$\frac{M}{2} + N_1 - (\frac{M}{2} + N_2) = N_1 - N_2 = 2(m_\alpha - n_\alpha + m_\alpha - n_\alpha) + 2 \equiv 0 \pmod{2}
 \tag{1169}$$

pa stoga

$$\frac{M}{2} + N_1 \equiv \frac{M}{2} + N_2 \pmod{2}
 \tag{1170}$$

Prema tome vrijede ili za sva preseljenja (1101) i (1104) ili za sva preseljenja (1105) i (1108).

Treba sada pokazati, da je predznak članova s integralom $\frac{M}{2} P_0$ prema (1104) odnosno s integralom $\frac{M}{2} + 1 P_1$ prema (1108) poslije svih pojedinih preseljenja isti, tako da se ti članovi sigurno ne mogu ukidati. Taj se predznak sastoji od ovih faktora:

a) Faktor, koji potječe iz formule (994), iz koje smo dobili integrale oblika (1153). U toj formuli (994) treba naravno staviti $h = r - \gamma$. Prema (204) vrijedi za

$$m_{s_\gamma} - n_{s_\gamma} \geq 0
 \tag{1171}$$

$$\Gamma(m_{s_\gamma} - n_{s_\gamma} + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi} (2m_{s_\gamma} - 2n_{s_\gamma})!}{2^{2m_{s_\gamma} - 2n_{s_\gamma}} (m_{s_\gamma} - n_{s_\gamma})!}
 \tag{1172}$$

a za

$$m_\alpha - n_\alpha < 0
 \tag{1172}$$

prema (205)

$$\Gamma(m_\alpha - n_\alpha + \frac{1}{2}) = \frac{(-1)^{n_\alpha - m_\alpha} \sqrt{\pi} 2^{2n_\alpha - 2m_\alpha} (n_\alpha - m_\alpha)!}{(2n_\alpha - 2m_\alpha)!}
 \tag{1173}$$

Prema tome na temelju formule ³⁶⁰ (994) predznak za slučaj preseljenja prve vrsti, recimo indeksa a , ima oblik $(-1)^{E_1(a)}$, gdje je

$$E_1(a) = \sum_{\beta=1}^{r-\gamma} n_{s_\beta} + n_a + (n_a - m_a) = \sum_{\beta=1}^{r-\gamma} n_{s_\beta} + 2n_a - m_a \quad (1174) \quad 573$$

dok je u slučaju preseljenja druge vrsti, recimo indeksa α , taj eksponent od (-1)

$$E_1(\alpha) = \sum_{\beta=1}^{r-\gamma} n_{s_\beta} - n_\alpha \quad (1175) \quad 574$$

⁴⁷⁶ 3) Faktor, koji se pojavljuje u formulama ⁴⁷² (1104) odnosno (1108). Prema ⁴⁷² (1104) bio bi eksponent od (-1) poslije preseljenja prve vrsti indeksa a s obzirom na ⁵³⁵ (1167)

$$E_2(a) = -\frac{M}{4} + \frac{N_1}{2} = -\frac{M}{4} + \frac{N}{2} + m_a - n_a + \frac{1}{2} \quad (1176) \quad 575$$

a poslije preseljenja druge vrsti indeksa α s obzirom na ⁵³⁶ (1168)

$$E_2(\alpha) = -\frac{M}{4} + \frac{N_2}{2} = -\frac{M}{4} + \frac{N}{2} - m_\alpha + n_\alpha - \frac{1}{2} \quad (1177) \quad 576$$

Za slučaj⁴⁷⁶ $\frac{1}{4}$, da se primjenjuje ⁴⁷⁶ (1108), glasile bi te formule analogno

$$E_2(a) = -\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2} + m_a - n_a + \frac{1}{2} \quad (1178) \quad 577$$

$$E_2(\alpha) = -\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2} - m_\alpha + n_\alpha - \frac{1}{2} \quad (1179) \quad 578$$

Razumije se, da su eksponenti ⁵⁴⁵ (1176), ⁵⁴⁶ (1177) cijeli brojevi, ako za $\frac{M}{2} + N_1$ i $\frac{M}{2} + N_2$ vrijedi uvjet ⁵⁴⁹ (1101), a eksponenti ⁵⁷⁷ (1178), ⁵⁷⁸ (1179) su cijeli, ako analogno vrijedi uvjet ⁵⁷³ (1105).

γ) Faktor ⁴⁸⁴(1116). Poslije preseljenja prve vrsti vrijedi za sve preostale indekse k_ε uvjet ⁴⁷⁷(1109). Tih indeksa ima $\delta = \gamma_1 = \gamma - 1$, t.j. od prvotnih γ indeksa otpao je indeks a , tako da je eksponent od (-1)

$$E_3(a) = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - n_a. \quad (1180) \quad 579$$

Kod preseljenja druge vrsti pridolazi među indekse k_ε indeks α , za koji ⁴⁷⁷(1109) ne vrijedi, dakle je $\delta = \gamma_2 - 1 = \gamma$ i eksponent od (-1)

$$E_3(\alpha) = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon}. \quad (1181) \quad 580$$

δ) Faktor ⁴⁸⁵(1117). Poslije preseljenja prve vrsti ne vrijedi ni za koji od preostalih k_ε uvjet ⁴⁷⁸(1110), tako da je $\delta = \gamma_1 = \gamma - 1$, dakle eksponent od (-1)

$$E_4(a) = \gamma_1 - \delta + \sum_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma_1} m_{k_\varepsilon} = 0. \quad (1182) \quad 581$$

Poslije preseljenja druge vrsti za jedini indeks α , koji je pridošao među k_ε , vrijedi uvjet ⁴⁷⁸(1110), tako da je $\delta = \gamma_2 - 1 = \gamma$, i eksponent od (-1)

$$E_4(\alpha) = \gamma_2 - \delta + \sum_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma_2} m_{k_\varepsilon} = 1 + m_\alpha. \quad (1183) \quad 582$$

Ako je dakle primjenljiva formula ⁴⁷²(1104), to je ~~sveukupni~~ eksponent od (-1) za slučaj preseljenja prve vrsti prema ⁵⁷³(1174), ⁵⁷⁵(1176), ⁵⁷⁹(1180), ⁵⁸¹(1182)

$$\begin{aligned} E(a) &= E_1(a) + E_2(a) + E_3(a) + E_4(a) = \\ &= \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + 2n_a - m_a - \frac{M}{4} + \frac{N}{2} + m_a - n_a + \frac{1}{2} + \sum_{\varepsilon=1}^{\delta} n_{k_\varepsilon} - n_a + 0 = \\ &= \sum_{\delta=1}^{r-1} n_{s_\delta} + \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - \frac{M}{4} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (1184) \quad 583$$

a za preseljenje druge vrsti prema ¹⁴⁴ (1175), ¹⁴⁶ (1177), ¹⁵⁰ (1181), ¹⁵² (1183)

$$\begin{aligned}
 E(\alpha) &= E_1(\alpha) + E_2(\alpha) + E_3(\alpha) + E_4(\alpha) = \\
 &= \sum_{\xi=1}^{r-y} n_{s_{\xi}} - n_{\alpha} - \frac{M}{4} + \frac{N}{2} - m_{\alpha} + n_{\alpha} - \frac{1}{2} + \sum_{\xi=1}^y n_{k_{\xi}} + 1 + m_{\alpha} = \\
 &= \sum_{\xi=1}^{r-y} n_{s_{\xi}} + \sum_{\xi=1}^y n_{k_{\xi}} - \frac{M}{4} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2}. \quad (1185) \quad 154
 \end{aligned}$$

Kad je primjenljiva formula ¹⁴⁸ (1108) dobijemo analogno, upotrijebivši ¹⁴⁷ (1178) odnosno ¹⁴⁸ (1179) umjesto ¹⁴⁶ (1176) odnosno ¹⁴⁷ (1177), iste formule, samo je N nadomješten sa N+1. Svakako je

$$E(a) = E(\alpha), \quad (1186) \quad 155$$

a budući da izrazi ¹⁴⁸ (1184) i ¹⁵⁴ (1185) uopće ne ovise o tom, da li smo preselili indeks a ili b i t.d., odnosno α ili β i t.d., to je dakle

$$E(a) = E(b) = \dots = E(\alpha) = E(\beta) = \dots \quad (1187) \quad 156$$

t.j. sva dopustiva preseljenja daju članove s istim predznakom.

U slučaju primjenljivosti formule ¹⁴⁷ (1104) osigurali smo dakle, da u kanoničkom obliku postoji član oblika $t^{\frac{M}{2}} p_0$, a

u slučaju primjenljivost formule ¹⁴⁶ (1108), da postoji član oblika $t^{\frac{M}{2}+1} p_1$. Time je proveden dokaz, da pod uvjetima b/ ima integrala u kanoničkom obliku. To vrijedi tim više, ako parametri nisu stavljeni jednako nuli, kako smo to pretpostavili.

c/ Na temelju razlaganja pod a/ (str. 234 do 240) i pod b/ (str. 240 do 249) možemo sad provesti dokaz, da su uvjeti stavka III.11. potrebni, t.j. da u svim slučajevima, gdje nijedan od

triju uvjeta A/,B/,C/ tog stavka nije zadovoljen, ima integrala u kanoničkom obliku. Da dobijemo sve te slučajeve, razlikujemo ove mogućnosti:

1. Nema nijednog indeksa k , za koji je $m_k \geq 2n_k$.
2. Ima jedan indeks, za koji je $m_k \geq 2n_k$.
3. Ima tak broj (veći od nule) takvih indeksa.
4. Ima lih broj veći od jedan takvih indeksa.

Ad 1. Da uvjet A/ stavka ^{IV}III.11. ne bude zadovoljen, mora postojati jedan indeks k_1 , za koji je

$$m_{k_1} \geq n_{k_1} \quad (1188) \quad 557$$

Da uvjet B/ ne bude zadovoljen, mora postojati jedan indeks k_2 , za koji je

$$m_{k_2} - n_{k_2} > - (m_{k_1} - n_{k_1} + 1) \quad (1189) \quad 558$$

Uvjet C/ očito nije zadovoljen. Budući da ⁵⁵⁷(1188), ⁵⁵⁸(1189) odgovaraju pretpostavkama ⁵¹⁸(1150) i ⁵¹⁹(1151) za $q=1$, to je taj slučaj sadržan pod b/. U kanoničkom obliku dakle ima integrala.

Ad 2. Uvjeti A/ i C/ očito nisu zadovoljeni. Budući da iz $m_k \geq 2n_k$ slijedi $m_k \geq n_k$, to postoji indeks, za koji vrijedi ⁵¹⁸(1188), tako da moramo tražiti, da postoji i indeks, koji zadovoljava ⁵¹⁹(1189), jer bi inače bio zadovoljen uvjet B/. Time je slučaj opet sveden na razmatranje pod b/. I ovdje dakle ima integrala u kanoničkom obliku.

Ad 3. Ako je broj indeksa, za koje vrijedi $m_k \geq 2n_k$, jednak $q+1$, gdje je q lih broj, to za q indeksa vrijedi pogotovo ⁵¹⁸(1150), dok $(q+1)$ -ti svakako zadovoljava ⁵²⁰(1152) i ujedno ⁵¹⁹(1151).

I ovaj slučaj se dakle svodi na razmatranja pod b/, dakle ima integrala u kanoničkom obliku.

Ad 4. Uvjeti A/ i B/ očito nisu zadovoljeni. Ako od uvjeta C/ nije zadovoljen (1028)³⁹⁵, onda to znači, da ima jedan indeks, za koji vrijedi (1151)⁵⁷⁹, dok sa (1026)³⁹³ nužno vrijedi i (1150)⁵⁷⁸. Prema razlaganju pod b/ dakle ima integrala u kanoničkom obliku.

Ako je naprotiv (1028)³⁹⁵ zadovoljen, moramo pretpostaviti, da ima barem jedan indeks između $1, \dots, q$, za koji dotični parametar nije stavljen jednako nuli, tako da je prekršen uvjet (1027)³⁹⁴. Ovaj slučaj je raspravljen pod a/, tako da i tu ima integrala u kanoničkom obliku.

Time su sve mogućnosti iscrpljene i dokaz stavka IV III.11. je proveden.

K

12. Nekoliko specijalnih slučajeva integralnih teorema.

Kao primjenu općih razmatranja odredit ćemo kanonički oblik najjednostavnijih integralnih teorema. Odabiremo za to kompozicije dviju Besselovih funkcija, kojima nijedan indeks nije veći od jedan.

Da tekst bude kraći, stavit ćemo iznad znaka jednakosti broj formule, na kojoj se temelji dotična prijetvorba. Slučaj, da je koji parametar stavljen jednako nuli, posebno će se navesti, ako kod toga nastaje neodređen oblik, pa je potreban granični prijelaz.

$$\kappa_{0,0}^{1,1}(t; x_1, x_2) \stackrel{\text{II } 129}{(757)} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} s_{x_1} s_{x_2} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy =$$

$$\stackrel{\text{II } 127}{(305)} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} s_{x_1} s_{x_2} s_{j(x_k)} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) =$$

$$\stackrel{\text{II } 188}{(306)} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{t-x_1-x_2} \phi(y) \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(y+x_1+x_2)^2}) dy =$$

$$\stackrel{\text{II } 194}{(312)} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{x_1+x_2}^t \phi(y-x_1-x_2) \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy$$

(1190) 559

$$\phi(x) \stackrel{\text{II } 189}{(307)} = F_1(x) * F_2(x) * H(x)$$

(1191) 560

$$F_1(x) \stackrel{\text{II } 159}{(278), (309)} \stackrel{\text{II } 191}{=} \frac{1}{x+x_1}$$

(1192) 561

$$F_2(x) \stackrel{\text{II } 159}{(278), (309)} \stackrel{\text{II } 191}{=} \frac{1}{x+x_2}$$

(1193) 562

$$H(x) \stackrel{\text{II } 188}{(306)} = 1$$

(1194) 563

Dakle:

$$\phi(y-x_1-x_2) = \int_0^{y-x_1-x_2} \left[\int_0^{\xi} (1-\xi+x_1)(\xi+x_2) d\xi \right] d\xi \quad (1195) \quad 564$$

Proračun ovog integrala daje

$$\phi(y-x_1-x_2) = \frac{y^4}{24} - \frac{(x_1^2+x_2^2)y^2}{4} + \frac{(x_1^3+x_2^3)y}{3} - \frac{(x_1^2-x_2^2)^2}{8} \quad (1196) \quad 565$$

Provedemo li u (1190) diferencijaciju po t , slijedi:

$$K_{0,0}^{1,1}(t;x_1,x_2) \stackrel{(346)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \phi(t-x_1-x_2) - \frac{c^2 t}{2} \int_{x_1+x_2}^t \phi(y-x_1-x_2) \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \right\} =$$

$$\stackrel{(346)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \phi(t-x_1-x_2) - \frac{c^2}{2} \int_{x_1+x_2}^t \phi(y-x_1-x_2) \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy -$$

$$- \frac{c^2 t}{2} \phi(t-x_1-x_2) + \frac{c^4 t^2}{8} \int_{x_1+x_2}^t \phi(y-x_1-x_2) \Lambda_2(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (1197) \quad 566$$

Uvrstimo li ovdje (1196), to se integrali raspadaju u integrale oblika

$$\int_{x_1+x_2}^t y^m \Lambda_n(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad \text{sa } m=4,2,1,0 \quad \text{i } n=1,2. \quad \text{Ti se integrali}$$

mogu izraziti ovako:

$$\int_{x_1+x_2}^t y^4 \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \stackrel{(599)}{=} \frac{2}{c^2} \left[t^3 - (x_1+x_2)^3 \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) \right] -$$

$$- \frac{6}{c^2} \int_{x_1+x_2}^t y^2 \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \stackrel{(471)}{=} \frac{2t^3}{c^2} + \frac{6t}{c^4} -$$

$$- \left[\frac{2(x_1+x_2)^3}{c^2} + \frac{6(x_1+x_2)}{c^4} \right] \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) - \frac{3(x_1+x_2) [t^2-(x_1+x_2)^2]}{c^2} \cdot$$

$$\cdot \Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) - \frac{6}{c^4} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy - \frac{3t^2}{c^2} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (1198) \quad 567$$

$$\int_{x_1+x_2}^t y^2 \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \stackrel{\substack{\text{III } 382 \\ (598)}}{=} \frac{2}{c^2} \left[t-(x_1+x_2) \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) \right] -$$

$$- \frac{2}{c^2} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (1199) \text{ 568}$$

$$\int_{x_1+x_2}^t y \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \stackrel{\substack{\text{III } 384 \\ (600)}}{=} \frac{2}{c^2} \left[1 - \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) \right] \quad (1200) \text{ 569}$$

$$\int_{x_1+x_2}^t y^4 \Lambda_2(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \stackrel{\substack{\text{III } 382 \\ (598)}}{=} \frac{4}{c^2} \left[t^3 - (x_1+x_2)^3 \Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) \right] -$$

$$- \frac{24}{c^4} \left[t-(x_1+x_2) \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) \right] + \frac{24}{c^4} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (1201) \text{ 570}$$

$$\int_{x_1+x_2}^t y^2 \Lambda_2(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \stackrel{\substack{\text{III } 382 \\ (598)}}{=} \frac{4}{c^2} \left[t-(x_1+x_2) \Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) \right] -$$

$$- \frac{4}{c^2} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (1202) \text{ 571}$$

$$\int_{x_1+x_2}^t y \Lambda_2(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \stackrel{\substack{\text{III } 384 \\ (600)}}{=} \frac{4}{c^2} \left[1 - \Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) \right] \quad (1203) \text{ 572}$$

$$\int_{x_1+x_2}^t \Lambda_2(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \stackrel{\substack{\text{III } 336 \\ (552)}}{=} \frac{4}{c^2 t} - \frac{4(x_1+x_2)}{c^2 t^2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) -$$

$$- \frac{8}{c^2 t^2} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy + \frac{4}{c^2 t^2} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (1203) \text{ 573}$$

Pomoću tih izraza dolazimo konačno do kanoničkog oblika, koji glasi:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{K_{0,0}^{1,1}(t;x_1,x_2)}} &= \frac{x_1+x_2}{8} \left[t^2 + (x_1-x_2)^2 + \frac{1}{c^2} \right] \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \\
 &+ \frac{x_1+x_2}{16} \left[t^2 - c^2 t^2 (x_1-x_2)^2 + c^2 (x_1^2-x_2^2)^2 - (x_1+x_2)^2 \right] \Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \\
 &+ \left[\frac{t^2}{8} + \frac{c^2(x_1^2-x_2^2)^2}{8} - \frac{x_1^2+x_2^2}{4} + \frac{1}{8c^2} \right] \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy + \\
 &+ \left[\frac{t^2}{16} + \frac{c^2 t^2 (x_1^2+x_2^2)}{8} \right] \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy - \frac{t}{8c^2} - \frac{t(x_1^2+x_2^2)}{4} \quad (1204) \quad 574
 \end{aligned}$$

Slično se dobije

$$\begin{aligned}
 K_{0,0}^{1,0}(t;x_1,x_2) &\stackrel{(129)}{=} -\frac{\partial}{\partial t} s_{x_1} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy = \\
 &\stackrel{\text{II } 187}{=} \frac{\partial}{\partial t} s_{x_1} s_j(x_k) \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) = \\
 &\stackrel{\text{II } 188 \quad \text{II } 194}{=} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x_1+x_2}^t \Phi(y-x_1-x_2) \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \stackrel{\text{II } 194}{=} \Phi(t-x_1-x_2) - \\
 &\quad - \frac{c^2 t}{2} \int_{x_1+x_2}^t \Phi(y-x_1-x_2) \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (1205) \quad 575
 \end{aligned}$$

$$\Phi(x) = F_1(x) * H(x) = \int_0^x \left(\int_0^x +x_1 \right) dx \quad (1206) \quad 576$$

$$\Phi(y-x_1-x_2) = \frac{y^2}{2} - x_2 y - \frac{x_1^2-x_2^2}{2} \quad (1207) \quad 577$$

Uvrštenje u ⁵⁷⁵(1205) daje uz pomoć ^{577 569}(1199), (1200)

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K_{0,0}^{1,0}(t;x_1,x_2)}} &= \frac{(x_1-x_2)t}{2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \frac{t}{2} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy + \\ &+ \frac{c^2(x_1^2-x_2^2)t}{4} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy - \frac{x_1^2-x_2^2}{2} \end{aligned} \quad (1208) \quad 578$$

Dalje dobijemo ^{vamo}

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K_{1,0}^{1,1}(t;x_1,x_2)}} &\stackrel{(715)}{=} \frac{2}{c^2 x_1} \left\{ \frac{\partial K_{0,0}^{1,1}(t;x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_1(t-x_1) \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) \right\} = \\ &\stackrel{574}{=} \stackrel{III 9}{=} \stackrel{III 11}{=} \frac{x_1-x_2}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \\ &+ \frac{2(t-x_1)}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) - \frac{x_1-x_2}{2} [t^2-(x_1+x_2)^2] \Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \\ &+ \left[(x_1^2-x_2^2) - \frac{1}{c^2} \right] \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy + \frac{t^2}{2} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy - \frac{t}{c^2} \end{aligned} \quad (1209) \quad 579$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{K_{1,1}^{1,1}(t;x_1,x_2)}} &\stackrel{(716)}{=} \frac{2}{c^2 x_2} \left\{ \frac{\partial K_{0,0}^{1,1}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2} + x_2(t-x_2) \Lambda_1(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) \right\} = \\ &\stackrel{579}{=} \stackrel{III 9}{=} \stackrel{III 11}{=} \frac{2(x_1+x_2)}{c^2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \\ &+ \frac{2(t-x_1)}{c^2} \Lambda_1(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) + \frac{2(t-x_2)}{c^2} \Lambda_1(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) - \\ &- \frac{4}{c^2} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \end{aligned} \quad (1210) \quad 580$$

$$\frac{\overset{87}{K_{1,0}^{1,0}(t;x_1,x_2)}}{\text{=====}} \stackrel{(715)}{=} \frac{2}{c^2 x_1} \left\{ \frac{\partial K_{0,0}^{1,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_1 \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) \right\} =$$

$$\stackrel{\substack{578 \\ (1208), (346)}}{\text{=====}} \stackrel{\text{III}(9)}{=} \frac{2}{c^2} \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) + t \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy - \frac{2}{c^2} \quad (1211) \quad 581$$

$$\frac{\overset{88}{K_{0,1}^{1,0}(t;x_1,x_2)}}{\text{=====}} \stackrel{(716)}{=} \frac{2}{c^2 x_2} \left\{ \frac{\partial K_{0,0}^{1,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2} + (t-x_2) \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) \right\} =$$

$$\stackrel{\substack{578 \\ (1208), (346)}}{\text{=====}} \stackrel{\text{III}(9)}{=} -\frac{2t}{c^2 x_2} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \left(\frac{2t}{c^2 x_2} - \frac{2}{c^2}\right) \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) -$$

$$- t \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy + \frac{2}{c^2} \quad (1212) \quad 582$$

$$\frac{\overset{88}{K_{1,1}^{1,0}(t;x_1,x_2)}}{\text{=====}} \stackrel{(716)}{=} \frac{2}{c^2 x_2} \left\{ \frac{\partial K_{1,0}^{1,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2} + (t-x_2) \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) \right\} =$$

$$\stackrel{\substack{581 \\ (1211), (346)}}{\text{=====}} \stackrel{\text{III}(9)}{=} -\frac{2t}{c^2 x_2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \frac{2}{c^2} \Lambda_1(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) +$$

$$+ \frac{2(t-x_2)}{c^2 x_2} \Lambda_1(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) \quad (1213) \quad 583$$

$$\frac{\overset{69}{K_{0,0}^{0,0}(t;x_1,x_2)}}{\text{=====}} \stackrel{(693)}{=} \int_{x_1+x_2}^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2}) dy \quad (1214) \quad 584$$

$$\frac{\overset{87}{K_{1,0}^{0,0}(t;x_1,x_2)}}{\text{=====}} \stackrel{(715)}{=} \frac{2}{c^2 x_1} \left\{ \frac{\partial K_{0,0}^{0,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_1} + \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) \right\} =$$

$$\stackrel{\substack{584 \\ (1214)}}{\text{=====}} \stackrel{\text{III}(9)}{=} \frac{2}{c^2 x_1} \left\{ -\Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \Lambda_0(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) \right\} \quad (1215) \quad 585$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{K_{1,1}^{0,0}(t;x_1,x_2)}}} & \stackrel{58}{(716)} = \frac{2}{c^2 x_2} \left\{ \frac{d K_{1,0}^{0,0}(t;x_1,x_2)}{dx_2} + \Lambda_1(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) \right\} = \\
 & \stackrel{585}{(1215)}, \stackrel{586}{(346)} = -\frac{2(x_1+x_2)}{c^2 x_1 x_2} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \\
 & + \frac{2}{c^2 x_1} \Lambda_1(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) + \frac{2}{c^2 x_2} \Lambda_1(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) \quad (1216) \quad 586
 \end{aligned}$$

Stavimo li u kompozicijama ⁵⁸²(1212), ⁵⁸³(1213), ⁵⁸⁵(1215), ⁵⁸⁶(1216) $x_1=0$, odnosno $x_2=0$, odnosno oboje, to granični prijelaz daje:

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{K_{0,1}^{1,0}(t;x_1,0)}} & = -\frac{2}{c^2} \Lambda_0[c(t-x_1)] - tx_1 \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x_2^2}) - \\
 & - \int_{x_1}^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2}) dy + \frac{2}{c^2} \quad (1217) \quad 587
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{K_{1,1}^{1,0}(t;x_1,0)}} & = -\frac{4t}{c^2(t+x_1)} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x_1^2}) + \frac{2(t-x_1)}{c^2(t+x_1)} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x_1^2}) + \\
 & + \frac{2}{c^2} \Lambda_1[c(t-x_1)] \quad (1218) \quad 588
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{K_{1,0}^{0,0}(t;0,x_2)}} = (t-x_2) \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x_2^2}) \quad (1219) \quad 589$$

$$\begin{aligned}
 \underline{\underline{K_{1,1}^{0,0}(t;0,x_2)}} & = -\frac{4}{c^2(t+x_2)} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x_2^2}) - \frac{2(t-x_2)}{c^2 x_2(t+x_2)} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x_2^2}) + \\
 & + \frac{2}{c^2 x_2} \Lambda_1[c(t-x_2)] \quad (1220) \quad 590
 \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{K_{1,1}^{0,0}(t;0,0)}} = -\frac{8}{c^2 t} [\Lambda_0(ct) - \Lambda_1(ct)] \quad (1221) \quad 591$$

Formule za kompozicije, koje se iz navedenih mogu dobiti pomoću komutativnog zakona komponiranja, kao $K_{0,1}^{1,1}$, $K_{0,0}^{0,1}$, $K_{1,0}^{0,1}$, $K_{1,1}^{0,1}$, $K_{0,0}^{0,1}$, $K_{0,1}^{0,0}$, nije potrebno posebno navesti.

I 149 Očito je (⁵³⁹1219) identičan sa (^{I 148}109), dok (⁵³⁵1215) daje (^{I 148}110), ako stavimo $x_2=0$. Vidimo dakle, da su teoremi (^{I 149}109) i (^{I 149}110), do kojih smo došli drugim putem već u ^{I. dijelu}uvodu, kao specijalni slučajevi sadržani u našim općim formulama.

Još ćemo na tim primjerima provjeriti ispravnost stavka ^{IV}III.11.

Uvjet ~~C/~~ teza stavka je za $r=2$ neispunljiv, jer se traži $r \geq q \geq 3$.

Uvjeti A/ i B/ daju se očito za $r=2$ sažeti u nejednadžbu

Koji zbog r=2 svaki put zadovoljava uvjet (390).

$$m_1+m_2 < n_1+n_2 \quad (1222)$$

Lako je vidjeti, da $K_{1,1}^{1,0}$, $K_{1,0}^{0,0}$ i $K_{1,1}^{0,0}$ zadovoljavaju taj uvjet, (³⁹⁰) pa zaista prema (⁵³³1213), (⁵³⁴1215), (⁵³⁵1216) u kanoničkom obliku nema integrala, dok ih za $K_{0,0}^{1,1}$, $K_{1,0}^{1,1}$, $K_{1,1}^{1,1}$, $K_{0,0}^{1,0}$, $K_{1,0}^{1,0}$, $K_{0,1}^{1,0}$ i $K_{0,0}^{0,0}$ ima, kako pokazuju formule (⁵⁷⁴1204), (⁵⁷⁹1209), (⁵⁸⁰1210), (⁵⁷⁸1208), (⁵⁸¹1211), (⁵⁸²1212), (⁵⁷⁴1214).

S A D R Ž A J

str.

UVOD

1

I. DIO

RAZNI STAVCI OPĆE NARAVI

- 1. Izračunavanje raznih suma. 24
- 2. Uvjeti, pod kojim se primjenom operacija $\frac{1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$ ($k=1, \dots, n$) poništava n -ta potencija sume od n varijabla x_1, x_2, \dots, x_n . 41
- 3. Formula za iteriranu operaciju $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$. 44
- 4. Jedan granični prijelaz u vezi s iteriranom operacijom $\frac{1}{x} \frac{d}{dx}$. 46
- 5. Svojstva diferencijalnih operatora $\frac{1}{g_k(x_k)} \frac{\partial}{\partial x_k}$ i njima inverznih integralnih operatora. 48
- 6. Posveopćenje formule za n -struku integraciju. 52
- 7. Odredjivanje limesa sume pomoću primjene de l'Hopitalovog pravila na pojedine članove, koji pojedince ne moraju imati limes. 63

II. DIO

RAZNE RELACIJE IZMEDJU BESSELOVIH FUNKCIJA

- 1. Nekoliko temeljnih relacija izmedju Besselovih funkcija. 66
- 2. Opća relacija izmedju triju Besselovih funkcija, kojih se indeksi razlikuju za cijele brojeve. 68
- 3. Izrazi za m -te derivacije funkcija $\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2})$ i $\Lambda_n[c(t-z)]$. 79
- 4. Redukcija integrala $\int_x^t x^n \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2}) dx$. 85

5. Redukcija integrala	$\int_X^t \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx .$	str. 102
6. Redukcija integrala	$\int_X^t x^m \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx .$	110
7. Derivacije po t integrala	$\int_X^t x^n \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})dx .$	112

III. DIO

INTEGRALNI TEOREMI BESSELOVIH FUNKCIJA

1. Jedna temeljna Laplaceova transformacija.	116
2. Kompozicije dviju ili više Besselovih funkcija nultoga reda.	129
3. Rekurzivne jednačbe za kompoziciju dviju Besselovih funkcija višega reda.	135
4. Izravne formule za kompoziciju dviju Besselovih funkcija višega reda.	140
5. Rekurzivne jednačbe za kompoziciju povoljnog broja Besselovih funkcija višega reda.	142
6. Izravne formule za kompoziciju povoljnog broja Besselovih funkcija višega reda.	145
7. Kanonički oblik integralnih teorema.	159
8. Dokaz jednoznačnosti kanoničkog oblika integralnih teorema.	165
9. Rekurzivne formule za kompozicije u slučaju, da pojedini parametri iščezavaju.	194
10. Granični prijelaz u izravnim formulama za kompozicije, kad pojedini parametri x_1, x_2, \dots konvergiraju prema nuli.	203

	str.
11. Kriterij za pojavljivanje integrala u kanoničkom obliku integralnih teorema.	212
12. Nekoliko specijalnih slučajeva integralnih teorema.	252
Sadržaj	260

LITERATURA

- G.N.Watson, A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge 1922.
(Autoru ova knjiga nije bila pristupačna).
- Gray, Matthews and MacRobert, A treatise on Bessel functions. London 1931.
- R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. Leipzig u. Berlin 1937.
- Jahnke-Emde, Funktionentafeln, Leipzig u. Berlin 1933.
- Courant u. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I. Berlin 1931.
(7. Kap. §2.)
- Whittaker and Watson, A course of modern analysis. Cambridge 1935. (Ch. XVII)
- H. Jeffreys, Operational methods in mathematical physics. Cambridge 1931.
(Ch. VIII).
- Frank-v. Mises, Differentialgleichungen der Physik I. Braunschweig 1930.
(6. Kap. §4., 8. Kap. § 3.)
- K.W. Wagner, Operatorenrechnung. Leipzig 1940. (Naročito odlomak 9).
- G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937.
- H. Fischer, Die Laplace-Transformation in der Theorie der Besselfunktionen. Breiburg i Br. 1936.
- Campbell and Foster, Fourier integrals for practical applications. American Telephone and Telegraph Company 1931.
- R.O. Kuzmin, Besselevi funkcii. Leningrad Moskva, 1935.

Osim toga u tekstu citirana literatura.

D O D A T A K 1.

Izvod formule (350) između triju Besselovih funkcija iz poznatih formula.

Schafheitlin*) daje ove dvije formule:

$$J_{\nu+p} = J_{\nu} \sum_0^{\lambda} (-1)^{\lambda} \frac{\prod(p-\lambda) \prod(\nu+p-\lambda-1)}{\prod(\lambda) \prod(p-2\lambda) \prod(\nu+\lambda-1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda} -$$

$$- J_{\nu-1} \sum_0^{\lambda} (-1)^{\lambda} \frac{\prod(p-\lambda-1) \prod(\nu+p-\lambda-1)}{\prod(\lambda) \prod(p-2\lambda-1) \prod(\nu+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1} \quad (D_11)$$

$$J_{\nu-p} = J_{\nu} \sum_0^{\lambda} (-1)^{\lambda} \frac{\prod(p-\lambda) \prod(\nu-\lambda)}{\prod(\lambda) \prod(p-2\lambda) \prod(\nu-p+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda} -$$

$$- J_{\nu+1} \sum_0^{\lambda} (-1)^{\lambda} \frac{\prod(p-\lambda-1) \prod(\nu-\lambda-1)}{\prod(\lambda) \prod(p-2\lambda-1) \prod(\nu-p+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1}. \quad (D_12)$$

Našim oznakama (390), (391), (392) može se (D₁₁) pisati u oblicima

$$J_a - J_b A_{a,b-1} + J_{b-1} A_{a,b} = 0 \quad (D_13)$$

$$J_a - J_{b+1} A_{a,b} + J_b A_{a,b+1} = 0 \quad (D_14)$$

$$J_a - J_c A_{a,c-1} + J_{c-1} A_{a,c} = 0 \quad (D_15)$$

$$J_a - J_{c+1} A_{a,c} + J_c A_{a,c+1} = 0 \quad (D_16)$$

$$J_b - J_c A_{b,c-1} + J_{c-1} A_{b,c} = 0 \quad (D_17)$$

$$J_b - J_{c+1} A_{b,c} + J_c A_{b,c+1} = 0 \quad (D_18)$$

a (D₁₂) se može pisati

*) P. Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen, Teubner, Leipzig und Berlin 1908, str. 17 i 19, formule (6) i (7).

$$J_{a+1} A_{a,b} - J_a A_{a+1,b} + J_b = 0 \quad (D_19)$$

$$J_a A_{a-1,b} - J_{a-1} A_{a,b} + J_b = 0 \quad (D_110)$$

$$J_{a+1} A_{a,c} - J_a A_{a+1,c} + J_c = 0 \quad (D_111)$$

$$J_a A_{a-1,c} - J_{a-1} A_{a,c} + J_c = 0 \quad (D_112)$$

$$J_{b+1} A_{b,c} - J_b A_{b+1,c} + J_c = 0 \quad (D_113)$$

$$J_b A_{b-1,c} - J_{b-1} A_{b,c} + J_c = 0 \quad (D_114)$$

Eliminacija od J_{b-1} iz (D₁₃), (D₁₄), odnosno od J_{b+1} iz (D₁₄), (D₁₃) daje relacije

$$J_a A_{b,c} - J_b (A_{a,b-1} A_{b,c} - A_{b-1,c} A_{a,b}) + J_c A_{a,b} = 0 \quad (D_115)$$

odnosno

$$J_c A_{b,c} - J_b (A_{b+1,c} A_{a,b} - A_{a,b+1} A_{b,c}) + J_c A_{a,b} = 0 \quad (D_116)$$

Eliminacija od J_{c-1} iz (D₁₅), (D₁₇) odnosno od J_{c+1} iz (D₁₆), (D₁₈) daje:

$$J_a A_{b,c} - J_b A_{a,c} + J_c (A_{b,c-1} A_{a,c} - A_{a,c-1} A_{b,c}) = 0 \quad (D_117)$$

odnosno

$$J_a A_{b,c} - J_b A_{a,c} + J_c (A_{a,c+1} A_{b,c} - A_{b,c+1} A_{a,c}) = 0 \quad (D_118)$$

Eliminacija od J_{a-1} iz (D₁₀), (D₁₂) odnosno od J_{a+1} iz (D₉), (D₁₁) daje:

$$J_a (A_{a-1,c} A_{a,b} - A_{a-1,b} A_{a,c}) - J_b A_{a,c} + J_c A_{a,b} = 0 \quad (D_119)$$

odnosno

$$J_a (A_{a+1,b} A_{a,c} - A_{a+1,c} A_{a,b}) - J_b A_{a,c} + J_c A_{a,b} = 0 \quad (D_120)$$

Budući da su koeficijenti Besselovih funkcija u (350) do jednog zajedničkog faktora jednoznačno određeni, to poredbom jednačaba (D₁₅) do (D₂₀)

slijedi:

$$A_{a,b-1} A_{b,c} - A_{b-1,c} A_{a,b} = A_{b+1,c} A_{a,b} - A_{a,b+1} A_{b,c} = A_{a,c} \quad (D_1 21)$$

$$A_{b,c-1} A_{a,c} - A_{a,c-1} A_{b,c} = A_{a,c+1} A_{b,c} - A_{b,c+1} A_{a,c} = A_{a,b} \quad (D_1 22)$$

$$A_{a-1,c} A_{a,b} - A_{a-1,b} A_{a,c} = A_{a+1,c} A_{a,b} - A_{a+1,b} A_{a,c} = A_{b,c} \quad (D_1 23)$$

pa je time opća relacija (350) s koeficijentima (390), (391), (392) dokazana.

Formule (D₁1) i (D₁2) daje i Nielsen*), koji ih pripisuje Lommel**) . Isto tako pripisuje Lommel formule

$$R^{\nu, n-1}(x) R^{\nu-1, p}(x) - R^{\nu, p-1}(x) R^{\nu-1, n}(x) = R^{\nu+p, n-p-1}(x) \quad (D_1 24)***)$$

sa specijalnim slučajem

$$R^{\nu, p}(x) R^{\nu-1, p}(x) - R^{\nu, p-1}(x) R^{\nu-1, p+1}(x) = 1 \quad (D_1 25)***)$$

gdje je $R^{\nu, p}(x)$ Lommelov polinom

$$R^{\nu, p}(x) = \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{p+1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^s (p-s)!}{s!} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2s} \quad (D_1 26)^4)$$

koji očito odgovara našim koeficijentima $A_{a,b}$, i to vrijedi

$$R^{\nu, p} = A_{\nu+p+1, \nu} \quad (D_1 27)$$

ili

$$A_{a,b} = R^{b, a-b-1} \quad (D_1 28)$$

*) N.Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Teubner, Leipzig 1904, str.30 (4), (5), str.23 (2).

**) Lommel, Studien über die Besselschen Funktionen, p. 3, 1868.

***) Nielsen, l.c. str. 33 (6) i str. 34 (7). Citira se Lommel, Mathematische Annalen, Bd. 4. p. 115; 1871.

4) Nielsen, l.c, str. 23 (2).

(D₁24) glasi dakle s našim oznakama

$$A_{\nu+n,\nu} A_{\nu+p,\nu-1} - A_{\nu+p,\nu} A_{\nu+n,\nu-1} = A_{\nu+n,\nu+p} \quad (D_129)$$

a to je identično sa (D₁22).

Nije teško posveopćiti relacije (D₁21), (D₁22), (D₁23).

Pišemo li u smislu (355)

$$M_{c,d} J_a + M_{d,a} J_c + M_{a,c} J_d = 0 \quad (D_130)$$

$$M_{c,d} J_b + M_{d,b} J_c + M_{b,c} J_d = 0 \quad (D_131)$$

i eliminiramo J_d, to slijedi

$$M_{c,d} M_{b,c} J_a - M_{c,d} M_{a,c} J_b + (M_{d,a} M_{b,c} - M_{d,b} M_{a,c}) J_c = 0 \quad (D_132)$$

ili s obzirom na (355) i s obzirom na

$$M_{a,c} = -M_{c,a} \quad \text{i t.d.} \quad (D_133)$$

$$M_{d,a} M_{b,c} - M_{d,b} M_{a,c} = M_{c,d} M_{a,b} \quad (D_134)$$

ili

$$M_{a,b} M_{c,d} + M_{b,c} M_{a,d} + M_{c,a} M_{b,d} = 0 \quad (D_135)$$

Opaža se, da se iz jednog člana lijeve strane od (D₁35) dobiju ostali članovi cikličkom permutacijom bilo kojih triju indeksa. Dalje se vidi, da je jednačba (D₁35) invarijantna s obzirom na bilo kakvu permutaciju svih četiriju indeksa.

Stavimo li

$$a = r+s+p+q \quad (D_136)$$

$$b = r+s+p \quad (D_137)$$

$$c = r+s \quad (D_138)$$

$$d = r \quad (D_139)$$

to se na temelju (D₁27) može (D₁35) pisati kao relacija između

Lommelovih polinoma (D₁26) :

$$R^{r+s+p,q-1} R^{r,s-1} + R^{r+s,p-1} R^{r,s+p+q-1} = R^{r+s,p+q-1} R^{r,s+p-1} \quad (D_140)$$

ili, ako stavimo

$$r = \nu - 1 \quad (D_141)$$

$$q = n - p \quad (D_142)$$

$$\begin{aligned} R^{\nu+s+p-1,n-p-1} R^{\nu-1,s-1} + R^{\nu+s-1,p-1} R^{\nu-1,s+n-1} &= \\ &= R^{\nu+s-1,n-1} R^{\nu-1,s+p-1} \end{aligned} \quad (D_143)$$

što za $s=1$ daje (D₁24). Sa (D₁40) je dakle dobiveno posveopćenje relacije (D₁24), koju navodi Nielsen. *)

Nešto elegantnije se može dobiti relacija (D₁35) kao uvjet snošljivosti homogenih jednačaba

$$M_{c,d} J_b + M_{d,b} J_c + M_{b,c} J_d = 0 \quad (D_144)$$

$$M_{c,d} J_a + M_{d,a} J_c + M_{a,c} J_d = 0 \quad (D_145)$$

$$M_{b,d} J_a + M_{d,a} J_b + M_{a,b} J_d = 0 \quad (D_146)$$

$$M_{b,c} J_a + M_{c,a} J_b + M_{a,b} J_c = 0 \quad , \quad (D_147)$$

koji glasi:

$$\begin{vmatrix} 0 & M_{c,d} & M_{d,b} & M_{b,c} \\ M_{c,d} & 0 & M_{d,a} & M_{a,c} \\ M_{b,d} & M_{d,a} & 0 & M_{a,b} \\ M_{b,c} & M_{c,a} & M_{a,b} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & M_{c,d} & -M_{b,d} & M_{b,c} \\ -M_{c,d} & 0 & M_{a,d} & M_{c,a} \\ M_{b,d} & -M_{a,d} & 0 & M_{a,b} \\ -M_{b,c} & -M_{c,a} & -M_{a,b} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (M_{a,b} M_{c,d} + M_{c,a} M_{b,d} + M_{b,c} M_{a,d})^2 = 0 \quad (D_148)$$

*) I ovu relaciju navodi Nielsen str. 34(8). Citira Crelier, Annali di Matematica (2) Vol 24. p.141; 1896.

D O D A T A K 2.

Relacija između Lommelovih polinoma na temelju
teorije verižnih razlomaka.

Definiramo*)

$$\alpha_{\nu, \lambda} = K \begin{pmatrix} a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \dots, a_{\lambda+\nu} \\ b_{\lambda}, b_{\lambda+1}, \dots, b_{\lambda+\nu} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_{\lambda} & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{\lambda+1} & b_{\lambda+1} & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{\lambda+2} & b_{\lambda+2} & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \quad (D_2 1)$$

$$\alpha_{\nu, 0} = \alpha_{\nu} \quad (D_2 2)$$

$$\beta_{\nu, \lambda} = \alpha_{\nu-1, \lambda+1} \quad (D_2 3)$$

$$\alpha_{-1, \lambda} = 1, \quad \beta_{-1, \lambda} = 0, \quad \alpha_{0, \lambda} = b_{\lambda}, \quad \beta_{0, \lambda} = 1, \quad \beta_{1, \lambda} = b_{\lambda+1} \quad (D_2 4)$$

Ako među varijablama x_0, x_1, x_2, \dots postoje jednačbe**)

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= b_0 x_1 + a_1 x_2 \\ x_1 &= b_1 x_2 + a_2 x_3 \\ &\dots \dots \dots \\ x_{\nu} &= b_{\nu} x_{\nu+1} + a_{\nu+1} x_{\nu+2} \end{aligned} \right\} \quad (D_2 5)$$

to vrijedi

*) O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüche, Teubner, Leipzig und Berlin 1929, str. 14. (23), (23a), str. 6 (9), str. 11 (15), str. 15 (25).
Da se izbjegne kolizija s našim oznakama, pišemo mjesto Perronovih oznaka $A_{\nu, \lambda}, B_{\nu, \lambda}$ svagdje $\alpha_{\nu, \lambda}, \beta_{\nu, \lambda}$.

**) Perron, l.c. str. 12 (21).

$$x_\lambda = \alpha_{\nu-1,\lambda} x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda} \alpha_{\nu-2,\lambda} x_{\nu+\lambda+1} \quad (D_2 6)^*$$

$$x_{\lambda+1} = \beta_{\nu-1,\lambda} x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda} \beta_{\nu-2,\lambda} x_{\nu+\lambda+1} \quad (D_2 7)^*$$

a $\frac{x_0}{x_1}$ se može predočiti kao verižni razlomak**)

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \dots + \frac{a_{\nu-1}}{b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu}{x_\nu : x_{\nu+1}} \quad (D_2 8)$$

Dalje vrijede jednačbe***)

$$\beta_{\nu-1,\mu} \alpha_{\mu+\nu+\lambda-1} = \beta_{\nu+\lambda-1,\mu} \alpha_{\mu+\nu-1} + (-1)^{\nu-1} a_{\mu+1} a_{\mu+2} \dots a_{\mu+\nu} \beta_{\lambda-1,\mu+\nu} \alpha_{\mu-1} \quad (D_2 9)$$

Povisi li se indeks svih a_λ, b_λ za ρ , to se prema (D₂1), (D₂3) povisuju drugi indeksi izraza $\alpha_{\nu,\lambda}, \beta_{\nu,\lambda}$ za ρ , t.j. iz njih postaje $\alpha_{\nu,\lambda+\rho}, \beta_{\nu,\lambda+\rho}$, a prema (D₂2) postaje iz $\alpha_\nu = \alpha_{\nu,0} \alpha_{\nu,\rho}$.
 Jednačbe (D₂9) dobiju onda oblik

$$\beta_{\nu-1,\mu+\rho} \alpha_{\mu+\nu+\lambda-1,\rho} = \beta_{\nu+\lambda-1,\mu+\rho} \alpha_{\mu+\nu-1,\rho} + (-1)^{\nu-1} a_{\mu+\rho+1} a_{\mu+\rho+2} \dots a_{\mu+\rho+\nu} \beta_{\lambda-1,\mu+\nu+\rho} \alpha_{\mu-1,\rho} \quad (D_2 10)$$

Stavimo li

$$a_\lambda = -1 \quad (\lambda=0,1,2,\dots) \quad (D_2 11)$$

$$b_\lambda = \frac{2(\lambda+1)}{z} \quad (\lambda=0,1,2,\dots) \quad (D_2 12)$$

$$x_\lambda = J_\lambda(z) \quad (\lambda=0,1,2,\dots) \quad (D_2 13)$$

*) Perron, l.c. str. 14.
 **) Perron, l.c. str. 13.
 ***) Perron, l.c. str. 18. (35).

to rekurziona formula Besselovih funkcija

$$J_{\lambda-1} = \frac{2\lambda}{z} J_{\lambda} - J_{\lambda+1} \quad (\lambda=0,1,2,\dots) \quad (D_2 14)$$

postaje identična s jednačbama (D₂5), tako dakle prema (D₂6) mora vrijediti

$$J_{\lambda} = \alpha_{\nu-1,\lambda} J_{\nu+\lambda} - \alpha_{\nu-2,\lambda} J_{\nu+\lambda+1} \quad (D_2 15)$$

ili

$$J_{\nu+\lambda+1} \alpha_{\nu-2,\lambda} - J_{\nu+\lambda} \alpha_{\nu-1,\lambda} + J_{\lambda} = 0. \quad (D_2 16)$$

Poredba sa (D₁9) u dodatku 1. pokazuje, da mora biti

$$\alpha_{\nu-2,\lambda} = A_{\nu+\lambda,\lambda}, \quad \alpha_{\nu-1,\lambda} = A_{\nu+\lambda+1,\lambda} \quad (D_2 17)$$

ili s obzirom na (D₂1), (D₂11), (D₂12)

$$A_{\nu,\lambda} = \alpha_{\nu-\lambda-2,\lambda} = K \left(\begin{array}{cccc} & -1, & -1, & \dots, & -1 \\ \frac{2(\lambda+1)}{z}, & \frac{2(\lambda+2)}{z}, & \dots & & \frac{2(\nu-1)}{z} \end{array} \right). \quad (D_2 18)$$

Prema (D₁27) u dodatku 1. vrijedi dakle za Lommelove polinome R^{ν,p}

$$R^{\nu,p} = A_{\nu+p+1,\nu} = \alpha_{p-1,\nu} = K \left(\begin{array}{cccc} & -1, & -1, & \dots, & -1 \\ \frac{2(\nu+1)}{z}, & \frac{2(\nu+2)}{z}, & \dots & & \frac{2(\nu+p)}{z} \end{array} \right) \quad (D_2 19)$$

pa su time Lommelovi polinomi identificirani s kontinuantama.

S obzirom na (D₂11), (D₂3) dobijemo iz (D₂10)

$$\alpha_{\nu-2,\mu+p+1} \alpha_{\mu+\lambda-1,p} = \alpha_{\nu+\lambda-2,\mu+p+1} \alpha_{\mu+\nu-1,p} - \alpha_{\lambda-2,\mu+p+1} \alpha_{\mu-1,p} \quad (D_2 20)$$

ili prema (D₂19)

$$R^{\mu+p+1,\nu-1} R^{\mu,\mu+\lambda} = R^{\mu+p+1,\nu+\lambda-1} R^{\mu,\mu+\nu} - R^{\mu+\nu+p+1,\lambda-1} R^{\mu,\mu} \quad (D_2 21)$$

Stavimo li

$$\rho = m-1 \quad (D_2 22)$$

$$\mu = s-1 \quad (D_2 23)$$

$$\gamma = p \quad (D_2 24)$$

$$\lambda = n-p \quad (D_2 25)$$

to dobijemo

$$R^{m+s-1, p-1} R^{m-1, n+s-1} = R^{m+s-1, n-1} R^{m-1, s+p-1} - R^{m+s+p-1, n-p-1} R^{m-1, s-1}$$

(D₂ 26)

a to je identično s relacijom (D₁ 43) u dodatku 1. Vidi se dakle, da opća relacija (D₁ 43) odnosno (D₂ 26) između Lommelovih polinoma izvire iz relacija (D₂ 18), poznatih iz teorije verižnih razlomaka, i to na temelju identifikacije (D₂ 16) Lommelovih polinoma s kontinuantama.