

# Proračun električnoga polja u izolaciji namota transformatora primjenom metode rubnih elemenata i adaptivne križne aproksimacije

---

**Drandić, Ana**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:168:138813>

*Rights / Prava:* [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-19**



*Repository / Repozitorij:*

[FER Repository - University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing repository](#)





Sveučilište u Zagrebu  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Ana Drandić

**PRORAČUN ELEKTRIČNOGA POLJA U  
IZOLACIJI NAMOTA TRANSFORMATORA  
PRIMJENOM METODE RUBNIH  
ELEMENATA I ADAPTIVNE KRIŽNE  
APROKSIMACIJE**

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2019.



Sveučilište u Zagrebu  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Ana Drandić

**PRORAČUN ELEKTRIČNOGA POLJA U  
IZOLACIJI NAMOTA TRANSFORMATORA  
PRIMJENOM METODE RUBNIH  
ELEMENATA I ADAPTIVNE KRIŽNE  
APROKSIMACIJE**

DOKTORSKI RAD

Mentor: Izv. prof. dr. sc. Bojan Trkulja

Zagreb, 2019.



University of Zagreb

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMPUTING

Ana Drandić

**COMPUTATION OF ELECTRIC FIELD IN  
TRANSFORMER WINDING INSULATION  
USING BOUNDARY ELEMENT METHOD  
AND ADAPTIVE CROSS  
APPROXIMATION**

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Associate professor Bojan Trkulja, PhD

Zagreb, 2019

Doktorski rad izrađen je na Sveučilištu u Zagrebu Fakultetu elektrotehnike i računarstva,  
na Zavodu za osnove elektrotehnike i električka mjerenja.

Mentor: izv. prof. dr. sc. Bojan Trkulja

Doktorski rad ima: 117 stranica

Doktorski rad br.: \_\_\_\_\_

## **O mentoru**

Bojan Trkulja je rođen 1978. g. u Bjelovaru. Nakon završetka gimnazije upisao je Fakultet elektrotehnike i računarstva u Zagrebu na kojem je diplomirao s izvrsnim uspjehom 2001. godine na smjeru Elektroenergetika. Iste se godine zaposlio kao znanstveni novak na Zavodu za osnove elektrotehnike i električka mjerenja. 2004.g. je izradio i obranio magistarski rad s temom: „Proračun kvazistatičkog elektromagnetskog polja metodom momenata”. Doktorsku disertaciju s temom „Proračun elektromagnetskog polja složenih elektroenergetskih objekata” obranio je 2008. godine. Dobitnik je godišnje nagrade Končar za doktorsku disertaciju koja sadrži istaknuta znanstvena dostignuća iz područja tehničkih znanosti s primjenom u industriji i nagrade „Roberto Giannini” za izvrsnost u nastavi i radu sa studentima 2014. godine. Njegovi glavni istraživački interesi uključuju primjenu numeričkih metoda u analizi elektromagnetskih polja.

## **About the Supervisor**

Bojan Trkulja was born in Bjelovar, Croatia, in 1978. After graduating from high school, he enrolled in the Faculty of Electrical Engineering and Computing at the University of Zagreb where he graduated with excellent success in the field of electrical power engineering in 2001. That same year he was employed as a research fellow at the Department of Electrical Engineering Fundamentals and Measurements at the Faculty of Electrical Engineering and Computing. In 2004. he has defended his master's thesis: "Calculation of quasistatic electromagnetic field by the method of moments". In 2008. he defended his doctoral dissertation with the topic: "Electromagnetic field calculation of complex power system facilities". He is the winner of the annual Končar award for the doctoral thesis, which is given for outstanding scientific achievements in the field of technical science with industry application and "Roberto Giannini" award for excellence in teaching and working with students in 2014. His main research interests include the use of numerical methods in the analysis of electromagnetic fields.

## **Zahvala**

Na prvome mjestu zahvaljujem se svome mentoru izv. prof. dr. sc. Bojanu Trkulji koji mi je svojim znanjem, znanstvenim i stručnim iskustvom, te brojnim savjetima izuzetno pomogao pri uspješnoj izradi doktorskog rada. Hvala profesore na podršci, izdvojenom vremenu i strpljenju.

Zahvaljujem se svim kolegama i prijateljima s Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, na stvaranju ugodne i poticajne radne atmosfere kroz cijelo vrijeme izrade ovoga rada.

Zahvaljujem se svim dragim i bliskim prijateljima i prijateljicama na razumijevanju i moralnoj podršci tijekom ovog razdoblja.

Posebnu zahvalnost dugujem svojoj obitelji na bezuvjetnoj ljubavi. Bez njih ne bi bilo ove disertacije. Osobito se zahvaljujem svojim roditeljima na strpljenju i vjeri u mene. Veliko hvala bratu Marinu i njegovoj obitelji na razumijevanju i beskrajnoj potpori.

## Sažetak

Izračun električnoga polja je osobito važan prilikom projektiranja električnih uređaja. To je još izraženije kod projektiranja izolacije transformatora jer ona mora biti u stanju izdržati razna električna naprezanja kojima će biti podvrgnuta tijekom rada transformatora. Stoga je vrlo važno koristiti tehnike modeliranja za analizu važnih značajki modela uređaja tijekom njihovog projektiranja prije same proizvodnje. Budući da je proračun električkih karakteristika samo dio procesa projektiranja uređaja, rezultati bi se trebali dobiti što je brže moguće, a opet uz najveću moguću preciznost.

Ova disertacija se bavi razvojem metodologije za napredan i brz elektrostatski proračun namota transformatora primjenom metode rubnih elemenata. U tu svrhu je razvijen dvodimenzionalni proračun aproksimacijom linearnim izoparametarskim elementima. Razvijena metodologija temelji se na poznatim geometrijskim parametrima i materijalima transformatora ili drugih uređaja za koje se vrši proračun. Prvo su uvedene osnovne pretpostavke za proračun transformatora. Ne radi se grupacija zavoja već se račun radi za svaki zavoj namota. Radi se u Kartezijevom koordinatnom sustavu uz približenje beskonačnim elementima koje se pokazalo kao zadovoljavajuće.

Zbog složenosti proračuna, a time i zahtjeva na memorijske resurse i procesor, proučavaju se metode ubrzanja proračuna i kompresije matrica. U sklopu rada prikazana je primjena adaptivne križne aproksimacije. Ukratko je objašnjena implementacija algoritma unutar prethodno razvijenog koda.

Definirani su primjeri modela transformatora te se za navedene modele napravio proračun pomoću razvijene metodologije i pomoću druge numeričke metode. Napravljena je analiza rezultata te je utvrđena zadovoljavajuća točnost prikazane metodologije za proračun električnog polja i matrice kapaciteta namota transformatora.

**Ključne riječi:** električno polje, transformator, metoda rubnih elemenata, adaptivna križna aproksimacija, matrica kapaciteta



# **Computation of Electric Field in Transformer Winding Insulation using Boundary Element Method and Adaptive Cross Approximation**

## **Introduction**

Transformers are one of the most important parts of the power system. Transformers are often grouped according to their power and voltage to distribution transformers and power transformers. It is also important to mention instrument transformers whose range of rated voltages and power can reach the rated voltages of power and distribution and transformers. Transformers must be placed at each point of the electric power system where is a transition between voltage levels. The choice of a transformer depends on its application, with the emphasis that the special design will be more prominent as the larger the unit. Designing a transformer is a complex task where designers must meet customers' and professional requirements while making sure that production costs are not high. The design methodology may be different depending on the type of transformer, the rated frequency, and certain structural characteristics of the transformer. Power transformers, for example, are very large and expensive to manufacture. Therefore, the development of transformer models and computer simulation save time and assets of the manufacturer [1]. Using computer models reduces the risk of destruction of the transformer during the tests it is required to undergo. Therefore, the simulations must be very detailed. Since simulations are is a part of the design process, the results should be obtained as fast as possible, while still maintaining the necessary accuracy. This balance between the accuracy and computation speed can be difficult to obtain due to a large number of system unknowns.

The increase of the rated voltages in the transmission systems, increases the rated voltage of the transformer, increasing the share of the cost of the insulation system in the overall transformer production cost. The space occupied by the insulation affects the cost of active parts such as core and copper conductors, as well as the amount of oil in the transformer. Additionally, by increasing the MVA value, the weight and size of large transformers are increased reaching or exceeding the transport limits. All of these reasons, together with constant competition in the global marketplace, are responsible for the continued efforts to reduce the share of insulation in transformers [1]. This is the main reason for the necessity of development of accurate and fast electric field computation in transformer winding insulation.

The transformer isolation system must be designed to withstand not only voltages during normal operation but also much higher voltages occurring in transient phenomena. Transients occur due to atmospheric discharge, switching operations, short circuits within the power system, etc. Although there are protective devices such as surge arresters that protect against transient

---

occurrences, transformer insulation must be designed to withstand overvoltages for a short period. Insulation design is often an iterative process. During the insulation design, computation of the electric field to verify if field values are large enough to cause electrical breakdown is performed. The obtained electrical field values are then compared to known criteria. If the field values are somewhat larger than those set by the criteria, the insulation system is redesigned and the process is repeated until the criteria are met [2, 3]. During the transformer insulation design process, it is also important to take into account the voltage distribution during transient phenomena. For this purpose, methods of calculating voltage distribution over transformer windings have been developed. To obtain impulse distribution over the windings, it is necessary to carry out simulations using equivalent circuits consisting of distributed or concentrated R, L and C parameters. During fast front transients, capacitance values significantly influence the initial voltage distribution along the winding. This means that precise computation of the capacitance matrix is essential. Transformers designers use white-box models to successfully model a transformer that will meet the required specifications and pass the necessary tests before shipment to customers. With the help of the model, the winding is replaced by an electric network that is solved by known techniques of transmission line theory and network analysis. One of the approaches to simulation of the transient voltage distribution over transformer windings is the lumped circuit approach in which the windings are represented by equivalent resistances, inductances, and capacitances. Capacitances can be calculated using the electrostatic analysis. Numerical computation of the capacitance matrix can be based on the finite element method or the boundary element method. Capacitance matrix calculated using the methodology presented in this dissertation can be used in lumped parameter methods.

Distribution of the electric field can be calculated using various electromagnetic calculation methods. In this dissertation, numerical methods are used. The use of numerical methods is the most efficient way of solving problems in electromagnetism. The numeric solution is dependent on a variety of factors such as the selection of proper numeric algorithm and network element parameters. The goal of each numerical method is less difference between the approximate and the correct solution. The finite element method is a well-established, commercially developed and widely used method for electromagnetic field problems in power engineering. The drawback of this method is that it discretises the whole problem region which is not always necessary and is time-consuming. As opposed to that, the boundary element method discretises only the boundaries of the considered area. This enables reduction of the problem dimension. The use of the boundary element method allows simple modelling of problems that involve open boundaries. The main problem in applying the boundary element methods is the densely populated system matrix. Memory requirements and computational cost complexity are  $O(N^2)$ , where  $N$  is the number of unknowns. To overcome this problem, various methods and techniques for acceleration have been developed and successfully applied. Generally, these

---

methods can be categorized into two groups - physical and algebraic methods. Physical methods have so far proved more effective in reducing memory resources and CPU time. But their effectiveness comes along with the problem of general use of these methods. They depend on a priori knowledge of Green's function, which means that for different problems, when the function itself changes, algorithm modifications are needed. Unlike physical, algebraic methods do not depend on Green's function, meaning that they can be applied in various areas. One such method is adaptive cross approximation. The basic idea of the adaptive cross approximation is to find the approximation of the lower rank from the original system matrix values. The acceleration of the computation is obtained by applying linear algebra to the system matrix such as QR decomposition and decomposition of singular values. Therefore, with small modifications, the already known procedure of matrix generation can be used, which makes it easier to implement the method.

### **Scope of the dissertation**

The aim of this dissertation was to develop an electrostatic solver with linear isoparametric elements based on the boundary element method that is when enhanced with the adaptive cross approximation algorithm, accurate and fast enough to be used during the design of electrical apparatus such as transformers. The main hypothesis was that commercial software mostly based on finite element methods is usually slower and sometimes not able to compute the given problem in a reasonable amount of time. Also, most of the boundary element method software is based on approximation with constant elements which often proves insufficiently accurate while the proposed methodology should prove both fast and accurate.

Application of the BEM for the calculation of the electric field and the transformer winding capacitance matrix was chosen in order to reduce the problem dimension, achieving relatively accurate results. The developed mathematical model is based on a detailed knowledge of the geometry of the problem, which in the case of transformer winding is the winding geometry and the materials used. Two assumptions are made. The first assumption concerns the appearance of the winding. Spiral windings are assumed to be rings of the same radius. The number of rings corresponds to the number of turns of the winding. This approximation of the winding is possible due to the ratio between the winding conductor height and radius of the winding. The first assumption means that the solution can be obtained using the cylindrical coordinate system. The second assumption used allows modelling in the Cartesian coordinate system. The winding curvature is neglected and the axially-symmetric turns are approximated by infinite long conductors. This approach is possible because of the large ratio between the winding radius and turn dimensions. Modelling in the Cartesian coordinate system enables a wider application of the developed methodology since it can then be applied to other problems, such as the calculation of cable capacitance.

This dissertation also presents the improvement of the developed 2D solver by implementing

---

the adaptive cross approximation algorithm. Adaptive cross approximation was chosen among other methods and techniques for approximation of the system matrix and acceleration of the computation due to the good results in literature and its algebraic nature which enables easier implementation of the algorithm in future work.

The developed methodology is used for electrostatic calculation on two transformer examples. The winding conductors in the examples are presumed to have rectangular cross section. The acquired results are benchmarked against the results obtained using professional software *Infolytica® ElecNet 7.5.1* based on the finite element method. A detailed analysis of advantages when using adaptive cross approximation is given.

### **Mathematic modelling based on the boundary element method**

The second chapter presents mathematical modelling using the boundary element method. The basic outline of Green's function for two-dimensional free space, the basic formulation of boundary element method, Galerkin method, point matching method, and the derivation of the source function by linear functions are presented. The procedure for solving the two-dimensional electrostatic problem is then described by using the boundary element method. The required integral formulations when using linear elements are derived. Analytical calculation of integrals and the singularity treatment are described in the appendices of the dissertation. Finally, the expressions for the calculation of the electric field and the capacitance matrix are presented.

### **Methods for computation acceleration and matrix compression**

Since, as was already mentioned, the use of the boundary element method with Green's functions creates a densely populated system matrix, whose calculation can be associated with great memory requirements and computational costs, special techniques are used in order to solve problems where the system matrix requires more memory than the maximum memory of the computer, without the change of geometry and discretization to reduce the number of unknowns. An overview of methods and techniques for approximation of the system matrix and acceleration of the computation is given in the third chapter. These methods are characterized by reduced computational complexity and their application is very important for solving major scale problems.

Since the fast multipole method is the principal representative of physical methods, this method has been briefly explained. Since adaptive cross approximation is an algebraic method, it is based on the use of hierarchical matrices. Hierarchical matrices are algebraic structures introduced to allow dense matrices to be approximated by using a larger number of blocks which are sorted in a hierarchical tree structure. In this dissertation, information about the geometry is used for matrix clustering and building the tree structure. Matrix clustering can be done in several ways which are described in the third chapter. After dividing the system matrix into blocks, the admissibility criterion is used to denote which cluster pairs are admissible. If diameters of the clusters are small when compared their distance, they are branded as admissible.

---

Blocks that are considered as admissible can be approximated by low-rank matrices. Blocks that are determined not to be admissible are computed directly without any approximation. Two methods for low-rank approximation are described in the third chapter. Firstly, a brief overview of the singular value decomposition is given. Then, a comprehensive description of the adaptive cross approximation algorithm is presented. The goal of this algorithm is to approximate the rectangular system matrix by lower-rank matrices for known error tolerance. The description of the algorithm stopping criterion, main parameters, and ways of implementations are presented in chapter three.

### **Implementation of the solver**

The fourth chapter shows the implementation of the developed methodology using *Matlab R2018b* program package. The development of the code for the calculation of the electric field and the capacitance matrix using the boundary element method is described. Three simple problem examples, showing the possibilities and limitations of the developed methodology, are presented. These examples include a simple example of infinitely long conductors, an example of two axially-symmetric conductors, and an example of electrostatic calculation on a coaxial cable. The examples confirm the applicability of the dissertation assumptions mentioned before. The implementation schema of the adaptive cross approximation algorithm with the developed methodology is also presented, along with the description of the iterative method used to solve the linear equation system in the newly developed solver.

### **Computation of electric field and capacitance matrix of transformer windings**

The fifth chapter of the dissertation provides two examples of the transformer winding electric field and capacitance matrix calculation using the developed methodology. Two transformer models are defined.

The first model is used to verify the results by benchmarking the results obtained with the developed methodology with the results obtained using professional software *Infolytica® ElecNet 7.5.1* based on the finite element method. Analysis of the results demonstrates the advantages and the applicability of the developed methodology.

The second model serves to analyze the results of the implementation of the adaptive cross approximation algorithm. Adaptive cross approximation is applied in order to increase solver efficiency. Presented results show the potential of the adaptive cross approximation algorithm and its applicability to the electrostatic computations of electrical devices like transformers.

### **Conclusion**

In conclusion, electrical field calculation is particularly important when designing electrical appliances. Knowledge of the intensity of the transformer electric field when designing the insulation is very important because the insulation must be able to withstand the various electrical stresses it is subjected during the transformer operation. Therefore, it is necessary to use modelling techniques to analyze important device parameters during the design phase

---

of transformer production. Since the calculation of electrical characteristics is only part of the device design process, the results should be obtained as quickly as possible and again with the highest precision possible.

The methodology presented in this dissertation can be used for electrostatic calculations of transformer windings, but also for other electrical devices. Implementation within the Cartesian system enables flexibility during problem modelling. It should also be noted that the numerical calculation of the transformer winding capacitance matrix can be implemented easily within simulation models for voltage distribution along the transformer windings. Comparison of results using the presented method and results obtained by professional software has shown that they are in good agreement, thus confirming the applicability of the presented method. The results of the implementation of the adaptive cross approximation algorithm are also presented. Analysis of the results has shown that the implementation of the adaptive cross approximation increases the computational efficiency of the solver based on the developed methodology.

Possible future work could be oriented towards optimization of the developed 2D solver by translation of the code into a faster high-performance computing programming language and parallelisation of the code. Future work could also focus on research on coil grouping schemes in order to perform fast computations on instrument transformer models with several tens of thousands of coils on high voltage side which can, therefore, prove challenging to solve.

Scientific contributions of the presented dissertation are:

- development of the methodology for electrostatic calculation of the electric field in transformer winding insulation based on the boundary element method with approximation using linear isoparametric elements,
- acceleration of the calculation of electric field in transformer winding insulation by a combination of the developed methodology and adaptive cross approximation algorithm,
- calculation of transformer winding electric field and capacitance matrix of transformer winding with the developed solver and benchmarking against other numerical calculation methods.

**Keywords:** electric field, transformer, boundary element method, adaptive cross approximation, capacitance matrix

# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	1
1.1. Analitičke metode proračuna	5
1.2. Numeričke metode proračuna	6
1.2.1. Metoda konačnih elemenata	7
1.2.2. Metoda rubnih elemenata	8
1.3. Cilj i organizacija disertacije	10
1.4. Osnovne pretpostavke u disertaciji	11
1.4.1. Pretpostavka oblika namota transformatora	11
1.4.2. Odabir koordinatnog sustava	12
<b>2. Matematičko modeliranje pomoću metode rubnih elemenata</b>	14
2.1. Diracova $\delta$ funkcija	14
2.2. Greenova funkcija	15
2.2.1. Greenova funkcija slobodnog prostora za dvodimenzionalni slučaj	16
2.3. Osnovne formulacije metode rubnih elemenata	17
2.3.1. Galerkinova metoda	18
2.3.2. Metoda usklađivanja u točkama	19
2.4. Matematičko modeliranje funkcije izvora linearnom funkcijom	19
2.5. Postupak rješavanja dvodimenzionalnog elektrostatskog problema primjenom metode rubnih elemenata	22
2.5.1. Integralna formulacija problema	22
2.5.2. Primjena metode rubnih elemenata	24
2.5.3. Zakon očuvanja naboja	26
2.5.4. Proračun jakosti električnog polja	27
2.5.5. Proračun kapaciteta	28
2.5.6. Odabir točaka kolokacije	28
<b>3. Metode ubrzanja proračuna i kompresije matrica</b>	30
3.1. Brza metoda multipola	33

3.2.	Hijerarhijska struktura matrica . . . . .	38
3.2.1.	Klasteriranje matrice . . . . .	38
3.2.1.1.	Izrada blokovske strukture stabla . . . . .	39
3.3.	Aproksimacije matrica matricama manjeg ranga . . . . .	44
3.3.1.	Dekompozicija singularnih vrijednosti matrice . . . . .	44
3.3.2.	Adaptivna križna aproksimacija . . . . .	46
3.3.2.1.	Osnovni prikaz AKA algoritma . . . . .	47
3.3.2.2.	Kriterij zaustavljanja . . . . .	48
3.3.2.3.	Određivanje rezidualne matrice . . . . .	49
3.3.2.4.	Odabir pivota . . . . .	51
3.3.2.5.	Vrste implementacije AKA algoritma . . . . .	52
3.4.	Prekondicioniranje pomoću $\mathcal{H}$ -matrica . . . . .	55
<b>4.</b>	<b>Implementacija proračuna . . . . .</b>	<b>58</b>
4.1.	Razvoj koda proračuna električnog polja i kapaciteta primjenom metode rubnih elemenata . . . . .	58
4.1.1.	Primjer proračuna beskonačnih vodiča . . . . .	59
4.1.2.	Primjer proračuna osnosimetričnih vodiča . . . . .	63
4.1.3.	Primjer proračuna koaksijalnog kabela . . . . .	64
4.2.	Implementacija AKA algoritma s razvijenim MRE kodom . . . . .	69
4.3.	GMRES . . . . .	70
<b>5.</b>	<b>Proračun jakosti električnog polja i matrice kapaciteta namota transformatora . . . . .</b>	<b>74</b>
5.1.	Primjer proračuna modela transformatora i usporedba s rezultatima druge numeričke metode . . . . .	74
5.1.1.	Definiranje modela transformatora . . . . .	74
5.1.2.	Analiza rezultata proračuna i usporedba s metodom konačnih elemenata . . . . .	75
5.1.2.1.	Rezultati proračuna raspodjele električnog potencijala i jakosti električnog polja . . . . .	77
5.1.2.2.	Rezultati proračuna kapaciteta . . . . .	80
5.2.	Primjer proračuna modela transformatora pomoću MRE-AKA proračuna . . . . .	83
5.2.1.	Definiranje modela transformatora . . . . .	83
5.2.2.	Analiza rezultata proračuna . . . . .	85
<b>6.</b>	<b>Zaključak . . . . .</b>	<b>90</b>
6.1.	Budući rad . . . . .	91



<b>A. Analitička rješenja integrala</b> . . . . .	92
A.1. Analitička rješenja integrala . . . . .	92
A.1.1. Analitička rješenja integrala za proračun električnog potencijala . . . . .	92
A.1.2. Analitička rješenja integrala za proračun jakosti električnog polja . . . . .	93
<b>B. Parametrizacija i analitičko rješenje dobivenih integrala</b> . . . . .	95
B.1. Parametrizacija . . . . .	95
B.2. Analitičko rješenje integrala . . . . .	96
<b>C. Tretman singulariteta</b> . . . . .	98
C.1. Tretman singulariteta kod integrala . . . . .	98
<b>Literatura</b> . . . . .	99
<b>Popis simbola</b> . . . . .	109
<b>Popis slika</b> . . . . .	111
<b>Popis tablica</b> . . . . .	114
<b>Životopis</b> . . . . .	115
<b>Biography</b> . . . . .	117

# Poglavlje 1

## Uvod

Prema ANSI/IEEE [4], transformator je definiran kao statični električni uređaj, koji ne sadrži dijelove koji se kontinuirano pomiču, i koji se koristi u elektroenergetskom sustavu za prijenos energije između krugova pomoću elektromagnetske indukcije. Transformatori su uređaji koji su u uporabi više od 130 godina te su jedan od osnovnih i vrlo važnih dijelova elektroenergetskog sustava. Princip rada transformatora je poznat već dugo vremena. Zbog njihove pasivne naravi, očekivan je dug vijek rada transformatora uz manja održavanja. Radni vijek trajanja transformatora je između 25 i 50 godina. Transformatori se često zamjenjuju i prije isteka radnog vijeka zbog smanjenja gubitaka, poboljšanja učinkovitosti i drugim aspektima tijekom godina. Kod uljnih transformatora bitno je periodično provjeravati kvalitetu ulja te ulje filtrirati ili po potrebi zamijeniti. Dobra kvaliteta ulja osigurava zaštitu od električnih kvarova [2].

Ovisno o njihovoj uporabi, metodi hlađenja i konstrukciji magnetskog kruga, postoji više vrsta transformatora. Jedna od značajnijih podjela je ona temeljem vrijednosti snage i napona:

- distributivni transformatori - transformatori s nazivnim naponom do 36 kV,
- energetske transformatori- transformatori viših nazivnih snaga i napona od distributivnih [5].

Uz to, potrebno je spomenuti i vrstu specijalnih transformatora - mjerne transformatore čiji raspon nazivnih napona i snaga može dostizati nazivne napone snage i distribucijskih i energetske transformatora [6].

Prema metodi hlađenja, transformatori se dijele na:

- uljne transformatore,
- suhe transformatore.

Zbog lošijih izolacijskih svojstava, te slabijeg odvođenja topline cirkuliranjem zraka u usporedbi s uljem, suhi transformatori izrađuju se za nazivne napone do 50 kV i snage do 100 MVA. Uljni transformatori se proizvode za više napone i veće snage od suhih transformatora zbog dobrih izolacijskih svojstava i velike specifične topline transformatorskog ulja.

Elektroenergetski sustavi se obično sastoje od velikog broja proizvodnih lokacija, distribucij-

skih čvorišta i interkonekcija unutar ili između susjednih sustava. Kompleksnost sustava znači i različite prijenosne i distribucijske napone. Transformatori moraju biti postavljeni u svakoj točki gdje postoji tranzicija između naponskih nivoa. Odabir transformatora vrši se ovisno o njegovoj primjeni s naglaskom da će posebni dizajn biti istaknutiji što je veća jedinica.

Projektiranje transformatora je kompleksni zadatak gdje projektanti moraju zadovoljiti zahtjeve kupaca i struke, pritom pazeći da troškovi proizvodnje ne budu veliki. Metodologija projektiranja može biti drugačija ovisno o tipu transformatora, nazivnoj frekvenciji, te određenim konstrukcijskim karakteristikama transformatora. Danas su popularna istraživanja razvoja projektiranja i materijala, poglavito zbog velikog broja transformatora u energetske sustavima diljem svijeta zbog čega se vlasnicima sustava ekonomski isplati smanjiti gubitke u transformatorima [7]. Energetski transformatori su vrlo veliki i skupi za proizvodnju. Zato razvoj modela i računalnih simulacija transformatora štedi i vrijeme i imovinu proizvođača. Korištenjem računalnih modela smanjuje se rizik uništenja transformatora tijekom ispitivanja kojima ga je potrebno podvrgnuti. Zato provedene simulacije moraju biti vrlo detaljne. Razlog tome su kompleksna elektromagnetska zbivanja unutar transformatora tijekom njegova rada.

Dobre prakse u dizajnu, upotreba prikladnih izolacijskih materijala, kontrolirani procesi u proizvodnji i dobro održavanje osiguravaju kvalitetu i pouzdanost transformatora. Dobra verifikacija dizajna izolacije je važna za poboljšanje pouzdanosti transformatora kao i optimizaciju troška materijala.

Dizajn izolacije transformatora, koji uključuje odabir udaljenosti namota i diskova, debljine papirne izolacije te mogućnost korištenja i broj barijera, se često odabire temeljem dugogodišnjeg iskustva u proizvodnji. No, u slučajevima novog ili posebnog dizajna poželjno je napraviti dodatne simulacije i proračune pomoću računalnih metoda.

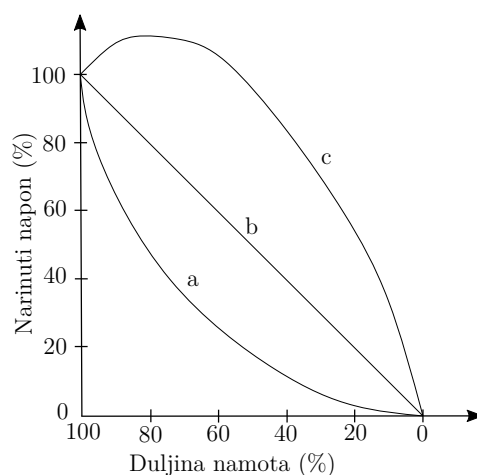
Izolacijski sustav transformatora može se podijeliti na veći i manji sustav [1]. Veći izolacijski sustav sastoji se od izolacije između namota, izolaciju između namota i jarma i izolaciju između visokonaponskih vodiča i uzemljenja. Manji sustav izolacije sastoji se od gotovo sve unutarnje izolacije namota poput izolacije između zavoja i diskova. Izolacijski sustav transformatora mora biti dizajniran tako da izdrži ne samo napone za vrijeme normalnog rada, tj. promjene napona unutar 10% nazivnog napona i 1% nazivne frekvencije, već i mnogo veće napone nastale prijelaznim pojavama. Prijelazne pojave nastaju zbog atmosferskih pražnjenja, sklopnih operacija, kratkih spojeva unutar elektroenergetskog sustava, itd. Iako postoje zaštitni uređaji poput odvodnika prenapona koji štite prilikom prijelaznih pojava, izolacija transformatora mora biti dizajnirana da u kraćem vremenskom periodu može izdržati prenapone uzrokovane atmosferskim pražnjenjima ili sklopnim operacijama. Dizajn izolacije je često iterativan proces. Prvo se odabire tip namota s dovoljnim brojem zavoja za proizvodnju željenog napona. Oba transformatorska namota moraju zadovoljiti termalne, mehaničke te zahtjeve impedancije. Tada se, uz odabir određenog električnog modela i napona uzbude, poput udarnog napona, radi pro-

račun distribucije napona duž namota. Također se radi proračun električnog polja kako bi se provjerilo jesu li vrijednosti polja dovoljno velike da dođe do električnog proboja u izolaciji. Dobivene vrijednosti električnog polja se zatim uspoređuju s određenim poznatim kriterijima za električne proboje. Ako su vrijednosti polja na nekim mjestima veće od onih određenim kriterijima, izolacija se redizajnira i proces se ponavlja sve dok kriteriji nisu zadovoljeni. Ulje i zrak imaju manju dielektričnu čvrstoću od papirne transformatorske izolacije. Zbog ovisnosti dielektrične čvrstoće ulja o udaljenosti i volumenu, uobičajena praksa jest podjela velikih uljnih prostora na manje međuprostore pomoću više tankih cilindara. Time se prostor s većom udaljenosti ili volumenom podijeli na više manjih međuprostora od kojih svaki ima veću dielektričnu čvrstoću. Dakle, redizajn izolacije se može sastojati od dodavanja više papirne izolacije oko zavoja ili kabela, povećanja uljnih i zračnih kanala, dodavanja barijera, itd. Pravila dizajna su se godinama razvijala zahvaljujući iskustvu. Uz manja odstupanja, poznata pravila dizajna većinom rezultiraju uspješnim dizajnom transformatora. Uspješnost se procjenjuje time prolazi li transformator bez kvara seriju dielektričnih testova, uz korištenje standardnih impulsnih valnih oblika ili izmjeničnih napona unutar određenih vremenskih perioda. Spomenuti testovi razvijeni su tijekom godina kako bi se moglo simulirati tipične valne oblike prijelaznih pojava [2].

Kao što je spomenuto, pri projektiranju izolacije transformatora potrebno je u obzir uzeti distribuciju napona tijekom prijelaznih pojava. U tu svrhu razvijene su metode proračuna distribucije napona po namotima transformatora. Za izmjenični ispitni napon pri nazivnoj frekvenciji distribucija napona je linearna prema broju zavoja te se može egzaktno izračunati. Pri proračunima distribucije impulsnog napona potrebno je provesti simulacije pomoću ekvivalentnih krugova koji se sastoje od distribuiranih ili koncentriranih  $R$ ,  $L$  i  $C$  parametara.

Kada je na stezaljke namota transformatora narinut impulsni napon, početna distribucija napona na namotu ovisi o vrijednostima kapaciteta. Induktiviteti namota nemaju efekt na početnu raspodjelu napona. Dakle, na početku prijelazne pojave, kapacitivne veze unutar namota određuju raspodjelu napona. Ta početna raspodjela napona je nelinearna i prikazana je krivuljom a na slici 1.1. Spomenuta nelinearnost ovisi o omjeru kapaciteta između zavoja i kapaciteta zavoja prema zemlji. Početna nelinearnost se može aproksimirati modelom temeljenom samo na kapacitivnoj mreži [8].

Kada je napon narinut dovoljno vremena (iznad 10 mikrosekundi) struje počnu teći i vodičima te polako dolazi do linearne raspodjele napona po namotima prikazane krivuljom b na slici 1.1. To se događa na kraju prijelazne pojave gdje je raspodjela napona određena otporima. Kako postoji razlika između početne i konačne raspodjele napona, dolazi do prijelazne pojave između ta dva perioda. Prijelazna raspodjela impulsnog napona prikazana je krivuljom c na slici 1.1. Za vrijeme prijelaznog razdoblja postoji konstantna razmjena energije između električnog i magnetskog polja. Dolazi do oscilacija napona koje mogu dovesti do prenapona na mjestima duž namota.



**Slika 1.1** – Raspodjela impulsnog napona duž namota transformatora. Krivuljom a označena je početna, krivuljom b konačna i krivuljom c prijelazna raspodjela napona (preuzeto iz [1], uz prijevod).

Proizvođači prilikom projektiranja transformatora koriste interne modele (eng. *white box models*) za analizu odziva namota transformatora pri prijelaznim pojavama kako bi uspješno modelirali transformator koji će zadovoljavati potrebne specifikacije i proći nužna ispitivanja prije isporuke kupcima. Uz pomoć modela namot se nadomještava električnom mrežom koja se rješava poznatim tehnikama teorije prijenosnih linija i analize mreža. Dva osnovna načina modeliranja su upotreba distribuiranih parametara [9–11] te upotreba koncentriranih elemenata [12–15]. Navedeni načini modeliranja i sama analiza odziva namota transformatora pri prijelaznim pojavama nisu tema ove disertacije nego su spomenuti kao objašnjenje važnosti točnog i brzog proračuna matrice kapaciteta prema teoriji prikazanoj u poglavlju 2. Kapaciteti proračunati navedenom metodologijom mogu se koristiti u metodama koncentriranih parametara. Primjeri proračuna kapaciteta pomoću različitih metoda mogu se vidjeti u radovima [14, 16–21]. Više o analizi odziva namota transformatora pri prijelaznim pojavama može se pronaći u literaturi [1, 7, 8, 22–25]. Utjecaj jezgre je osobito važan pri niskim frekvencijama, dok je utjecaj namota važniji pri visokim frekvencijama. Ova činjenica, zajedno sa samom kompleksnošću transformatora kao uređaja, dovodi do modela transformatora s detaljno modeliranim namotom i grubim opisom jezgre ili obrnuto, s detaljno modeliranom jezgrom dok je namot grubo opisan. Dakle, postoji velik broj modela transformatora. Dobar pregled modela transformatora za tranzijente niskih i srednjih frekvencija može se pronaći u [23].

Prethodno je navedeno kako je proračun distribucije električnog polja za vrijeme projektiranja transformatora važan za oblikovanje izolacijskog sustava. Povećanjem nazivnih napona u prijenosnim sustavima, nazivni naponi transformatora se također povećavaju što povećava udio troška izolacije u sveukupnom trošku proizvodnje transformatora. Prostor koji izolacija zauzima utječe na trošak aktivnih dijelova poput jezgre i bakrenih vodiča, kao i na količinu ulja u transformatoru. Također, ekološki je važno optimizirati izolaciju transformatora. Dodatno, povećanjem MVA vrijednosti rastu težina i veličina velikih transformatora čime se dostižu ili premašuju

limiti transporta. Svi navedeni razlozi, zajedno s konstantnim natjecanjem na svjetskom tržištu, odgovorni su za kontinuirane napore da se smanji udio izolacije u transformatorima. Navedeno je razlog potrebe razvoja točnih i brzih proračuna vrijednosti električnih polja u transformatorima.

Distribucija električnog polja može se pronaći upotrebom raznih metoda elektromagnetskog proračuna. Metode modeliranja mogu se svrstati u četiri skupine [26]:

- analitičke metode,
- numeričke metode,
- stohastičke metode,
- posebne metode.

Stohastičke se metode, koje su se u svojim počecima 1960-ih koristile za dvodimenzionalno mapiranje električnih i magnetskih polja, dugo su godina zbog razvoja numeričkih metoda bile zanemarene, a danas se koriste za neke specifične elektromagnetske probleme (propagacija signala, geomagnetska polja, histereza, određeni optimizacijski procesi). Posebne metode elektromagnetskog modeliranja i optimizacije proračuna temelje se na tehnikama poput genetskih algoritama i neuronskih mreža, a moguća je njihova primjena na transformatore [27, 28].

Naredna poglavlja daju kratki osvrt na analitičke i numeričke metode proračuna. Analitičke metode važno je spomenuti jer su to prve metode koje su se počele koristiti za elektromagnetske proračune. No, danas se pretežito za kompleksnije probleme koriste numeričke metode proračuna na kojima se temelji ova disertacija.

## 1.1 Analitičke metode proračuna

Prije široke upotrebe računala i numeričkih metoda, a u nekim slučajevima i danas, analitičke metode koriste se za dvodimenzionalnu aproksimaciju sustava s više vodiča i dielektrika unutar transformatora [21]. Analitičke metode najstarije su metode koje su korištene za mapiranje polja i sličnih veličina. Pomoću njih je moguće rješavanje samo linearnih i geometrijski jednostavnih problema. Njihova najveća prednost jest činjenica da su rezultati obično dani u fizički čistoj formi. Njihov je razvoj prestao od 1970-tih s obzirom na to da su se dotad riješili gotovo svi problemi na koje su one primjenjive. Zato su danas sve manje relevantne. No, njihova upotreba je danas korisna za probleme u kojima se mogu koristiti određena pojednostavljenja ako se želi dobiti ideja o tome kako bi rezultati problema trebali izgledati.

Analitičke metode mogu se razvrstati prema principima koje koriste za rješavanje na [26]:

- metode koje se temelje na osnovnim zakonima elektromagnetizma,
- metode koje koriste razne transformacije.

Prva skupina metoda koristi pretežito Maxwellove jednadžbe ili pak Gaussov ili Stokesov teorem [26, 29].

U drugu skupinu spadaju metode poput metode odslikavanja i tehnike konformnog preslika-

vanja (TKP , engl. *conformal mapping technique* - CMT).

Klasične metode poput metode odslikavanja mogu dati dobre rezultate ako su primjenjive na određeni problem. Za kompleksnije konfiguracije, kakve postoje unutar transformatora, takve se metode ne mogu primijeniti [1].

Tehnika konformnog preslikavanja poput Schwarz-Christoffel transformacije se također često koristila za relativno jednostavne geometrije unutar transformatora [30, 31]. Ova metoda preslikava cijelu regiju problema u novu ravninu u kojoj se konstruira rješenje pomoću nepoznatih konstanti jednadžbe transformacije. Nepoznate konstante se izračunaju rješavanjem nelinearnog skupa jednadžbi koje opisuju granice regije u originalnoj ravnini. Ova tehnika može riješiti i zakrivljene granice. Iako je ova metoda prikladna za rješavanje problema regija s jednim dielektrikom, za regije s više dielektrika približno se rješenje dobiva pretvaranjem tih regija u jednu dielektričnu regiju uporabom ekvivalentnih udaljenosti izolacije. Ova tehnika najprikladnija je za regije s malo elektroda. Za regije s više elektroda, kompliciranijim oblicima elektroda i više dielektrika tehnika konformnog preslikavanja nije prikladna.

## 1.2 Numeričke metode proračuna

U mnogo slučajeva fizička slika problema je toliko složena da je analitička rješenja teško ili nemoguće dobiti. Zato se za proračune polja često koriste numeričke metode.

Upotreba numeričkih metoda je danas najučinkovitiji i raznovrsniji način rješavanja problema u elektromagnetizmu. Za razliku od analitičkog rješenja, koje je često kontinuirano i poznato u svakoj točki regije problema, numeričko rješenje daje vrijednosti u diskretnim točkama regije problema, dok se u ostatku regije rješenje dobiva pomoću interpolacije ili sličnih tehnika [26]. Numeričko rješenje je približno i ovisi o raznim čimbenicima poput odabira numeričkog algoritma i parametara mreže elemenata. Zato se dobiveno rješenje treba provjeriti s obzirom na konvergenciju i stabilnost rezultata.

Cilj svake numeričke metode jest što manja razlika između dobivenog približnog i točnog rješenja. Pri tome problem mora biti riješen u što kraćem vremenskom periodu. Veličina i složenost problema koji se mogu riješiti numeričkim metodama rastu zajedno s daljnjim razvojem računala. Razlog tome je da što je problem složeniji i veći, to su veći memorijski i vremenski zahtjevi proračuna. To znači da bi budućnost mogla donijeti još lakše rješavanje problema koji su danas vrlo kompleksni, a ponekad i nerješivi.

Postoji velik broj numeričkih metoda te razne klasifikacije tih metoda u skupine [32–34]. Osnovna podjela numeričkih metoda jest na:

- prostorne metode (engl. *domain methods*),
- granične metode (engl. *boundary methods*).

Svaka od ovih skupina sadrži dodatne podskupine, ovisno o samom pristupu problemu. Također,

postoje metode koje kombiniraju karakteristike obje skupine, kao i metode koje ne spadaju u ove skupine. Njih se u ovoj disertaciji neće opisivati.

Prostorne metode temelje se na diferencijalnim jednadžbama. Njihovo ime proizlazi iz činjenice da cijeli prostor (domena) modela mora biti diskretiziran. Metoda konačnih razlika (MKR, engl. *finite difference method - FDM*), metoda konačnih elemenata (MKE, engl. *finite element method - FEM*) i metoda prijenosnih linija (MPL, engl. *transmission line matrix method - TLM*) predstavljaju primjere prostornih metoda.

Među danas najpoznatijim prostornim metodama prva je razvijena metoda konačnih razlika. Ova metoda može se koristiti za izračune polja [33, 35–37]. MKR daje dobre rezultate te može rješavati i probleme zaobljenih granica ako je na granici dovoljno velik broj točaka. Mane ove metode leže u tome što nije primjenjiva na probleme s nepravilnim granicama i nije prikladna za probleme s brzo promjenjivim varijablama.

Jedna od najboljih i najpopularnijih numeričkih metoda je metoda konačnih elemenata. Ova metoda koristi se već desetljećima pri rješavanju elektrostatskih problema [32, 33]. Kako će se rezultati dobiveni metodologijom opisanoj u poglavlju 2 uspoređivati s rezultatima dobivenim pomoću MKE, u sljedećem potpoglavlju nalazi se kraći opis navedene metode.

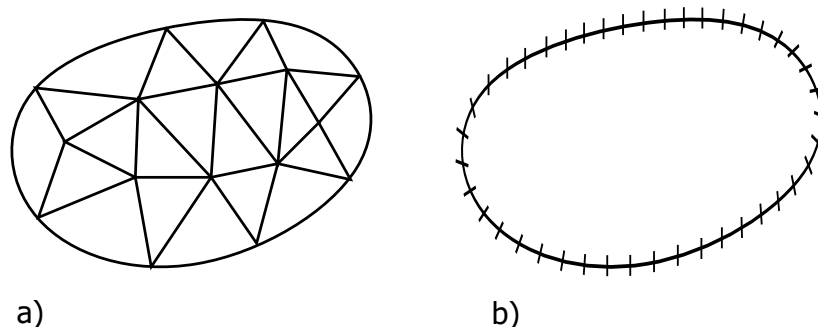
Za razliku od prostornih metoda, granične metode temelje se na integralnim jednadžbama, a samo granice razmatranog područja moraju biti diskretizirane. Neke od metoda koje pripadaju ovoj skupini su: metoda momenata (MOM, engl. *method of moments*), metoda simuliranih naboja (MSN, engl. *charge simulation method - CSM*), metoda simuliranih površinskih naboja (MPN, engl. *surface charge simulation method - SCSM*) i metoda rubnih elemenata (MRE, engl. *boundary element method - BEM*). Potrebno je dodati da se metoda momenata ponekad u literaturi naziva i metodom rubnih elemenata, te će se ta dva naziva za potrebe ove disertacija smatrati sinonimima.

Primjena metode simuliranih naboja prikazana je u [38] gdje je korištena za proračun visokonaponskih polja i u [39] gdje je predstavljen 3-D proračun električnog polja transformatora pomoću te iste metode. Proračun unutar ove disertacije temelji se na metodi rubnih elemenata te su osnovna svojstva MRE opisana u jednom od sljedećih potpoglavlja.

### **1.2.1 Metoda konačnih elemenata**

Metoda konačnih elemenata je danas komercijalno najrazvijenija i najčešće korištena metoda za probleme elektromagnetskih polja u elektrotehnici. MKE je fleksibilna i robusna metoda koja se može primijeniti na razne složene geometrije i različite medije. MKE se može koristiti za rješavanje vremenski ovisnih, linearnih, nelinearnih, dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih problema. Razvoj MKE započeo je 1960-ih, a 1980-te napisana je prva knjiga o primjeni metode konačnih elemenata u elektromagnetizmu [33]. Tih godina započeo je razvoj velikog broja današnjih komercijalnih programa koji se temelje na MKE.





**Slika 1.2** – Diskretizacija domene u a) MKE i b) MRE

Osnovna ideja metode konačnih elemenata jest podjela domene problema u veći broj malih povezanih konačnih podregija, tj. konačnih elemenata. Takva diskretizacija domene problema vidljiva je na slici 1.2a). Oblik i veličina elemenata su proizvoljni pa se vrlo lako može prilagoditi granici problema. Također, ovisno o problemu prilagođava se gustoća elemenata.

Proces proračuna pomoću MKE može se svesti na sljedeće korake [33]:

- diskretizacije domene problema u podregije te odabir odgovarajuće funkcije približenja za elemente,
- izvod jednadžbe za elemente pomoću varijacijskog ili principa težinskih ostataka,
- sastavljanje jednadžbe matrice elemenata u svakom čvoru domene kako bi se oblikovalo matricu sustava,
- rješavanje sustava jednadžbi,
- dodatni proračuni.

Glavni nedostatak ove metode je da, poput drugih prostornih metoda, zahtijeva diskretizaciju cijele regije problema što nije uvijek neophodno te je vremenski i memorijski zahtjevno. Neovisno o tome, velik je broj radova u kojima se primjenjuje MKE s veoma dobrim rezultatima [32,33,40]. Primjeri upotrebe MKE za analizu električnih polja u izolaciji transformatora mogu se pronaći u [3,41–47].

## 1.2.2 Metoda rubnih elemenata

Metoda rubnih elemenata također je često korištena metoda za rješavanje problema u elektromagnetizmu. Upotrebom MRE diferencijalne jednadžbe se transformiraju u integralne. Integralne jednadžbe se rješavaju na granicama različitih regija koje su podijeljene na manje segmente, tj.

granične elemente. Takva diskretizacija prikazana je na slici 1.2b). MRE se može primijeniti na složene geometrije te može modelirati probleme s brzo promjenjivim varijablama bolje od MKE [34].

Pristup rješavanju graničnih problema putem tehnike integralnih jednadžbi može se pratiti do 1903. godine kada je Fredholm iskoristio diskretizirane integralne jednadžbe za rješenje problema električnog potencijala čime je postavljen temelj za indirektan pristup pomoću graničnih elemenata. No, do 1960-tih i razvoja računala nije bilo nikakvog većeg razvoja u numeričkim metodama za rješavanje integralnih jednadžbi. Tada su Jaswon, Symm, Harrington, Rizzo i Cruse napravili temelje metode rubnih elemenata nakon čega je do danas nastavljen daljnji razvoj i primjena ove metode što se može vidjeti u brojnoj literaturi [32–35, 48–56]. Primjeri primjene MRE za analizu električnih polja ili izračun kapaciteta prikazani su u [3, 16, 57–61].

MRE ima određene prednosti u odnosu na ostale numeričke metode [33, 34]:

- lakšu implementaciju u odnosu na MKE,
- način diskretizacije omogućuje smanjenje dimenzije problema što znači manje vremena za proračun i jednostavnije skladištenje podataka pošto za jednaku preciznost treba manji broj elemenata nego kod MKE
- često točnije rješenje u blizini granice u odnosu na MKE,
- jednostavno modeliranje problema s otvorenim granicama.

Glavni nedostaci MRE su [26]:

- gusta matrica sustava,
- fundamentalno rješenje jednadžbe (Greenova funkcija) mora biti poznata,
- singulariteti se moraju uzeti u obzir i tretirati,
- nelinearni problemi se ne mogu riješiti izravno, moraju se uvesti volumni integrali što poništava jednu od prednosti MRE.

Za bolji pregled i usporedbu, neke osnovne razlike između MRE i MKE prikazane su u tablici 1.1 [44].

Kao što je već navedeno, glavni problem u primjeni MRE je gusta matrica sustava. Memorij-ski zahtjevi i složenost troškova proračuna (engl. *computational cost complexity*) su složenosti  $O(N^2)$ , gdje je  $N$  broj nepoznanica. Za prevladavanje ovog problema razvijeni su razni pristupi ubrzanja proračuna. Neki od njih su paralelizacija izvođenja proračuna višejezgrenim procesorima [62] ili grafičkim procesorima [63–65], i primjena različitih metoda i tehnike ubrzanja proračuna i kompresije matrice sustava [61, 65–76].

Primjena metoda ubrzanja proračuna i kompresije matrice sustava, konkretnije algoritma adaptivne križne aproksimacije (AKA, engl. *adaptive cross approximation - ACA*), važan je dio ove disertacije. Zato je u poglavlju 3 prikazan pregled osnovnih metoda ubrzanja s naglaskom na AKA te se u ovom poglavlju neće dodatno opisivati. Implementacija i rezultati primjene AKA prikazani su u poglavljima 4 i 5.

**Tablica 1.1** – Usporedba MRE i MKE

MRE	MKE
Potrebna samo diskretizacija granice	Potrebna diskretizacija cijele domene
Prvo se izračuna rješenje na granici, a zatim se rješenje u točkama domene računa kao poseban korak	Cjelokupno rješenje domene izračunava se kao dio rješenja
Aproksimiraju se samo uvjeti na granici	Aproksimira se diferencijalna jednadžba
Gusta matrica sustava	Rijetka i simetrična matrica sustava
Teži izračun integrala, česta pojava singulariteta	Integrali na elementima su jednostavni za izračun
Ovisi o fundamentalnom rješenju, ne može riješiti sve linearne probleme	Široko primjenjiva metoda, moguće rješavanje nelinearnih problema
Jednostavnija računalna implementacija	Složenija računalna implementacija

### 1.3 Cilj i organizacija disertacije

Prethodna potpoglavlja opisala su motivaciju za proračun i metode proračuna električnog polja i kapaciteta namota transformatora. Cilj ove disertacije je razvoj metodologije za rješavanje elektrostatskih problema s linearnim izoparametarskim elementima koji se temelji na metodi rubnih elementa koja se može primijeniti na namot transformatora. Za proračun električnog polja i kapaciteta namota transformatora izabrana je primjena MRE zbog smanjenja dimenzije problema, relativno točnog rezultata uz malu diskretizaciju zahvaljujući omjeru udaljenosti vodiča od jezgre i njihovoj međusobnoj udaljenosti, te jednostavnijem programiranju metode. Ova disertacija donosi i prikaz poboljšanja razvijene metodologije implementacijom algoritma adaptivne križne aproksimacije. Rezultati proračuna pomoću razvijene metodologije i poboljšane metodologije bit će uspoređeni s rezultatima profesionalnih programskih alata temeljenim na MKE. Potrebno je napomenuti kako se razvijena metodologija temelji na poznatoj geometriji transformatora pa se govori o internim modelima.

Doktorska disertacija je organizirana u šest poglavlja, uključujući uvod i zaključak, te tri dodatka.

U drugom poglavlju prikazano je matematičko modeliranje primjenom metode rubnih elemenata. Prvo su prikazani osnovni izvod Greenove funkcije za dvodimenzionalni slobodni prostor, osnovne formulacije metode rubnih elemenata, te izvod funkcije izvora pomoću linear-

nih funkcija. Zatim je opisan postupak rješavanja dvodimenzionalnog elektrostatskog problema primjenom metode rubnih elemenata gdje su izvedene potrebne integralne formulacije za proračun električnog polja i kapaciteta.

Treće poglavlje donosi pregled metoda ubrzanja i kompresije matrice numeričkih proračuna. Prikazana je osnovna teorija i razvoj brze metode multipola, hijerarhijskih matrica i križne aproksimacije. Detaljno je objašnjen algoritam adaptivne križne aproksimacije i prikazane su njegove moguće implementacije.

U četvrtom poglavlju prikazana je implementacija proračuna u programskom paketu MATLAB. Opisan je razvoj koda proračuna električnog polja i kapaciteta primjenom metode rubnih elemenata. Prikazana su tri primjera proračuna koja prikazuju mogućnosti i ograničenja razvijene metodologije. Zatim je prikazan način implementacije razvijenog koda i AKA algoritma te je dan opis iterativne metode koja se koristi za rješavanje linearnog sustava jednadžbi u MKE-AKA proračunu.

Peto poglavlje donosi primjere proračuna namota transformatora putem razvijene metodologije. Definiraju se dva modela transformatora za koje se potom vrši proračun kapaciteta namota i električnog polja na namotu. Prvi model koristi se za verifikaciju rezultata uspoređivanjem rezultata dobivenih razvijenom metodologijom s rezultatima dobivenim metodom konačnih elemenata. Drugi model služi za analizu rezultata dobivenih upotrebom MKE-AKA proračuna.

Završno poglavlje daje zaključke disertacije s opisom korisnosti rezultata istraživanja. Navedene su i smjernice za daljnji rad.

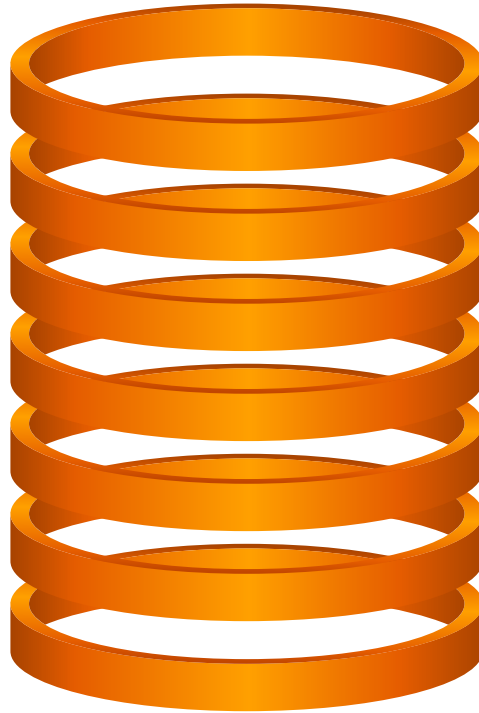
## **1.4 Osnovne pretpostavke u disertaciji**

Za rješavanje nekog fizičkog problema, on mora biti opisan nekim matematičkim modelom. Kako se fizički model može opisati pomoću različitih matematičkih modela, za svaki proračun je potrebno odabrati određene pretpostavke. Njihovim odabirom dobiti će se specifični matematički opis problema. U ovom potpoglavlju prikazane su osnovne pretpostavke koje se koriste u ovoj disertaciji pri proračunu električnog polja i matrice kapaciteta namota transformatora.

Razvijeni matematički model temelji se na detaljnom poznavanju geometrije problema, što je u slučaju namota transformatora geometrija namota i korišteni materijali.

### **1.4.1 Pretpostavka oblika namota transformatora**

Namoti se sastoje od vodiča protjecanih strujom, omotanih oko dijelova jezgre. Vodiči moraju biti dobro izolirani, poduprijeti i hlađeni kako bi izdržali uvjete pri normalnim operacijama, ali i testne uvjete. Bakar i aluminij su primarni materijali koji se koriste za izradu transformatorskih namota. Dok je aluminij lakši i jeftiniji od bakra, veći poprečni presjek aluminijskog treba za



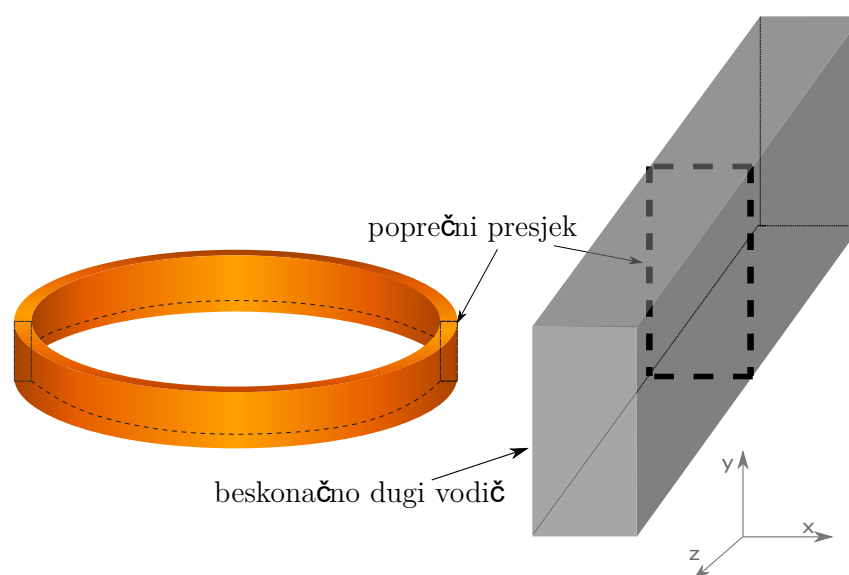
**Slika 1.3** – Namot u obliku prstenova

provođenje struje istog iznosa. Bakar ima veću mehaničku čvrstoću te se gotovo ekskluzivno koristi za izradu vodiča. Vodiči koji se koriste u energetske transformatorima gotovo uvijek imaju pravokutni poprečni presjek. Zato će se u ovoj disertaciji raditi proračuni za namote takvog tipa.

Prvo približenje u disertaciji tiče se izgleda namota. Spiralni namoti u ovoj će se disertaciji promatrati kao prstenovi istog polumjera. Pritom, broj prstenova odgovarat će broju zavoja unutar namota. Time će se olakšati izračun međuzavojnih i dozemnih kapaciteta. Ovakvo, dvodimenzionalno približenje, često je u proračunima parametara transformatora [3, 8, 77] zbog omjera visine vodiča namota u odnosu na polumjer namota čime se ne unosi značajna geometrijska pogreška u proračun. Aproksimacija spiralnog namota sa 7 zavoja pomoću prstenova može se vidjeti na slici 1.3.

#### **1.4.2 Odabir koordinatnog sustava**

U prethodnom potpoglavlju pretpostavljen je izgled namota u obliku prstenova. To znači da su vodiči osnosimetrični te ih je moguće riješiti u cilindričnom koordinatnom sustavu. U ovoj disertaciji uvesti ćemo pretpostavke koje nam omogućuju modeliranje u Kartezijevom koordinatnom sustavu. Modeliranje u Kartezijevom koordinatnom sustavu omogućuje širu



**Slika 1.4** – Približenje pomoću beskonačno dugog ravnog vodiča

primjenu razvijene metodologije pošto se onda ona može primijeniti i na druge probleme, npr. izračun kapaciteta kabela. Također, takav model u budućnosti će omogućiti lakšu dodatnu implementaciju nekih od metoda ubrzanja proračuna, poput brze metode multipola (BMM).

Zakrivljenost vodiča se zanemaruje te se osnosimetrični vodič aproksimira pomoću beskonačno dugog ravnog vodiča kao prema slici 1.4. Kako se koristi MRE, to znači integraciju po granicama poprečnog presjeka u  $x$  i  $y$  smjeru.

Ovakvo približenje je moguće zbog velikog omjera polumjera namota u odnosu na same dimenzije vodiča. Slična primjena pri proračunima kapaciteta nalazi se u [78, 79]. Opravdanost ovakvog približenja zaključit će se u poglavlju 5 gdje će se rezultati dobiveni razvijenom metodologijom usporediti s rezultatima dobivenim pomoću profesionalnih programskih paketa.

## Poglavlje 2

# Matematičko modeliranje pomoću metode rubnih elemenata

U prethodnom poglavlju prikazan je kratki pregled razvoja metode rubnih elemenata. Ovo poglavlje predstavlja osnovnu teoriju i postupke prilikom matematičkog modeliranja pomoću metode rubnih elemenata. Sam proces proračuna upotrebom metode rubnih elemenata može se prikazati u četiri koraka [32]:

- određivanje i definicija integralne jednadžbe,
- diskretizacija integralne jednadžbe u matricu pomoću temeljnih i težinskih funkcija,
- proračun elemenata matrice sustava,
- rješenje linearnog sustava jednadžbi.

### 2.1 Diracova $\delta$ funkcija

Diracova  $\delta$  funkcija definira se kao [33]:

$$\begin{cases} \delta(\vec{r} - \vec{r}') = 0, & \vec{r} \neq \vec{r}' \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\vec{r} = 1, & \vec{r} = \vec{r}'. \end{cases} \quad (2.1)$$

Za  $\delta$  vrijedi:

$$f(\vec{r}') = \int_{\Omega} f(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d\Omega. \quad (2.2)$$

Dakle, funkcija  $u(\vec{r})$  u jednadžbi s proizvoljnim operatorom  $L$ :

$$Lu(\vec{r}) = f(\vec{r}') \quad (2.3)$$

može se izraziti kao:

$$u(\vec{r}) = \int_{\Omega} f(\vec{r}') L^{-1} \delta(\vec{r}, \vec{r}') d\Omega. \quad (2.4)$$

## 2.2 Greenova funkcija

Integralna jednačba se iz parcijalne diferencijalne jednačbe može dobiti izgradnjom pomoćne funkcije poznate pod imenom Greenova funkcija za taj problem. Greenova funkcija je poveznica između diferencijalne i integralne formulacije jednačbe.

Promatra se jednačba [32]:

$$L\Phi = g \quad (2.5)$$

gdje je  $L$  proizvoljni operator,  $g$  funkcija izvora i  $\Phi$  nepoznata funkcija. Greenova funkcija omogućuje metodu kojom se radi s funkcijom izvora [62].

Ako se želi odrediti polje uzrokovano distribuiranim izvorom potrebno je sumirati doprinose svakog segmenta funkcije izvora koji se odrede primjenom Greenove funkcije. Ako je  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  polje u nekoj točki određenoj vektorom  $\vec{r}$ , uzrokovano funkcijom izvora u točki  $\vec{r}'$ , tada se polje uzrokovano funkcijom izvora  $g(\vec{r}')$  u traženoj točki određuje integralom  $g(\vec{r}')G(\vec{r}, \vec{r}')$  po  $\vec{r}'$  u dijelu prostora gdje se nalazi izvor [62]. Greenova funkcija  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  fizikalno predstavlja potencijal u  $\vec{r}$  uzrokovan točkastim nabojem u  $\vec{r}'$ .

Ako je operator  $L$  iz jednačbe 2.5 diferencijalni, Greenova funkcija se definira kao rješenje jednačbe:

$$LG(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r}, \vec{r}') \quad (2.6)$$

gdje su  $\vec{r}$  i  $\vec{r}'$  radij vektori točke promatranja i točke izvora, a  $\delta$  je Diracova funkcija definirana u prethodnom potpoglavlju.

Svojstva Greenove funkcije su [32]:

- (a) svugdje, osim u točkama gdje se nalazi izvor  $\vec{r}'$ , zadovoljava jednačbu  $LG = 0$
- (b) simetrična je u točki izvora i u točki u kojoj se traži polje:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = G(\vec{r}', \vec{r}) \quad (2.7)$$

- (c) zadovoljava propisani rubni uvjet te na granici  $B$  vrijedi:

$$G = f \quad (2.8)$$

- (d) usmjerena derivacija  $\frac{\partial G}{\partial n}$  je kontinuirana osim u točki izvora  $\vec{r}'$  gdje je diskontinuitet određen



jednadžbom:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_S \frac{\partial G}{\partial n} dS = -1, \quad (2.9)$$

pri čemu je  $n$  normala na sferu radijusa  $\varepsilon$ .

Razvoj modela temeljenog na integralnim jednadžbama počinje pravilnim odabirom prikladne Greenove funkcije za taj problem. Kako se u daljnjem radu koristi Greenova funkcija slobodnog prostora u dvodimenzionalnom slučaju ukratko je prikazana njena formulacija.

### 2.2.1 Greenova funkcija slobodnog prostora za dvodimenzionalni slučaj

Neovisno o rubnim uvjetima rješenje jednadžbe s proizvoljnim operatorom uzrokovano izvorom u beskonačnom prostoru zove se fundamentalno rješenje i zadovoljava sljedeću jednadžbu [33]:

$$LF(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (2.10)$$

Razlika između Greenove funkcije i fundamentalnog rješenja jest ta da je Greenova funkcija povezana s rubnim uvjetima dok je fundamentalno rješenje definirano u neograničenom slobodnom prostoru. Greenova funkcija u slobodnom prostoru je fundamentalno rješenje jednadžbe. Promatra li se dvodimenzionalni problem za operator  $L$  vrijedi:

$$L = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (2.11)$$

U dvodimenzionalnim polarnim koordinatama, gdje je  $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}$  pri čemu  $x \neq x', y \neq y'$ , slijedi jednadžba:

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) = 0. \quad (2.12)$$

Rješenje jednadžbe 2.12 dobije se dvostrukom integracijom:

$$F = c_1 \ln(r) + c_2. \quad (2.13)$$

Koeficijent  $c_2$  odabiremo kao  $c_2 = 0$ . Koeficijent  $c_1$  se može izračunati primjenom svojstva prikazanog jednadžbom 2.9

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \oint_S \frac{\partial F}{\partial r} dS = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{c_1}{r} r d\alpha = 2\pi c_1 = -1. \quad (2.14)$$

Dakle, za  $c_1$  vrijedi:

$$c_1 = -\frac{1}{2\pi}, \quad (2.15)$$

iz čega proizlazi:

$$F = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}. \quad (2.16)$$

Pomoću prethodnih relacija, Greenova funkcija  $G$  za Laplacijan u dvodimenzionalnom slučaju definira se kao:

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} + K \quad (2.17)$$

pri čemu se  $K$  odabire tako da Greenova funkcija zadovolji propisani rubni uvjet na granici.

## 2.3 Osnovne formulacije metode rubnih elemenata

Metodom rubnih elemenata linearne integralne jednadžbe svode se na sustav linearnih algebarskih jednadžbi. Opća linearna, nehomogena jednadžba može se zapisati u obliku [80]:

$$L(f) = g \quad (2.18)$$

gdje je  $L$  integralni, diferencijalni ili integrodiferencijalni operator,  $g$  je poznata funkcija izvora, a  $f$  je nepoznata funkcija koju je potrebno odrediti.

Prvi korak je razvoj funkcije  $f$  u red odabranih funkcija  $f_i, i = 1, \dots, N$  u domeni funkcije  $f$ :

$$f = \sum_{i=1}^N \alpha_i f_i \quad (2.19)$$

gdje su  $\alpha_i$  nepoznati koeficijenti razvoja [81]. Ovaj se korak naziva diskretizacija funkcije  $f$ , a funkcije  $f_i$  nazivaju se temeljne funkcije. Uz  $N = \infty$  dobilo bi se točno rješenje ali se u praksi koristi približno rješenje pomoću konačnog broja funkcija. Uvrštavanjem jednadžbe 2.19 u jednadžbu 2.18 dobije se:

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i L(f_i) = g. \quad (2.20)$$

Prethodna jednadžba vrijedi u svakoj točki domene  $\Omega$  funkcije  $f_i$  pa za skup težinskih funkcija  $w_j, j = 1, \dots, N$  vrijedi:

$$\int_{\Omega} w_j \left\{ \sum_{i=1}^N \alpha_i L(f_i) - g \right\} d\Omega_i = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.21)$$

Prethodni izraz može se zapisati u matričnom obliku:

$$\mathbf{A}\alpha_i = \mathbf{b} \quad (2.22)$$

gdje se  $\mathbf{A}$  računa kao:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} w_1 L(f_1) d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} w_1 L(f_N) d\Omega \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_{\Omega} w_N L(f_1) d\Omega & \cdots & \int_{\Omega} w_N L(f_N) d\Omega \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

a  $\mathbf{b}$ :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} w_1 g d\Omega \\ \vdots \\ \int_{\Omega} w_N g d\Omega \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

Interakcija svake temeljne funkcije s ostalim temeljnim funkcijama događa se pomoću Greenove funkcije te je matrica sustava potpuno popunjena. Svi elementi matrice moraju biti eksplicitno spremljeni u memoriju računala. Ovo je svojstvo već spomenuto u uvodu a vizualno se može potvrditi izrazom 2.23.

Odabir temeljnih i težinskih funkcija važan je za točnost i učinkovitost metode momenata. Pri njihovom odabiru treba uzeti u obzir željenu točnost traženog rješenja, kompleksnost integrala za dobivanje elemenata matrica i samu veličinu matrica. Odabir mogućih temeljnih funkcija razrađen je u raznoj literaturi [33, 62, 82, 83]. Pri odabiru težinskih funkcija najčešće se primjenjuju dvije metode: usklađivanje u točkama i Galerkinova metoda.

### 2.3.1 Galerkinova metoda

U Galerkinovoj metodi težinska funkcija jednaka je temeljnoj:

$$w_i = f_i. \quad (2.25)$$

Prednost ove metode je da se određivanjem temeljnih funkcija odmah dobiju i težinske. Time se rubni uvjeti primjenjuju u cijeloj domeni rješenja za razliku od metode odabira u točkama gdje se to događa u određenim točkama. Ukoliko red matrične jednadžbe nije velik, može se očekivati brza konvergencija i dobra preciznost. Nedostatak ove metode je duže vrijeme potrebno za izračun elemenata matrice višestrukim numeričkim integracijama.

### 2.3.2 Metoda usklađivanja u točkama

Ako se Diracove  $\delta$  funkcije koriste kao težinske funkcije, dakle ako je:

$$w_i = \delta(\vec{r} - \vec{r}'_i) = 0 \quad (2.26)$$

onda se govori o metodi usklađivanja u točkama \* ili metodi kolokacije.

Usklađivanje u točkama ili kolokacija podrazumijeva unaprijed određene točke u kojima približno rješenje mora zadovoljiti jednadžbu. Upotreba Diracovih  $\delta$  funkcija pojednostavljuje izračun koeficijenata matrice u odnosu na Galerkinovu metodu jer se, zahvaljujući svojstvu opisanom jednadžbom 2.2, izbjegne jedna numerička integracija. Točnost i konvergencija ovise o broju i položaju točaka. Dakle, dovoljno velik broj točaka daje zadovoljavajuće približno rješenje. Metoda usklađivanja u točkama koristi se u ovoj disertaciji za odabir težinskih funkcija.

## 2.4 Matematičko modeliranje funkcije izvora linearnom funkcijom

Rješavanje integralne jednadžbe metodom rubnih elemenata podrazumijeva da se nepoznata funkcija izvora zamijeni približnim funkcijama opisanim konačnim brojem parametara. Točnost proračuna ovisi o točnosti funkcije izvora. Veća točnost može se postići korištenjem složenijih funkcija približenja funkcije izvora. Povećanje složenosti funkcija približenja, uz konstantan broj rubnih elemenata, povećava broj nepoznanica u proračunu i povećanje zahtjeva na računalne resurse. Ako se složenost funkcija približenja ne mijenja točnost se može povećati i korištenjem većeg broja rubnih elemenata no i tada broj nepoznanica značajno raste. Razvoj i upotreba funkcija približenja različite složenosti (konstantnih, linearnih, polinomima II stupnja i polinomima III stupnja) može se pronaći u [62, 82, 83].

Kako se u ovom radu koriste linearne funkcije približenja, u ovom potpoglavlju dan je izvedeni izraz za približenje nepoznatih funkcija izvora linearnom funkcijom.

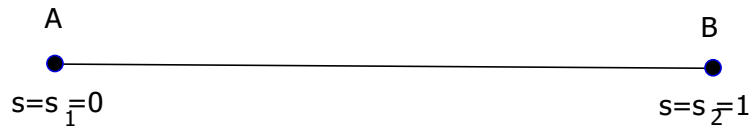
Kod približenja linearnim funkcijama na  $i$ -tom rubnom elementu potrebna su 2 parametra:

$$g_i(s) = c_1 + c_2s. \quad (2.27)$$

Slika 2.1 prikazuje rubni element na kojem se približenje funkcije izvora radi pomoću linearnih funkcija. Temeljne funkcije moguće je dobiti uvrštavanjem vrijednosti nepoznate funkcije u

---

\*engl. point matching method



**Slika 2.1** – Približenje linearnim funkcijama na jednodimenzionalnom rubnom elementu

čvorovima:

$$g_i(0) = c_1 + c_2 \cdot 0 = g_A \quad (2.28)$$

$$g_i(1) = c_1 + c_2 \cdot 1 = g_B.$$

Iz 2.28 slijede konstante:

$$c_1 = g_A \quad (2.29)$$

$$c_2 = g_B - g_A.$$

Uvrštavanjem konstanti iz 2.29 u 2.27 dobije se:

$$g_i(s) = g_A + (g_B - g_A)s, \quad (2.30)$$

što se može kraće zapisati kao:

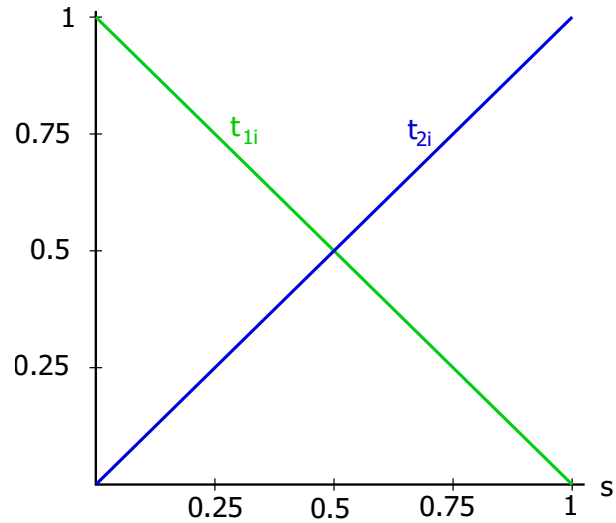
$$g_i(s) = \sum_{k=1}^2 a_{ki} t_k(s), \quad (2.31)$$

gdje su parametri približenja vrijednosti funkcije izvora u čvorovima

$$a_{1i} = g_A \quad (2.32)$$

$$a_{2i} = g_B$$

a funkcije  $t_k(s)$  su linearne funkcije po nezavisnoj varijabli  $s$ :



**Slika 2.2** – Temeljne funkcije približenja linearnom funkcijom na jednodimenzionalnom rubnom elementu

$$t_1 = 1 - s \quad (2.33)$$

$$t_2 = s.$$

Temeljne funkcije prikazane na slici 2.2 iz 2.33 kraće se mogu zapisati kao:

$$t_k(s) = \sum_{m=1}^2 b_{km} s^{m-1} \quad (2.34)$$

gdje je  $b_{km}$  matrica koeficijenata:

$$b_{km} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Sada se približenje nepoznate funkcije izvora na  $i$ -tom rubnom elementu pomoću linearnih funkcija može zapisati jednačinom:

$$g_i(s) = \sum_{k=1}^2 a_{ki} \sum_{m=1}^2 b_{km} s^{m-1}. \quad (2.36)$$

## 2.5 Postupak rješavanja dvodimenzionalnog elektrostatskog problema primjenom metode rubnih elemenata

Prvi korak u postupku rješavanja dvodimenzionalnog elektrostatskog problema je formulacija integralne jednadžbe problema nakon čega je moguće primjeniti metodu rubnih elemenata kako bi se pronašla nepoznata funkcija izvora koja je, u slučaju elektrostatskog problema, nepoznata raspodjela gustoće naboja po rubnim elementima.

### 2.5.1 Integralna formulacija problema

Potrebno je izvesti integralne jednadžbe pomoću kojih se mogu izračunati električni potencijal i polje sustava vodiča na poznatom potencijalu i regija dielektrika s različitim dielektričnim konstantama. Navedeni sustav prikazan je na slici 2.3. Pri tome su sa  $\vec{n}$  označeni jedinični vektori okomiti na pojedinu granicu  $\Gamma$ .

Skalarni električni potencijal zadovoljava Laplaceovu jednadžbu [84]:

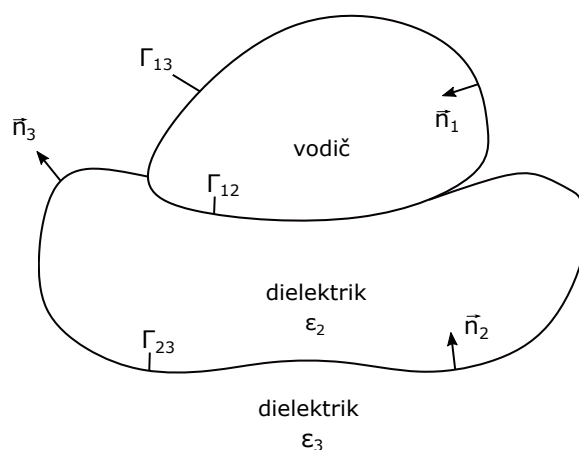
$$\Delta \varphi_i = 0 \quad (2.37)$$

a na granicama moraju biti zadovoljeni rubni uvjeti:

$$\varphi_1(\vec{r}) = \varphi_2(\vec{r}) = \varphi_{10}, \vec{r} \in \Gamma_{12}, \quad (2.38)$$

$$\varphi_1(\vec{r}) = \varphi_3(\vec{r}) = \varphi_{10}, \vec{r} \in \Gamma_{13}, \quad (2.39)$$

$$\varphi_2(\vec{r}) = \varphi_3(\vec{r}), \vec{r} \in \Gamma_{23}. \quad (2.40)$$



**Slika 2.3** – Sustav vodiča i dielektrika korišten u formulaciji integralnih jednadžbi

Slijedi:

$$\varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vec{n}_2} = -\varepsilon_3 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \vec{n}_3}, \vec{r} \in \Gamma_{23} \quad (2.41)$$

Za rješenje jednadžbe 2.37 uvodi se Greenova funkcija  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  za koju vrijedi:

$$-\Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad (2.42)$$

i koja je u potpoglavlju 2.2.1 izvedena za dvodimenzionalni slučaj:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2.43)$$

Množenjem jednadžbe 2.37 s  $G(\vec{r}, \vec{r}')$  i jednadžbe 2.42 s  $\varphi_i(\vec{r})$  te njihovim zbrajanjem dobije se [81]:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') \Delta \varphi_i(\vec{r}) - \varphi_i(\vec{r}) \Delta G(\vec{r}, \vec{r}') = \varphi_i(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (2.44)$$

Integracijom prethodne jednadžbe, primjenom Greenovog teorema te primjenom dobivenog izraza na svaku regiju, te uz uvrštavanje rubnih uvjeta dobije se:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_{12}} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi_2(\vec{r}')}{\partial \vec{n}_1} d\Gamma_{12} + \int_{\Gamma_{13}} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi_3(\vec{r}')}{\partial \vec{n}_1} d\Gamma_{13} - \left(1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\right) \int_{\Gamma_{23}} G(\vec{r}, \vec{r}') \frac{\partial \varphi_3(\vec{r}')}{\partial \vec{n}_3} d\Gamma_{23} = \\ = \begin{cases} \varphi_1(\vec{r}) & \vec{r} \in \text{regiji 1} \\ \varphi_2(\vec{r}) & \vec{r} \in \text{regiji 2} \\ \varphi_3(\vec{r}) & \vec{r} \in \text{regiji 3.} \end{cases} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Izrazi  $\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vec{n}_1}$  i  $\varepsilon_0 \frac{\partial \varphi_3}{\partial \vec{n}_1}$  mogu se interpretirati kao ukupni naboj na granici vodič-dielektrik  $\lambda_1$ , dok se izraz  $-\varepsilon_0 \left(1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\right) \frac{\partial \varphi_3}{\partial \vec{n}_1}$  interpretira kao polarizacijski naboj na granici dielektrik-dielektrik  $\lambda_2$ . Primjenom rubnog uvjeta 2.41 dobije se druga jednadžba vezana uz varijable iz jednadžbe 2.45:

$$\begin{aligned} -\frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_3}{2\varepsilon_2} \frac{\partial \varphi_3(\vec{r}_P)}{\partial \vec{n}_3} - \left(1 - \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2}\right) \int_{\Gamma_{23}} \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial \vec{n}_3} \frac{\partial G(\vec{r}_P, \vec{r}')}{\partial \vec{n}_3} d\Gamma_{23} + \\ + \int_{\Gamma_{12}} \frac{\partial \varphi_2(\vec{r}')}{\partial \vec{n}_1} \frac{\partial G(\vec{r}_P, \vec{r}')}{\partial \vec{n}_3} d\Gamma_{12} + \int_{\Gamma_{13}} \frac{\partial \varphi_3(\vec{r}')}{\partial \vec{n}_1} \frac{\partial G(\vec{r}_P, \vec{r}')}{\partial \vec{n}_3} d\Gamma_{13} = 0, \end{aligned} \quad (2.46)$$

pri čemu vrijede sljedeće relacije:

$$\begin{aligned} \vec{r}_P \in \Gamma_{23} \\ \frac{\partial G(\vec{r}_P, \vec{r}')}{\partial \vec{n}_3} = \nabla G(\vec{r}_P, \vec{r}') \vec{n}_3. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Ako se jednadžba 2.45 primjeni na  $\Gamma_1$  gdje se nalazi poznati potencijal  $\varphi_{10}$  dobiju se jednadžbe



poznate pod nazivom 1. i 2. Fredholmova jednadžba [77, 84]:

$$\varphi_{01}(\vec{r}) - \int_{\Gamma_i} \lambda_i(\vec{r}') G(\vec{r}, \vec{r}') d\Gamma_i = 0, \vec{r} \in \Gamma_1, \quad (2.48)$$

$$\lambda_2(\vec{r}) - 2 \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_2}{\varepsilon_3 + \varepsilon_2} \int_{\Gamma_i} \lambda_i(\vec{r}') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \vec{n}_3} d\Gamma_i = 0, \vec{r} \in \Gamma_{23}, \quad (2.49)$$

pri čemu je  $\Gamma_i$  unija  $\Gamma_{12}, \Gamma_{13}$  i  $\Gamma_{23}$ .

Jednadžbe 2.48 i 2.49 mogu se primjeniti i na probleme s više vodiča i dielektrika. U tom slučaju  $\Gamma_1$  postaje unija svih granica vodič-dielektrik,  $\Gamma_{23}$  postaje unija svih granica dielektrik-dielektrik, a  $\Gamma_i$  postaje unija svih granica. Pritom je potrebno pripaziti da se u jednadžbi 2.49 za svaku koriste odgovarajuće vrijednosti dielektričnosti.

## 2.5.2 Primjena metode rubnih elemenata

Jednadžbe 2.48 i 2.49 omogućuju rješavanje zadaća koje se sastoje od regija vodljivog materijala na poznatom potencijalu i različitih regija dielektrika. Pomoću njih i uz Greenovu funkciju 2.43 može se formulirati jednadžba za potencijal  $\varphi(\vec{r})$  u bilo kojoj točki  $\vec{r}$  za dvodimenzionalni slučaj:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_l \lambda(\vec{r}') \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl'. \quad (2.50)$$

Uzima se da vrijedi:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}. \quad (2.51)$$

Približenje nepoznate linijske gustoće naboja na  $i$ -tom segmentu zapisuje se kao:

$$\lambda_i = \sum_{k=1}^K \alpha_i f_{ki} \quad (2.52)$$

gdje je  $K$  broj unaprijed definiranih temeljnih funkcija. Dakle, sada se jednadžba 2.50 može zapisati kao:

$$\varphi(\vec{r}) = \int_l \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{k=1}^K f_{ki} \ln \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl \quad (2.53)$$

gdje je  $N$  ukupan broj nepoznanica sustava.

Kako se u ovoj disertaciji koriste linearne funkcije za približenje funkcije izvora izvedene u

potpoglavlju 2.4,  $K = 2$  i za  $f_{ki}$  vrijedi:

$$f_{ki} = \begin{cases} 1-l, & i = 1 \\ l, & i = 2. \end{cases} \quad (2.54)$$

Kao težinske funkcije koriste se Diracove  $\delta$  funkcije, dakle koristi se metoda usklađivanja u točkama i težinske funkcije su oblika 2.26. Napokon se jednačba 2.50 može zapisati kao:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_l \sum_{k=1}^2 f_{ki} \ln \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl. \quad (2.55)$$

Uvrštavanjem izraza za funkcije izvora 2.54 u 2.55, vidljivo je da je potrebno izračunati integrale:

$$\int_l \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right) dl, \quad (2.56)$$

$$\int_l l \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}} \right) dl, \quad (2.57)$$

pri čemu je  $l = x'$  ili  $l = y'$ , ovisno o smjeru integracije. Integrali se mogu riješiti analitički te je rezultat analitičke integracije integrala prikazan u dodatku A.

Ako se točka  $\vec{r}$  nalazi na konačnom segmentu, integrali postaju singularni. U literaturi su prikazani različiti pristupi rješavanja problema singulariteta u jednačbama metode rubnih elemenata [34, 53, 55, 85, 86]. U ovom slučaju radi se o slaboj singularnosti gdje se okoliš te točke izdvaja iz integracije te se njegov doprinos određuje analitički što je prikazano u dodatku C.

Za zadaću sa samo jednim dielektrikom kao na slici 2.4 za proračun je dovoljna jednačba 2.55. Nakon izračuna elemenata matrice sustava **A** pomoću integrala iz jednačbe 2.55 mogu se izračunati nepoznati koeficijenti raspodjele naboja  $\alpha_i$  uz poznate članove vektora **b** pomoću jednačbe 2.22.

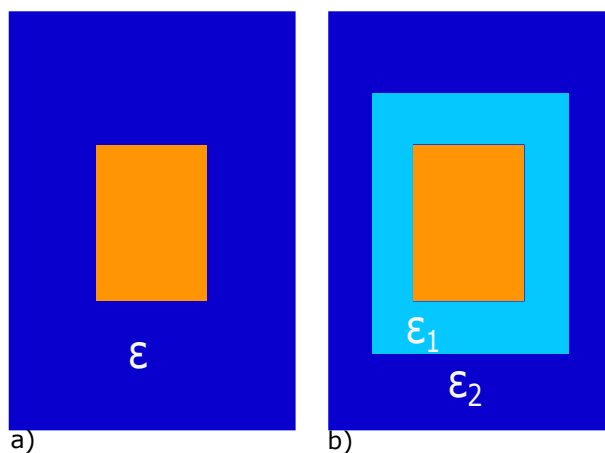
U regijama s dva dielektrika kao na slici 2.4 potrebno je dodati i jednačbu 2.49 koja postaje:

$$\lambda_2(\vec{r}) - 2 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_l \sum_{k=1}^2 f_{ki} \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}')}{\partial \vec{n}_3} dl = 0. \quad (2.58)$$

Primjer sustava sa dva dielektrika prikazan je na slici 2.4 te je za takav slučaj potrebno riješiti linearni sustav jednačbi:

$$\begin{bmatrix} [\text{vodič} - \text{vodič}] & [\text{dielektrik} - \text{vodič}] \\ [\text{vodič} - \text{dielektrik}] & [\text{dielektrik} - \text{dielektrik}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{\text{vodič}} \\ \alpha_{\text{dielektrik}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.59)$$

Ovdje se područja označena kao vodič-vodič, vodič-dielektrik, dielektrik-vodič računaju pomoću jednadžbe 2.55, dok se područje označeno dielektrik-dielektrik izračuna pomoću jednadžbe 2.58.



Slika 2.4 – Prikaz problema u regiji s a) jednim dielektrikom i b) dva dielektrika

### 2.5.3 Zakon očuvanja naboja

Zakon očuvanja naboja nije primjenjen u prethodnim jednadžbama. Zato je u sustav jednadžbi potrebno dodati jednadžbu očuvanja naboja koja uvjetuje da je ukupni naboj jednak nuli:

$$\sum_{i=1}^N Q_i = 0. \quad (2.60)$$

Time se broj redaka u matrici sustava iz jednadžbe 2.22 povećava za jedan te matrica  $\mathbf{A}$  i vektor  $\mathbf{b}$  sada izgledaju:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1N} & -1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & -1 \\ A_{N1} & \cdots & A_{NN} & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.61)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

## 2.5.4 Proračun jakosti električnog polja

Nakon što je određena raspodjela naboja po vodičima može se odrediti i električno polje u prostoru. Poznato je da je jakost električnog polja beskonačno dugog vodiča zanemarivo malog poprečnog presjeka nabijenog naboja linijske gustoće  $\lambda$  u cilindričnom koordinatnom sustavu:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \vec{a}_r. \quad (2.63)$$

Kako se za izračun koristi Kartezijev koordinatni sustav gdje za dvodimenzionalni slučaj vrijedi:

$$(\vec{r} - \vec{r}') = (x - x')\vec{a}_x + (y - y')\vec{a}_y, \quad (2.64)$$

vektor  $\vec{a}_r$  može se zapisati kao:

$$\vec{a}_r = \frac{(x - x')\vec{a}_x + (y - y')\vec{a}_y}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}. \quad (2.65)$$

Uvrštavanjem 2.65 u 2.63 dobije se:

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} \frac{(x - x')\vec{a}_x + (y - y')\vec{a}_y}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}}. \quad (2.66)$$

Prethodna jednadžba integrira se po linijskom segmentu, te uz nepoznatu gustoću naboja iz 2.52, jakost električnog polja računa se jednadžbom:

$$\vec{E}(x, y) = \int_{\Delta'} \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{k=1}^K f_{ik} (x - x')\vec{a}_x + (y - y')\vec{a}_y}{2\pi\epsilon r \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}} dl'. \quad (2.67)$$

U slučaju približenja linearnim funkcijama koeficijenti  $\alpha_i$  su vrijednosti linijske gustoće naboja u čvorovima i vrijedi  $K = 2$ . Jakost električnog polja možemo podijeliti na jakost u smjeru osi  $x$   $E_x(x, y)$  i jakost u smjeru osi  $y$   $E_y(x, y)$ :

$$E_x(x, y) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{\Delta'} \frac{\sum_{k=1}^2 f_{ik} (x - x')}{(x - x')^2 + (y - y')^2} dl', \quad (2.68)$$

$$E_y(x,y) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \sum_{i=1}^N \alpha_i \int_{\Delta'} \frac{\sum_{k=1}^2 f_{ik}(y-y')}{(x-x')^2 + (y-y')^2} dl'. \quad (2.69)$$

Integrali iz jednadžbi 2.68 i 2.69 rješavaju se numerički u točkama u kojima je potrebno odrediti iznos električnog polja. Dodatno, u dodatku A prikazana su analitička rješenja potrebnih integrala. Ukupna jakost polja dobije se potom pomoću jednadžbe:

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} \quad (2.70)$$

### 2.5.5 Proračun kapaciteta

Uz određenu raspodjelu naboja po vodičima moguće je izračunati i matricu kapaciteta cijelog namota. Kreće se od osnovne jednadžbe kapaciteta  $C$  na vodiču:

$$C = \frac{Q}{U}$$

gdje je  $Q$  ukupni naboj na vodiču a  $U$  razlika potencijala. Ukupni naboj na  $j$ -tom vodiču induciran nabojem na  $i$ -tom vodiču računa se na sljedeći način:

$$Q_{ij} = \int_{l_j} \lambda dl_j = \sum_{k=1}^{N_j} \lambda_{kj} L_{kj} \quad (2.71)$$

gdje je  $\lambda_{kj}$  linijska gustoća naboja na  $k$ -tom segmentu  $j$ -tog vodiča,  $N_j$  broj konačnih segmenata na  $j$ -tom vodiču, a  $L_{kj}$  je duljina  $k$ -tog segmenta  $j$ -tog vodiča.

Svaki  $i$ -ti redak matrice kapaciteta računa se tako da se potencijal  $i$ -tog vodiča postavi na 1 V a potencijali ostalih vodiča na 0 V. Tada se uz pomoć jednadžbe 2.71 odredi ukupni naboj na vodičima pa se kapaciteti računaju izrazima:

$$C_{ij} = \frac{Q_{ij}}{\varphi_i - \varphi_j}, \quad i \neq j \quad (2.72)$$

$$C_{ii} = \frac{Q_{ii}}{\varphi_i}, \quad i = j \quad (2.73)$$

### 2.5.6 Odabir točaka kolokacije

Odabir točaka kolokacije izrazito je važan za učinkovitost metode usklađivanja u točkama. Odabirom metode usklađivanja u točkama članove matrice  $\mathbf{b}$  postavlja se na poznate potencijale:

$$\varphi_i = \varphi_{zadano}.$$

Kako se radi o konačnom broju točaka postavljenom na rubni element potencijal između

dvije kolokacijske točke može znatno varirati u odnosu na zadanu vrijednost. Samog konsenzusa o odabiru točaka kolokacije nema, neki objavljeni radovi preporučaju korištenje Gauss-Lobatto točaka [26,87], dok drugi preferiraju točke simetrično raspoređene u odnosu na sredinu segmenata [88]. U sklopu ove disertacije odabran je položaj točaka kolokacije tako da su one simetrično raspoređene u odnosu na sredinu rubnog elementa. Njihovi točni položaji i način implementacije objašnjeni su u poglavlju 4.

## Poglavlje 3

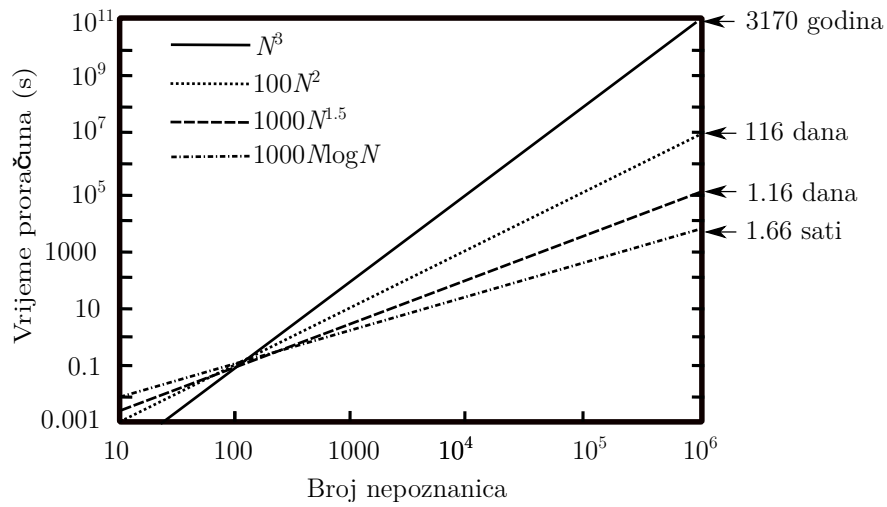
# Metode ubrzanja proračuna i kompresije matrica

U poglavlju 1 je spomenuto kako, za razliku od metode konačnih elemenata koja stvara rijetko popunjenu matricu sustava, metoda rubnih elemenata korištenjem Greenove funkcije stvara gusto popunjenu matricu sustava. Velika računaska složenost povezana s rješanjem punih matrica osnovni je nedostatak MRE. Ukoliko se za rješavanje matrične jednadžbe koriste neke od direktnih metoda, broj potrebnih operacija je proporcionalan  $O(N^3)$ , dok su zahtjevi za memorijskim resursima proporcionalni  $O(N^2)$ , gdje je  $N$  označava dimenziju matrice, tj. broj nepoznanica. Ako se za rješavanje matrične jednadžbe koristi neka od iterativnih metoda, broj operacija svake iteracije proporcionalan je  $O(N^2)$ , dok zahtjevi na memorijske resurse ostaju isti kao kod direktnih metoda. Ukupno vrijeme proračuna je tada proporcionalno  $O(N_{it}N^2)$ , gdje je  $N_{it}$  broj iteracija potreban da se dosegne konvergencija. Takva visoka računaska složenost\* i direktnog i iterativnog rješavanja matrične jednadžbe ozbiljno ograničava primjenu MRE. Za bolje razumijevanje utjecaja računaska složenosti na slici 3.1 je prikazano vrijeme proračuna za hipotetske numeričke algoritme kao funkcije dimenzija matrice. Nasljedno tome, slika 3.2 predstavlja potrebne memorijske resurse kao funkciju dimenzija matrice. Iz slika je vrlo lako uočivo kako za proračune računaska složenosti  $O(N^3)$  i  $O(N^2)$  vrijeme proračuna i potrebni memorijski resursi rastu eksponencijalno s brojem nepoznanica. Takav rast zahtjeva na računalo za velike probleme nadilazi mogućnosti današnjih računala te objašnjava dugogodišnja istraživanja metoda i tehnika ubrzanja proračuna.

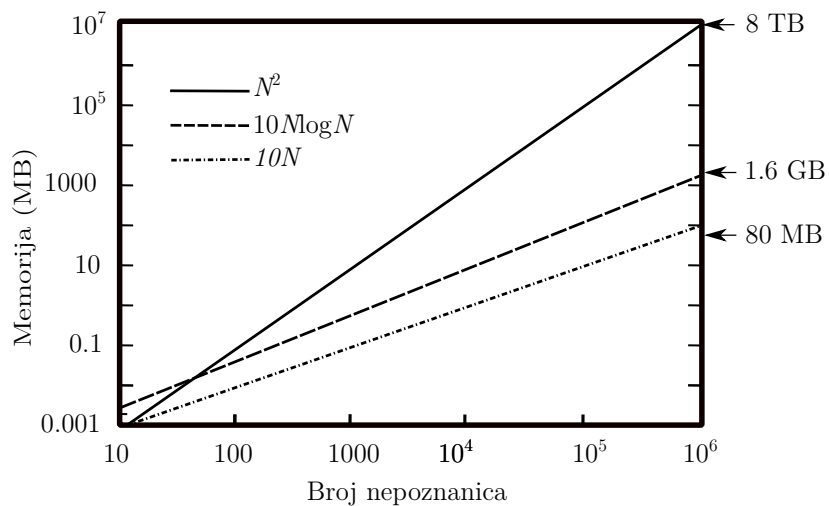
Kako bi se mogli riješiti problemi gdje matrica sustava zahtijeva više memorije od maksimalne memorije računala, a bez promjene geometrije i diskretizacije kako bi se smanjio broj nepoznanica, razvijene su posebne tehnike poznate pod imenom brzi algoritmi ili metode ubrzanja proračuna i kompresije matrica. Spomenute metode karakterizira smanjena računaska složenost

---

\*Računaska složenost algoritma za rješavanje matrične jednadžbe može se definirati kao broj potrebnih operacija i potrebni memorijski resursi ovisno o dimenzijama matrice [89].



**Slika 3.1** – Vrijeme proračuna za različite računске složenosti (preuzeto iz [89], uz prijevod).



**Slika 3.2** – Potrebni memorijski resursi za različite računске složenosti (preuzeto iz [89], uz prijevod).



i njihova je primjena vrlo bitna za rješavanje problema većih razmjera. Među metodama vrijedi spomenuti brzu metodu multipola [74–76, 90] i njezinu nadogradnju – višerazinsku brzu metodu multipola (VBMM, engl. *multilevel FMM – MLFMM*) [64, 91, 92], metodu adaptivnih integrala (MAI, engl. *adaptive integral method – AIM*) [93], unaprijed ispravljenu brzu Fourierovu transformaciju (uFFT, engl. *precorrected fast Fourier transform – pFFT*) [94], algoritam višerazinske dekompozicije matrice (VDM, engl. *multilevel matrix decomposition algorithm – MLMDA*) [95], dekompoziciju singularnih vrijednosti matrice (SVD, engl. *singular value decomposition – SVD*), višerazinsku QR dekompoziciju (VQR, engl. *multilevel QR decomposition*), algoritam adaptivne križne aproksimacije [73, 96–98] te njegove višerazinske verzije: algoritam višerazinske adaptivne križne aproksimacije (VAKA, engl. *multilevel adaptive cross approximation – MLACA*) [71] i algoritam usmjerene višerazinske adaptivne križne aproksimacije (UVAKA, engl. *multilevel directional adaptive cross approximation – MLDAC*) [68]. Općenito se metode ubrzanja mogu svrstati u dvije skupine – fizikalne i algebarske metode. Od navedenih, pod fizikalne metode spadaju BMM, VBMM, uFFT i MAI, dok su algebarske SVD, VDM, VQR dekompozicija, AKA, VAKA i UVAKA.

Fizikalne metode su se dosad pokazale učinkovitijima pri smanjenju memorijskih resursa i CPU vremena. No, njihova učinkovitost dolazi zajedno s problemom generalne uporabe tih metoda. VBMM algoritam, čija je upotreba široko rasprostranjena kada se radi o elektromagnetskim problemima, smanjuje numeričku složenost memorije na  $O(N)$ , a CPU vrijeme na  $O(N \log(N))$ , gdje je  $N$  broj nepoznanica. No, VBMM algoritam ovisi o formulaciji Greenove funkcije. Dakle, potrebno je a priori znanje Greenove funkcije što znači da bi za različite probleme, kada se mijenja sama funkcija, bile potrebne modifikacije algoritma.

Za razliku od fizikalnih, algebarske metode ne ovise o Greenovoj funkciji problema. Svojstvo algebarskih metoda da se koriste samo izvorni matrični zapisi od velike je praktične važnosti, zbog već postojećih računalnih kodova za izračun matrice sustava. Dakle, algebarske se metode, uz minimalne modifikacije, mogu primijeniti za različite probleme, neovisno o formulaciji Greenove funkcije. Algebarske metode koriste se uz hijerarhijsku strukturu matrica te je takav oblik upotrebe zadnjih godina postao učinkovita tehnika za smanjenje memorije koju zauzimaju gusto popunjene matrice sustava dobivene primjenom metode rubnih elemenata. Usporedba AKA algoritma i VBMM-a u dosadašnjim istraživanjima pokazala je razlike u učinkovitosti ovih metoda, s manjom prednosti VBMM-a što se tiče smanjenja memorijskih zahtjeva [99, 100].

U ovom poglavlju prikazana je osnovna teorija metoda ubrzanja proračuna i kompresije matrica. Pošto je brza metoda multipola jedan od najvažnijih algoritama dvadesetog stoljeća, prvo je kratko objašnjena ova metoda. BMM je i glavni predstavnik fizikalnih metoda, te je ovu metodu bitno objasniti radi cjelovitosti teksta, a i moguće usporedbe s kasnije objašnjenim algoritmom adaptivne križne aproksimacije. Nadalje, ovo poglavlje donosi kratki pregled hijerarhijskih matrica, dekompozicije singularnih vrijednosti te naposljetku teoriju adaptivne

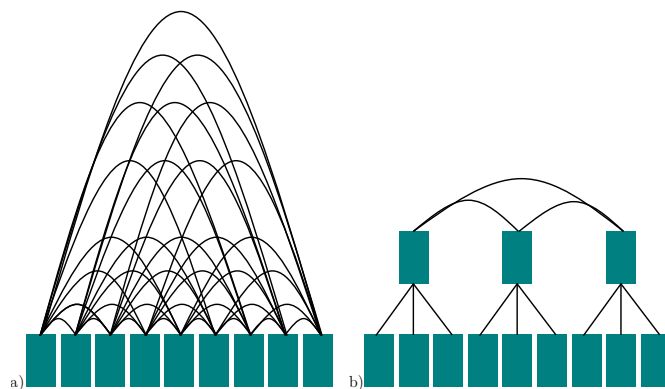
križne aproksimacije koja će se u narednim poglavljima koristiti pri proračunima.

### 3.1 Brza metoda multipola

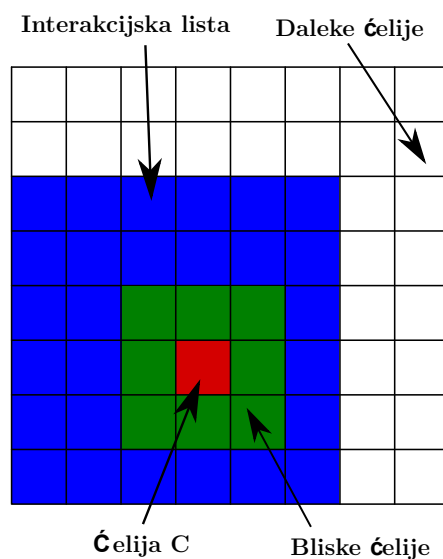
Brza metoda multipola omogućuje gotovo optimalno smanjenje memorijskih zahtjeva i smanjenje vremena trajanja proračuna. BMM je razvijena za simulacije velikog broja čestica, a ubrzo nakon toga metoda je prilagođena proračunima pomoću MRE [90]. Literatura donosi brojne radove u kojima se BMM zajedno s MRE primijenila na trodimenzionalne probleme iz elektrostatike [91, 92, 101]. Dokazana je mogućnost BMM da memorijske zahtjeve smanji na  $O(N)$  [102].

Osnovna ideja metode brzih multipola jest prebacivanje interakcije među čvorovima (ili elementima) u interakciju između ćelija. Navedeno se postiže izrazima za proširenje i translaciju momenata. Usporedba broja potrebnih operacija klasičnim pristupom rješavanja pomoću MRE i korištenja BMM-a s MRE prikazana je na slici 3.3. Vidljivo je smanjenje broja potrebnih računskih operacija kada se koristi BMM. Sam pristup rješavanju kombinacijom MRE s BMM temelji se na tome da se za elemente koji se nalaze blizu točke izvora i dalje koristi direktna integracija, dok se za udaljene elemente koriste proširenja brzih multipola. Podjela domene prikazana je na slici 3.4. Za ćeliju C definirane su zone dalekih ćelija, bliskih ćelija i interakcijska lista. Interakcijska lista sadrži ćelije koje nisu susjedne, bliske ćelije, ali su roditeljske ćelije tih ćelija susjedne sa roditeljskom ćelijom ćelije C. Sve ostale ćelije, koje nisu susjedne niti spadaju pod interakcijsku listu, spadaju u skupinu dalekih ćelija.

U BMM je vrlo bitno dobro postaviti i izračunati jednadžbe momenata, jednadžbu translacije momenta u moment, te jednadžbe koje opisuju lokalne ekspanzije i potrebne translacije momenata. Izvodi navedenih jednadžbi se u sklopu ove disertacije neće posebno prikazivati, te se mogu pronaći u [74]. U disertaciji su navedene samo osnovne jednadžbe potrebne za razumijevanje metode.



Slika 3.3 – Broj potrebnih operacija za a) MRE, b) BMM



Slika 3.4 – Podjela domene

Promatra se sljedeći integral:

$$\int_{l_0} G(x,y)q(y)dl(y). \quad (3.1)$$

Pritom  $x$  i  $y$  označavaju kolokacijsku i točku izvora. Kolokacijska točka  $x$  i točka izvora  $y$  zamjenjuju se kompleksnom notacijom  $z_0 = x_1 + ix_2$  i  $z = y_1 + iy_2$  te se dobije ekvivalentni integral:

$$\int_{l_0} G(z_0,z)q(z)dl(z). \quad (3.2)$$

Ako je  $z_c$  neka točka blizu  $z$ , uz uvjet  $|z - z_c| \ll |z_0 - z_c|$ , ekspanzija multipola može se zapisati u obliku:

$$\int_{l_0} G(z_0,z)q(z)dl(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z)M_k(z_c), \quad (3.3)$$

gdje su  $M_k(z_c)$  momenti oko točke  $z_c$ :

$$M_k(z_c) = \int_{l_0} I_k(z - z_c)q(z)dl(z). \quad (3.4)$$

Za funkcije  $I_k(z)$  i  $O_k(z)$  pritom vrijedi:

$$I_k(z) = \frac{z^k}{k!}, k \geq 0, \quad (3.5)$$

$$O_k(z) = \frac{(k-1)!}{z^k}, k \geq 1 \text{ i } O_0(z) = -\ln(z). \quad (3.6)$$

Ako se  $z_c$  pomakne na novu lokaciju  $z_{c'}$  dolazi do translacije moment u moment (M2M translacija) pa se momenti u točki  $z_{c'}$  računju pomoću:

$$M_k(z_{c'}) = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_c - z_{c'}) M_l(z_c). \quad (3.7)$$

Ako je  $z_L$  neka točka blizu  $z_0$ , uz uvjet  $|z_0 - z_L| \ll |z_c - z_L|$ , izraz za lokalnu ekspanziju je:

$$\int_{l_0} G(z_0, z) q(z) dl(z) = \sum_{l=0}^{\infty} L_l(z_L) I_l(z_0 - z_L), \quad (3.8)$$

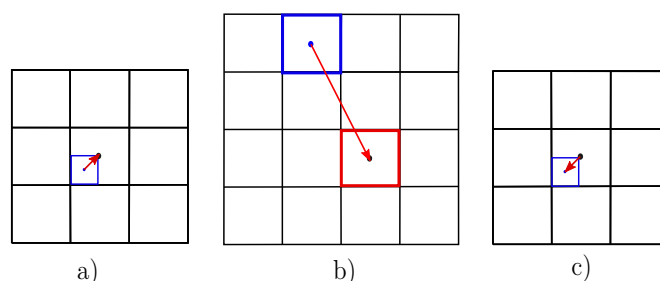
gdje se koeficijenti  $L_l(z_L)$  računaju pomoću translacije moment u lokalno (M2L translacija):

$$L_l(z_L) = \frac{(-1)^l}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_L - z_c) M_k(z_c). \quad (3.9)$$

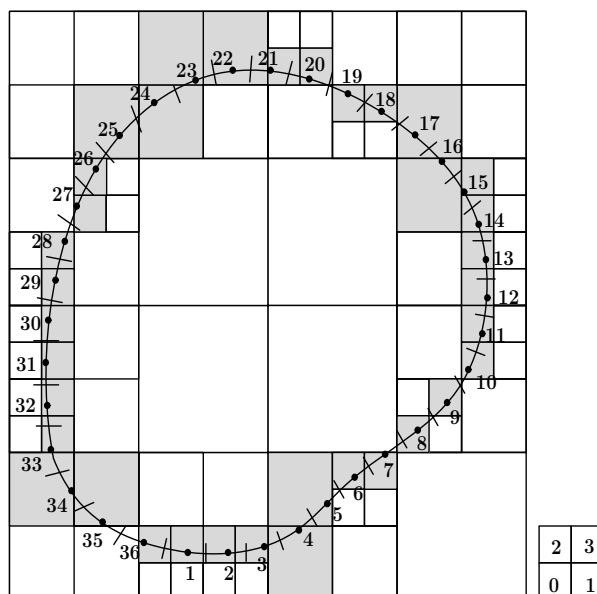
Ako se  $z_L$  pomakne na novu lokaciju  $z_{L'}$  dolazi do translacije lokalno u lokalno (L2L translacija) pa se momenti u točki  $z_{L'}$  računju pomoću:

$$L_l(z_{L'}) = \sum_{k=0}^{\infty} I_k(z_{L'} - z_L) L_{l+k}(z_L).$$

Sve translacije su radi lakšeg shvaćanja grafički prikazane na slici 3.5. Vidljivo je da su M2M translacije translacije iz ćelije kćeri u roditeljsku ćeliju, da su M2L translacije translacije između roditeljskih ćelija i da su L2L translacije translacije iz roditeljskih ćelija u ćelije kćeri.



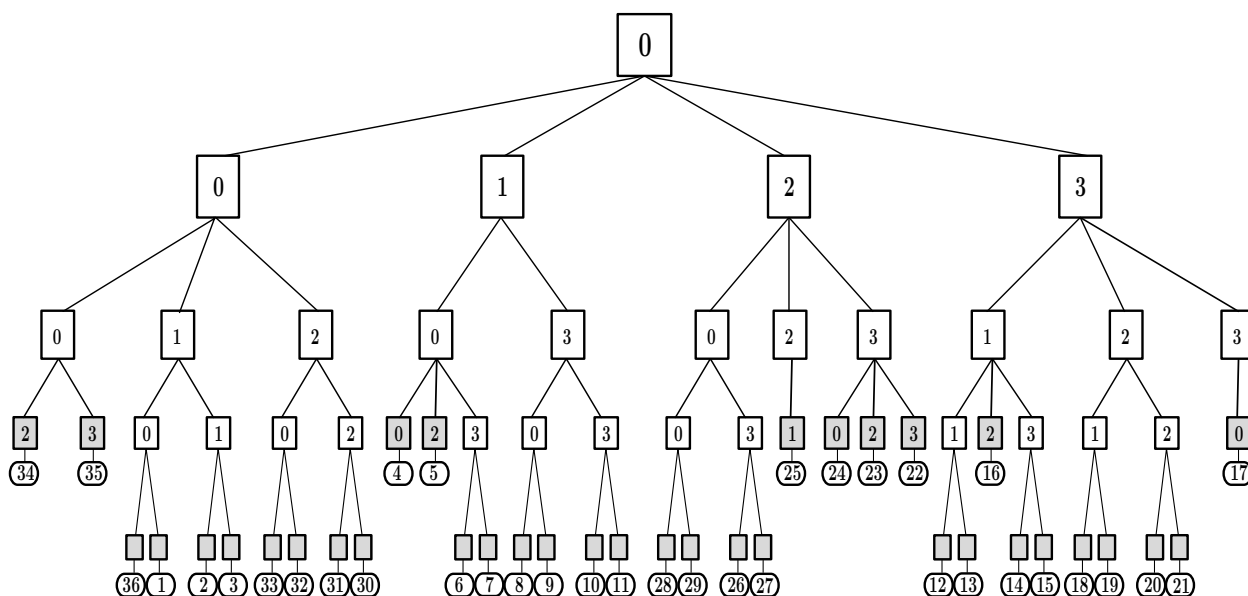
Slika 3.5 – Grafički prikaz translacija: a)M2M, b)M2L, c)L2L



Slika 3.6 – Hijerarhijska ćelijska struktura

Osnovni postupak rješavanja pomoću BMM može se podijeliti na šest koraka [39]:

- **Diskretizacija.** Diskretizacija se provodi na jednaki način kao kod MRE.
- **Određivanje hijerarhijske strukture stabla.** Kod dvodimenzionalnih problema hijerarhijska struktura stabla određuje se tako da se napravi kvadrat koji pokriva cijelu granicu problema kao što je prikazano na slici 3.6. Tako dobivenoj ćeliji pripisuje se nulta razina te se ona dalje dijeli na četiri jednake ćelije prve razine. Princip numeriranja ćelija zadan je kvadratićem uz sliku. Svaka od ćelija prve razine se na jednaki način dijeli na manje ćelije niže razine. Podjela se dalje radi sve dok broj elemenata u ćeliji bude manji od prethodno određenog broja. Pri tome se pretpostavlja da element pripada ćeliji ako je njegovo središte u toj ćeliji. Ćelija koja ne sadrži manje ćelije se naziva list. Iz strukture ćelija gradi se hijerarhijska struktura stabla na slici 3.7.
- **Uzlazni prolaz.** U uzlaznom prolazu računaju se momenti svih ćelija uzlazno po stablu, od listova pa do druge razine. Momenti listova računaju se direktno jednadžbom za momente, dok se kod većih ćelija pomoću translacije iz momenta u moment sumiraju momenti njihovih manjih ćelija.
- **Silazni prolaz.** Silazni prolaz označava proračun koeficijenata lokalnih proširenja svih ćelija počevši od ćelija druge razine pa silazno sve do listova. Ti koeficijenti računaju se



Slika 3.7 – Struktura stabla

sumacijom doprinosa svih udaljenih ćelija i ćelija koje nisu direktno susjedne ćeliji koju se promatra, ali su susjedne ćeliji više razine kojoj ona pripada.

- **Izračun integrala.** Proračun integrala vrši se na način da se doprinosi elemenata lista i njemu susjednih ćelija računaju direktnom integracijom kao u metodi momenata, a da se doprinosi ostalih ćelija računaju pomoću lokalnih proširenja čiji su koeficijenti već proračunati u prethodnom koraku.
- **Iteracija rješenja.** Zadnji korak rješavanja podrazumijeva ažuriranje nepoznatog vektora sustava te vraćanje na treći korak dok rješenje ne konvergira unutar zadane tolerancije.

Zahvaljujući potrebi da se za svaku Greenovu funkciju trebaju raditi veće modifikacije algoritma (proračuni momenata i translacija), osnovni BMM nije jednostavan za implementaciju za različite probleme poput algebarskih metoda. No, zadnjih godina radilo se na razvoju brze metode multipola koja je neovisna o jezgrenoj funkciji. O tome se više može naći u literaturi [103, 104].

## 3.2 Hijerarhijska struktura matrica

Hijerarhijske matrice su algebarske strukture koje su uvedene kako bi se guste matrice mogle prikazati pomoću većeg broja blokova koji su postavljeni hijerarhijski pomoću strukture stabla. Naziv za tako nastale matrice koje aproksimiraju gustu matricu je  $\mathcal{H}$ -matrice. Unutar ovog rada se za konstrukciju strukture stabla koriste informacije o geometriji, odnosno položaji kolokacijskih točaka na granicama. Blokovi koji se sastoje od grupa kolokacijskih točaka te odgovaraju velikim udaljenostima karakteriziraju se kao udaljeni blokovi ili dopustivi blokovi (engl. *admissible blocks*), te se određuju pomoću algoritama za aproksimaciju matrica nižeg ranga. Ostali blokovi stabla nazivaju se bliski blokovi ili nedopustivi blokovi (engl. *non-admissible blocks*) i računaju se eksplicitno pomoću konvencionalne MRE. Time se dobiva reprezentacija matrice pomoću hijerarhijskih struktura.

Bitna stvar vezana uz hijerarhijske strukture je način klasteriranja matrica te kriterij dopustivosti koji su opisani u sljedećem potpoglavlju.

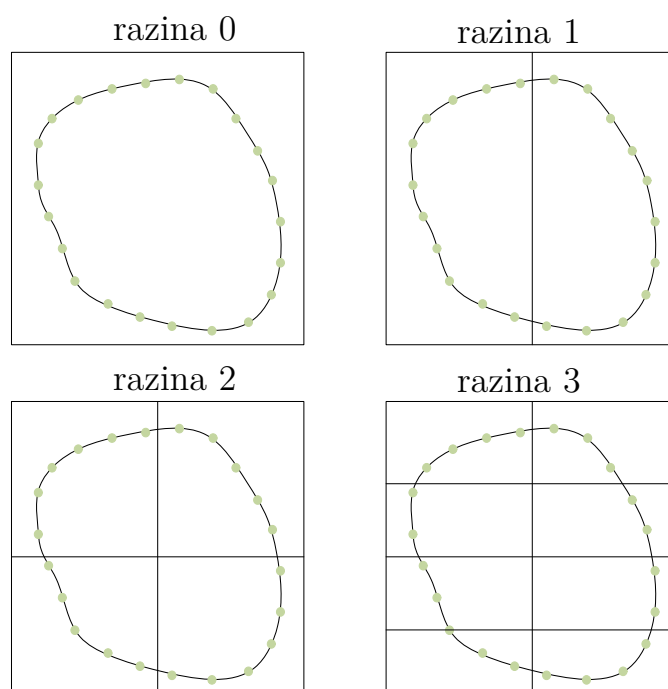
Nakon što se odrede dopustivi blokovi, potrebno je primijeniti neki od algoritama za aproksimaciju matrica matricama manjeg ranga. Dva takva algoritma su opisana u sljedećem potpoglavlju.

### 3.2.1 Klasteriranje matrice

Kako bi se matrice mogle aproksimirati matricama nižeg ranga, prvo je potrebno napraviti njihovu podjelu na klastere te odrediti hijerarhijsku strukturu stabla. Dobar odabir načina klasteriranja je bitan za algebarska svojstva kasnije primjenjenih algoritama. Kao i u prethodno opisanoj strukturi brzih multipola, cilj je da se bliske točke grupiraju. Najčešće se koristi geometrijsko klasteriranje. Dakle, kolokacijske se točke particioniraju u skladu s nekim geometrijskim kriterijem. U daljnjem tekstu prikazana su dva najčešća načina klasteriranja, a zatim su za dva primjera geometrijskog klasteriranja napravljene strukture stabla.

Najjednostavnija tehnika klasteriranja naziva se tehnika graničnih okvira (engl. *bounding box*). Ova tehnika dijeli geometriju na granične okvire  $B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ , pri čemu je  $d$  broj dimenzija, dok su  $a_i$  i  $b_i$  vrijednosti minimalne i maksimalne koordinate za svaku dimenziju. Okvir se dijeli tako da za svaki rub vrijedi  $b_i - a_i = konst$ . Ovaj postupak dijeli okvire na svakoj razini na jednake dijelove. Veličine okvira održavaju se konstantnim za određenu razinu stabla klastera. Tijekom postupka podjele neki od klastera može ostati prazan. Primjer ovakvog klasteriranja na 3 razine dan je na slici 3.8 za granične okvire  $B_i^k$  gdje  $k$  označava razinu podjele, a  $i$  označava broj graničnog okvira na toj razini.

Kriterij dopustivosti koji će biti objašnjen u sljedećem potpoglavlju ovisi o promjeru klastera. Zato se novom tehnikom uravnoteženih graničnih okvira pokušalo maksimalno smanjiti promjer s obzirom na točke koje se nalaze u klasteru. Podjela se radi kao i kod regularne tehnike



**Slika 3.8** – Klasteriranje pomoću regularnih graničnih okvira

graničnih okvira osim što se nakon svake podjele granični okviri minimiziraju na način:

$$a_i = \min_{k=1}^{br.točaka} (x_i^k), \quad (3.10)$$

$$b_i = \max_{k=1}^{br.točaka} (x_i^k), \quad (3.11)$$

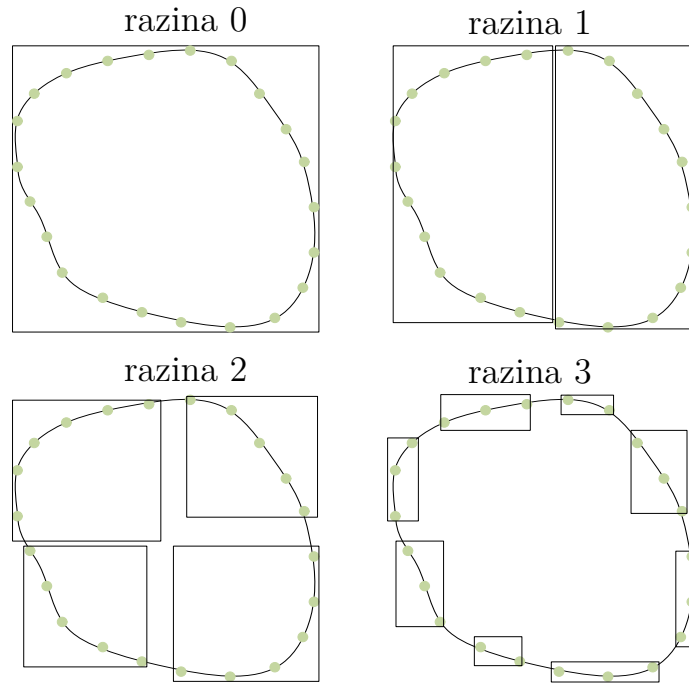
pri čemu su  $x_i$  koordinate točaka. Ovakav pristup nema praznih graničnih okvira, ali veličina klastera može biti različita na istim razinama. Navedeni pristup klasteriranja na 3 razine prikazan je na slici 3.9.

Postoji mnogo načina klasteriranja a odabir prave strategije klasteriranja ovisi o tehnici aproksimacije matrica kao i o problemu koji se rješava. Jedna od poznatijih strategija je kardinalno geometrijsko strukturiranje koje za razliku od dva načina geometrijskog klasteriranja koja su prethodno opisana uključuje i kardinalnost klastera. U [105] je predložena strategija nazvana analiza osnovnih komponenti (engl. *principal component analysis*) koja također izrađuje kardinalno uravnotežene klustere. Ove dvije strategije ne koriste se pri izradi disertacije pa ih se neće podrobnije proučavati.

### 3.2.1.1 Izrada blokovske strukture stabla

Izrada blokovske strukture stabla prikazana je na dva primjera. U oba slučaja napravljen je primjer s pravokutnim granicama, kako bi se prikazalo klasteriranje kolokacijskih točaka na





**Slika 3.9** – Klasteriranje pomoću uravnoteženih graničnih okvira

primjeru zavoja transformatora. U primjeru na slici 3.10 kolokacijske točke su prvo podijeljene ovisno o njihovoj lokaciji. Zatim je napravljena struktura stabla prikazana na slici 3.11. Potrebno je uvesti pojam kriterij dopustivosti. Kriterij dopustivosti određuje koji se parovi klastera mogu smatrati udaljenima, tj. koji su parovi klastera 'dopustivi'. Za domene  $\Omega_x$  i  $\Omega_y$  na slici 3.12 kriterij dopustivosti se izražava kao:

$$\min(\text{diam}(\Omega_x), \text{diam}(\Omega_y)) \leq \eta \text{dist}(\Omega_x, \Omega_y). \quad (3.12)$$

Zbog velikih proračunskih troškova pri određivanju udaljenosti i promjera u prethodno navedenom kriteriju dopustivosti, u praksi se kao kriterij dopustivosti koristi formulacija [97]:

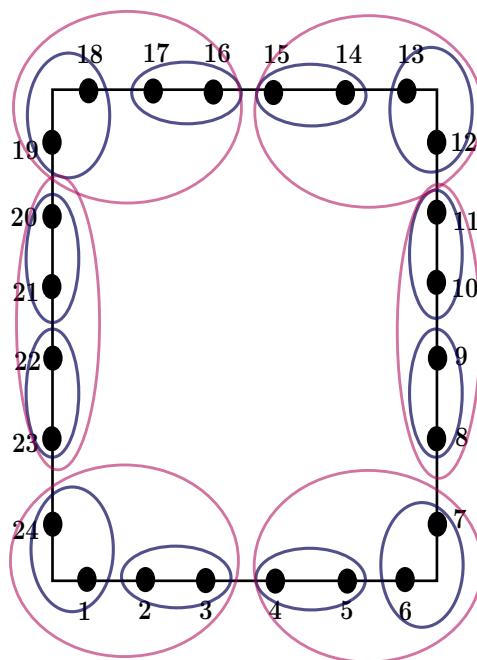
$$\min(\text{diam}(B_x), \text{diam}(B_y)) \leq \eta \text{dist}(B_x, B_y). \quad (3.13)$$

Pritom su  $B_x$  i  $B_y$  dva klastera,  $\text{diam}(B_x)$  je promjer klastera,  $\text{dist}(B_x, B_y)$  je udaljenost između dva klastera, a  $\eta$  je proizvoljno zadani parametar.

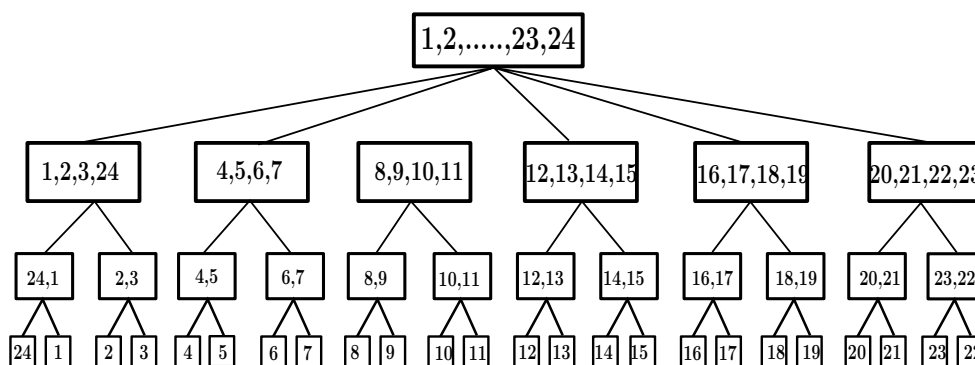
Za granične okvire  $B = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ , moguće je vrlo lako izračunati promjer:

$$\text{diam}(B) = \sqrt{\sum_{i=1}^d (b_i - a_i)^2}. \quad (3.14)$$

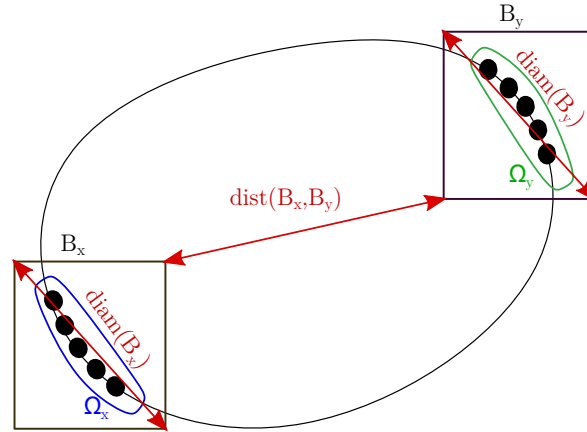
Za okvire  $B_x = [a_1^D, b_1^D] \times \dots \times [a_d^D, b_d^D]$  i  $B_y = [a_1^E, b_1^E] \times \dots \times [a_d^E, b_d^E]$  udaljenost se računa pomoću:



Slika 3.10 – Primjer geometrijskog klasteriranja



Slika 3.11 – Struktura stabla koja odgovara primjeru na slici 3.10



Slika 3.12 – Grafički prikaz određivanja udaljenosti klastera

$$\text{dist}(B_x, B_y) = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^d \max(0, a_i^D - b_i^E)\right)^2 + (\max(0, a_i^E - b_i^D))^2}. \quad (3.15)$$

Za  $\eta$  se obično odabiru vrijednosti između 0,5 i 1,5, a u sklopu ove disertacije uzeti će se da vrijedi  $\eta = 1$ . Za takav  $\eta$  se par klastera  $\{24,1,2,3\}$  i  $\{12,13,14,15\}$  može nazvati dopustivi parovi. Nakon određivanja svih dopustivih parova može se izraditi blokovska struktura stabla, a zatim i matrica podijeljena na blokove. Blokovi matrice koji se sastoje od dopustivih parova nazivaju se dopustivi blokovi i mogu se aproksimirati matricama manjeg ranga.

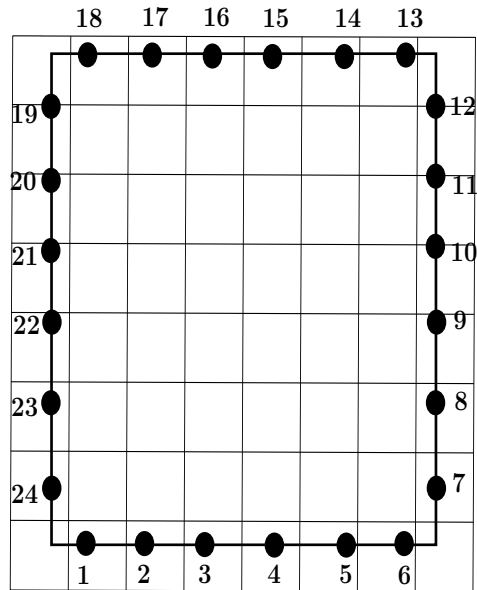
Iako je podjela matrice pomoću kriterija dopustivosti 3.13 vrlo jednostavna, izračun vrijednosti promjera i udaljenosti klastera je računski zahtjevan. Jedno od rješenja ovog problema jest upotreba mreže koja podsjeća na hijerarhijsku mrežu kod brzih multipola. Ovakav način klasteriranja uveden je u [72]. Primjer takve podjele nalazi se na slici 3.13. Izrada strukture stabla slična je onoj kod hijerarhijske strukture brzih multipola. U svakom nivou se ćelije dijele na četiri dijela, a zatim na još četiri i tako dok ne dođemo do zadnje ćelije u kojoj se nalazi kolokacijska točka.

Za ovakav način klasteriranja koristi se drugačiji kriterij dopustivosti koji je sada definiran kao [72]:

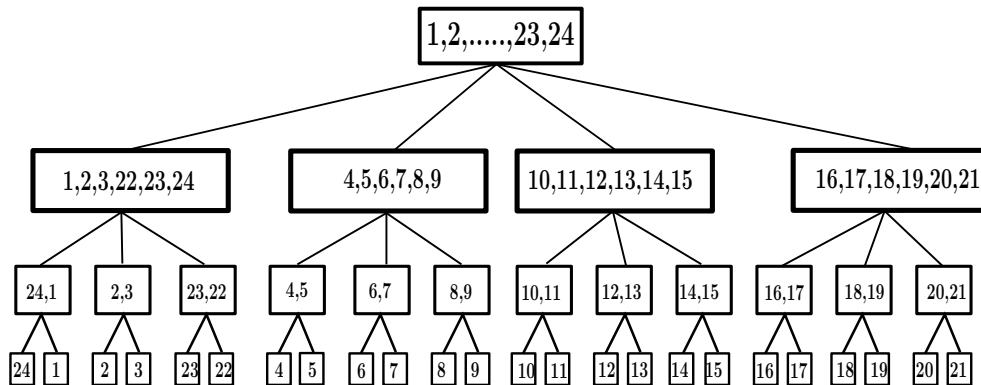
$$|i_x - i_y| \geq \mu \quad \&\& \quad |j_x - j_y| \geq \mu, \quad \mu > 0, \quad (3.16)$$

gdje je  $\mu$  parametar poput  $\eta$ , a  $(i, j)$  su indeksi dviju ćelija. Naime, indeksi se primjenom ovakvog klasteriranja dodjeljuju ćelijama prilikom klasteriranja. Time se rješava problem dodatnih proračuna prilikom određivanja dopustivih parova klastera. Ova se tehnika dosad prikazala učinkovitom te je primjenjena unutar AKA koda implementiranog u MRE kod u poglavlju 4.

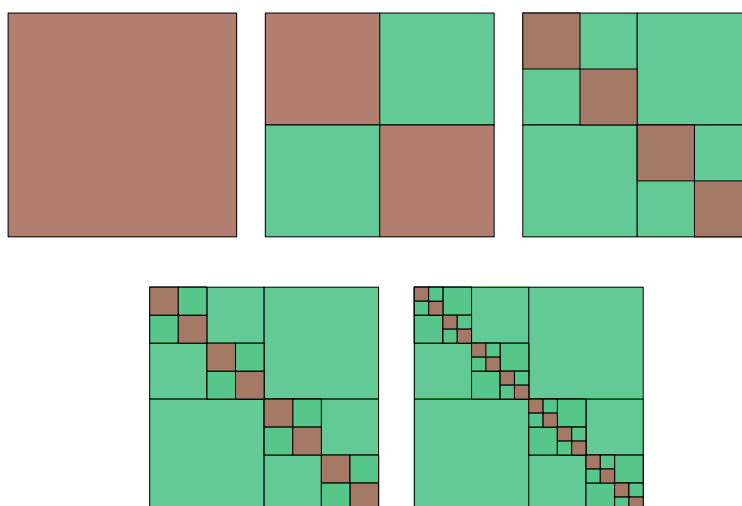
Kako bi se ovo poglavlje zaokružilo, na slici 3.15 prikazan je primjer podjele hijerarhijske matrice za jednostavan primjer.



Slika 3.13 – Primjer klasteriranja pomoću ćelija



Slika 3.14 – Struktura stabla koja odgovara primjeru na slici 3.13



Slika 3.15 – Primjer podjele hijerarhijske matrice

### 3.3 Aproksimacije matrica matricama manjeg ranga

Nakon što se provede postupak opisan u potpoglavlju 3.2.1, dopušteni blokovi stabla aproksimiraju se matricama niskog ranga s obzirom na propisanu točnost. Postoji više metoda kojima se matrice mogu aproksimirati matricama manjeg ranga. U ovoj disertaciji spomenut će se dvije metode: SVD i AKA.

Dekompozicija singularnih vrijednosti (SVD) matrice jest najpoznatija od klasičnih dekompozicija za aproksimaciju manjim rangom. Primjena SVD je široko rasprostranjena [106–108], a jedna od novijih primjena jest za poboljšanje brze metode multipola [109]. Ovo je jedan od razloga zašto je u sljedećem potpoglavlju ukratko opisana SVD.

Adaptivna križna aproksimacija (AKA) se smatra učinkovitom zamjenom dekompozicije singularnih vrijednosti kada se radi o proračunima s velikim brojem nepoznanica u kojima SVD nije kompetitivna. Opis algoritma adaptivne križne aproksimacije, koji je kasnije primjenjen prilikom proračuna kapaciteta i električnog polja namota transformatora, dan je u potpoglavlju 3.3.2.

#### 3.3.1 Dekompozicija singularnih vrijednosti matrice

Dekompozicija singularnih vrijednosti matrice daje najbolju aproksimaciju matrice matricama manjeg ranga i kao takvu ju je važno spomenuti kada se govori o aproksimacijama matrice matricom manjeg ranga. Jedna od karakteristika dekompozicije singularnih vrijednosti matrice jest ta da ona postoji za svaku matricu, a ne samo za kvadratne matrice.

SVD faktorizira matricu  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  u matrice  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{\Sigma}$  i  $\mathbf{V}^T$ :

$$\mathbf{A}^{m \times n} = \mathbf{U}^{m \times m} \mathbf{\Sigma}^{m \times n} \mathbf{V}^{n \times n^T}, \quad (3.17)$$

gdje su  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{V}$  unitarne matrice i vrijedi:

$$\mathbf{\Sigma} = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_p), \quad \sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_p \geq 0, \quad p = \min\{m, n\}. \quad (3.18)$$

Stupce matrice  $\mathbf{U}$  nazivamo lijevi, a stupce matrice  $\mathbf{V}$  nazivamo desni singularni vektori matrice  $\mathbf{A}$ .

Ako je  $m > n$ , SVD matrice  $\mathbf{A}$  se može zapisati u obliku:

$$\mathbf{A}^{m \times n} = \mathbf{U}^{m \times n} \mathbf{\Sigma}^{n \times n} \mathbf{V}^{n \times n^T}. \quad (3.19)$$

Takav oblik naziva se tanki SVD matrice  $\mathbf{A}$ .

Kao što je već navedeno, SVD daje najbolju aproksimaciju matrice matricama manjeg ranga. Ako za rang  $r$  matrice  $\mathbf{A}$  vrijedi  $r = \min\{m, n\}$ , onda se može zapisati:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}^{m \times r} \mathbf{\Sigma}^{r \times r} \mathbf{V}^{r \times n^T} = \sum_{i=1}^r \sigma_i u_i v_i^T. \quad (3.20)$$

Pritom vrijedi:  $\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_r]$ , i  $\mathbf{V} = [v_1, \dots, v_r]$ .

Matrica po 2-normi najbliža matrici  $\mathbf{A}$  definirana je kao:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{U}^{m \times k} \mathbf{\Sigma}_k^{k \times k} \mathbf{V}^{k \times n^T} = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^T, \quad (3.21)$$

gdje je  $k = \text{rang}(\mathbf{A}_k) \leq r$ ,  $\mathbf{\Sigma}_k = \text{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_k)$ ,  $\mathbf{U} = [u_1, \dots, u_k]$ , i  $\mathbf{V} = [v_1, \dots, v_k]$ .

Tada vrijedi sljedeće:

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}, \quad \text{i} \quad \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F = \sqrt{\sum_{i=k+1}^r \sigma_i^2}. \quad (3.22)$$

Jednadžba 3.22 govori kako je  $\mathbf{A}_k$  najbolja aproksimacija matrice ranga  $k$  u spektralnoj<sup>†</sup> i Frobeniusovoj normi<sup>‡</sup>. Dokaz te tvrdnje može se pronaći u [110].

SVD matrice se obično računa u dva koraka [108]. U prvom koraku se matrica reducira u bidijagonalnu matricu. Kompleksnost ove operacije je  $O(m)$ . Drugi korak je izračun dekompozicije singularnih vrijednosti bidijagonalne matrice. Kompleksnost drugog koraka je  $O(n^2)$  zbog potrebnih  $n$  iteracija. Ukupna kompleksnost SVD-a je onda  $O(mn^2)$ . Ukoliko je matrica kvadratna, numerička kompleksnost SVD algoritma je  $O(n^3)$ .

<sup>†</sup>Spektralna norma dana je izrazom:  $\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{x \neq 0} \left( \frac{\|\mathbf{A}x\|_2}{\|x\|_2} \right) = \sqrt{\nu_{\max}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})}$ , gdje je  $\mathbf{A}^*$  adjungirana matrica matrice  $\mathbf{A}$ , a  $\nu_{\max}(\mathbf{A}^* \mathbf{A})$  najveća svojstvena vrijednost matrice

<sup>‡</sup>Frobeniusova norma matrice  $\mathbf{A}^{m \times n}$  dana je izrazom:  $\|\mathbf{A}\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$

Pomoću dekompozicije singularnih vrijednosti matrice moguće je odrediti najniži rang za potrebnu točnost. Rang matrice se najsigurnije može izračunati pomoću SVD-a. No, zahvaljujući svojoj kompleksnosti ova metoda nije primjenjiva za proračune s velikim brojem nepoznanica.

### 3.3.2 Adaptivna križna aproksimacija

Kako je već navedeno, pomoću dekompozicije singularnih vrijednosti matrice se može pronaći najmanji rang potreban za određenu točnost. No, računaska složenost takvog pristupa onemogućava jednostavnu primjenu pri proračunima s velikim brojem nepoznanica. Adaptivna križna aproksimacija je učinkovita zamjena pri čemu sama jezgrena funkcija  $\kappa$  (engl. kernel function) nije potrebna, nego je potrebna samo informacija da je  $\kappa$  asimptotski glatka funkcija u odnosu na barem jednu varijablu. Razne primjene u literaturi pokazale su kako se algoritam AKA i dalje može uspješno primjeniti čak kada navedeni uvjet nije ostvaren [105]. Aproksimacija nižeg ranga nalazi se pomoću nekoliko elemenata dopustivih blokova originalne matrice. Dakle, nije potrebno izračunati cijelu matricu nego se računaju samo određeni elementi matrice. Direktni rad s elementima matrice omogućava adaptivni odabir ranga aproksimacije. Ovo svojstvo da se koriste originalni zapisi matrice je od velike praktične važnosti, jer za njihov izračun već postoje izrađeni algoritmi.

Ideja adaptivne križne aproksimacije prvo je predložena u [96], gdje je razvijen algoritam za verziju AKA znanu kao potpuno pivotirana AKA. Navedeni algoritam traži proračun cijele matrice  $\mathbf{A}^{m \times n}$ , a u svakom se koraku pregledava matrica pogreške. Zato su memorijski zahtjevi potpuno pivotiranog AKA algoritma kompleksnosti  $O(nm)$ , što algoritam čini skupim i neiskoristivim za jako velike matrice. Druga verzija algoritma predložena je u [97] i naziva se parcijalno pivotirana AKA. Parcijalno pivotirana AKA za aproksimaciju originalne matrice zahtijeva samo parcijalno znanje originalnih elemenata matrice. Složenost takvog algoritma je reda  $O(r^2(m+n))$ . Daljnji razvoj AKA algoritma može se pronaći u radovima [111, 112] gdje su predstavljeni AKA+ i hibridni AKA algoritmi. U [71] je predstavljen algoritam višerazinske adaptivne križne aproksimacije koji dijeli matricu na nekoliko razina i primjenjuje AKA algoritam na svakoj razini. Primjeri primjene AKA algoritma postoje za različite probleme. Primjena AKA algoritma može se vidjeti u raznim područjima: u [73] je predstavljena primjena na problemima širenja elektromagnetskih valova uz proučavanje učinkovitosti algoritma na različitim frekvencijama, u [70] se može pronaći primjena za 3D Laplaceove probleme, u [69] je predstavljena primjena AKA algoritma s kombiniranim MRE-MKE pri rješavanju simetričnih elektromagnetskih problema, dok je u [72] prikazano rješenje Laplaceove jednadžbe za predviđanje raspodjele temperature u 2D domeni kombiniranjem AKA i singularne granične metode.

Sljedeća potpotpoglavlja prikazuju osnovnu teoriju AKA algoritma, njegovu osnovnu ideju, kriterij zaustavljanja, odabir pivota te konačno, dva načina implementacije algoritma.

### 3.3.2.1 Osnovni prikaz AKA algoritma

Nakon podjele matrice na blokove opisane u prethodnom potpoglavlju, računaju se blokovi koji ne zadovoljavaju kriterij dopustivosti. Zatim se ti blokovi spremaju bez aproksimacije. Blokovi koji zadovoljavaju navedeni kriterij mogu se aproksimirati matricama nižeg ranga i svaki od njih se može razmatrati neovisno o ostalim blokovima. Cilj AKA algoritma jest aproksimacija bloka  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$  na način:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^T + \mathbf{R}_k. \quad (3.23)$$

Pritom je  $\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}^{m \times k}$ ,  $\mathbf{V}_k \in \mathbb{R}^{n \times k}$ ,  $\mathbf{R}_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Matrica  $\mathbf{R}_k$  je rezidualna matrica ili matrica pogreške.

Algoritam djeluje na način da počevši od inicijalizacije  $\mathbf{R}_0 := \mathbf{A}$  traži pivot u  $\mathbf{R}_k$ , a zatim za pronađeni pivot  $(i_k, j_k)$  oduzima produkt  $i_k$ -tog retka i  $j_k$ -tog stupca [105]:

$$\mathbf{R}_{k+1} := \mathbf{R}_k - [(\mathbf{R}_k)_{i_k, j_k}]^{-1} (\mathbf{R}_k)_{1:m, j_k} (\mathbf{R}_k)_{i_k, 1:n}, \quad (3.24)$$

pri čemu je  $(\mathbf{R}_k)_{1:m, j_k}$   $j$ -ti stupac, a  $(\mathbf{R}_k)_{i_k, 1:n}$   $i$ -ti redak matrice  $\mathbf{R}_k$ . Stupac  $j_k$  jest stupac u kojem se nalazi maksimalni element  $i_k$ -tog retka:

$$|(\mathbf{R}_{k-1})_{\tilde{v}_k, j_k}| = \max_{j=1, \dots, n} |(\mathbf{R}_{k-1})_{i_k, j}|. \quad (3.25)$$

Odabir  $i_k$ -tog retka objašnjen je u potpoglavlju 3.3.2.4.

Iz jednadžbe 3.24 je vidljivo kako se u  $k$ -tom koraku za izračun matrice  $\mathbf{R}_{k+1}$  koriste samo vrijednosti  $i_k$ -tog retka i  $j_k$ -tog stupca matrice  $\mathbf{R}_k$ . To znači da se ne treba računati cijela matrica  $\mathbf{R}_k$  što dalje znači da se treba izračunati samo neke elemente od  $\mathbf{A}$ . Temeljem navedenog u [105] je predložena formulacija jednadžbe 3.24 u obliku algoritma adaptivne križne aproksimacije. Navedeni osnovni opis algoritma preuzet je iz [105] i prikazan u algoritmu 3.1.

Promatrajući algoritam 3.1 treba imati na umu da se vektori  $\mathbf{u}_k$  i  $\tilde{\mathbf{v}}_k$  podudaraju s  $(\mathbf{R}_{k-1})_{1:m, j_k}$  i  $(\mathbf{R}_k)_{i_k, 1:n}^T$ . Retci matrice  $\mathbf{R}_k$  koji nestaju, skupljaju se u setu  $Z$ . Ako je  $i_k$ -ti redak različit od nule i koristi se kao  $\mathbf{v}_k$ , također se dodaje u  $Z$  jer tada  $i_k$ -ti redak matrice  $\mathbf{R}_{k+1}$  nestaje.

Sada se blok  $\mathbf{A}$  može zapisati kao:

$$\mathbf{A}_k = \tilde{\mathbf{A}}_k + \mathbf{R}_k, \quad (3.26)$$

gdje je  $\tilde{\mathbf{A}}_k$  aproksimirana matrica koja se računa kao:

$$\tilde{\mathbf{A}}_k = \mathbf{U}_k \mathbf{V}_k^T = \sum_{l=1}^k \mathbf{u}_l \mathbf{v}_l^T. \quad (3.27)$$

Grafički prikaz aproksimacije matrice  $\mathbf{A}$  pomoću određenih redaka i stupaca prikazan je na



---

**Algoritam 3.1** Osnovni prikaz algoritma adaptivne križne aproksimacije

---

$k = 1$ ;  
 $Z = \emptyset$ ;  
 Dok se ne ispuni kriterij zaustavljanja ili  $Z = \{1, \dots, m\}$  **ponavlja**  
 $i_k$  se odabire prema opisu u potpoglavljju 3.3.2.4  
 $\tilde{\mathbf{v}}_k := \mathbf{a}_{i_k, 1:n}$   
**za**  $l = 1, \dots, k - 1$   
 $\tilde{\mathbf{v}}_k := \tilde{\mathbf{v}}_k - (\mathbf{u}_l)_{i_k} \mathbf{v}_l$   
**kraj** iteracije  
 $Z := Z \cup \{i_k\}$   
**ako**  $\tilde{\mathbf{v}}_k = 0$  **onda**  $i_k := i_k + 1$   
**inače**  
 $j_k := \arg \max_{j=1, \dots, n} |(\tilde{\mathbf{v}}_k)_j|$   
 $\mathbf{v}_k := (\tilde{\mathbf{v}}_k)_{j_k}^{-1} \tilde{\mathbf{v}}_k$   
 $\mathbf{u}_k := \mathbf{a}_{1:m, j_k}$   
**za**  $l = 1, \dots, k - 1$   
 $\mathbf{u}_k := \mathbf{u}_k - (\mathbf{v}_l)_{j_k} \mathbf{u}_l$   
**kraj** iteracije  
 $k = k + 1$

---

slici 3.16. Pritom su parovi pivota  $(i_k, j_k)$  zatamnjeni.

Sljedeće je potrebno propisati kriterij zaustavljanja, odrediti način odabira redaka, te napraviti analizu pogreške kako bi se dokazala učinkovitost AKA algoritma. Sve navedeno prikazano je u sljedećim potpoglavljima.

### 3.3.2.2 Kriterij zaustavljanja

Za odabranu toleranciju pogreške  $\varepsilon > 0$  kao kriterij zaustavljanja može se koristiti sljedeći uvjet na  $k$  [105]:

$$\|\mathbf{u}_{k+1}\|_2 \|\mathbf{v}_{k+1}\|_2 \leq \frac{\varepsilon(1-\eta)}{1+\varepsilon} \|\tilde{\mathbf{A}}_k\|_F. \quad (3.28)$$

Pritom je  $\eta$  poznat iz 3.13, te vrijedi:

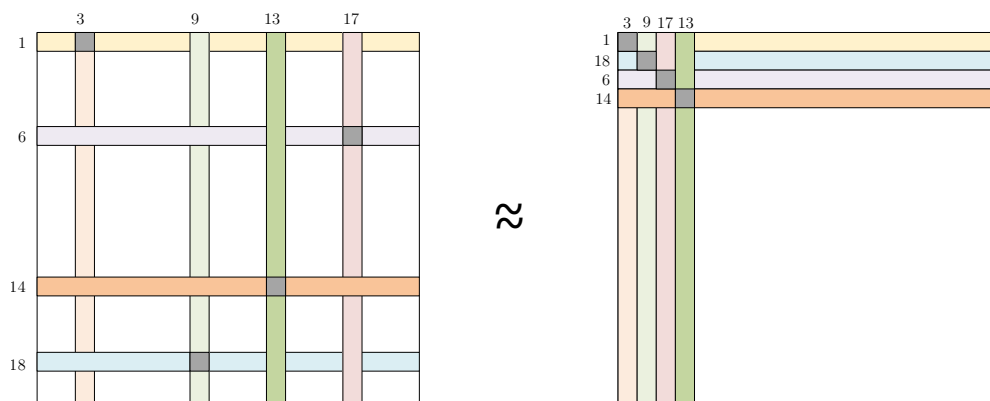
$$\|\mathbf{R}_k\|_F \leq \eta \|\mathbf{R}_k\|_F. \quad (3.29)$$

Tada se može zapisati:

$$\|\mathbf{R}_k\|_F \leq \|\mathbf{R}_{k+1}\|_F + \|\mathbf{u}_{k+1} \mathbf{v}_{k+1}^T\|_F \leq \eta \|\mathbf{R}_k\|_F + \|\mathbf{u}_{k+1}\|_2 \|\mathbf{v}_{k+1}\|_2. \quad (3.30)$$

Daljnijm sređivanjem prethodnog izraza dobije se:

$$\|\mathbf{R}_k\|_F \leq \frac{1}{1-\eta} \|\mathbf{u}_{k+1}\|_2 \|\mathbf{v}_{k+1}\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \|\tilde{\mathbf{A}}_k\|_F \leq \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} (\|\mathbf{A}_k\|_F + \|\mathbf{R}_k\|_F). \quad (3.31)$$



Slika 3.16 – Prikaz aproksimacije matrice pomoću AKA

Iz jednadžbe 3.31 dobije se kriterij zaustavljanja:

$$\|\mathbf{R}_k\|_F \leq \varepsilon \|\mathbf{A}_k\|_F \quad (3.32)$$

koji garantira toleranciju pogreške  $\varepsilon$ . Takav kriterij zaustavljanja je velika prednost AKA u usporedbi s ostalim metodama. On znači da se rang  $k$  aproksimirane matrice ne treba prethodno zadati, već se on određuje adaptivno pomoću kriterija zaustavljanja i proizvoljno odabrane tolerancije pogreške. Ovo je jedna od prednosti AKA algoritma.

### 3.3.2.3 Određivanje rezidualne matrice

Detaljna analiza određivanja rezidualne matrice AKA algoritma izvedena je u [105] te će u ovoj disertaciji samo biti prikazane osnovne premise i zahtjevi iz analize u [105] koje treba zadovoljiti pri odabiru redaka i stupaca, tj. pivota. Cilj analize pogreške je naći izraz kojim se ograničava norma rezidualne matrice  $\mathbf{R}_k$ . Poznavanje ograničenja norme rezidualne matrice važno je za procjenu učinkovitosti AKA algoritma. Zato je radi potpunosti disertacije prikazan postupak ograničavanja navedene norme za slučaj primjene metode kolokacije.

Uz pivote  $(i_l, j_l)$ , gdje  $i_l = j_l = l, l = 1, \dots, k$ , matrica  $\mathbf{A}$  može se zapisati kao:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, \quad A_{11} \in \mathbb{R}^{k \times k}. \quad (3.33)$$

Pritom se samo blokovi  $A_{11}, A_{12}, A_{21}$  koriste u algoritmu 3.1.

Determinanta  $A_{11}$  je produkt pivota što znači da se može izračunati njezin inverz. Rezidualna matrica  $\mathbf{R}_k$  može se izraziti u ovisnosti o originalnoj matrici sustava  $\mathbf{A}$  na način:

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{A} - \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix} A_{11}^{-1} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & C_k \end{bmatrix}, \quad (3.34)$$

pri čemu je  $C_k := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$  Schurov komplement  $A_{11}$  u  $\mathbf{A}$ . Dokaz ove tvrdnje nalazi se u [105].

Broj stupaca koji su jednaki nuli  $k' := |Z|$  u  $\mathbf{R}_k$  može biti veći od  $k$ . Tada iako aproksimacija  $\tilde{\mathbf{A}}_k$  ima maksimalni rang  $k$ ,  $k'$  određuje točnost aproksimacije. Navedeno znači da problem pronalaska pivota koji nije nula neće voditi do potrebe za proračunom cijele matrice. Određivanjem norme Schurovog komplementa, određuje se i norma rezidualne matrice. Ako je  $X \in \mathbb{R}^{(m-k) \times k'}$  proizvoljan, tada uz  $\hat{A}_{21} \in \mathbb{R}^{(k'-k) \times k}$  i  $\hat{A}_{22} \in \mathbb{R}^{(k'-k) \times (n-k)}$  vrijedi:

$$C_k = \left\{ A_{22} - X \begin{bmatrix} A_{12} \\ \hat{A}_{22} \end{bmatrix} \right\} - \left\{ A_{21} - X \begin{bmatrix} A_{11} \\ \hat{A}_{21} \end{bmatrix} \right\} A_{11}^{-1} A_{12}. \quad (3.35)$$

Izrazi prethodne jednadžbe koji se nalaze u vitičastim zagradama procjenjuju se tako da se povezuju s interpolacijskim greškama. Ostaju koeficijenti  $(A_{11}^{-1}A_{12})_{ij}$  koji za malu vrijednost norme  $C_k$  trebaju biti što manji. Strategija pivotiranja u algoritmu 3.1 ograničava izraze  $A_{11}^{-1}A_{12}$  jednadžbom:

$$|\det(a_1, \dots, a_{i-1}, a'_j, a_{i+1}, \dots, a_k)| \leq 2^{k-i} |\det A_{11}|, \quad i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, n-k, \quad (3.36)$$

pri čemu je  $j_k$  u svakom koraku odabran tako da je uvjet iz jednadžbe 3.25 zadovoljen, a s  $a_i$  su označeni stupci  $A_{11}$ , dok je s  $a'_j$  označen  $j$ -ti stupac  $A_{12}$ .

Pomoću prethodno određenih ograničenja mogu se procijeniti vrijednosti rezidualne matrice pomoću aproksimacijske pogreške u proizvoljnom sustavu funkcija  $\Lambda := \{\zeta_1, \dots, \zeta_{k'}\}$ ,  $\zeta_1 = 1$ , uz asimptotski glatku funkciju  $\Upsilon_{2,j}^*$ :

$$E_{ts}^\Lambda := \max_{j \in S} \inf_{p \in \Lambda} \|\Upsilon_{2,j}^* - p\|_{\infty, Y_t}. \quad (3.37)$$

Osnovni zahtjev koji treba biti zadovoljen da bi se vrijednosti mogle procijeniti jest da Vandermondeova determinanta ne nestaje:

$$\det [\zeta_j(y_i)]_{i,j=1,\dots,k'} \neq 0. \quad (3.38)$$

Sada se, uz  $\Upsilon_{1,i} f = f(y_i), i = 1, \dots, m$ , za  $i = 1, \dots, m$  i  $j = 1, \dots, n$ , za vrijednosti rezidualne matrice može zapisati:

$$|(\mathbf{R}_k)_{i,j}| \leq 2^k \left(1 + \|\Xi_{k'}^\Lambda\|\right) E_{ts}^\Lambda. \quad (3.39)$$

Posljednja jednadžba ograničava i vrijednosti koje nisu nikada promatrane. To je omogućeno time što pretpostavka glatkoće jezgrene funkcije omogućuje postojanje relacije između izračunatih i zanemarenih redaka i stupaca unutar svakog bloka.

### 3.3.2.4 Odabir pivota

Odabir pivota je od izrazite važnosti za točnost AKA algoritma. Odabir stupaca  $j_k$  pomoću uvjeta iz jednadžbe 3.25 važan je za određivanje jednadžbe 3.36, dok odabir redaka  $i_k$  garantira ispunjenost uvjeta 3.38 koji je potreban za određivanje granica norme rezidualne matrice.

Originalno su u [96, 105] predstavljene dvije tehnike odabira redaka. Prva tehnika je heuristički način odabira pivota, a druga tehnika se naziva rigorozni odabir pivota te garantira jednadžbu 3.38.

Kod heurističkog načina odabira pivota se za svaki redak i stupac matrice uvodi brojač koji pokazuje broj uspješnih aproksimacija primijenjenih na odgovarajući redak ili stupac. Aproksimacija je uspješna za redak  $i$  ako je  $|(\mathbf{u}_k)_i|$  reda procijenjene pogreške  $\|\mathbf{R}_{k-1}\|_F$ . Za stupac  $j$  se brojač povećava ako je  $|(\mathbf{v}_k)_j|$  jednake veličine kao i  $\|\mathbf{R}_{k-1}\|_F$ . Pomoću brojača se detektiraju retci i stupci za koje procjena pogreške nije pouzdana. Pivotiranje prema tim retcima i stupcima aproksimira retke i stupce na koje nije obraćena pažnja.

Druga tehnika odabira pivota omogućuje proizvoljni odabir redka  $i_1$ . Ako su već poznati  $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, m\}$  i  $j'_1, \dots, j'_k \in \{1, \dots, n\}$ , uz nesingularnu Vandermondeovu matricu  $\mathbf{W}_k$ , novi pivot  $(i_{k+1}, j'_{k+1})$  mora garantirati da je  $\mathbf{W}_{k+1}$  također nesingularna. Uz LU dekompoziciju matrice  $\mathbf{W}_k = \mathbf{L}_k \mathbf{U}_k$  može se pisati:

$$\det(\mathbf{W}_{k+1}) = \left[ c - (\mathbf{U}_k^{-T} a)^T (\mathbf{L}_k^{-1} b) \right] \det(\mathbf{W}_k), \quad (3.40)$$

pri čemu je  $a = [\Upsilon_{1,i_{k+1}} \zeta_{j'_l}]_{l=1,\dots,k}$ ,  $b = [\Upsilon_{1,i_l} \zeta_{j'_{k+1}}]_{l=1,\dots,k}$ ,  $c = \Upsilon_{1,i_{k+1}} \zeta_{j'_{k+1}}$ . Uz navedeno svaki  $i_{k+1}$  koji zadovoljava  $\left( (\mathbf{U}_k^{-T} a)^T (\mathbf{L}_k^{-1} b) \right) \neq c$  može biti odabran kao novi pivot. Preporuka je odabrati  $i_{k+1}$  za koji je izraz  $\left[ c - (\mathbf{U}_k^{-T} a)^T (\mathbf{L}_k^{-1} b) \right]$  maksimiziran [105]. Općenito se za odabir pivota preporuča strategija odabira maksimalnog elementa.

Načini implementacije AKA algoritma u kojima se koristi strategija maksimalnog elementa

---

**Algoritam 3.2** Opis algoritma potpuno pivotirane AKA

---

**1. Inicijalizacija**

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{A}, \{ \text{proračun cijele matrice} \}$$

$$I_1 = 1, \{ \text{inicijalizacija indeksa prvog retka} \}$$

$$\mathbf{R}(I_1, J_1) = \mathbf{A}(I_1, J_1), \{ \text{inicijalizacija rezidualne matrice} \}$$

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_1\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 \|\mathbf{v}_1\|^2, \{ \text{izračun norme} \}$$

**2. Iteracije za  $k=2,3,\dots$**

$$\mathbf{R}(I_{k+1}, J_{k+1}) = \mathbf{A}(I_k, J_k) - \mathbf{u}\mathbf{v}(I_k, J_k), \{ \text{ažuriranje rezidualne matrice} \}$$

$$I_k, J_k = \text{find}(|\mathbf{R}(I_k, J_k)|) == \max_{\{i,j\}}(|\mathbf{R}(i, j)|), \{ \text{određivanje novih pivota } I_k, J_k \}$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{R}(I_k, :)/\mathbf{R}(I_k, J_k), \{ \text{određivanje retka } \mathbf{v}_k \}$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{R}(:, J_k), \{ \text{određivanje stupca } \mathbf{u}_k \}$$

$$\mathbf{R}(I_{k+1}, J) = \mathbf{R}(I_k, J_k) - \mathbf{u}(I_k, J_k)\mathbf{v}^T(I_k, J_k), \{ \text{ažuriranje rezidualne matrice} \}$$

$$\varepsilon \|\mathbf{R}_{k+1}\| \geq \|\mathbf{R}_k\|, \{ \text{provjera kriterija zaustavljanja} \}$$

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_k\|^2 = \|\mathbf{A}_{k-1}\|^2 + \|\mathbf{u}_k\|^2 \|\mathbf{v}_k\|^2, \{ \text{nova aproksimacija} \}$$


---

prikazani su u sljedećem potpoglavlju. Dakle, u navedenim se implementacijama odabire pivot  $(i_k, j_k)$  kao maksimalni element modula  $i_k$ -tog retka:

$$\left| (\mathbf{R}_{k-1})_{i_k j_k} \right| = \max_{j \in S} \left| (\mathbf{R}_{k-1})_{i_k j} \right|. \quad (3.41)$$

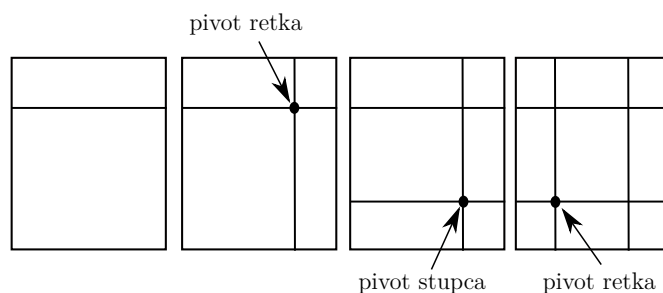
Prethodna jednadžba određuje samo odabir  $j_k$ , dok je se  $i_{k+1}$  odabire kao maksimalni element u modulu  $j_k$ -tog stupca  $\mathbf{R}_{k-1}$ .

### 3.3.2.5 Vrste implementacije AKA algoritma

Algoritam adaptivne križne aproksimacije može se implementirati na dva načina. Prvi način poznat je kao potpuno pivotirana AKA, a druga implementacija poznata je pod nazivom parcijalno pivotirana AKA.

Algoritam potpuno pivotirane AKA prikazan je u 3.2. Podijeljen je na dva dijela, inicijalizaciju i iteracije. Plavom bojom napisani su komentari koji opisuju svaki korak algoritma. Pivoti se određuju tako da algoritam pronalazi odgovarajući redak i stupac koji označavaju maksimalni element. Iz odabranog retka i stupca računa se aproksimacija te se vrši oduzimanje kako bi se dobila rezidualna matrica za sljedeći korak. Navedeno se ponavlja dok kriterij zaustavljanja iz jednadžbe nije zadovoljen. Broj operacija potrebnih da se izračuna aproksimacija je  $O(kmn)$  [97]. Algoritam potpuno pivotirane AKA zahtijeva poznavanje cijele matrice sustava, što znači da je računski zahtjevan i nepraktičan za probleme s velikim brojem nepoznanica.

Algoritam parcijalno pivotirane AKA prikazan je u 3.3 [73, 97]. Pivoti se određuju slijedno



Slika 3.17 – Slijedno određivanje pivota

računanjem maksimalnih elemenata u retcima i stupcima što je grafički prikazano na slici 3.17. Dakle, prvo će za postavljeni redak biti izračunata rezidualna matrica. Zatim će se moći odrediti maksimalni element u tom retku koji će se nazvati pivot. Zatim je moguće izračunati stupac rezidualne matrice i pomoću toga odrediti  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$ . Nakon toga slijedi izračun norme i ulazak u iteraciju gdje se postupak ponavlja uz ažuriranje rezidualne matrice. U ovoj verziji algoritma dolazi do manje promjene u kriteriju zaustavljanja. Naime, za proračun normi  $\|\mathbf{A}\|$  i  $\|\mathbf{R}\|$  potrebno je imati izračunatu cijelu matricu  $\mathbf{A}$ . S obzirom na to da je ideja ovog algoritma da se cijela matrica ne treba računati, u kriteriju zaustavljanja može se koristiti norma aproksimirane matrice  $\tilde{\mathbf{A}}$ . Ona se može rekurzivno izračunati pomoću jednadžbe [97]:

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_k\|_F^2 = \|\mathbf{A}_{k-1}\|_F^2 + \|\mathbf{u}_k\|_F^2 \|\mathbf{v}_k\|_F^2 + 2 \sum_{p=1}^{k-1} \mathbf{u}_p^T \mathbf{u}_k \mathbf{v}_p^T \mathbf{v}_k. \quad (3.42)$$

Pošto za rezidualnu matricu vrijedi aproksimacija:

$$\|\mathbf{R}_k\|_F = \|\mathbf{u}_k\|_F \|\mathbf{v}_k\|_F, \quad (3.43)$$

kao kriterij zaustavljanja se za svaki korak  $k$  koristi izraz:

$$\varepsilon \|\tilde{\mathbf{A}}_k\|_F \geq \|\mathbf{u}_k\|_F \|\mathbf{v}_k\|_F. \quad (3.44)$$

U algoritmu parcijalno pivotirane AKA kriterij zaustavljanja je heuristički što znači da se može dogoditi da se, iako se algoritam provede, aproksimacija  $\tilde{\mathbf{A}}$  možda nije dobivena sa zadanom tolerancijom pogreške  $\varepsilon$ . Zbog takve mogućnosti potrebno je koristiti dodatne provjere konvergencije [113].

Oba algoritma prikazana u ovom poglavlju mogu se primjeniti na kolokacijske matrice kakve se koriste u metodologiji prezentiranoj u ovoj disertaciji. U poglavlju 5 prikazani su rezultati implementacije algoritma parcijalno pivotirane AKA.

---

**Algoritam 3.3** Algoritam parcijalno pivotirane AKA

---

{  $I$  - indeksi redaka matrice  $A$  }

{  $J$  - indeksi stupaca matrice  $A$  }

{  $i$  - indeksi redaka za potragu maksimuma matrice  $R$  }

{  $j$  - indeksi stupaca za potragu maksimuma matrice  $R$  }

**1. Inicijalizacija**

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = 0,$$

$$I_1 = 1, \{ \text{inicijalizacija indeksa prvog retka} \}$$

$$\mathbf{R}(I_1, :) = \mathbf{A}(I_1, :), \{ \text{inicijalizacija prvog retka rezidualne matrice} \}$$

$$J_1 = \text{find}(|\mathbf{R}(J_1)|) == \max_{\{j\}}(|\mathbf{R}(j)|), \{ \text{određivanje indeksa prvog stupca } J_1 \}$$

$$\mathbf{R}(:, J_1) = \mathbf{A}(:, J_1), \{ \text{inicijalizacija prvog stupca rezidualne matrice} \}$$

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{R}(I_1, :)/\mathbf{R}(I_1, J_1), \{ \text{određivanje prvog retka } \mathbf{v} \}$$

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{R}(:, J_1), \{ \text{određivanje prvog stupca } \mathbf{u} \}$$

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_1\|^2 = \|\mathbf{u}_1\|^2 \|\mathbf{v}_1\|^2, \{ \text{izračun norme} \}$$

**2. Iteracije za  $k=2,3,\dots$**

$$I_2 = \text{find}(|\mathbf{R}(I_2, J_1)|) == \max_{\{i\}}(|\mathbf{R}(i, J_1)|), \{ \text{priprema pred iteracije, određivanje indeksa drugog retka } I_2 \}$$

za  $k=2,3,\dots$

$$\mathbf{R}(I_k, :) = \mathbf{A}(I_k, :) - \mathbf{u}(I_k, :)\mathbf{v}, \{ \text{*ažuriranje } I_{\{k\}} \text{ retka rezidualne matrice} \}$$

$$J_k = \text{find}(|\mathbf{R}(I_k, J_k)|) == \max_{\{j\}}(|\mathbf{R}(I_k, j)|), \{ \text{određivanje indeksa stupca } J \}$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{R}(I_k, :)/\mathbf{R}(I_k, J_k), \{ \text{određivanje retka } \mathbf{v}_k \}$$

$$\mathbf{R}(:, J_k) = \mathbf{A}(:, J_k) - \mathbf{u}\mathbf{v}(:, J_k), \{ \text{ažuriranje } J_{\{k\}} \text{ stupca rezidualne matrice} \}$$

$$\mathbf{u}_k = \mathbf{R}(:, J_k), \{ \text{određivanje stupca } \mathbf{u}_k \}$$

$$\|\tilde{\mathbf{A}}_k\|_F^2 = \|\mathbf{A}_{k-1}\|_F^2 + \|\mathbf{u}_k\|_F^2 \|\mathbf{v}_k\|_F^2 + 2 \sum_{p=1}^{k-1} |\mathbf{u}_p^T \mathbf{u}_k| |\mathbf{v}_p^T \mathbf{v}_k|, \{ \text{izračun norme} \}$$

ako  $\varepsilon \|\tilde{\mathbf{A}}_k\|_F \geq \|\mathbf{u}_k\|_F \|\mathbf{v}_k\|_F$  **kraj** iteracije

inače,  $I_{k+1} = \text{find}(|\mathbf{R}(I_{k+1}, J_k)|) == \max_{\{i\}}(|\mathbf{R}(i, J_k)|), \{ \text{iteracija se nastavlja, određivanje indeksa retka } I_k \text{ i povratak na } * \}$

---

### 3.4 Prekondicioniranje pomoću $\mathcal{H}$ -matrica

Matrice dobivene pomoću metode rubnih elemenata su često loše kondicionirane te u slučaju korištenja iterativnih metoda može doći do otežane konvergencije rješenja nakon velikog broja iteracija i dugog vremena proračuna, a u nekim slučajevima se rješenje ne može dobiti. U takvim slučajevima, posebno u onim gdje rješenje ne konvergira, poželjna je metoda poboljšanja konvergencijskog ponašanja iterativne metode. Učinkovitost iterativnih metoda može se poboljšati upotrebom postupka prekondicioniranja. Prekondicioniranje je postupak transformacije sustava linearnih jednadžbi koji se treba riješiti u jedan drugi sustav linearnih jednadžbi koji ima isto rješenje. Dobar izbor prekondicionera vrlo je važan za pouzdanost i robusnost iterativne metode koja se koristi.

Kao što je već navedeno, matrica sustava  $\mathbf{A}$ , a time i njezina aproksimacija pomoću  $\mathcal{H}$ -matrica,  $\tilde{\mathbf{A}}$ , mogu biti loše kondicionirane. Osnovni korak prekondicioniranja jest pronalazak matrice prekondicioniranja  $\mathbf{P}$ . Matrica  $\mathbf{P}$  zapravo aproksimira inverz matrice sustava  $\mathbf{A}$ , tj. njezine aproksimacije. Točnost te aproksimacije određuje učinkovitost prekondicioniranja. Problem se nalazi u tome da što je inverz točniji, to više vremena i memorijskih resursa treba za njegov proračun.

Lijevi prekondicioner jest matrica  $\mathbf{P}$  za koju vrijedi  $\mathbf{P} \approx \tilde{\mathbf{A}}^{-1}$  tako da distribucija svojstvenih vrijednosti  $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}$  vodi do poboljšane konvergencije iterativne metode [105]. Tada se rješava ekvivalentni linearni sustav:

$$\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{b}. \quad (3.45)$$

Kada se koriste metode Krylovljevih potprostora, ne treba se formirati matricu  $\mathbf{P}\tilde{\mathbf{A}}$ , već se vektori uzastopno množe s  $\tilde{\mathbf{A}}$  i  $\mathbf{P}$ .

Kada se koristi desno prekondicioniranje, ekvivalentni linearni sustav je oblika:

$$\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}, \quad (3.46)$$

pri čemu je  $\mathbf{x} = \mathbf{P}\tilde{\mathbf{x}}$ .

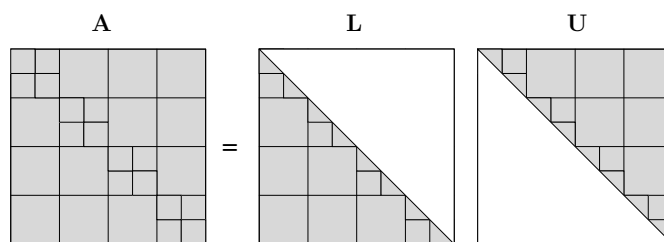
Prekondicioner je moguće izračunati koristeći adaptivnu križnu aproksimaciju koja može generirati hijerarhijski LU prekondicioner s  $L$  i  $U$  faktorima mnogo manjim od same aproksimirane matrice.

U [105], preporučeno je da se za guste matrice prekondicioner računa LU dekompozicijom kao:

$$\mathbf{P}^{-1} = (\mathbf{LU})^{-1} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}, \quad (3.47)$$

gdje su  $\mathbf{L}$  donja, a  $\mathbf{U}$  gornja trokutasta  $\mathcal{H}$ -matrica, za koje vrijedi  $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{LU}$  što se može vidjeti





Slika 3.18 – LU dekompozicija matrice

na slici 3.18.

Ako je  $\tilde{\mathbf{A}}$  hermitski pozitivna, prekondicioner se može računati pomoću:

$$\mathbf{P} = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}^T, \quad (3.48)$$

pri čemu je  $\mathbf{L}$  donja trokutasta  $\mathcal{H}$ -matrica Choleky-eve dekompozicije  $\tilde{\mathbf{A}} \approx \mathbf{L}\mathbf{L}^T$ .

Preciznost LU dekompozicije određena je sljedećom jednačbom čiji se dokaz može pronaći u [113]:

$$\|\tilde{\mathbf{A}} - \mathbf{P}\|_2 \leq \delta \|\tilde{\mathbf{A}}\|_2. \quad (3.49)$$

Pritom je  $\delta$  preciznost dekompozicije i vrijedi  $\delta > 0$ .

Hijerarhijska LU dekompozicija, poput one prikazane na slici 3.18, dobije se rekurzivnim algoritmom koji rješava sljedeći sustav jednažbi:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{A}}_{11} & \tilde{\mathbf{A}}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} & \tilde{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} \mathbf{L}_{11} & 0 \\ \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{11} & \mathbf{U}_{12} \\ 0 & \mathbf{U}_{22} \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

što je ekvivalentno:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}_{11} \approx \mathbf{L}_{11}\mathbf{U}_{11} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{12} \approx \mathbf{L}_{11}\mathbf{U}_{12} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{21} \approx \mathbf{L}_{21}\mathbf{U}_{11} \\ \tilde{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}_{21}\mathbf{U}_{12} \approx \mathbf{L}_{22}\mathbf{U}_{22}. \end{cases} \quad (3.51)$$

Dakle, pomoću adaptivne križne aproksimacije se dakle može dobiti učinkoviti prekondicioner. Taj prekondicioner zauzima puno manje memorije zahvaljujući svojem nižem rangu.

Kao i u samom postupku AKA, nije potrebna informacija o integralnim jednadžbama koje se koriste, nego se koriste samo algebarske manipulacije na razini matrice. Mogućnost algebarskog izračuna prekondicionera iz aproksimacije matrice  $\tilde{A}$  jedna je od prednosti korištenja AKA i  $\mathcal{H}$ -matrica nad brzom metodom multipola. Unutar ovog potpoglavlja dana je skraćena teorija prekondicioniranja pomoću  $\mathcal{H}$ -matrica, a za više informacija čitatelj se upućuje na literaturu [105, 113].

## Poglavlje 4

# Implementacija proračuna

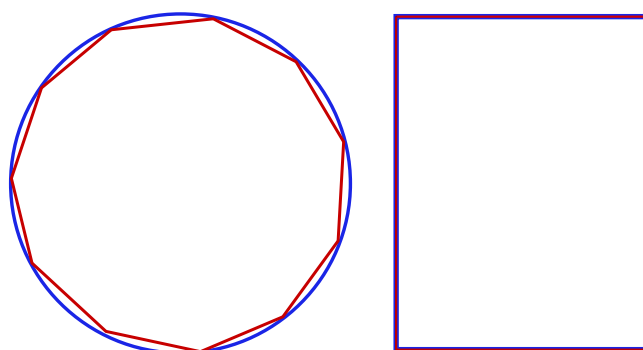
Ovo poglavlje prikazuje osnovne korake prilikom razvoja koda za elektrostatski proračun. Poglavlje sadrži tri jednostavna primjera proračuna kojima se objašnjava i potvrđuje točnost implementacije. Zatim je prikazana shema implementacije algoritma adaptivne križne aproksimacije, objašnjenog u poglavlju 3, s razvijenim MRE kodom. Na kraju je prikazan kratki teorijski pregled iterativne metode koja se koristi za rješavanje linearnog sustava jednažbi u finalnom MRE-AKA proračunu. Sve navedeno napravljeno je u programskom paketu *Matlab R2018b* [114].

### 4.1 Razvoj koda proračuna električnog polja i kapaciteta primjenom metode rubnih elemenata

Kao što je prethodno navedeno u poglavlju 2, diskretizacija je prvi korak rješavanja problema. Diskretizacija se u kodu vrši automatski, no potrebno je zadati krajnje točke linijskih elemenata. Primjer diskretizacije kružnog i kvadratnog elementa prikazan je na slici 4.1. Zatim se svaki linijski element dijeli na proizvoljni broj segmenata. Odabirom broja segmenata automatski se proračunavaju kolokacijske točke, na način da su uvijek simetrične gledano na sredinu linijskog elementa.

Za rješavanje zakrivljenih elemenata, poput kružnog elementa na slici 4.1, koji su diskretizirani pomoću kosih linija, potrebno je parametrizirati jednažbe 2.56 i 2.57. Nakon provedene parametrizacije potrebno je riješiti integrale:

$$\int_0^1 \ln \left( \frac{1}{\sqrt{((x_{kon} - x_{poc})t + x_{poc} - x)^2 + (d)^2}} \right) dt, \quad (4.1)$$



**Slika 4.1** – Primjer diskretizacije za ravne i zakrivljene elemente. Na slici su plavom bojom prikazani kružni i kvadratni element, dok su crvenom bojom prikazane linije kojima se radi diskretizacija.

$$\int_0^1 t \ln \left( \frac{1}{\sqrt{((x_{\text{kon}} - x_{\text{poc}})t + x_{\text{poc}} - x)^2 + (d)^2}} \right) dt, \quad (4.2)$$

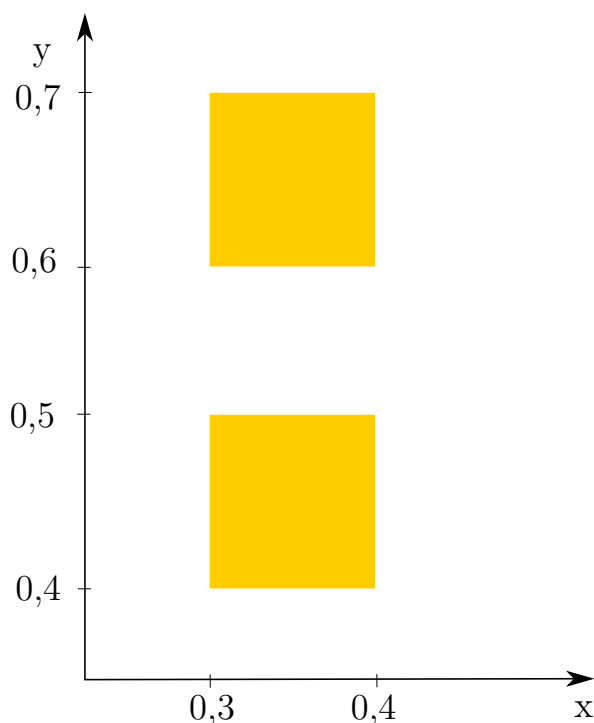
pri čemu je  $d$  najkraća udaljenost do pravca na kojem leži element nad kojim se vrši integracija. Postupak i dobiveni izrazi parametrizacije, te analitička rješenja novonastalih integrala nalaze se u dodatku B.

Jedan od većih problema prilikom razvoja MRE proračuna jest način punjenja matrice sustava. Ideja punjenja matrice sustava preuzeta je iz [62]. Izgradnja vektora baznih funkcija i matrice sumacije omogućuje pojednostavljenje koda. Obje veličine bit će detaljnije objašnjene u primjeru u potpotpoglavlju 4.1.1. Primjer u potpotpoglavlju 4.1.2 služi kako bi se prikazala opravdanost dvodimenzionalnog približenja zavoja transformatora pomoću beskonačno dugih ravnih vodiča. Primjer u potpoglavlju 4.1.3 dokazuje upotrebljivost razvijenog MRE koda i u slučaju zakrivljene geometrije, kao i sveukupnu točnost razvijene metodologije usporedbom s analitičkim proračunom za isti problem.

#### 4.1.1 Primjer proračuna beskonačnih vodiča

Na slici 4.2 prikazana je geometrija problema. Jedan od vodiča se postavlja na potencijal 1 V, a drugi na potencijal -1 V.

Prvo se radi diskretizacija elementa. Svaki od vodiča se diskretizira s četiri linije koje se dalje proizvoljno segmentiraju. U ovom primjeru odabrano je da se svaka linija segmentira na sedam segmenata. Linije kojima se diskretiziraju vodiči su otvorene, dakle nisu međusobno spojene te u slučaju pravokutnog vodiča ne čine petlju. To znači da će se na svakom linijskom elementu, podijeljenom na  $n$  segmenata, nalaziti  $n + 1$  kolokacijska točka. Slika 4.3 prikazuje kolokacijske točke na jednom od elemenata. Kolokacijske točke postavljene su simetrično u



**Slika 4.2** – Primjer dva beskonačno duga vodiča

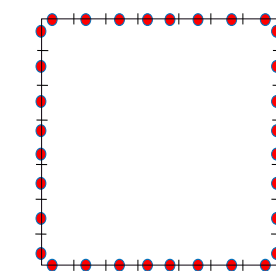
odnosu na sredinu linijskog elementa.

Nakon diskretizacije i određivanja kolokacijskih točaka, može se pristupiti izgradnji vektora baznih funkcija. Promatra se jedna linija (npr. donji rub vodiča u x smjeru) na slici 4.3. S obzirom na to da su linije otvorenih završetaka, vektor baznih funkcija za jedan vodič iz primjera može se zapisati u sljedećem obliku:

$$v_{tem} = [1222221]. \quad (4.3)$$

Članovi vektora interpretiraju se ovako:

- prvi član vektora govori da u prvom čvoru postoji jedna temeljna funkcija. To je prva funkcija elementa  $i = 1$ ,
- drugi član vektora označava da su u drugom čvoru dvije temeljne funkcije,
- treći član vektora označava da su u trećem čvoru dvije temeljne funkcije,
- četvrti član vektora označava da su u četvrtom dvije temeljne funkcije,
- peti član vektora označava da su u petom dvije temeljne funkcije,



**Slika 4.3** – Kolokacijske točke na jednom od vodiča

- šesti član vektora označava da su u šestom dvije temeljne funkcije,
- sedmi član vektora označava da sedmi čvor sadrži jednu temeljnu funkciju.

Vektor se zadaje za svaki linijski element unutar problema.

Zatim možemo odrediti matricu sumiranja. Ona je za prvi vodič iz primjera sljedećeg oblika:

$$M = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \\ 2 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \\ 1 \\ 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} . \quad (4.4)$$

Svaki redak u matrici sumiranja označava jedan čvor, a interpretacija je sljedeća:

- prvi čvor matrice sadrži samo jednu temeljnu funkciju,
- drugi čvor sadrži dvije temeljne funkcije i to drugu temeljnu funkciju elementa jedan i prvu temeljnu funkciju elementa dva,
- treći čvor sadrži dvije temeljne funkcije i to drugu temeljnu funkciju elementa dva i prvu temeljnu funkciju elementa tri,
- četvrti čvor sadrži dvije temeljne funkcije i to drugu temeljnu funkciju elementa tri i prvu temeljnu funkciju elementa četiri,
- peti čvor sadrži dvije temeljne funkcije i to drugu temeljnu funkciju elementa četiri i prvu temeljnu funkciju elementa pet,
- šesti čvor sadrži dvije temeljne funkcije i to drugu temeljnu funkciju elementa pet i prvu

temeljnu funkciju elementa šest,

- sedmi čvor sadrži jednu temeljnu funkciju i to drugu temeljnu funkciju elementa šest.

Kada su izrađeni vektor baznih funkcija i matrica sumacije, moguće je izračunati matricu sustava **A** iz jednadžbe 2.22 pomoću jednadžbe:

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^{duljina(vtem)} \sum_{j=1}^{vtem(l)} \int_{xpoc_{M(1,j,l)}}^{xkon_{M(1,j,l)}} f_{M(2,j,l)}(x_k) \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x_k - x')^2 + (y_k - y')^2}} \right) dx'. \quad (4.5)$$

Nakon izvršene parametrizacije podintegralna funkcija jednadžbe 4.5 pretvara se u:

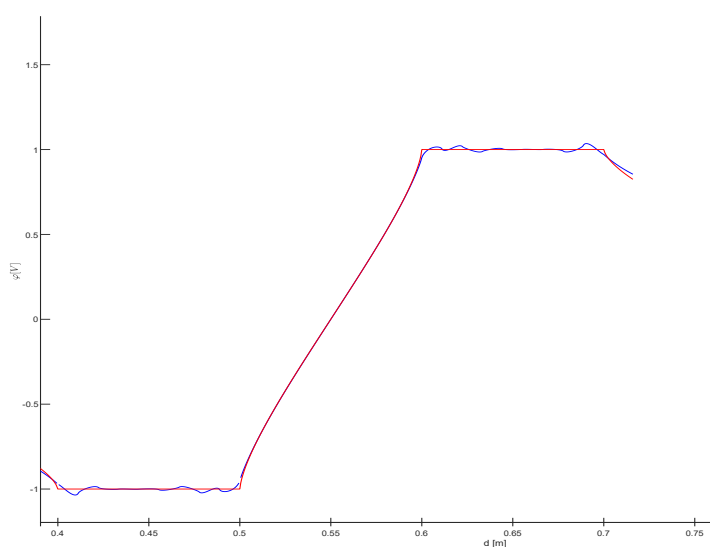
$$\int_0^1 u(l) f_{M(2,j,l)}(t) \ln \left( \frac{1}{\sqrt{((xkon_{M(1,j,l)} - xpoc_{M(1,j,l)})t + xpoc_{M(1,j,l)} - x_k)^2 + (d_k)^2}} \right) dt, \quad (4.6)$$

pri čemu je  $u(l)$  duljina segmenta za početne i konačne točke elemenata  $xpoc, xkon, ypoc, ykon$  u Kartezijevom koordinatnom sustavu:

$$u(l) = \sqrt{(xkon_l - xpoc_l)^2 + (ykon_l - ypoc_l)^2}, \quad (4.7)$$

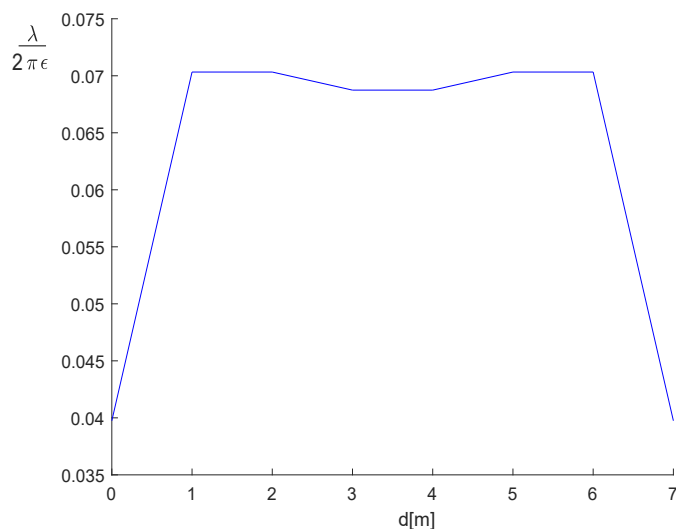
a  $f_{M(2,j,l)}$  su funkcije izvora prikazane jednadžbom 2.54.

Usporedba raspodjele potencijala za liniju na kojoj je  $x = 0,3$  prikazana je na slici 4.4. Za rješavanje problema putem MKE koristi se profesionalni paket *Infolytica® ElecNet 7.5.1.* [115].



**Slika 4.4** – Usporedba raspodjele potencijala sa crvenom bojom označenu MRE i plavom bojom označenu MKE

Raspodjela naboja po jednom rubu vodiča na potencijalu  $\varphi = 1\text{ V}$  prikazana je slikom 4.5.



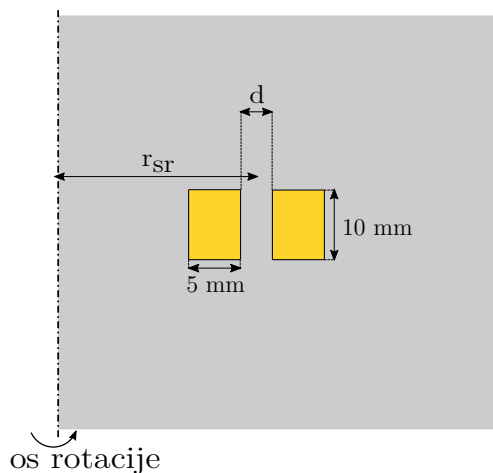
**Slika 4.5** – Raspodjela linijskog naboja po rubu vodiča modeliranom sa sedam linearnih elemenata

#### 4.1.2 Primjer proračuna osnosimetričnih vodiča

Sljedeći primjer je primjer proračuna kapaciteta dva jednaka paralelna osnosimetrična vodiča prikazana na slici 4.6.

Teorija proračuna kapaciteta prikazana je u poglavlju 2.

Ovaj jednostavni primjer prikazan je kako bi se dokazala opravdanost približenja osnosimetričnih vodiča namota transformatora pomoću beskonačno dugih vodiča. Kako u disertaciji nije razvijen osnosimetrični proračun, za rezultate takvog proračuna koriste se rezultati dobiveni *Infolytica® ElecNet 7.5.1.* paketom.



**Slika 4.6** – Dva paralelna osnosimetrična vodiča



Diskretizacija sličnih elemenata objašnjena je u prethodnom primjeru te ćemo se u ovom primjeru više dotaknuti samih rezultata proračuna.

Pri proračunu kapaciteta približenjem beskonačno dugim vodičima treba imati u vidu da se proračunati kapacitet dobije u jedinici F/m. Zato je prilikom usporedbe s osnosimetričnim modelom potrebno izračunati kapacitet na cijeloj duljini namota.

U navedenom primjeru dobiveni su sljedeći rezultati kapaciteta za osnosimetrični  $C_{o12}$  i proračun beskonačno dugim ravnim vodičima  $C_{r12}$ :

$$C_{r12} = 1,094 \times 10^{-10} \text{ F/m}, \quad C_{o12} = 2,097 \times 10^{-10} \text{ F}. \quad (4.8)$$

Sada je potrebno  $C_{r12}$  izraziti u Faradima. Postupak je sljedeći: određuje se srednja udaljenost oba vodiča od osi simetrije  $r_{sr}$  kao što je vidljivo na slici 4.6. Za primjer na slici 4.6  $r_{sr} = 0,3055$  m, dok je udaljenost između vodiča  $d = 1$  mm. Zatim se računa srednja duljina vodiča pomoću:

$$l_{sr} = 2\pi r_{sr}. \quad (4.9)$$

Znajući srednju duljinu vodiča može se dobiti vrijednost kapaciteta  $C_{12}$  u Faradima:

$$C_{12} = C_{r12} l_{sr}. \quad (4.10)$$

U ovom slučaju dobije se  $C_{12} = 2,09995 \times 10^{-10}$  F. Kod ovakvih približenja uvijek je potrebno odrediti moguće odstupanje. Odstupanje je za navedeni slučaj 0,14%. Ovime je vidljivo da je ovakvo približenje zadovoljavajuće.

Provedeni proračuni za različite dimenzije i udaljenosti vodiča pokazali su kako je u većini slučajeva ovakvo približenje zadovoljavajuće, pogotovo u slučaju transformatora. No, u slučajevima kada je udaljenost između vodiča jednaka ili veća od njihove srednje udaljenosti od osi simetrije, odstupanje je veće od 15%. Tada nije preporučljivo koristiti navedeno približenje.

Za rješavanje modela visokonaponskog namota transformatora, zbog njegove geometrije kojom su visokonaponski namoti gotovo uvijek za barem jednu magnitudu više udaljeni od osi simetrije nego jedni od drugih, navedeno se približenje može koristiti sa zadovoljavajućim rezultatima.

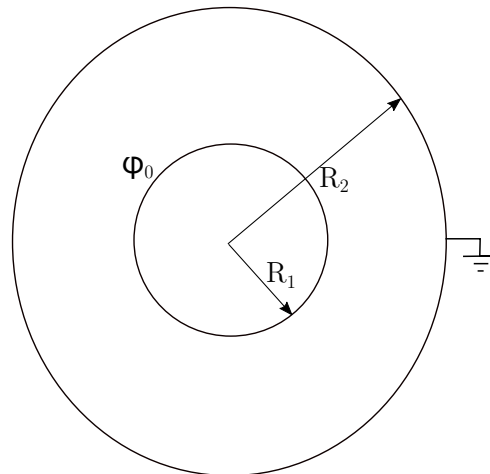
### 4.1.3 Primjer proračuna koaksijalnog kabela

Kao dokaz mogućnosti razvijene metodologije da rješava i zakrivljene elemente prikazan je primjer proračuna električnog polja i proračun kapaciteta koaksijalnog kabela. Problem je prikazan na slici 4.7. Potrebni parametri su prikazani u tablici 4.1.

Radi potpunosti disertacije prikazat će se izvod analitičkog rješenja za prikazani problem.

Tablica 4.1 – Parametri koaksijalnog kabela

Parametar	Iznos
$R_1$	1 mm
$R_2$	3 mm
$\epsilon_r$	2,7



Slika 4.7 – Koaksijalni kabel

Geometrija problema ukazuje na primjenu cilindričnog koordinatnog sustava. Poznato je da za statičko električno polje vrijede sljedeći izrazi::

$$\Delta\varphi = \frac{-\rho}{\epsilon}, \quad (4.11)$$

$$\vec{E} = -\nabla\varphi. \quad (4.12)$$

Kako u prostoru između vodiča nema naboja, potencijal je opisan Laplaceovom jednačbom:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.13)$$

S obzirom na to da je promjena potencijala moguća samo u radijalnom smjeru, jednačba 4.13 zapisuje se kao:

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0. \quad (4.14)$$

Opće rješenje za potencijal je tada:

$$\varphi = C_1 \ln r + C_2, \quad (4.15)$$

pri čemu su  $C_1$  i  $C_2$  konstante integracije. Njih se može izračunati iz zadanih vrijednosti potencijala:

$$\varphi(R_1) = \varphi_0 = C_1 \ln(R_1) + C_2, \quad (4.16)$$

$$\varphi(R_2) = 0 = C_1 \ln(R_2) + C_2. \quad (4.17)$$

Konačno se za konstante integracije dobiju izrazi [116]:

$$C_1 = -\frac{\varphi_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}, \quad (4.18)$$

$$C_2 = -\frac{\varphi_0 \ln(R_2)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}. \quad (4.19)$$

Zatim se može izračunati potencijal:

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\ln\left(\frac{R_2}{r}\right)}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}, \quad (4.20)$$

iz kojega se izrazom 4.12 može dati konačni izraz za jakost električnog polja:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{a}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \vec{a}_\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{a}_z\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} \vec{a}_r = \frac{\varphi_0}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \vec{a}_r. \quad (4.21)$$

Kapacitet se može izračunati pomoću energije ili pomoću naboja. Ukoliko se određuje pomoću naboja, prvo treba izračunati naboj. To se može napraviti primjenom Gaussovog zakona:

$$Q = \oint_S \vec{D} \vec{n} dS, \quad (4.22)$$

pri čemu je poznato da vrijedi:

$$\vec{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \vec{E}. \quad (4.23)$$

Iz prethodnih jednadžbi, integracijom po valjku polumjera  $r$ , uz  $\vec{n} = \vec{a}_r$  i  $S = 2\pi r l$ , naboj se može izraziti kao:

$$Q = \frac{2\pi \varepsilon_0 \varepsilon_r l \varphi_0}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}. \quad (4.24)$$

Iz naboja se jednostavno izražava kapacitet [116]:

**Tablica 4.2** – Vrijednosti izračunatog kapaciteta po jedinici duljine za primjer koaksijalnog kabela

Metoda proračuna	Vrijeme proračuna [s]	Vrijednost kapaciteta [ $10^{-10}$ F/m]
MRE	2	1,367
MKE	3	1,368
Analitički pristup	/	1,367
Pogreška MRE [%]	/	0
Pogreška MKE [%]	/	0,073

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\varphi_0} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r l}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}. \quad (4.25)$$

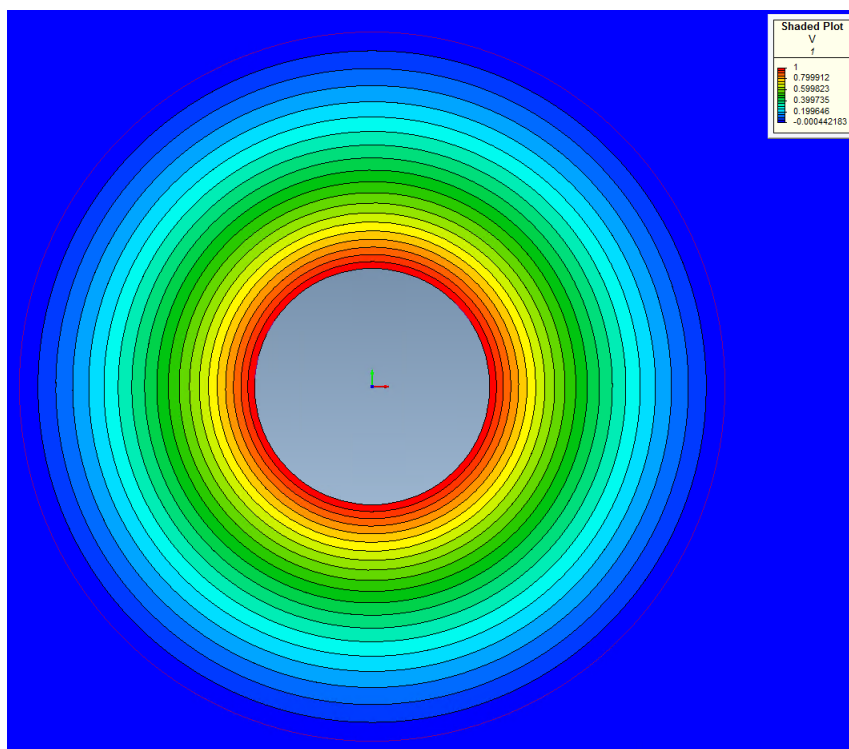
Kapacitet po jedinici duljine dobije se pomoću izraza:

$$C' = \frac{C}{l} = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon_r}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}. \quad (4.26)$$

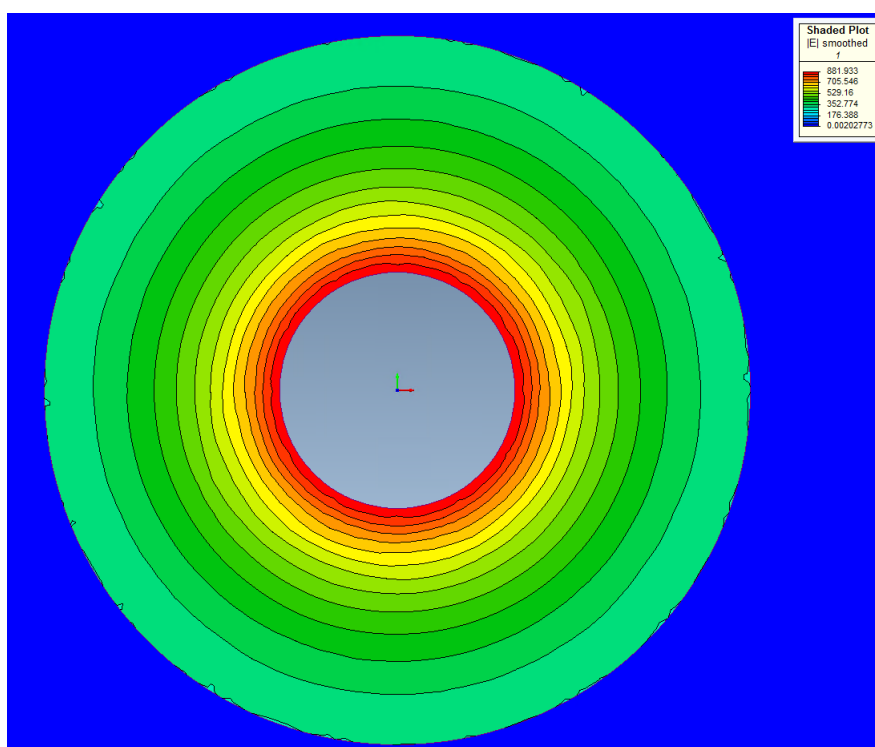
Vrijednosti izračunatog kapaciteta po jedinici duljine prikazane su u tablici 4.2. U tablici 4.2 je također prikazana relativna pogreška za proračun pomoću razvijene MRE metodologije i pogreška za proračun pomoću MKE. Relativna pogreška *ERR* računa se u odnosu na rezultat dobiven analitičkim pristupom na način:

$$ERR = \frac{C_{MRE/MKE} - C_{analitički}}{C_{analitički}} 100\%. \quad (4.27)$$

Dobiveni rezultati potvrđuju točnost proračuna putem razvijene metodologije i dokazuju upotrebljivost razvijenog MRE koda i u slučaju zakrivljene geometrije.



**Slika 4.8** – Raspodjela potencijala za problem koaksijalnog kabela kada je  $\varphi_0 = 1$ . Prikazani rezultati dobiveni su upotrebom *Infolytica® ElecNet 7.5.1*.



**Slika 4.9** – Raspodjela jakosti električnog polja za problem koaksijalnog kabela kada je  $\varphi_0 = 1$ . Prikazani rezultati dobiveni su upotrebom *Infolytica® ElecNet 7.5.1*.

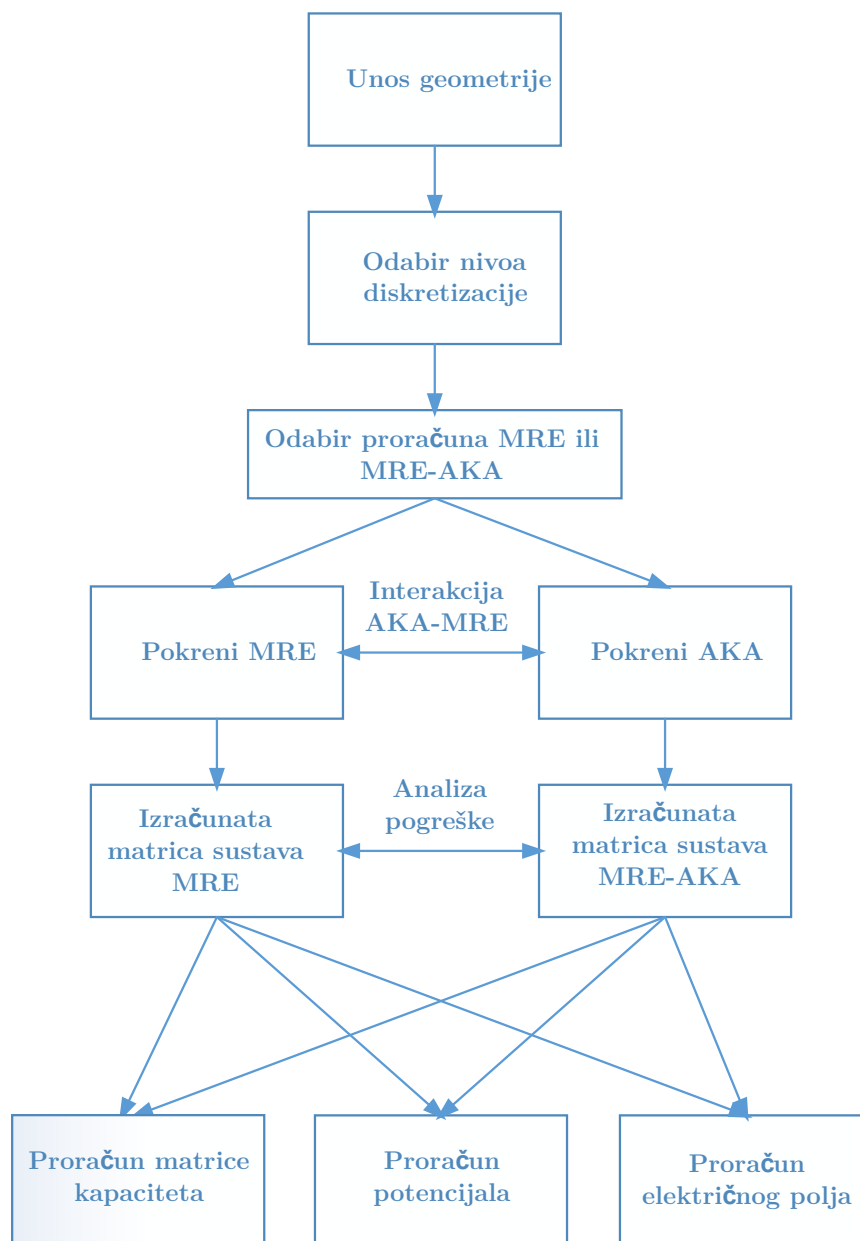
## 4.2 Implementacija AKA algoritma s razvijenim MRE kodom

Činjenica da je AKA algoritam algebarska metoda znači da nije potrebno znati funkciju integralne jednadžbe, fundamentalno rješenje funkcije, te formulaciju jednadžbe problema. Ovo znači da se u slučaju implementacije na razne probleme trebaju napraviti samo male, ako i ikakve, promjene algoritma. Kao što je prije navedeno, cilj AKA algoritma je aproksimacija matrice sustava matricama manjeg ranga za poznatu toleranciju pogreške. Uzme li se u obzir geometrija transformatorskog namota, gotovo je sigurno da će postojati blokova u matrici sustava koji se mogu aproksimirati pomoću AKA algoritma.

Osnovni koraci implementiranog MRE-AKA koda su:

- **Korak 1.** Unos geometrije problema. Diskretizacija problema i konfiguracija parametara proračuna.
- **Korak 2.** Podjela matrice u blokove pomoću klasteriranja opisanog u poglavlju 3. Pomoću kriterija dopustivosti 3.16 određuju se klasteri čije se interakcije mogu prikazati matricama manjeg ranga.
- **Korak 3.** Aproksimacija implementacijom parcijalno pivotiranog AKA algoritma.
- **Korak 4.** Dolazi se do rješenja linearnog sustava uporabom generaliziranog algoritma minimalnog reziduala (GMRES, engl. *generalized minimal residual method*) zahvaljujući tome što se matrica ne mora eksplicitno konstruirati [117].

Razvijeni MRE kod koristi AKA algoritam ovisno o broju nepoznanica i korisničkim specifikacijama. Blok shema razvijenog koda prikazana je na slici 4.10. Za usporedbu, u poglavlju 5 su prikazani proračuni pomoću MRE koda i pomoću MRE-AKA koda, te je prikazana analiza dobivenih rezultata.



Slika 4.10 – Blok shema MRE-AKA implementacije

### 4.3 GMRES

Rješenje linearnog sustava može se izračunati direktnom metodom ili pomoću iterativnih metoda. Kada se radi o matricama koje imaju postavljenu hijerarhijsku strukturu, rješenje putem direktne metode zahtijeva inverziju hijerarhijske matrice ili primjenu hijerarhijske LU dekompozicije. Kod iterativnih metoda najviše vremena otpada na proračun produkta matrice-vektora u formatima nižih rangova. No, uz dovoljno mali broj iteracija, rješenje dobiveno pomoću iterativnih metoda dobiti će se u manjem vremenskom razdoblju.

U ovoj disertaciji se za rješavanja sustava jednadžbi matrica u hijerarhijskom formatu koristi GMRES metoda koja je prvi puta predložena 1986. godine u [117]. GMRES metoda često je korištena u elektromagnetskim proračunima, gdje se pokazala kao robusna metoda s dobrom konvergencijom. Navedena metoda koristi modificirani Gram–Schmidtov postupak kako bi konstruirao ortonormiranu bazu za niz Krylovljevih potprostora. Konstruiranje ortonormirane baze putem modificiranog Gram-Schmidtovog postupka naziva se Arnoldijeva metoda.

Unutar ovog potpoglavljja predstavljena je osnovna ideja i algoritam GMRES metode, dok se detaljniji opis, različite implementacije i primjene GMRES metode mogu pronaći u [82, 117–120].

Kako bi se pomoću GMRES metode riješila jednadžba 2.22, potrebno je zadati početnu iteraciju  $x_0$ , te označiti  $k$ -tu iteraciju kao  $x_k = x_0 + z_k$ . Pritom je  $z_k$  odabran tako da je norma odgovarajućeg reziduala  $\mathbf{r}_k$  minimizirana preko  $\mathbf{x}_0 + K_k(0)$  [118]:

$$\|\mathbf{r}_k\|_2 = \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{z}_k\|_2 = \min_{\mathbf{z} \in \mathbf{x}_0 + K_k(0)} \|\mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{z}\|, \quad (4.28)$$

pri čemu vrijedi  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$  i  $K_k(\mathbf{v}_1) = \text{span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{A}\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{v}_1\}$ .

GMRES algoritam u prvom koraku koristi Arnoldijevu metodu za konstrukciju seta baznih vektora za Krylovljev potprostor  $K_k(\mathbf{r}_0) = \text{span}\{\mathbf{r}_0, \mathbf{A}\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{A}^{k-1}\mathbf{r}_0\}$ . Arnoldijeva metoda prikazana je u algoritmu 4.1 [117].

---

**Algoritam 4.1** Arnoldijeva metoda

---

**1. Inicijalizacija**

odabire se vektor  $\mathbf{v}_1$  gdje je  $\|\mathbf{v}_1\| = 1$

**2. Iteracije za  $j=1, \dots, k$**

za  $i=1, \dots, j$ :  $h_{i,j} = (\mathbf{A}\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i)$

$$\hat{\mathbf{v}}_{j+1} = \mathbf{A}\mathbf{v}_j - \sum_{i=1}^j h_{i,j} \mathbf{v}_i$$

$$h_{j+1,j} = \|\hat{\mathbf{v}}_{j+1}\|$$

$$\mathbf{v}_{j+1} = \frac{\hat{\mathbf{v}}_{j+1}}{h_{j+1,j}}$$


---

Iz prikazanog algoritma dobije se relacija:

$$\mathbf{A}\mathbf{V}_k = \mathbf{V}_{k+1}\tilde{\mathbf{H}}_k, \quad (4.29)$$

gdje su  $\mathbf{V}_k, \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  ortonormirani vektori za  $K_k(\mathbf{r}_0)$ , a  $\tilde{\mathbf{H}}_k$  je gornja Hassenbergova matrica koja u matičnom obliku predstavlja  $\mathbf{A}$  na  $K_k(\mathbf{v}_1)$  s obzirom na  $\mathbf{V}_k$ .

Minimizacija iz 4.28 može se, uz korištenje izraza  $\mathbf{z} = \mathbf{V}_k\mathbf{y}$ , i  $\beta = \|\mathbf{r}_0\|$ , zapisati kao funkcija od  $\mathbf{y}$  [117]:

$$J(\mathbf{y}) = \|\beta - \mathbf{A}[\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{y}]\|. \quad (4.30)$$



Iz 4.29 i 4.30 može se zapisati:

$$\beta - \mathbf{A}\mathbf{z} = \beta - \mathbf{A}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{y}) = \mathbf{r}_0 - \mathbf{A}\mathbf{V}_k\mathbf{y} = \beta\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_{k+1}\tilde{\mathbf{H}}_k\mathbf{y} = \mathbf{V}_{k+1}(\beta\mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{H}}_k\mathbf{y}), \quad (4.31)$$

pri čemu je vektor  $\mathbf{e}_1$  prvi jedinični  $(k+1)$ -dimenzionalni vektor  $[1\ 0 \dots 0]^T$ . Uz ortonormalnost  $\mathbf{V}_{k+1}$ , iz 4.30 i 4.31 vrijedi:

$$J(\mathbf{y}) = \|\beta\mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{H}}_k\mathbf{y}\|. \quad (4.32)$$

Dakle, rješenje problema najmanjih kvadrata dobije se pomoću:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{y}_k, \quad (4.33)$$

gdje  $y_k$  minimizira funkciju  $J(y)$  iz jednadžbe 4.32.

Glavni koraci GMRES algoritma su:

(a) za poznati  $\mathbf{x}_0$  računaju se  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$  i  $\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|}$ ,

(b) za iteracije  $j = 1, 2, \dots, k$ :

(a) za  $i = 1, \dots, j$  računaju se  $\mathbf{v}_{i+1}$ ,  $h_{i,j}$  pomoću Arnoldijevog algoritma,

(b) pronalazi se  $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k\mathbf{y}_k$ , gdje je  $\mathbf{y}_k$  rješenje problema  $\min_y \|\beta\mathbf{e}_1 - \tilde{\mathbf{H}}_k\mathbf{y}\|$ .

Algoritam koji se koristi u disertaciji za rješavanje sustava jednadžbi u MRE-AKA proračunu prikazan je u algoritmu 4.2. Radi bolje usporedbe rezultata, uz proračun linearnog sustava jednadžbi direktnom metodom, uvedena je opcija rješavanja sustava jednadžbi opisanom iterativnom metodom. Tolerancija pogreške GMRES-a je u svim prikazanim proračunima postavljena na  $10^{-5}$ .

U sustavima formiranim pomoću MRE često dolazi do sporije konvergencije iterativnih metoda. Tada se preporučuje korištenje prekondicioniranja. Prekondicioniranje pomoću  $\mathcal{H}$ -matrica prethodno je ukratko objašnjeno u poglavlju 3.

---

**Algoritam 4.2** GMRES algoritam

---

**1. Inicijalizacija**odabire se  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{b}$ odabire se  $\varepsilon$ 

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0$$

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r}_0\|}$$

**2. Iteracije za  $i=1, \dots, k$  {  $k$  je maksimalni broj iteracija }****Dok** je  $i < k$  &&  $\|\mathbf{r}\| < \varepsilon$  vrti **petlju****Za**  $i = 1, \dots, k$ 

$$\xi = \mathbf{A}\mathbf{v}_i$$

**za**  $j=1, \dots, i$ :

$$h_{i,j} = \mathbf{v}_{ij}^T \xi$$

$$\xi = \xi - h_{i,j} \mathbf{v}_i$$

**kraj** iteracije za  $j$ 

$$h_{i+1,i} = \|\xi\|$$

$$\mathbf{v}_{i+1} = \frac{\xi}{h_{i+1,i}}$$

**kraj** iteracije za  $i$ 

$$\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$$

rješava se minimizacija  $\min \|\|\mathbf{r}\| \mathbf{e}_1 - \mathbf{H}_k \mathbf{y}\|$  za  $\mathbf{y}_k$ 

$$\mathbf{V}_k = [\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_k]$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{V}_k \mathbf{y}_k$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}$$

**kraj** petlje

---

## Poglavlje 5

# Proračun jakosti električnog polja i matrice kapaciteta namota transformatora

U ovom poglavlju primijenjena je prethodno razvijena metodologija temeljena na metodi rubnih elemenata za proračun jakosti električnog polja i matrice kapaciteta namota transformatora. Zatim je primijenjen algoritam adaptivne križne aproksimacije u svrhu smanjenja zahtjeva na računalo. Rezultati su uspoređeni s rezultatima dobivenim pomoću komercijalnog programa *Infolytica® ElecNet 7.5.1*, koji se temelji na metodi konačnih elemenata. Time se omogućuje usporedba ovih metoda i potvrda nekih svojstava navedenih u poglavlju 1.

### 5.1 Primjer proračuna modela transformatora i usporedba s rezultatima druge numeričke metode

#### 5.1.1 Definiranje modela transformatora

Prije kretanja u proračun potrebno je odrediti model za koji će se proračun raditi. Model za proračun prikazan je grafički na slici 5.1.

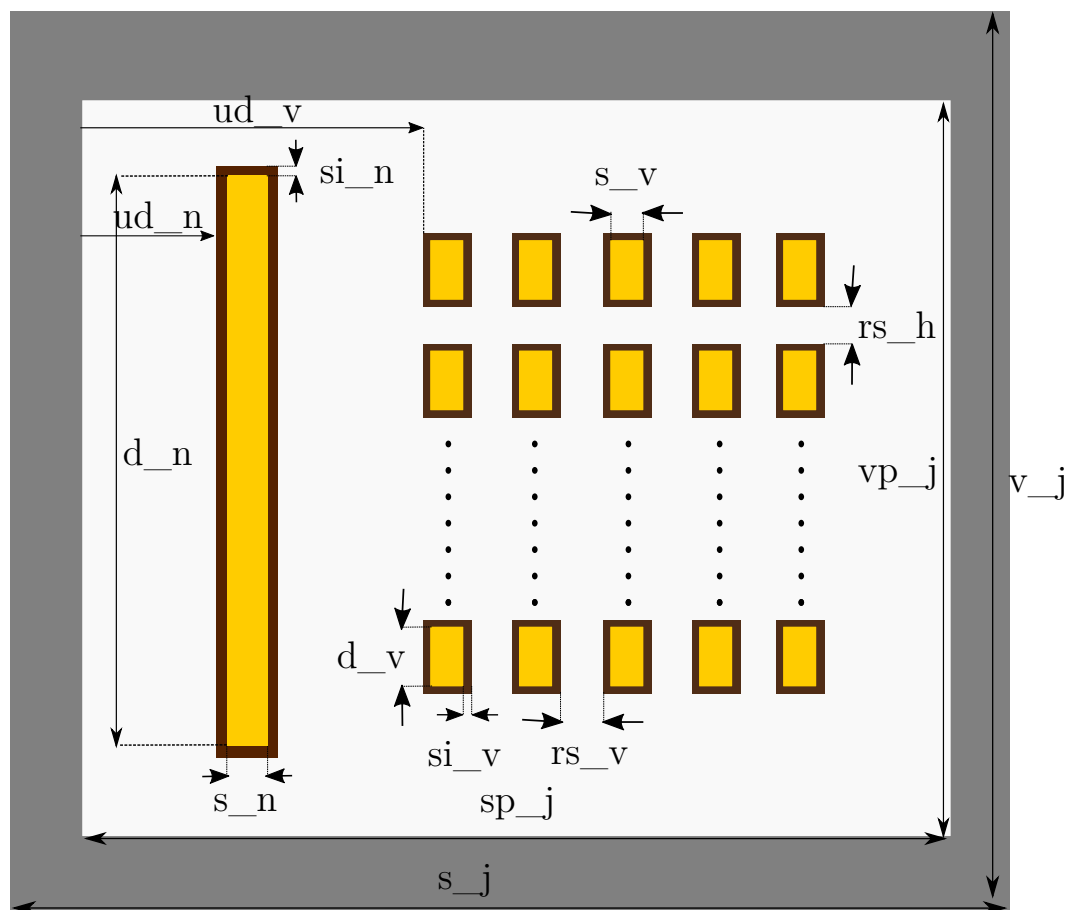
Kao što je vidljivo iz slike, postoje tri regije u predstavljenom modelu:

- regija vodiča,
- regija izolacije vodiča,
- regija rashladnog sredstva, u slučaju primjera to je ulje.

Model transformatora je aproksimiran pomoću dvodimenzionalnog približenja pomoću beskonačnih ploha.

Na slici 5.1 dan je grafički prikaz modela primjera transformatora za koji će se napraviti proračun. Sekundar je modeliran jednim vodičem, dok se u primaru svaki zavoj modelira zasebno. Proračun će se raditi za transformator čiji primar ima  $N = 250$  zavoja, svrstanih u pet slojeva po  $n = 50$ , kao što se može vidjeti na slici 5.1. Geometrijske vrijednosti svih veličina

dane su u tablici 5.1. Grafički prikaz diskretizacije jednog zavoja dan je slikom 5.2. Izolacija je u dijelovima zaobljena te se aproksimira pomoću kosih elemenata. Fizikalne karakteristike materijala navedene su u tablici 5.2.



Slika 5.1 – Grafički prikaz modela primjera transformatora

### 5.1.2 Analiza rezultata proračuna i usporedba s metodom konačnih elemenata

Važan podatak za analizu proračuna primjenom MRE i primjenom MKE metode su podaci o diskretizaciji, dakle broju elemenata. Također je važno navesti vrijeme pojedinog proračuna.

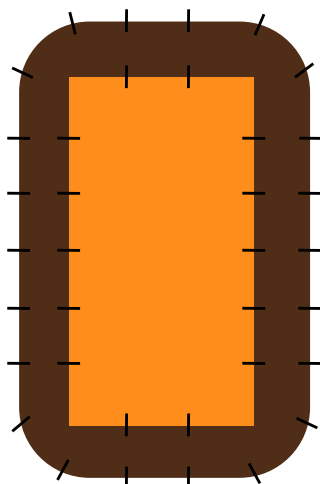
Što se tiče razvijenog MRE proračuna, u ovom primjeru koristi se  $N_{MRE} = 8144$  kolokacijskih točaka. Mreža elemenata MKE proračuna putem programa *Infolytica® ElecNet 7.5.1* sastoji se od  $N_{MKE} = 9933939$  trokuta. Vrijeme proračuna matrice kapaciteta pomoću MKE je  $50400$  s, dok je pomoću MRE vrijeme proračuna  $65,9$  s. Navedeno potvrđuje teoriju opisanu u poglavlju 1 i pokazuje prednost pri upotrebi metode rubnih elemenata za prikazani tip problema. Rezultati proračuna prikazani su u narednim potpoglavljima i služe kao potvrda točnosti razvijene metodologije. U oba slučaja koristi se približenje pomoću beskonačno dugih elemenata, čija je

**Tablica 5.1** – Geometrijske vrijednosti definiranog modela transformatora

<b>Parametar</b>	<b>Iznos [mm]</b>	<b>Opis</b>
s_j	1100	širina jezgre
v_j	1100	duljina jezgre
sp_j	1000	širina prozora jezgre
vp_j	1000	visina prozora jezgre
ud_n	100	udaljenost niskonaponskog namota od prozora jezgre
ud_v	300	udaljenost visokonaponskog namota od prozora jezgre
d_n	60	duljina vodiča niskonaponskog namota
s_n	5	širina vodiča niskonaponskog namota
si_n	0,5	debljina izolacije niskonaponskog namota
d_v	3	duljina vodiča visokonaponskog namota
s_v	2	širina vodiča visokonaponskog namota
si_v	0,5	debljina izolacije visokonaponskog namota
rs_v	5	udaljenost slojeva visokonaponskog namota
rs_h	2	udaljenost namota unutar sloja visokonaponskog namota

**Tablica 5.2** – Fizikalne karakteristike modela transformatora

<b>Element</b>	<b>Materijal</b>	<b>Karakteristike materijala</b>
		$\epsilon_r$
vodiči	bakar	-
izolacija vodiča	dielektrik (Kapton)	2,7
jezgra	feromagnetik	-
hladilo	ulje	2

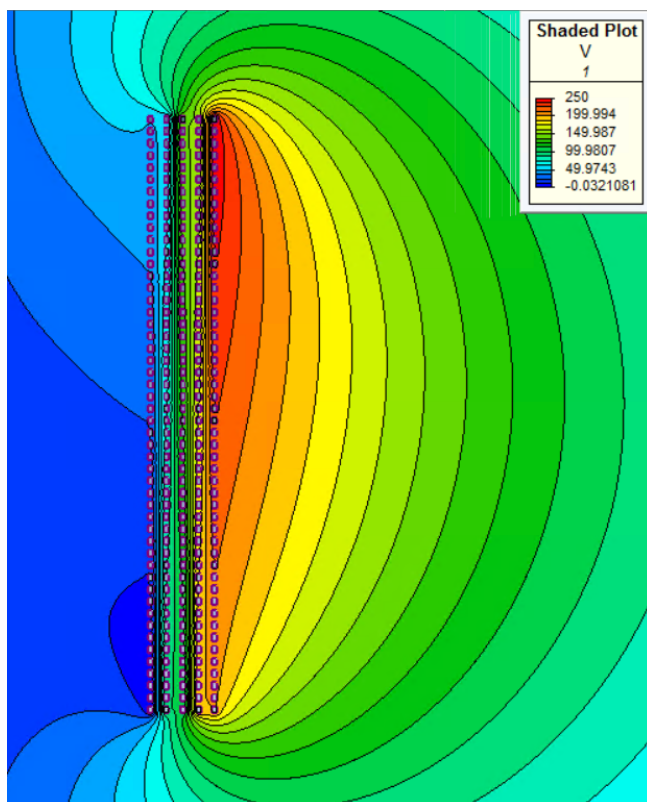


**Slika 5.2** – Grafički prikaz diskretizacije jednog zavoja. Smeđom bojom označena je izolacija, a narančastom vodič.

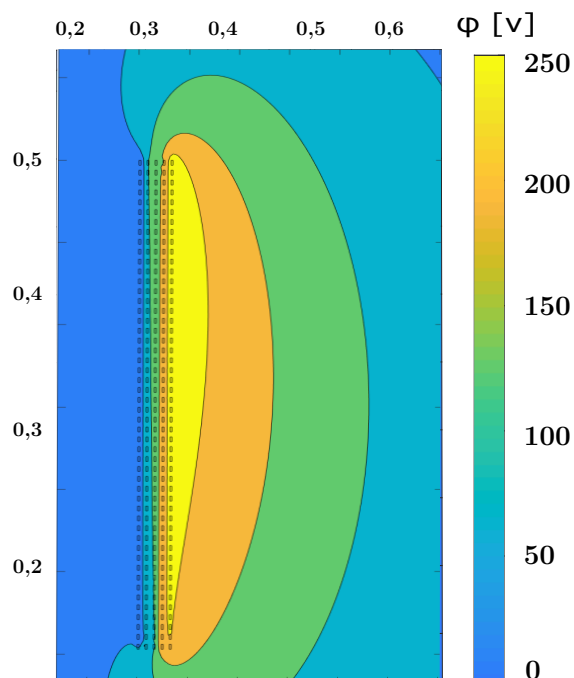
opravdanost dokazana u poglavlju 4.

#### **5.1.2.1 Rezultati proračuna raspodjele električnog potencijala i jakosti električnog polja**

Na slici 5.3 je prikazana raspodjela električnog potencijala kada je na zavojima, počevši od vanjskog sloja pa prema unutarjem, linearno postavljen potencijal od 251 V do 1 V. Slika 5.4 također predstavlja raspodjelu električnog potencijala za isti slučaj primjera transformatora, no ovog puta dobivenu putem razvijene metodologije.

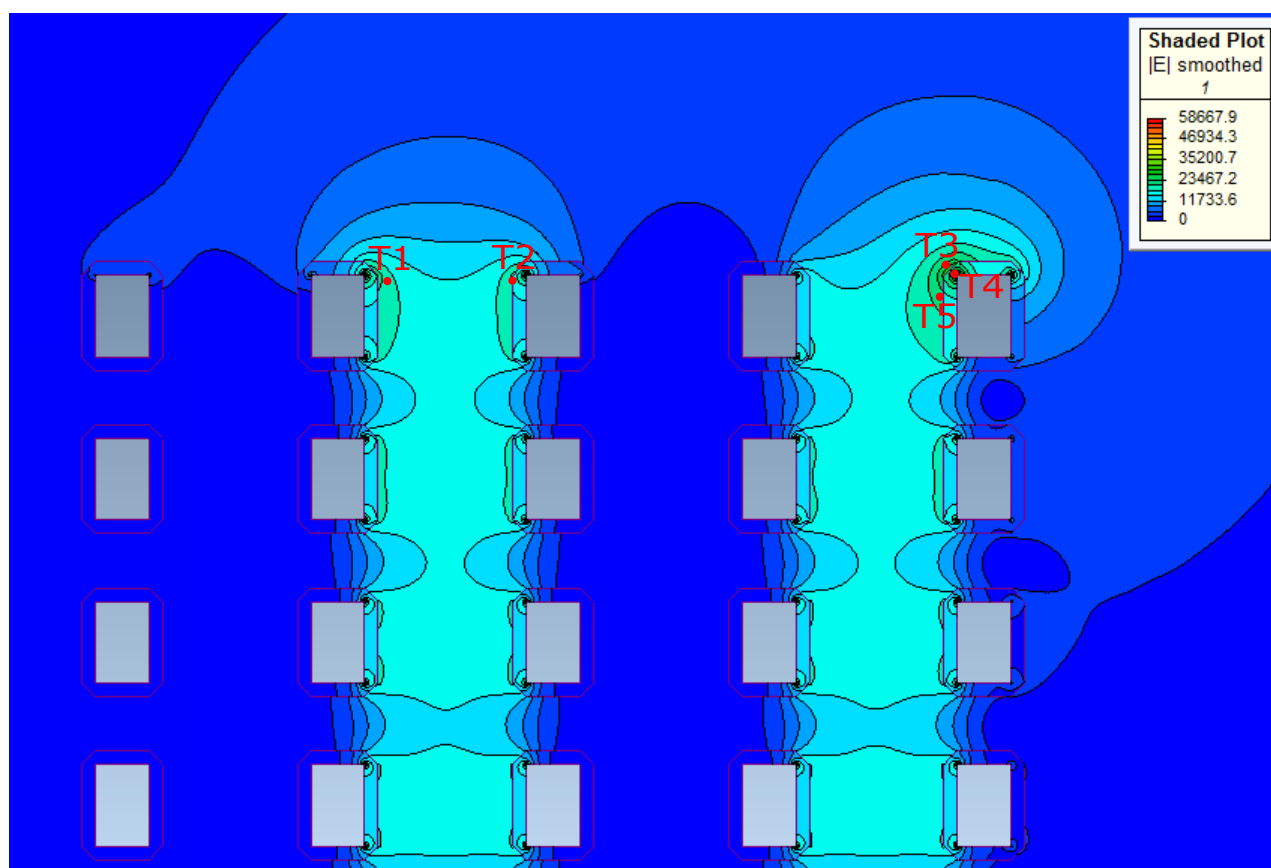


**Slika 5.3** – Raspodjela električnog potencijala na primjeru transformatora dobivena koristeći *In-folytica® ElecNet 7.5.1*



**Slika 5.4** – Raspodjela potencijala na primjeru transformatora dobivena pomoću razvijene metodologije

Raspodjela jakosti električnog polja prikazana je na slici 5.5, dok je usporedba vrijednosti



Slika 5.5 – Raspodjela jakosti električnog polja dobivena koristeći *Infolytica® ElecNet 7.5.1*

jakosti električnog polja dobivenih primjenom MRE i onih dobivenih upotrebom profesionalnog programa *Infolytica® ElecNet 7.5.1* prikazana u tablici 5.3.

Odstupanje *DIFF* vrijednosti dobivenih MRE proračunom od vrijednosti dobivenih MKE proračunom pomoću profesionalnog programskog paketa *Infolytica® ElecNet 7.5.1* računa se na način:

$$DIFF = \frac{MRE_i - MKE_i}{MKE_i} 100\%, \quad (5.1)$$

gdje je  $MKE_i$  promatrana vrijednost dobivena MKE proračunom, a  $MRE_i$  je promatrana vrijednost dobivena MRE proračunom.

Tablica 5.3 prikazuje usporedbu vrijednosti jakosti električnog polja u pet proizvoljno određenih točaka  $T_1 - T_5$ . Vidljivo je odstupanje rezultata za maksimalno 2,78% što je zadovoljavajući rezultat.

Potrebno je napomenuti kako se za veću diskretizaciju vrijednosti MRE proračuna ne mijenjaju, dok je za očekivati da pri većoj diskretizaciji vrijednosti putem MKE proračuna konvergirati prema MRE rezultatima.

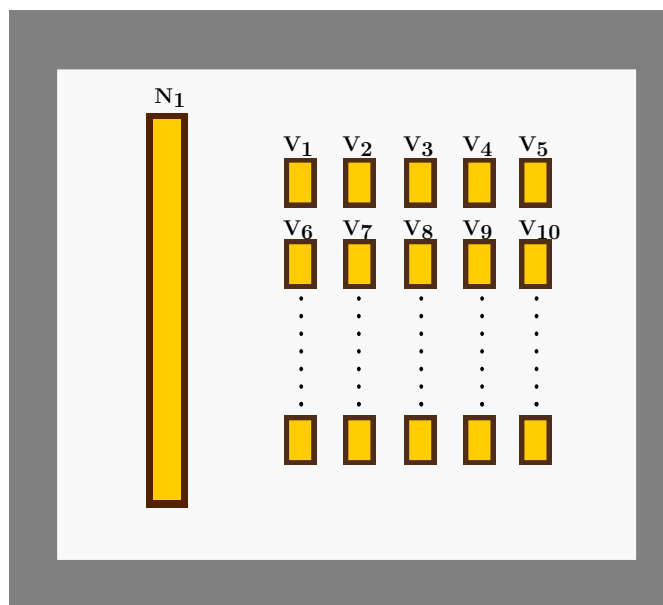


**Tablica 5.3** – Usporedba vrijednosti jakosti električnog polja u određenim točkama

Metoda proračuna	Jakost električnog polja [kV/m]				
	T <sub>1</sub>	T <sub>2</sub>	T <sub>3</sub>	T <sub>4</sub>	T <sub>5</sub>
MRE	21,56	22,78	24,976	60,23	22,84
MKE	20,98	22,16	24,46	58,55	22,25
Odstupanje DIFF [%]	2,76	2,78	2,11	2,87	2,65

### 5.1.2.2 Rezultati proračuna kapaciteta

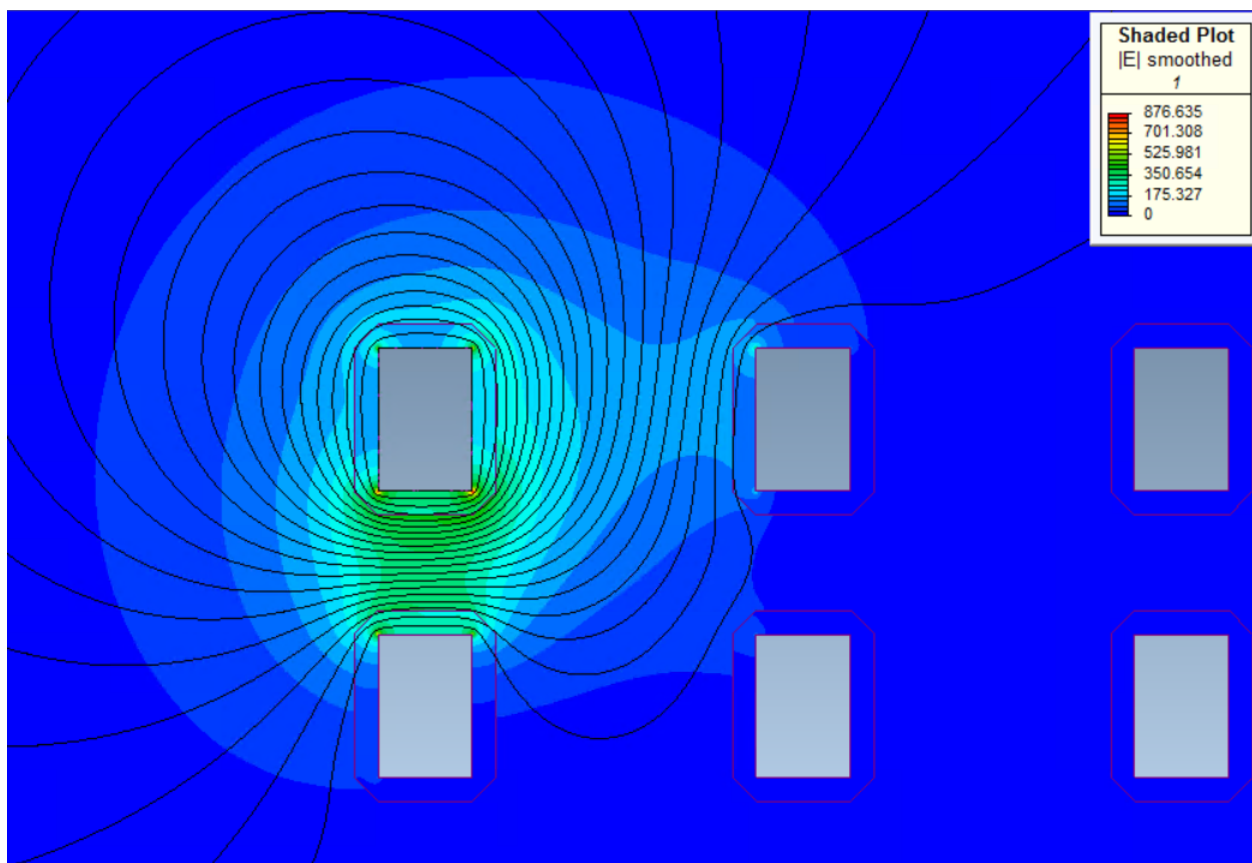
Za analizu rezultata proračuna kapaciteta pomoću razvijene metodologije primjenom MRE i proračuna kapaciteta pomoću programskog paketa *Infolytica® ElecNet 7.5.1* koristi se deset vodiča V<sub>1</sub> – V<sub>10</sub> označenih na slici 5.6. Vodiči označeni oznakama V<sub>1</sub> i V<sub>7</sub> poslužit će za dublju analizu rješenja matrice kapaciteta, dok će se ostali vodiči koristiti u usporedbi vrijednosti dijagonalnih elemenata matrice kapaciteta.



**Slika 5.6** – Vodiči primjera namota transformatora koji se koriste za analizu rezultata proračuna kapaciteta

Slika 5.7 prikazuje raspodjelu jakosti električnog polja za slučaj kada je vodič V<sub>1</sub> na potencijalu 1 V, dok su ostali vodiči na potencijalu 0 V. Raspodjela jakosti električnog polja prikazana je pomoću modela u *Infolytica® ElecNet 7.5.1*. Zbog raspodjele energije električnog polja između vodiča V<sub>1</sub> i njemu susjednih vodiča, potrebno je odrediti kapacitete C<sub>V<sub>1</sub>,V<sub>6</sub></sub>, C<sub>V<sub>1</sub>,V<sub>7</sub></sub> i C<sub>V<sub>1</sub>,V<sub>2</sub></sub>.

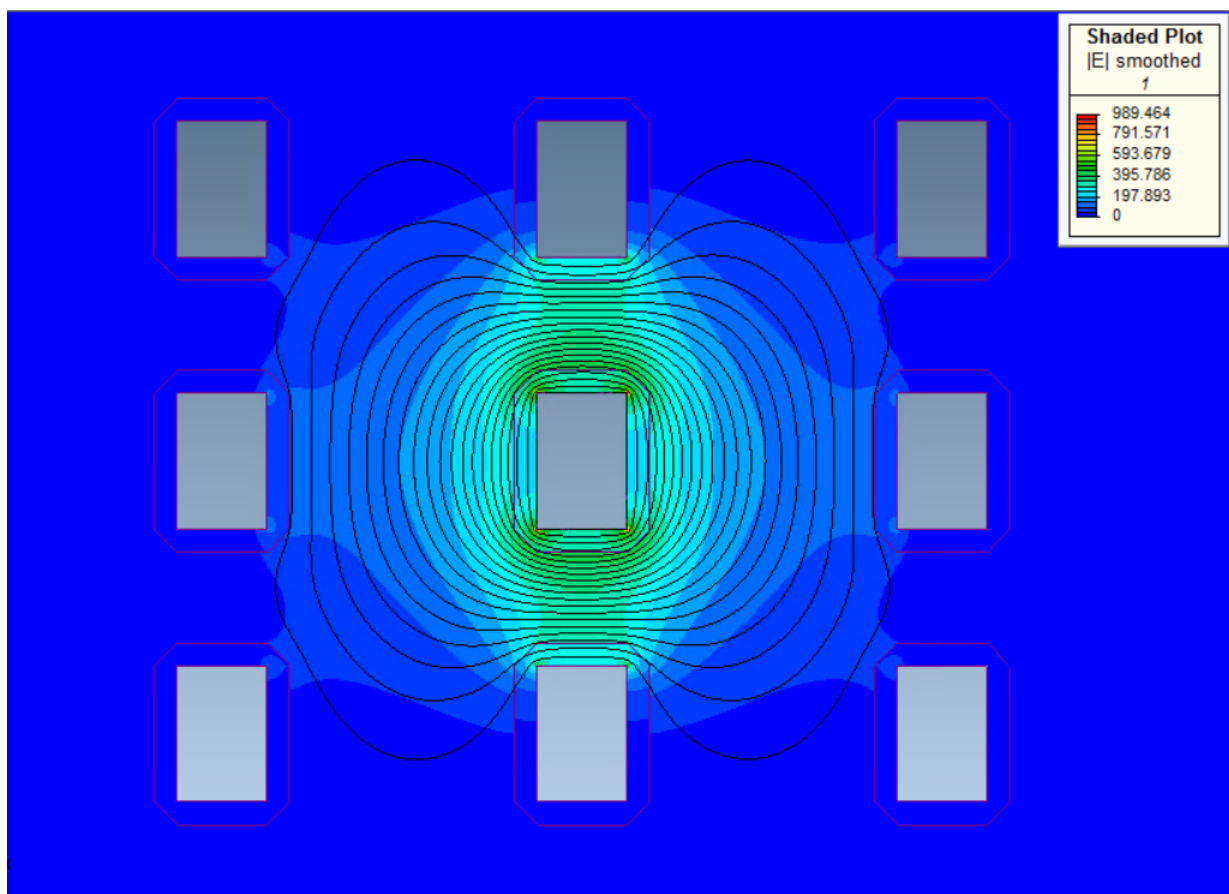
Slika 5.8 prikazuje raspodjelu jakosti električnog polja za slučaj kada je vodič V<sub>7</sub> na potencijalu 1 V, dok su ostali vodiči na potencijalu 0 V. Raspodjela jakosti električnog polja prikazana



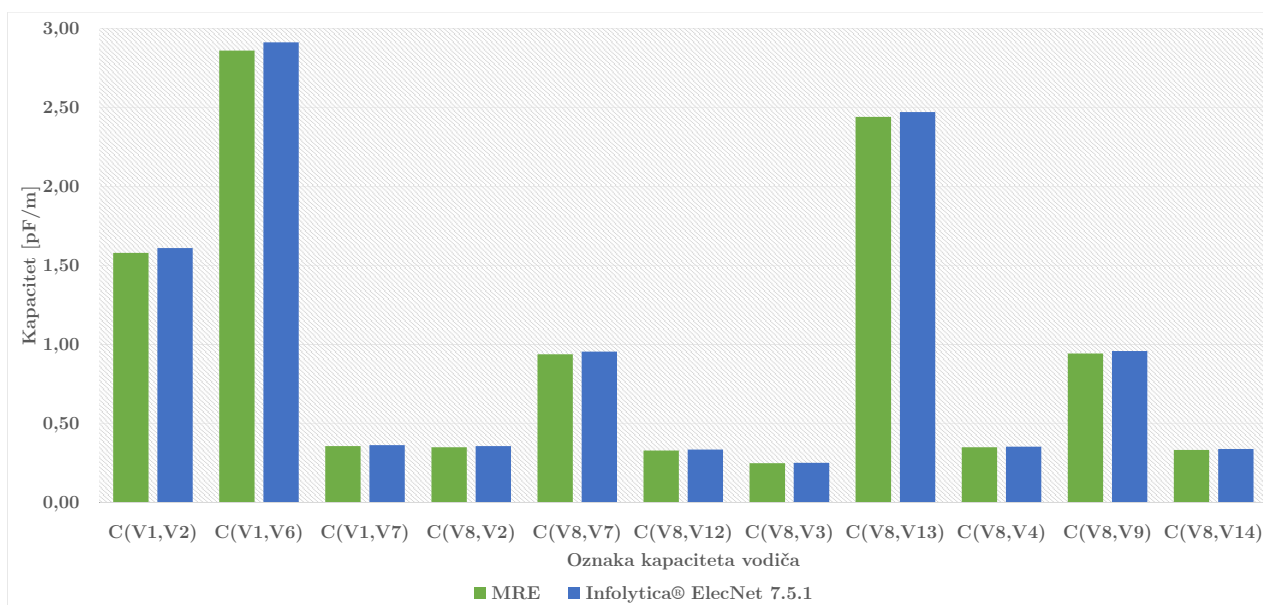
Slika 5.7 – Raspodjela jakosti električnog polja za vodič  $V_1$

je pomoću modela u *Infolytica® ElecNet 7.5.1*. Energija električnog polja se većinom nalazi između vodiča  $V_7$  i njemu susjednih vodiča. Zato se određuje kapacitet između tih vodiča, dakle određuju se elementi matrice kapaciteta  $C_{V_7, V_1}$ ,  $C_{V_7, V_2}$  i  $C_{V_7, V_3}$ ,  $C_{V_7, V_6}$ ,  $C_{V_7, V_8}$ ,  $C_{V_7, V_{11}}$ ,  $C_{V_7, V_{12}}$ ,  $C_{V_7, V_{13}}$

Slika 5.9 prikazuje usporedbu rezultata proračuna elemenata matrice kapaciteta na koje je potrebno obratiti pozornost ako se promatraju vodiči  $V_1$  i  $V_7$ . Iz slike je vidljivo kako razvijeni model točno određuje iznose kapaciteta u usporedbi s rezultatima dobivenih pomoću *Infolytica® ElecNet 7.5.1*. Potrebno je napomenuti kako su proračunati kapaciteti u jedinici  $F/m$  i kako ih se vrlo lako može preračunati na cijelu duljinu namota postupkom opisanim u poglavlju 4.



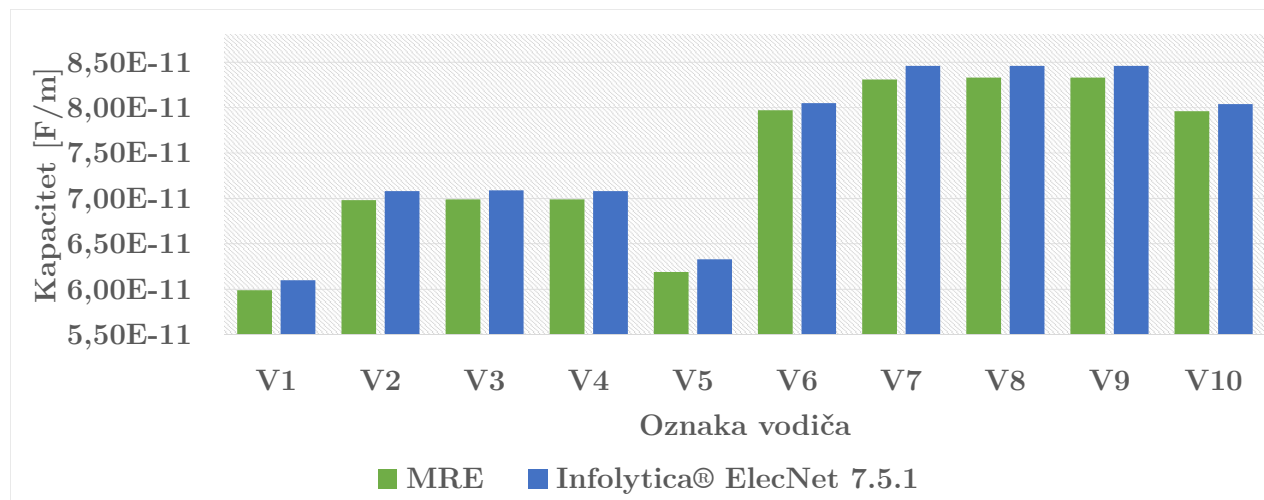
Slika 5.8 – Raspodjela jakosti električnog polja za vodič  $V_7$



Slika 5.9 – Usporedba rezultata proračuna kapaciteta dobivenih pomoću *Infolytica® ElecNet 7.5.1* te pomoću MRE proračuna za vodiče  $V_1$  i  $V_7$

Za dodatnu validaciju u disertaciji prezentiranog postupka proračuna, na slici 5.10 je prikazana usporedba rezultata proračuna dijagonalnih elemenata matrice kapaciteta za na slici

5.6 označene vodiče. Usporedbom rezultata dolazi se do zaključka kako je razvijeni pristup proračunu zadovoljavajuće točnosti.



**Slika 5.10** – Usporedba rezultata proračuna kapaciteta dobivenih pomoću *Infolytica® ElecNet 7.5.1* te pomoću MRE proračuna za dijagonalne elemente matrice kapaciteta za označenih deset vodiča

## 5.2 Primjer proračuna modela transformatora pomoću MRE-AKA proračuna

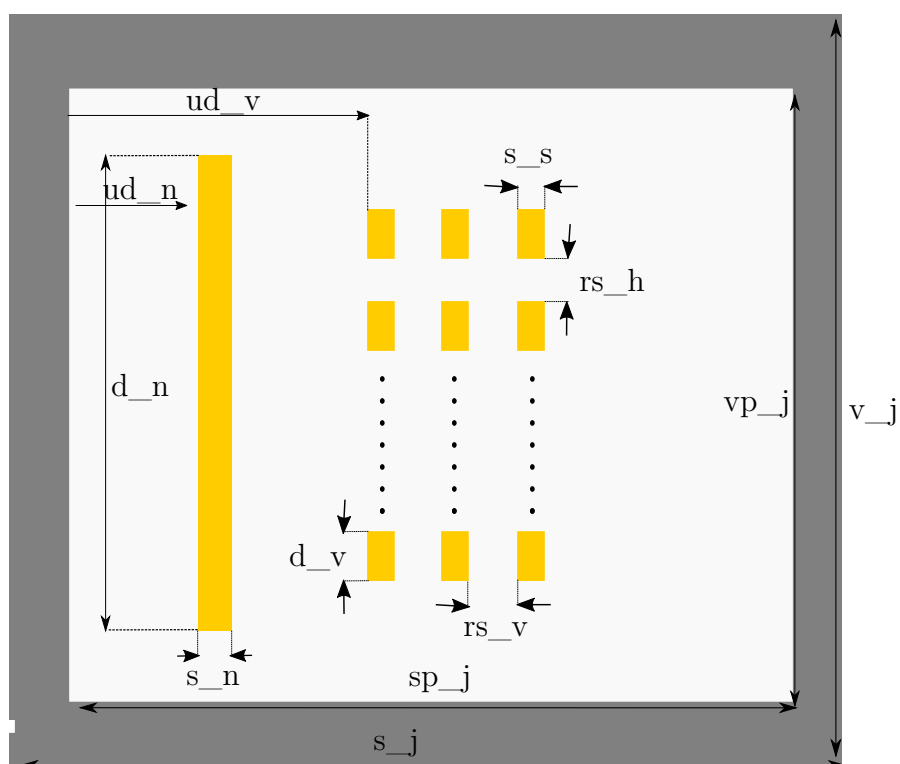
### 5.2.1 Definiranje modela transformatora

U novom prikazanom primjeru postoje dvije regije, regija vodiča i regija rashladnog sredstva. Koristi se aproksimacija dvodimenzionalnim približenjem pomoću beskonačnih ploha. Regija izolatora vodiča u ovom primjeru je zanemarena iz razloga što je namjera primjera prikazati mogućnosti AKA algoritma, što se može prikazati i bez navedene regije. Kada se ne bi zanemarila regija izolatora svakog vodiča, vrlo brzo bi se, u primjerima gdje se radi povećanje diskretizacije modela kako bi se pokazala učinkovitost MRE-AKA proračuna, u klasičnom MRE proračunu dostigao limit memorije u programskom paketu *Matlab R2018b*. To bi značilo da, iako bi se MRE-AKA proračun mogao koristiti za proračun, ne bi postojala mogućnost usporedbe s rezultatima klasičnog MRE proračuna, a time i potvrda točnosti MRE-AKA proračuna.

Na slici 5.11 se nalazi grafički prikaz modela primjera transformatora za koji će se napraviti proračun. Sekundar je modeliran jednim vodičem, dok se u primaru svaki zavoj modelira zasebno. Proračun će se raditi za transformator čiji primar ima  $N = 750$  zavoja, svrstanih u tri sloja po  $n = 250$  zavoja, kao što se može vidjeti na slici 5.11. Geometrijske vrijednosti svih veličina dane su u tablici 5.4. Zavoji se u ovom primjeru aproksimiraju ravnim linijskim elementima. Fizikalne karakteristike materijala navedene su u tablici 5.5.

**Tablica 5.4** – Geometrijske vrijednosti prikazanog modela transformatora

Parametar	Iznos [mm]	Opis
$v_j$	1100	duljina jezgre
$s_j$	1100	širina jezgre
$sp_j$	1000	širina prozora jezgre
$vp_j$	1000	visina prozora jezgre
$ud_n$	127	udaljenost niskonaponskog namota od prozora jezgre
$ud_v$	350	udaljenost visokonaponskog namota od prozora jezgre
$d_n$	90	duljina vodiča niskonaponskog namota
$s_n$	3	širina vodiča niskonaponskog namota
$d_v$	1,5	duljina vodiča visokonaponskog namota
$s_v$	1	širina vodiča visokonaponskog namota
$rs_h$	3	udaljenost namota unutar sloja visokonaponskog namota
$rs_v$	2	udaljenost slojeva visokonaponskog namota



**Slika 5.11** – Grafički prikaz modela drugog primjera transformatora

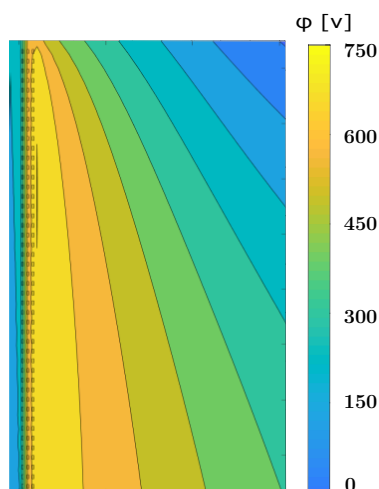
**Tablica 5.5** – Fizikalne karakteristike materijala prikazanog modela transformatora

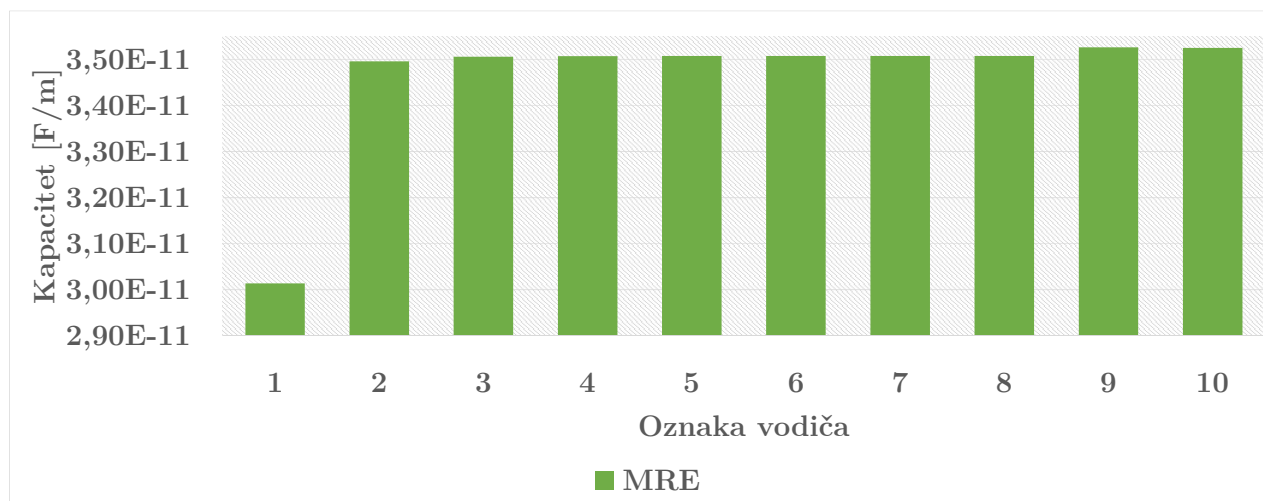
Element	Materijal	Karakteristike materijala
		$\epsilon_r$
vodiči	bakar	-
jezgra	feromagnetik	-
hladilo	zrak	1

### 5.2.2 Analiza rezultata proračuna

Ovo potpoglavlje usmjereno je na analizu rezultata pomoću MRE-AKA proračuna. Kako najviše vremena otpada na proračun matrice sustava, čije spremanje uz to za veće probleme zauzima veliku količinu memorije, ovo poglavlje prvenstveno je usmjereno na pregled uštede vremena i memorijskih resursa primjenom višerazinskog parcijalno pivotiranog AKA algoritma. Zato su vrijeme proračuna i ušteda memorije uspoređeni za različite diskretizacije namota transformatora. Također, prikazana je maksimalna pogreška MRE-AKA proračuna u odnosu na MRE proračun pri proračunu raspodjele naboja, za različite zadane točnosti algoritma.

Za slučaj s  $N = 12024$  diskretizacijskih elemenata, raspodjela potencijala MRE proračuna na dijelu zavoja, kada je na zavojima, počevši od vanjskog sloja pa prema unutarnjem, linearno postavljen potencijal od 751 V do 1 V, prikazana je na slici 5.12. Dijagonalne vrijednosti matrice kapaciteta za prvih deset zavoja prikazane su na slici 5.13. Potrebno je napomenuti kako se za proračun matrice kapaciteta već i proračun s najmanjom prikazanom diskretizacijom u prikazanom primjeru pokazao kao dobar jer su se s njime poklapali i rezultati proračuna s većim diskretizacijama.

**Slika 5.12** – Raspodjela potencijala na primjeru transformatora dobivena pomoću MRE proračuna.



**Slika 5.13** – Rezultati proračuna kapaciteta pomoću MRE proračuna za prvih 10 zavoja

Osnovni parametri MRE-AKA implementacije dani su u tablici 5.6.

**Tablica 5.6** – Parametri MRE-AKA implementacije

tolerancija aproksimacije	$\varepsilon_{ACA} = 10^{-9}$
kriterij dopustivosti	$\eta = 1$
tolerancija pogreške GMRES-a	$\varepsilon_{GMRES} = 10^{-5}$

Velika prednost upotrebe AKA algoritma je kompresija matrice. Kompresija matrice izražava se pomoću omjera kompresije  $K$ :

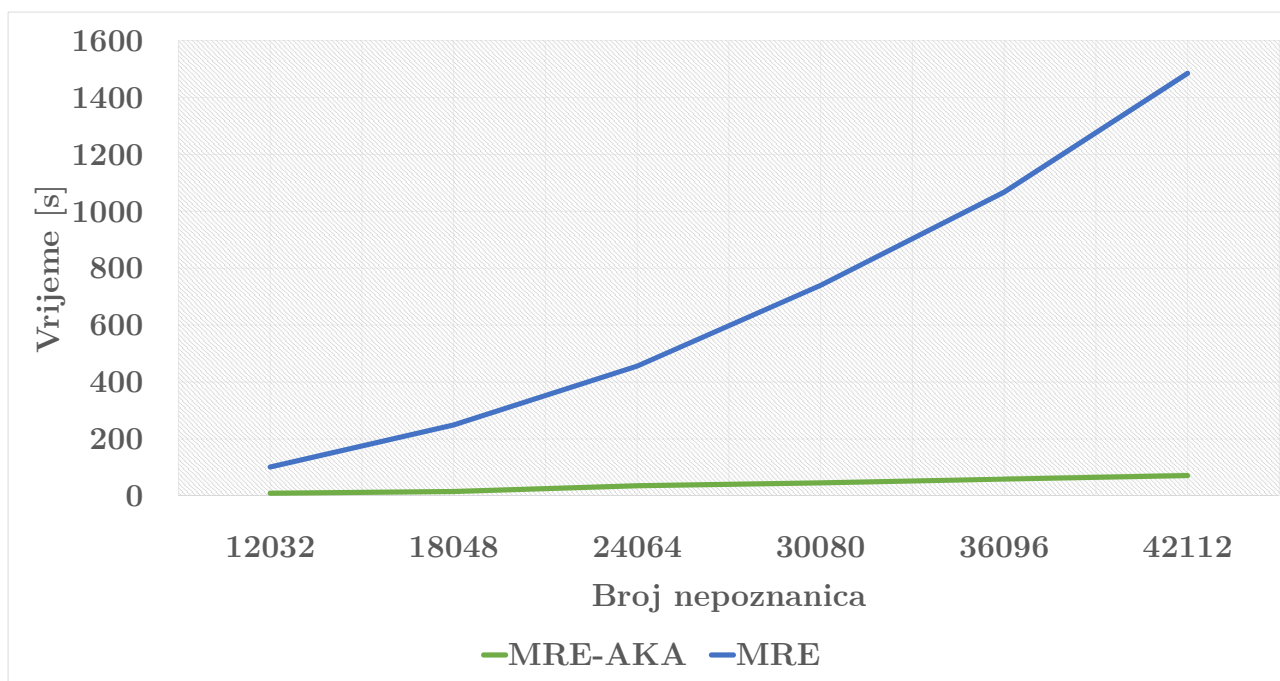
$$K = \frac{Mem_{nekomp}}{Mem_{komp}}, \quad (5.2)$$

gdje  $Mem_{nekomp}$  označava količinu memorije koju zauzima nekomprimirana matrica, dok  $Mem_{komp}$  označava količinu memorije koju zauzima komprimirana matrica. Očito je da je poželjna što veća vrijednost omjera kompresije.

Uz omjer kompresije matrica, promatra se i ušteda memorije  $U_{mem}$  koja je definirana kao:

$$U_{mem} = \frac{|Mem_{komp} - Mem_{nekomp}|}{Mem_{nekomp}}. \quad (5.3)$$

Na slici 5.14 prikazano je vrijeme proračuna matrice sustava primjenom MRE, te vrijeme proračuna aproksimirane matrice sustava primjenom MRE-AKA proračuna za različite diskretizacije prikazanog modela. Slika 5.15 prikazuje potrebne memorijske resurse prilikom proračuna matrice sustava primjenom MRE, te prilikom proračuna primjenom MRE-AKA algoritma za različite diskretizacije prikazanog modela. Na slici 5.16 prikazana je usporedba vremena proračuna linearnog sustava jednadžbi iterativnom metodom za različite diskretizacije. U prikazanom proračunu nije korišteno prekondicioniranje.



**Slika 5.14** – Vrijeme proračuna matrice sustava primjenom MRE te primjenom MRE-AKA za različit broj elemenata

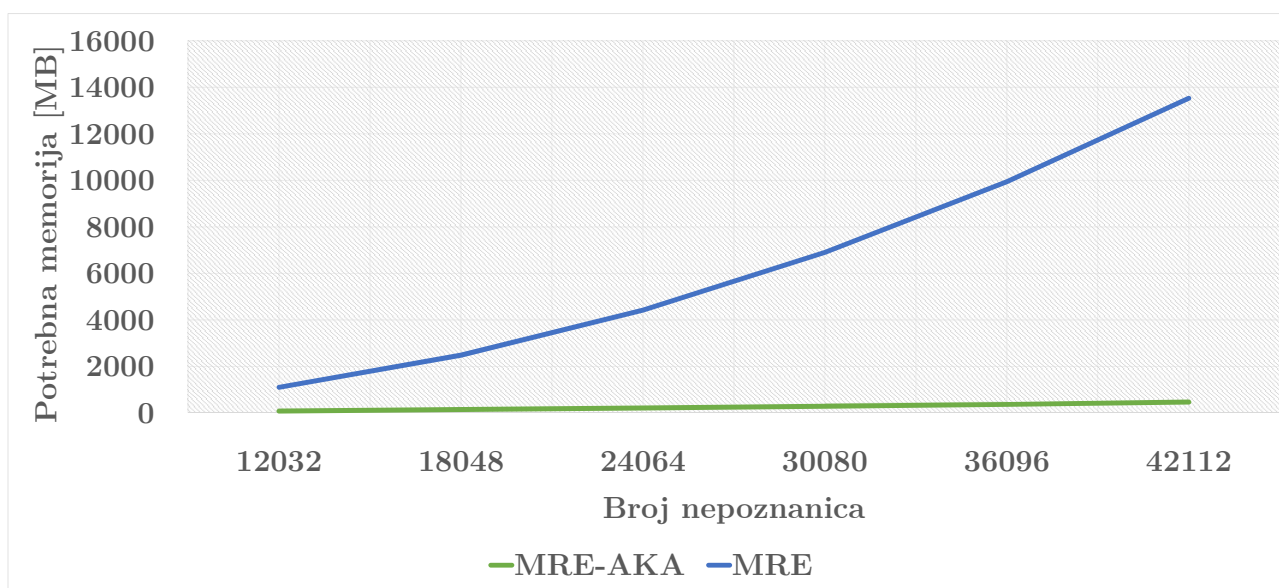
Slike 5.14, 5.15 i 5.16 dokazuju prethodne tvrdnje o složenosti porasta vremena proračuna i zahtjeva za memorijskim resursima klasičnog MRE proračuna. Također je dokazana učinkovitost primjene MRE-AKA proračuna. Vidljivo je da se potreba za memorijskim resursima primjenom AKA algoritma izrazito smanjila. Ušteda memorijskih resursa i omjer kompresije matrice za diskretizacije prikazane na slikama 5.14 i 5.15 prikazani su u tablici 5.7.

Tablica 5.8 prikazuje usporedbu rezultata kompresije matrice u ovisnosti o zadanoj točnosti AKA proračuna. U prikazanim proračunima koristi se diskretizacija s  $N = 12032$  kolokacijskih točaka, a linearni sustav se i u slučaju klasičnog MRE proračuna, i u slučaju MRE-AKA proračuna, rješava pomoću iterativne metode uz toleranciju pogreške prikazanu u tablici 5.6. Vidljivo je značajno smanjenje potrebnih memorijskih resursa pri upotrebi MRE-AKA proračuna.

**Tablica 5.7** – Ušteda memorije i omjer kompresije za MRE-AKA proračun za različite diskretizacije

Broj nepoznanica	Omjer kompresije	Ušteda memorije [%]
12032	13,98	92,8
18048	17,49	94,28
24064	20,87	95,21
30080	24,15	95,86
36096	27,08	96,32
42112	28,74	96,52

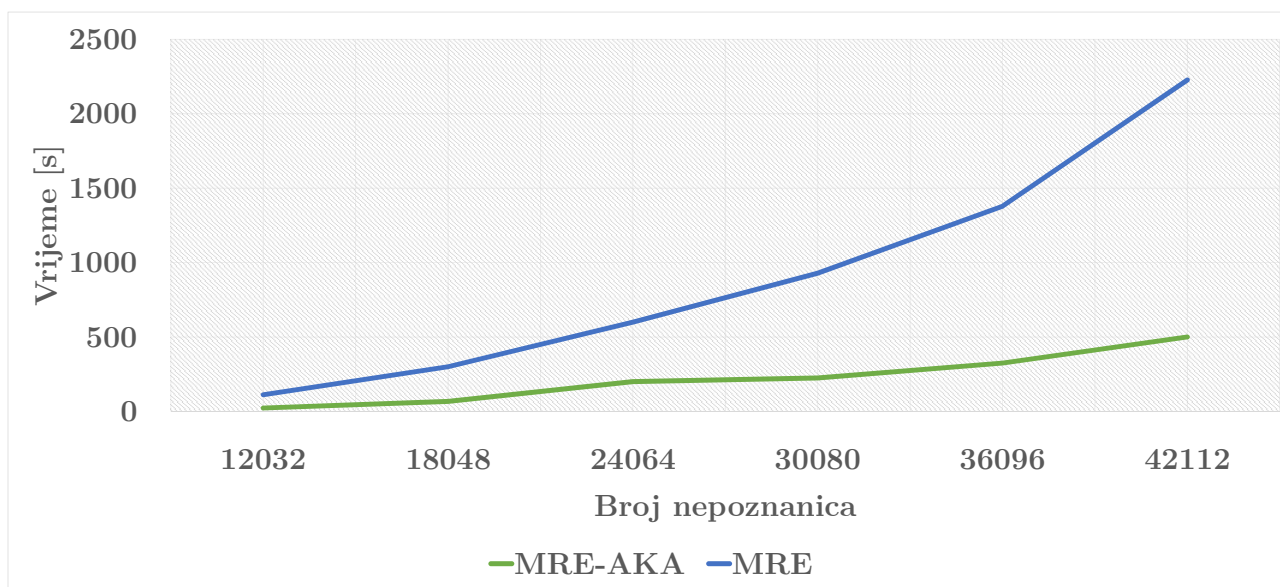




**Slika 5.15** – Potrebni memorijski resursi pri MRE te pri MRE-ACA proračunu za različit broj elemenata

Maksimalna relativna pogreška označava pogrešku između dobivenih vrijednosti naboja za klasični MRE i MRE-ACA proračun. Iz tablice 5.8 je vidljivo kako treba obratiti pažnju prilikom odabira tolerancije pogreške ACA proračuna. Iako se različitim odabirom tolerancije pogreške može utjecati na potrebne memorijske zahtjeve, najznačajniji utjecaj ovog parametra je na točnost konačnog rješenja sustava linearnih jednadžbi. Tako se na primjer, pri toleranciji ACA proračuna postavljenoj na  $10^{-3}$  u odnosu na toleranciju  $10^{-9}$  uštedi dodatnih 24,02 MB, no maksimalna relativna pogreška je prevelika te se ti rezultati ne mogu smatrati relevantnima i koristiti u daljnjim proračunima. Zato je potrebno pripaziti pri odabiru tolerancije aproksimacije. U svim prikazanim proračunima u ovoj disertaciji tolerancija ACA proračuna postavljena je na  $10^{-9}$ .

Svi prethodno prikazani rezultati MRE-ACA proračuna su zadovoljavajući i prate prethodno prikazanu teoriju ACA. Prikazani rezultati pokazuju veliki potencijal ACA algoritma i njegovu primjenjivost na proračune koji se temelje na metodi rubnih elemenata poput onog prikazanog u ovoj disertaciji. Svi proračuni u ovoj disertaciji izvođeni su na 12-jezgrenom *HP ProLiant serveru*, te za navedene diskretizacije nije bilo problema s nedostatkom memorije. No, kod uobičajenih konfiguracija računala, ili pri rješavanju transformatora s više tisuća zavoja, proračun klasičnom MRE ne bi bio moguć bez određenih ustupaka poput grupiranja zavoja. Tu se može vidjeti dodatna vrijednost implementacije ACA algoritma, jer bi se pomoću MRE-ACA proračuna ovaj problem umanjio. Zbog manjih zahtjeva na računalo od klasične MRE, pomoću aproksimacije matrice sustava mogu se raditi proračuni s većim brojem nepoznanica. Npr., unutar programskog paketa *Matlab R2018b* se, kada bi se koristila uobičajena konfiguracija računala, radi nedostatka memorijskih resursa ne bi mogli vršiti prethodno prikazani proračuni upotrebom klasične MRE s brojem nepoznanica većim od 24064. No, pomoću implementacije



**Slika 5.16** – Vrijeme proračuna linearnog sustava jednadžbi primjenom iterativnog MRE te primjenom iterativnog MRE-AKA proračuna za različit broj elemenata

AKA algoritma mogli bi se vršiti proračuni s mnogo većim brojem nepoznanica.

**Tablica 5.8** – Usporedba kompresije matrice za različite tolerancije aproksimacije

Tolerancija aproksimacije	Omjer kompresije matrice	Memorija [MB]		Max. relativna pogreška
		MRE	MRE-AKA	
$1 \times 10^{-3}$	20,09	1104,50	54,97	0,07
$1 \times 10^{-4}$	18,74		58,92	0,02
$1 \times 10^{-5}$	17,53		63,01	$8,87 \times 10^{-4}$
$1 \times 10^{-6}$	16,53		66,81	$1,63 \times 10^{-4}$
$1 \times 10^{-7}$	15,63		70,67	$1,94 \times 10^{-6}$
$1 \times 10^{-8}$	14,80		74,62	$5,42 \times 10^{-7}$
$1 \times 10^{-9}$	13,98		78,99	$4,02 \times 10^{-7}$

# Poglavlje 6

## Zaključak

Izračun električnog polja je osobito značajan prilikom projektiranja električnih uređaja. Na primjer, znanje o intenzitetu električnog polja transformatora prilikom projektiranja izolacije je vrlo važno, jer izolacija mora biti u stanju izdržati razna električna naprezanja kojima će biti podvrgnuta tijekom rada transformatora. Stoga je potrebno koristiti tehnike modeliranja za analizu važnih značajki modela uređaja tijekom njihovog projektiranja prije same proizvodnje. Budući da je proračun električkih karakteristika samo dio procesa projektiranja uređaja, rezultati bi se trebali dobiti što je brže moguće, a opet uz najveću moguću preciznost.

Kroz prethodna poglavlja je prikazana metodologija proračuna električnog polja i matrice kapaciteta modela namota transformatora. Usporedba rezultata pomoću prikazane metode i rezultata dobivenih profesionalnim programskim paketom pokazuje zadovoljavajuću točnost. Usporedbom prikazanih rezultata potvrđuje se u disertaciji prikazana metodologija elektrostatskog proračuna električnog polja u izolaciji namota transformatora metodom rubnih elemenata s aproksimacijom linearnim temeljnim funkcijama.

Prethodna poglavlja donose i pregled metoda ubrzanja proračuna i kompresije matrica. Jedna od prikazanih metoda, adaptivna križna aproksimacija, implementirana je u razvijeni MRE kod. Adaptivna križna aproksimacija računa blokove nižeg ranga koristeći samo odabrane retke i stupce. Rezultirajuća matrica pohranjuje se u komprimiranom obliku čime se smanjuju memorijske potrebe proračuna. U radu su prikazani rezultati takve implementacije, te je napravljena analiza takvog proračuna i usporedba rezultata s klasičnim MRE proračunom. Implementacija adaptivne križne aproksimacije pokazala se učinkovitom i zadovoljavajućom.

Razvijeni kod može služiti za elektrostatske proračune namota transformatora, ali i drugih električnih uređaja. Implementacija unutar Kartezijevog sustava omogućuje fleksibilnost prilikom pristupa problemima te se, kao što je i prikazano u poglavlju 4, kod vrlo lako može primijeniti i na proračun kapaciteta kabela. Dakle, iako je primjer elektrostatskog proračuna namota transformatora sadržavao vodiče pravokutnog poprečnog presjeka, moguće je vršiti proračune i za vodiče okruglog poprečnog presjeka. Također je potrebno napomenuti, numerička procedura

proračuna kapaciteta namota transformatora vrlo se jednostavno može implementirati unutar drugih modela za simulaciju raspodjele napona duž namota transformatora.

## 6.1 Budući rad

Neke od nadogradnji prezentiranog rada planirane u bliskoj budućnosti uključuju:

- Osnovna nadogradnja jest prijevod MRE-AKA koda na jedan od programskih jezika koji je prikladan za numeričke proračune kako bi proračun postao učinkovitiji. Također, tijekom prijevoda koda potrebno je provesti paralelizaciju kako bi se dodatno povećala efikasnost proračuna. Također, prijevod na programske jezike poput Julie ili Fortrana bi olakšao implementaciju razvijenog proračuna unutar drugih proračunskih paketa, poput već spomenute simulacije raspodjele prenapona po namotu transformatora.
- Iako se razvijena metodologija primjenom metode rubnih elemenata i sama pokazala kao robusna i učinkovita metoda koja je u mogućnosti u relativno kratkom vremenskom roku riješiti modele transformatora s više stotina i tisuća zavoja, te iako je implementacija algoritma adaptivne križne aproksimacije dodatno pomogla u navedenome, kada se radi o transformatorima s jako velikim brojem zavoja ( npr. mjerni transformatori mogu imati nekoliko desetaka tisuća zavoja) trebalo bi proučiti metode grupiranja zavoja, jer bi se pomoću njih, za razliku od sadašnjeg načina modeliranja svakog zavoja namota, mogli, bez prevelikih žrtvovanja računalnih resursa, riješiti i takvi slučajevi.
- Unutar ove disertacije spominjane su i druge metode ubrzanja proračuna i kompresije matrica. Iako se adaptivna križna aproksimacija pokazala kao zadovoljavajuće rješenje, razvoj i usporedba s nekim od drugih metoda bio bi dobar smjer istraživanja. Jedna od mogućih metoda je brza metoda multipola, koja je već djelomično implementirana u [3], a njezin daljnji razvoj mogao bi se pokazati važnim.

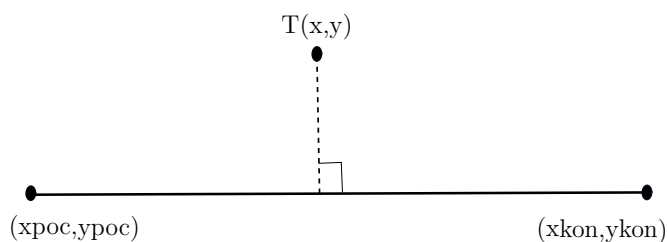
# Dodatak A

## Analitička rješenja integrala

### A.1 Analitička rješenja integrala

#### A.1.1 Analitička rješenja integrala za proračun električnog potencijala

Za proračun električnog potencijala iz jednadžbe 2.55 potrebno je riješiti integrale 2.56 i 2.57. Smatra se da su linijski elementi ravni i paralelni sa x-osi ili y-osi. Sukladno tome s kojom su osi paralelni određuje se smjer integracije. Na slici A.1 je prikazan ravni linijski element paralelan s x-osi. U tom slučaju  $y - y'$  označava udaljenost točke od elementa i u sljedećim integralima ta se udaljenost označava kao  $y$ .



Slika A.1 – Prikaz problema za ravnu liniju

Prvi integral čije se analitičko rješenje traži je:

$$I_1 = \int_{x_{poc}}^{x_{kon}} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y)^2}} \right) dx'. \quad (\text{A.1})$$

Njegovo rješenje je:

$$I_1 = xkon - xpoc + y \arctan\left(\frac{(x - xkon)}{y}\right) + y \arctan\left(\frac{(xpoc - x)}{y}\right) + (-x + xkon) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x - xkon)^2 + y^2}}\right) + (x - xpoc) \ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x - xpoc)^2 + y^2}}\right). \quad (A.2)$$

Drugi integral čije se analitičko rješenje traži je:

$$I_2 = \int_{xpoc}^{xkon} x' \ln\left(\frac{1}{\sqrt{(x - x')^2 + (y)^2}}\right) dx'. \quad (A.3)$$

Njegovo rješenje je:

$$I_2 = \frac{1}{4} \left( xkon(2x + xkon) - xpoc(2x + xpoc) + 4xy \arctan\left(\frac{(x - xkon)}{y}\right) + 4xy \arctan\left(\frac{(xpoc - x)}{y}\right) - (-x^2 + xkon^2 + y^2) \ln((x - xkon)^2 + y^2) + (-x^2 + xpoc^2 + y^2) \ln((x - xpoc)^2 + y^2) \right) \quad (A.4)$$

U slučaju kada je ravni linijski element paralelan s y-osi dovoljno je napraviti zamjenu varijabli  $x = y, xpoc = ypoc, xkon = ykon, y - y' = x - x'$ .

### A.1.2 Analitička rješenja integrala za proračun jakosti električnog polja

U ovom slučaju potrebno je izračunati integrale za rješavanje izraza 2.68 i 2.69. Ponovno se promatra slučaj kada je linijski element paralelan s x-osi, a za drugi slučaj opet se može koristiti zamjena varijabli. Uvrštavanjem 2.2 u 2.68 i 2.69 vidljivo je kako je potrebno riješiti tri integrala.

Prvi integral čije se analitičko rješenje traži je:

$$I_3 = \int_{xpoc}^{xkon} \frac{1}{(x - x')^2 + (y)^2} dx'. \quad (A.5)$$

Njegovo rješenje je:

$$I_3 = \frac{\arctan\left(\frac{(xkon - x)}{y}\right) + \arctan\left(\frac{(x - xpoc)}{y}\right)}{y}. \quad (A.6)$$

Drugi integral čije se analitičko rješenje traži je:

$$I_4 = \int_{xpoc}^{xkon} \frac{x'}{(x-x')^2 + (y)^2} dx'. \quad (A.7)$$

Njegovo rješenje je:

$$I_4 = \frac{2x \arctan\left(\frac{(xkon-x)}{y}\right) + 2x \arctan\left(\frac{(x-xpoc)}{y}\right)}{2y} + \frac{y(\ln((x-xkon)^2 + y^2) - \ln((x-xpoc)^2 + y^2))}{2y}. \quad (A.8)$$

Treći integral čije se analitičko rješenje traži je:

$$I_5 = \int_{xpoc}^{xkon} \frac{x'^2}{(x-x')^2 + (y)^2} dx'. \quad (A.9)$$

Njegovo rješenje je:

$$I_5 = xkon - xpoc + \frac{(x^2 - y^2) \arctan\left(\frac{(xkon-x)}{y}\right)}{y} + \frac{(y^2 - x^2) \arctan\left(\frac{(xpoc-x)}{y}\right)}{y} + x \ln((x-xkon)^2 + y^2) - x \ln((x-xpoc)^2 + y^2)]. \quad (A.10)$$

## Dodatak B

# Parametrizacija i analitičko rješenje dobivenih integrala

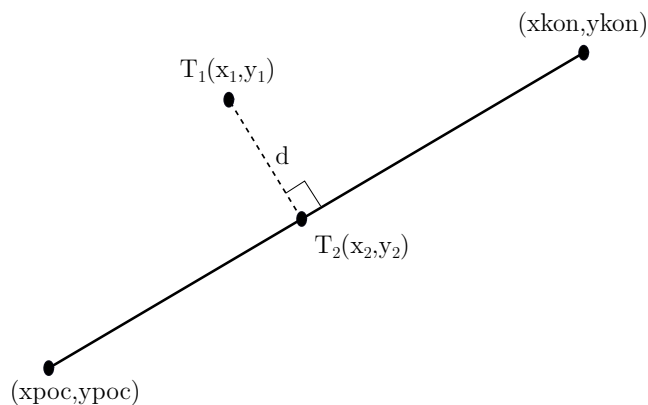
### B.1 Parametrizacija

U slučaju kosih linija potrebno je napraviti parametrizaciju. Dakle, umjesto problema na slici A.1 sada se promatra problem na slici B.1. Sada se  $x$  može zapisati u ovisnosti o parametru  $t$  kao:

$$x = (x_{kon} - x_{poc})t + x_{poc}. \quad (\text{B.1})$$

Ono na što treba pripaziti jest određivanje udaljenosti točke od elementa  $d$ . Promatra se problem na slici B.1 i određuje se udaljenost točaka  $T_1(x_1, y_1)$  i  $T_2(x_2, y_2)$ . Pritom su koordinate točke  $T_1$  poznate, a koordinate točke  $T_2$  je potrebno odrediti kako bi se mogla izračunati udaljenost.

Jednadžba pravca koji prolazi točkama  $(x_{poc}, y_{poc})$  i  $(x_{kon}, y_{kon})$  zadana je jednadžbom:



Slika B.1 – Prikaz problema za kosu liniju



$$y - y_{poc} = \frac{y_{kon} - y_{poc}}{x_{kon} - x_{poc}}(x - x_{poc}), \quad (\text{B.2})$$

iz čega je vidljivo da je koeficijent smjera pravca:

$$k_1 = \frac{y_{kon} - y_{poc}}{x_{kon} - x_{poc}}. \quad (\text{B.3})$$

Pravci su okomiti kada su im koeficijenti smjera recipročni i suprotnog predznaka pa je koeficijent smjera pravca koji prolazi točkama  $T_1$  i  $T_2$  :

$$k_2 = -\frac{x_{kon} - x_{poc}}{y_{kon} - y_{poc}}, \quad (\text{B.4})$$

iz čega slijedi jednačba pravca:

$$y - y_1 = -\frac{x_{kon} - x_{poc}}{y_{kon} - y_{poc}}(x - x_1). \quad (\text{B.5})$$

Uvrštavanjem B.2 u B.5 dobije se vrijednost  $x$  presjecišta dvaju pravaca:

$$x = \frac{y_{poc} - y_1 + \frac{y_{kon} - y_{poc}}{x_{kon} - x_{poc}}x_{poc} + \frac{x_{poc} - x_{kon}}{y_{kon} - y_{poc}}x_1}{\frac{x_{poc} - x_{kon}}{y_{kon} - y_{poc}} - \frac{y_{kon} - y_{poc}}{x_{kon} - x_{poc}}}. \quad (\text{B.6})$$

Uvrštavanjem B.6 u B.5 dobije se  $y$  koordinata presjecišta.

Uz  $x_2 = x$  i  $y_2 = y$ , udaljenost točke od kosog elementa može se računati pomoću:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (\text{B.7})$$

Sada se može pristupiti rješavanju novonastalih integrala.

## B.2 Analitičko rješenje integrala

Integral koji je potrebno riješiti je:

$$I_6 = \int_0^1 \ln \left( \frac{1}{\sqrt{((x_{kon} - x_{poc})t + x_{poc} - x)^2 + (d)^2}} \right) dt. \quad (\text{B.8})$$

Njegovo rješenje je:

$$\begin{aligned}
 I_6 = & -\frac{2d \arctan\left(\frac{-x+t(xkon-xpoc)+xpoc}{d}\right)}{2(xkon-xpoc)} \\
 & -\frac{(-x+t(xkon-xpoc)+xpoc)(-2+\ln(d^2+(-x+t(xkon-xpoc)+xpoc)^2))}{2(xkon-xpoc)}.
 \end{aligned} \tag{B.9}$$

Sljedeći integral koji je potrebno riješiti je:

$$I_7 = \int_0^1 t \ln\left(\frac{1}{\sqrt{((xkon-xpoc)t+xpoc-x)^2+(d)^2}}\right) dt. \tag{B.10}$$

Njegovo rješenje je:

$$\begin{aligned}
 I_7 = & -\frac{-t^2(xkon-xpoc)^2+2t(xkon-xpoc)(-x+xpoc)+3(-x+xpoc)^2}{4(xkon-xpoc)^2} \\
 & +\frac{4d(-x+xpoc)\arctan\left(\frac{-x+t(xkon-xpoc)+xpoc}{d}\right)}{4(xkon-xpoc)^2} \\
 & -\frac{(d^2+t^2(xkon-xpoc)^2-(-x+xpoc)^2)\ln(d^2+(-x+t(xkon-xpoc)+xpoc)^2)}{4(xkon-xpoc)^2}.
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

# Dodatak C

## Tretman singulariteta

### C.1 Tretman singulariteta kod integrala

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} I_1 = & xkon - xpoc + \frac{1}{2} (x - xkon) \ln \left( (x - xkon)^2 \right) \\ & + \frac{1}{2} (xpoc - x) \ln \left( (x - xpoc)^2 \right) \end{aligned} \quad (C.1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} I_2 = & \frac{(xkon - xpoc) (2x + xkon + xpoc)}{4} \\ & + \frac{(x^2 - xkon^2) \ln \left( (x - xkon)^2 \right) + (xpoc^2 - x^2) \ln \left( (x - xpoc)^2 \right)}{4} \end{aligned} \quad (C.2)$$

$$\lim_{d \rightarrow 0} I_6 = \frac{(x - xpoc + t(-xkon + xpoc)) (-2 + \ln \left( (x - txkon - xpoc + txpoc)^2 \right))}{2(xkon - xpoc)} \quad (C.3)$$

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow 0} I_7 = & \frac{(x - xpoc + t(-xkon + xpoc))}{4(xkon - xpoc)^2} \\ & \left( \frac{-3x - txkon + 3xpoc + txpoc}{4(xkon - xpoc)^2} \right. \\ & \left. + \frac{(x + t(xkon - xpoc) - xpoc) \ln \left( (x - txkon - xpoc + txpoc)^2 \right)}{4(xkon - xpoc)^2} \right) \end{aligned} \quad (C.4)$$

# Literatura

- [1] Kulkarni, S. V., Khaparde, S. A., Transformer Engineering Design and Practice, 2004.
- [2] Del Vecchio, R. M., Poulin, B., Feghali, P. T., Shah, D. M., Ahuja, R., Transformer design principles. CRC Press, 2002.
- [3] Drandić, A., Trkulja, B., “Transformer electric field calculation using BEM and FEM”, in Procedia Engineering, Vol. 202, 2017, str. 312–318.
- [4] “Ieee standard terminology for power and distribution transformers”, IEEE Std C57.12.80-2002 (Revision of IEEE Std C57.12.80-1978), 2002.
- [5] Allan, D., Moore, H., Electric power transformer engineering. CRC Press, 2004, ch. Theory and principles.
- [6] Amoiralis, E. I., Tsili, M. A., Georgilakis, P. S., “The state of the art in engineering methods for transformer design and optimization: A survey”, in Journal of Optoelectronics and Advanced Materials, 2008.
- [7] Ribbenfjärd, D., “Electromagnetic transformer modelling including the ferromagnetic core”, Doktorski rad, KTH Electrical Engineering, Sweden, 2010.
- [8] Župan, T., “Metodologija proračuna raspodjele unutarnjih prenapona duž namota transformatora primjenom koncentriranih parametara”, Doktorski rad, Zagreb, 2016.
- [9] Liang, G., Sun, H., Zhang, X., Cui, X., “Modeling of transformer windings under very fast transient overvoltages”, IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility, IEEE Transactions, Vol. 48, No. 4, 2006.
- [10] Popov, M., Van der Sluis, L., Smeets, R. P. P., Roldan, J. L., “Analysis of very fast transients in layer-type transformer windings”, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 22, No. 1, 2007.
- [11] Wilcox, D., Condon, M., Leonard, D., McHale, T., “Time-domain modelling of power transformers using modal analysis”, Electric Power Applications, Vol. 144, No. 2, 1997.

- [12] Popov, M., van der Sluis, L., Smeets, R., “Evaluation of surge-transferred overvoltages in distribution transformers”, *Electric Power Systems Research*, Vol. 78, No. 3, 2008.
- [13] Smajic, J., Steinmetz, T., Rüegg, M., Tanasic, Z., Obrist, R., Tepper, J., Weber, B., Carlen, M., “Simulation and measurement of lightning-impulse voltage distributions over transformer windings”, *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 50, No. 2, 2014.
- [14] Zupan, T., Trkulja, B., Obrist, R., Franz, T., Cranganu-Cretu, B., Smajic, J., “Transformer Windings’ RLC Parameters Calculation and Lightning Impulse Voltage Distribution Simulation”, in *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 52, No. 3, 2016.
- [15] Trkulja, B., Drandić, A., Milardić, V., Župan, T., Žiger, I., Filipović-Grčić, D., “Lightning impulse voltage distribution over voltage transformer windings — Simulation and measurement”, *Electric Power Systems Research*, Vol. 147, 2017, str. 185–191.
- [16] Shafieipour, M., Chen, Z., Menshov, A., De Silva, J., Okhmatovski, V., “Efficiently computing the electrical parameters of cables with arbitrary cross-sections using the method-of-moments”, *Electric Power Systems Research*, Vol. 162, 2018, str. 37–49.
- [17] Štih, Ž., Župan, T., Berberović, S., Trkulja, B., “Calculation of capacitances of windings of high voltage power transformers”, in *XII CLEEE-12th Portuguese-Spanish Conference on Electrical Engineering*, 2011.
- [18] Trkulja, B., Drandić, A., Štih, Ž., “Development of 3D BEM code for Computation of a Transformer Winding’s Capacitance Matrix”, in *Procedia Engineering*, Vol. 202, 2017, str. 327–332.
- [19] Ymeri, H., Nauwelaers, B. K., Maex, K., “Computation of capacitance matrix for integrated circuit interconnects using semi-analytic Green’s function method”, *Integration, the VLSI Journal*, Vol. 30, No. 1, 2000, str. 55–63.
- [20] Župan, T., Štih, Ž., Trkulja, B., “Fast computation of inductances and capacitances of high voltage power transformer windings”, in *15th International IGTE Symposium on Numerical Field Calculation in Electrical Engineering*, 2012.
- [21] Ackermann, B., Lewalter, A., Waffenschmidt, E., “Analytical Modelling of Winding Capacitances and Dielectric Losses for Planar Transformers”, *Computers in Power Electronics*, 2004. Proceedings. 2004, 2004, str. 2–9.
- [22] Su, C. Q., *Electromagnetic transients in transformer and rotating machine windings*. Information Science Reference, 2013.

- [23] Martinez, J. A., Mork, B. A., “Transformer modeling for low- and mid-frequency transients - a review”, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 20, No. 2, 2005.
- [24] Lopez-Fernandez, X. M., Alvarez-Marino, C., “Computation method for transients in power transformers with lossy windings”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 45, No. 3, 2009, str. 1863–1866.
- [25] Župan, T., Trkulja, B., Štih, Ž., “Power transformer winding model for lightning impulse testing”, in Procedia Engineering, Vol. 202, 2017, str. 297–304.
- [26] Doležel, I., Karban, P., Šolin, P., Integral Methods in Low-Frequency Electromagnetics, 2009.
- [27] Phaengkiao, D., Ruangsinchaiwanich, S., “Design optimization of electrical transformer using genetic algorithm”, in 2014 17th International Conference on Electrical Machines and Systems (ICEMS), Oct 2014, str. 3487-3491.
- [28] Li, J., Water, W., Zhu, B., Lu, J., “Integrated high-frequency coaxial transformer design platform using artificial neural network optimization and fem simulation”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 51, No. 3, March 2015, str. 1-4.
- [29] Sadiku, M. N., Numerical techniques in electromagnetics with MATLAB. CRC press, 2011.
- [30] Fogaras, L., Lampe, W., “Calculation of electrical field strength around transformer winding corners”, IEEE Transactions on Electrical Insulation, 1968.
- [31] Cockcroft, J., “The effect of curved boundaries on the distribution of electrical stress around conductors”, Journal of the Institution of Electrical Engineers, 1928.
- [32] Sadiku, M. N., Numerical techniques in electromagnetics. CRC press, 2001.
- [33] Zhou, P.-b., Numerical Analysis of Electromagnetic Fields. Springer, 1993.
- [34] Becker, A., The boundary element method in engineering: A complete course. McGraw-Hill book company, 1992.
- [35] Bondeson, A., Rylander, T., Ingelström, P., Computational Electromagnetics. Springer, 2005.
- [36] Yu, G., Li, X., “Finite-difference method on electrostatics field calculation in oil storage tank”, Journal of Physics: Conference Series, Vol. 418, No. 1, 2013, str. 012016, dostupno na: <http://stacks.iop.org/1742-6596/418/i=1/a=012016>

- [37] Gordon, R. K., Tew, M. D., Elsherbeni, A. Z., “An efficient finite difference method for finding the electric potential in regions with small perturbations”, in IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 1992 Digest, June 1992, str. 524-527 vol.1.
- [38] Singer, H., Steinbigler, H., Weiss, P., “A charge simulation method for the calculation of high voltage fields”, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-93, No. 5, 1974, str. 1660 – 1668.
- [39] Liu, X. M., Cao, Y. D., Wang, E. Z., Yin, S. A., Yao, X. M., “3-d electric field analysis of high voltage SF6 current transformer using charge simulation method”, Icems’2001: Proceedings of the Fifth International Conference on Electrical Machines and Systems, Vols I and II, 2001, str. 269–272.
- [40] Jin, J.-M., The Finite Element Method in Electromagnetics, 3rd edition, 2014.
- [41] Makuc, D., Ikanovic, J., Lenasi, K., “Electric Field Analysis of the Insulation Structure of Power Transformer”, Springer Netherlands, 2005, str. 155–160.
- [42] Khaligh, A., Vakilian, M., “Power transformers internal insulation design improvements through finite element methods”, in IEEE Region 10 Annual International Conference, Proceedings/TENCON, Vol. C, 2004.
- [43] Gómez, P., González, E., Espino-Cortés, F. P., “Analysis of the electric field distribution on insulating supports of dry-type transformers under high temperature”, IET Electric Power Applications, Vol. 7, No. 5, 2013, str. 331–337, dostupno na: <http://digital-library.theiet.org/content/journals/10.1049/iet-epa.2012.0193>
- [44] Capuder, K., Janić, Ž., Štih, Ž., “Analyzing method efficiency for power transformers insulation design”, in IEEE EuroCon 2013, 2013, str. 1542–1547.
- [45] Tsili, M., Kladas, A., Georgilakis, P., Souflaris, A., Papparigas, D., “Numerical techniques for design and modeling of distribution transformers”, in Journal of Materials Processing Technology, 2005.
- [46] Azzouz, Z., Foggia, A., Pierrat, L., Meunier, G., “3D finite element computation of the high frequency parameters of power transformer windings”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 29, No. 2, 1993, str. 1407–1410.
- [47] Wang, H., Butler, K. L., “Finite element analysis of internal winding faults in distribution transformers”, IEEE Transactions on Power Delivery, 2001.
- [48] Jawson, M., “Integral methods in potential theory”, Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences, 1963.

- [49] Harrington, R., "Origin and development of the method of moments for field computation", *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 32, No. 3, 1990, str. 31–35.
- [50] Harrington, R. F., "Matrix Methods for Field Problems", *Proceedings of the IEEE*, Vol. 55, No. 2, 1967, str. 136–149.
- [51] Serteller, N. F. O., Ak, A. G., Kocyigit, G., Akinci, T. C., "Experimental study of Moment Method for undergraduates in electromagnetic", *Elektronika ir Elektrotechnika*, No. 3, 2011, str. 115–118.
- [52] Bamji, S., a.T. Bulinski, Prasad, K., "Electric field calculations with the boundary element method", *IEEE Transactions on Electrical Insulation*, Vol. 28, No. 3, 1993, str. 420–424.
- [53] Faiz, J., Ojaghi, M., "Novel techniques for treating singularity problems in the boundary element method applied to electric field evaluation within the tank of a power transformer", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 15, No. 2, 2000, str. 592-598.
- [54] Štih, Ž., Trkulja, B., "Application of bicubic splines in the boundary element method", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 33, No. 6, 2009, str. 896–900.
- [55] Gaul, L., Kogl, M., Wagner, M., *Boundary Element Methods for Engineers and Scientists An Introductory Course with Advanced Topics*. Springer, 2003.
- [56] Andjelić, Z., Smajić, J., Conry, M., "BEM-based simulations in engineering design", *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics*, Vol. 2007, No. 29, 2007, str. 281–352.
- [57] Yamashita, H., Shinozaki, K., Nakamae, E., "A boundary-finite element method to compute directly electric field intensity with high accuracy", *IEEE Transactions on Power Delivery*, 1988.
- [58] Trkulja, B., Štih, Ž., Župan, T., "Calculation of low frequency electric fields of complex power system facilities", *International Review of Electrical Engineering*, Vol. 6, No. 2, 2011, str. 1024–1029.
- [59] Trkulja, B., Štih, Ž. ., "Computation of electric fields inside large substations", *IEEE Transactions on Power Delivery*, Vol. 24, No. 4, 2009, str. 1898–1902.
- [60] Marković, M., Štih, Ž., Ćucić, B., "Power transformer main insulation design improvement using BEM and FEM", in *IEEE EuroCon 2013*, 2013, str. 1553–1560.
- [61] Drandić, A., Trkulja, B., "Computation of electric field inside substations with boundary element methods and adaptive cross approximation", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 91, 2018, str. 1–6.



- [62] Trkulja, B., “Proračun elektromagnetskog polja složenih elektroenergetskih objekata”, Doktorski rad, Zagreb, 2008.
- [63] Topa, T., Karwowski, A., Noga, A., “Using GPU with CUDA to accelerate MoM-based electromagnetic simulation of wire-grid models”, *IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters*, Vol. 10, 2011, str. 342–345.
- [64] Xu, K., Ding, D. Z., Fan, Z. H., Chen, R. S., “Multilevel fast multipole algorithm enhanced by GPU parallel technique for electromagnetic scattering problems”, in *Microwave and Optical Technology Letters*, Vol. 52, No. 3, 2010, str. 502–507.
- [65] Adelman, R., Gumerov, N. A., Duraiswami, R., “FMM/GPU-Accelerated Boundary Element Method for Computational Magnetics and Electrostatics”, *IEEE Transactions on Magnetics*, 2017.
- [66] Georgieva, I., Hofreither, C., “An algorithm for low-rank approximation of bivariate functions using splines”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 2017.
- [67] Ida, A., Iwashita, T., Ohtani, M., Hirahara, K., “Improvement of Hierarchical Matrices with Adaptive Cross Approximation for Large-scale Simulation”, *Journal of Information Processing*, 2015.
- [68] Jiang, Z., Chen, H., Wan, T., Ouyang, Y., Qiao, X., Lu, X., “Application of multilevel directional adaptive cross approximation technique for electromagnetic problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 85, 2017, str. 111–115.
- [69] Kurz, S., Rain, O., Rjasanow, S., “Application of the adaptive cross approximation technique for the coupled BE-FE solution of symmetric electromagnetic problems”, in *Computational Mechanics*, Vol. 32, No. 4-6, 2003, str. 423–429.
- [70] Ostrowski, J., Andjelić, Z., Bebendorf, M., Crangânu-Crețu, B., Smajić, J., “Fast BEM-solution of laplace problems with H-matrices and ACA”, in *IEEE Transactions on Magnetics*, Vol. 42, No. 4, 2006, str. 627–630.
- [71] Tamayo, J. M., Heldring, A., Rius, J. M., “Multilevel adaptive cross approximation (MLACA)”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 59, No. 12, 2011, str. 4600–4608.
- [72] Wei, X., Chen, B., Chen, S., Yin, S., “An ACA-SBM for some 2D steady-state heat conduction problems”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 71, 2016, str. 101–111.

- [73] Zhao, K., Vouvakis, M. N., Lee, J. F., “The adaptive cross approximation algorithm for accelerated method of moments computations of EMC problems”, *IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility*, Vol. 47, No. 4, 2005, str. 763–773.
- [74] Liu, Y. J., Nishimura, N., “The fast multipole boundary element method for potential problems: A tutorial”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 30, No. 5, 2006, str. 371–381.
- [75] Engheta, N., Murphy, W. D., Rokhlin, V., Vassiliou, M. S., “The Fast Multipole Method (FMM) for Electromagnetic Scattering Problems”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 40, No. 6, 1992, str. 634–641.
- [76] Beatson, R., Greengard, L., “A short course on fast multipole methods”, . . . , multilevel methods and elliptic PDEs, 1997, str. 1–37, dostupno na: <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.129.7826&rep=rep1&type=pdf> %5Cnhttp://math.berkeley.edu/~strain/273.F10/beatson.greengard.short.course.fmm.pdf
- [77] Štih, Ž., “Optimiranje oblika elektroda i izolatora u osnosimetričnim električnim poljima”, *Doktorski rad*, Zagreb, 1984.
- [78] Grandi, G., Kazimierczuk, M. K., Massarini, A., Reggiani, U., “Stray capacitances of single-layer solenoid air-core inductors”, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. 35, No. 5, Sep. 1999, str. 1162-1168.
- [79] Heidarzadeh, M., Besmi, M., “Influence of the parameters of disk winding on the impulse voltage distribution in power transformers”, *Iranian Journal of Electrical and Electronic Engineering*, 2014.
- [80] Haznadar, Z., Štih, Ž., *Electromagnetic Fields. Waves And Numerical Methods*, Amsterdam, Berlin, Oxford, Tokyo, Washington, D.C.:IOS Press, 2000.
- [81] Haznadar, Z., Štih, Ž., *Elektromagnetizam 2*. Zagreb: Školska knjiga, 1997.
- [82] Gibson, W., *The Method of Moments in Electromagnetics*, by W.C. Gibson, 2010, Vol. 51, No. 2, dostupno na: <http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/00107510903073302>
- [83] Berberović, S., “Točniji proračun i analiza složenih uzemljivačkih sustava”, *Doktorski rad*, Zagreb, 1991.
- [84] Daffe, J., Olsen, R. G., “An integral equation technique for solving rotationally symmetric electrostatic problems in conducting and dielectric material”, *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, 1979.

- [85] Huber, C., Rieger, W., Haas, M., Rucker, W., “The numerical treatment of ingular integrals in boundary element calculations”, 1997.
- [86] Miao, Y., Lv, J., “A simplified approach for the evaluation of nearly singular integrals in boundary element method”, in 13th International Conference on Fracture, Beijing, China, 2013.
- [87] Brebbia, C. A., “The boundary element method in engineering practice”, Engineering Analysis, Vol. 1, No. 1, 1984, str. 3–12.
- [88] Fratantonio, M., Rencis, J. J., “Exact boundary element integrations for two-dimensional Laplace equation”, Engineering Analysis with Boundary Elements, Vol. 24, No. 4, 2000, str. 325–342.
- [89] Jin, J.-M., Theory and computation of electromagnetic fields. John Wiley & Sons, 2015.
- [90] Rokhlin, V., “Rapid solution of integral equations of classic potential theory”, Journal of Computational Physics, Vol. 60, No. 1, 1985.
- [91] Buchau, A., Huber, C. J., Rieger, W., Rucker, W. M., “Fast BEM computations with the adaptive multilevel fast multipole method”, Ieee Transactions on Magnetics, 2000.
- [92] Buchau, A., Huber, C. J., Rieger, W., Rucker, W. M., “Fast BEM computations with the adaptive multilevel fast multipole method”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 36, No. 4 PART 1, 2000, str. 680–684.
- [93] Bleszynski, E., Bleszynski, M., Jaroszewicz, T., “Aim: Adaptive integral method for solving large-scale electromagnetic scattering and radiation problems”, Radio Science, Vol. 31, No. 5, 1996.
- [94] Phillips, J., White, J. K., “A precorrected-fft method for electrostatic analysis of complicated 3-d structures”, IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems, Vol. 16, No. 10, 1997.
- [95] Parron, J., Rius, J. M., Mosig, J. R., “Application of the multilevel matrix decomposition algorithm to the frequency analysis of large microstrip antenna arrays”, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 38, No. 2, March 2002, str. 721-724.
- [96] Bebendorf, M., “Approximation of boundary element matrices”, Numerische Mathematik, Vol. 86, No. 4, 2000, str. 565–589.
- [97] Bebendorf, M., Rjasanow, S., “Adaptive low-rank approximation of collocation matrices”, Computing (Vienna/New York), Vol. 70, No. 1, 2003, str. 1–24.

- [98] Rjasanow, S., “Adaptive Cross Approximation of Dense Matrices”, in International Association for Boundary Element Methods, 2002, str. 1–12, dostupno na: <http://cavity.ce.utexas.edu/iabem2002/fullpapers/rjasanow.pdf>
- [99] Buchau, A., Rucker, W. M., Rain, O., Rischmüller, V., Kurz, S., Rjasanow, S., “Comparison between different approaches for fast and efficient 3-D BEM computations”, IEEE Transactions on Magnetics, 2003.
- [100] Smajic, J., Andjelic, Z., Bebendorf, M., “Fast BEM for eddy-current problems using h-matrices and adaptive cross approximation”, in IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 43, No. 4, 2007, str. 1269–1272.
- [101] Buchau, A., Rieger, W., Rucker, W. M., “Fast field computations with the fast multipole method”, COMPEL - The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, 2001.
- [102] Liu, Y., “A new fast multipole boundary element method for solving large-scale two-dimensional elastostatic problems”, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 65, No. 6, 2006, str. 863–881.
- [103] Ying, L., Biros, G., Zorin, D., Langston, H., “A new parallel kernel-independent fast multipole method”, in SC '03: Proceedings of the 2003 ACM/IEEE Conference on Supercomputing, Nov 2003, str. 14-14.
- [104] Rostami, M. W., Olson, S. D., “Kernel-independent fast multipole method within the framework of regularized stokeslets”, Journal of Fluids and Structures, Vol. 67, 2016, str. 60 - 84, dostupno na: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0889974615302450>
- [105] Bebendorf, M., Hierarchical Matrices. A means to efficiently solve elliptic boundary value problems. Berlin: Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer, Berlin, 2008.
- [106] Degiorgi, M., Tiberi, G., Monorchio, A., Manara, G., Mitra, R., “An svd-based method for analyzing electromagnetic scattering from plates and faceted bodies using physical optics bases”, in 2005 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, Vol. 1A, July 2005, str. 147-150 Vol. 1A.
- [107] Marin, L., Lesnic, D., “Boundary element solution for the cauchy problem in linear elasticity using singular value decomposition”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 191, No. 29, 2002, str. 3257 - 3270, dostupno na: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782502002621>

- [108] Kishore Kumar, N., Schneider, J., “Literature survey on low rank approximation of matrices”, *Linear and Multilinear Algebra*, Vol. 65, No. 11, 2017, str. 2212–2244.
- [109] Cao, Y., Wen, L., Rong, J., “A svd accelerated kernel-independent fast multipole method and its application to bem”, *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, Vol. 56, 11 2012.
- [110] Van Loan, C. F., Golub, G. H., *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press, 1996.
- [111] Rjasanow, S., Steinbach, O., *The Fast Solution of Boundary Integral Equations*. Springer, 2007.
- [112] Börm, S., Grasedyck, L., “Hybrid cross approximation of integral operators”, *Numerische Mathematik*, Vol. 101, 08 2005, str. 221-249.
- [113] Bebendorf, M., “Hierarchical LU decomposition-based preconditioners for BEM”, in *Computing (Vienna/New York)*, Vol. 74, No. 3, 2005, str. 225–247.
- [114] MATLAB, “MATLAB”, 2016.
- [115] Infolytica, “ElecNet v7: 2D/3D Electric Field Simulation Software”.
- [116] Berberović, S., *Teorijska elektrotehnika*. Graphis, Zagreb, 1998.
- [117] Saad, Y., Schultz, M. H., “GMRES: A Generalized Minimal Residual Algorithm for Solving Nonsymmetric Linear Systems”, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 7, No. 3, 1986, str. 856–869, dostupno na: <http://epubs.siam.org/doi/10.1137/0907058>
- [118] Matinfar, M., Zareamoghaddam, H., Eslami, M., Saeidy, M., “GMRES implementations and residual smoothing techniques for solving ill-posed linear systems”, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 63, No. 1, 2012, str. 1 - 13, dostupno na: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0898122111007905>
- [119] Najafi, H. S., Zareamoghaddam, H., “A new computational gmres method”, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 199, No. 2, 2008, str. 527 - 534, dostupno na: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300307010284>
- [120] Ayachour, E., “A fast implementation for gmres method”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 159, No. 2, 2003, str. 269 - 283, dostupno na: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S037704270300534X>

# Popis simbola

$\epsilon_0$  dielektrična konstanta vakuuma,  $\epsilon_0 = 8,854188 \times 10^{-12}$  F/m

## Matematički simboli

$\vec{E}$  vektor jakosti električnog polja [ V/m]

$\epsilon_r$  relativna električna permitivnost materijala

$G(\vec{r}, \vec{r}')$  Greenova funkcija

$\delta$  Diracova delta funkcija

C kapacitet [F]

Q električni naboj [C]

## Skraćenice

AKA adaptivna križna aproksimacija, engl. adaptive cross approximation - ACA

BMM brza metoda multipola, engl. fast multipole method - FMM

GMRES generalizirani algoritam minimalnog reziduala, engl. generalized minimal residual method

MAI metoda adaptivnih integrala, engl. adaptive integral method – AIM

MKE metoda konačnih elemenata, engl. finite element method - FEM

MKR metoda konačnih razlika, engl. finite difference method - FDM

MOM metoda momenata, engl. method of moments

MPL metoda prijenosnih linija, engl. transmission line matrix method - TLM

MPN metoda simuliranih površinskih naboja, engl. surface charge simulation method- SCSM

MRE metoda rubnih elemenata, engl. engl. boundary element method - BEM

MSN metoda simuliranih naboja, engl. charge simulation method - CSM

SVD dekompozicija singularnih vrijednosti matrice, engl. singular value decomposition

TKP tehnika konformnog preslikavanja, engl. conformal mapping technique - CMT

UVAKA algoritam usmjerene višerazinske adaptivne križne aproksimacije, engl. multilevel directional adaptive cross approximation – MLDACA

VAKA algoritam višerazinske adaptivne križne aproksimacije, engl. multilevel adaptive cross approximation – MLACA

VBMM višerazinska brza metoda multipola, engl. multilevel FMM – MLFMM

VDM algoritam višerazinske dekompozicije matrice, engl. multilevel matrix decomposition algorithm – MLMDA

VQR višerazinska QR dekompoziciju, engl. multilevel QR decomposition

# Popis slika

1.1. Raspodjela impulsnog napona suž namota transformatora . . . . .	4
1.2. Diskretizacija domene u a) MKE i b) MRE . . . . .	8
1.3. Namot u obliku prstenova . . . . .	12
1.4. Približenje pomoću beskonačno dugog ravnog vodiča . . . . .	13
2.1. Približenje linearnim funkcijama na jednodimenzionalnom rubnom elementu . . . . .	20
2.2. Temeljne funkcije . . . . .	21
2.3. Sustav vodiča i dielektrika korišten u formulaciji integralnih jednadžbi . . . . .	22
2.4. Prikaz problema u regiji s a) jednim dielektrikom i b) dva dielektrika . . . . .	26
3.1. Vrijeme proračuna za različite računske složenosti . . . . .	31
3.2. Potrebni memorijski resursi za različite računske složenosti . . . . .	31
3.3. Broj potrebnih operacija za a) MRE, b) BMM . . . . .	33
3.4. Podjela domene . . . . .	34
3.5. Grafički prikaz translacija: a)M2M, b)M2L, c)L2L . . . . .	35
3.6. Hijerarhijska ćelijska struktura . . . . .	36
3.7. Struktura stabla . . . . .	37
3.8. Klasteriranje pomoću regularnih graničnih okvira . . . . .	39
3.9. Klasteriranje pomoću uravnoteženih graničnih okvira . . . . .	40
3.10. Primjer geometrijskog klasteriranja . . . . .	41
3.11. Struktura stabla koja odgovara primjeru na slici 3.10 . . . . .	41
3.12. Grafički prikaz određivanja udaljenosti klastera . . . . .	42
3.13. Primjer klasteriranja pomoću ćelija . . . . .	43
3.14. Struktura stabla koja odgovara primjeru na slici 3.13 . . . . .	43
3.15. Primjer podjele hijerarhijske matrice . . . . .	44
3.16. Prikaz aproksimacije matrice pomoću AKA . . . . .	49
3.17. Slijedno određivanje pivota . . . . .	53
3.18. LU dekompozicija matrice . . . . .	56
4.1. Primjer diskretizacije za ravne i zakrivljene elemente . . . . .	59



4.2.	Primjer dva beskonačno duga vodiča . . . . .	60
4.3.	Kolokacijske točke na jednom od vodiča . . . . .	60
4.4.	Usporedba raspodjele potencijala sa crvenom bojom označenu MRE i plavom bojom označenu MKE . . . . .	62
4.5.	Raspodjela linijskog naboja po rubu vodiča modeliranom sa sedam linearnih elemenata . . . . .	63
4.6.	Dva paralelna osnosimetrična vodiča . . . . .	63
4.7.	Koaksijalni kabel . . . . .	65
4.8.	Raspodjela potencijala za problem koaksijalnog kabela . . . . .	68
4.9.	Raspodjela jakosti električnog polja za problem koaksijalnog kabela . . . . .	68
4.10.	Blok shema MRE-AKA implementacije . . . . .	70
5.1.	Grafički prikaz modela primjera transformatora . . . . .	75
5.2.	Grafički prikaz diskretizacije jednog zavoja. Smeđom bojom označena je izolacija, a narančastom vodič. . . . .	77
5.3.	Raspodjela električnog potencijala na primjeru transformatora dobivena koristeći <i>Infolytica® ElecNet 7.5.1</i> . . . . .	78
5.4.	Raspodjela potencijala na primjeru transformatora dobivena pomoću razvijene metodologije . . . . .	78
5.5.	Raspodjela jakosti električnog polja dobivena koristeći <i>Infolytica® ElecNet 7.5.1</i> . . . . .	79
5.6.	Vodiči primjera namota transformatora koji se koriste za analizu rezultata proračuna kapaciteta . . . . .	80
5.7.	Raspodjela jakosti električnog polja za vodič $V_1$ . . . . .	81
5.8.	Raspodjela jakosti električnog polja za vodič $V_7$ . . . . .	82
5.9.	Usporedba rezultata proračuna kapaciteta dobivenih pomoću <i>Infolytica® ElecNet 7.5.1</i> te pomoću MRE proračuna za vodiče $V_1$ i $V_7$ . . . . .	82
5.10.	Usporedba rezultata proračuna kapaciteta dobivenih pomoću <i>Infolytica® ElecNet 7.5.1</i> te pomoću MRE proračuna za dijagonalne elemente matrice kapaciteta za označenih deset vodiča . . . . .	83
5.11.	Grafički prikaz modela drugog primjera transformatora . . . . .	84
5.12.	Raspodjela potencijala na primjeru transformatora dobivena pomoću MRE proračuna . . . . .	85
5.13.	Rezultati proračuna kapaciteta pomoću MRE proračuna za prvih 10 zavoja . . . . .	86
5.14.	Vrijeme proračuna matrice sustava primjenom MRE te primjenom MRE-AKA za različit broj elemenata . . . . .	87
5.15.	Potrebni memorijski resursi pri MRE te pri MRE-AKA proračunu za različit broj elemenata . . . . .	88

5.16. Vrijeme proračuna linearnog sustava jednačbi primjenom iterativnog MRE te primjenom iterativnog MRE-AKA proračuna za različit broj elemenata . . . . .	89
A.1. Prikaz problema za ravnu liniju . . . . .	92
B.1. Prikaz problema za kosu liniju . . . . .	95

# Popis tablica

1.1. Usporedba MRE i MKE . . . . .	10
4.1. Parametri koaksijalnog kabela . . . . .	65
4.2. Vrijednosti izračunatog kapaciteta po jedinici duljine za primjer koaksijalnog kabela . . . . .	67
5.1. Geometrijske vrijednosti definiranog modela transformatora . . . . .	76
5.2. Fizikalne karakteristike modela transformatora . . . . .	76
5.3. Usporedba vrijednosti jakosti električnog polja u određenim točkama . . . . .	80
5.4. Geometrijske vrijednosti prikazanog modela transformatora . . . . .	84
5.5. Fizikalne karakteristike materijala prikazanog modela transformatora . . . . .	85
5.6. Parametri MRE-AKA implementacije . . . . .	86
5.7. Ušteda memorije i omjer kompresije za MRE-AKA proračun za različite diskretizacije . . . . .	87
5.8. Usporedba kompresije matrice za različite tolerancije aproksimacije . . . . .	89

# Životopis

Ana Drandić je rođena 1990. godine u Puli, gdje je 2009. godine završila opću gimnaziju. Nakon završetka gimnazije upisala je Fakultet elektrotehnike i računarstva u Zagrebu na kojem je 2012. godine završila preddiplomski studij, a 2014. godine diplomski studij, oba na smjeru Elektroenergetika.

Od 2015. godine zaposlena je na je Fakultetu elektrotehnike i računarstva, Zavodu za osnove elektrotehnike i električka mjerenja kao suradnik na projektu „Numeričko modeliranje složenih elektromagnetskih pojava u transformatorima“ koji financira Hrvatska zaklada za znanost. U sklopu projekta bavi se razvojem proračuna električnog polja transformatora metodom rubnih elemenata te tehnikama ubrzanja proračuna kompresijom matrice sustava. Također, sudjeluje u izvođenju nastave kolegija: Osnove elektrotehnike i Elektromagnetska polja. Od 2017. godine članica je organizacijskog odbora međunarodnog kolokvija teme „Istraživanje i gospodarenje transformatorima“. Uz to, u razdoblju 2014.-2015. bila je zaposlena na puno, a od 2016. do danas zaposlena je na nepuno radno vrijeme u tvrtki ELPUT d.o.o. gdje radi na pripremi elektrotehničkih projekata.

U okviru znanstvene i stručne djelatnosti bavi se razvojem numeričkih proračuna elektromagnetskih polja i njihovom primjenom u projektiranju elektromagnetskih uređaja.

## Popis objavljenih djela

### Radovi u časopisima

- (a) Drandić, A., Trkulja, B., “Computation of electric field inside substations with boundary element methods and adaptive cross approximation”, Engineering analysis with boundary elements, vol. 91, pp. 1-6, lipanj 2018.
- (b) Trkulja, B., Drandić, A., Milardić, V., Župan, T., Žiger, I., Filipović-Grčić, D., “Lightning impulse voltage distribution over voltage transformer windings — Simulation and measurement”, Electric power systems research, vol. 147, pp. 185-191, lipanj 2017.
- (c) Drandić, A., Marušić, A., Drandić, M., Havelka, J., “Power system neutral point grounding”, Energija:časopis Hrvatske elektroprivrede, vol. 66, pp. 52-68, 2017.

## Radovi na konferencijama

- (a) Trkulja, B., Drandić, A., Štih, Ž., “Integral Equation Methods for Ion Flow Field”, ICO-SAHOM, London, Velika Britanija, 2018.
- (b) Trkulja, B., Frlić, S., Drandić, A., Žiger, I., Štih, Ž., “Computation of Self- and Mutual Inductances of Open-core Transformers Using a 3D Integral Equations Approach”, Proceedings of 2018 First International Colloquium on Smart Grid Metrology (SmaGriMet), Split, Hrvatska, 2018.
- (c) Drandić, A., Trkulja, B., “Computation of transformer capacitance matrix with 3D BEM and adaptive cross approximation”, Proceedings of 11 International Symposium on Electric and Magnetic Fields, Darmstadt, Njemačka, 2018.
- (d) Drandić, A., Trkulja, B., “Transformer electric field calculation using BEM and FEM”, 4th International Colloquium "Transformer Research and Asset Management", Pula, Hrvatska, 2017.
- (e) Trkulja, B., Drandić, A., Štih, Ž., “Development of 3D BEM code for Computation of a Transformer Winding’s Capacitance Matrix”, 4th International Colloquium “Transformer Research and Asset Management”, Pula, Hrvatska, 2017.
- (f) Drandić, A., Trkulja, B., “Computation of electric field in transformers by boundary element method and fast multipole method”, 11th International Conference on Computational Scientific Computing in Electrical Engineering, St. Wolfgang, Austrija, 2016.
- (g) Trkulja, B., Drandić, A., “Calculation of Power Frequency Electric Field with Boundary Element Methods and Adaptive Cross Approximation”, Lyon, Francuska, 2016.

# Biography

Ana Drandić was born in Pula, Croatia in 1990. She received the B.Sc, and M.Sc degrees from the University of Zagreb, Zagreb, Croatia, in 2012, and in 2014 respectively, and she is currently working towards the Ph.D. degree at the same university.

Since 2015, she is employed at the Faculty of Electrical Engineering and Computing, University of Zagreb, at the Department of Electrical Engineering Fundamentals and Measurements. She is currently a research assistant on the project “Numerical Modelling of Complex Electromagnetic Phenomena in Transformers” funded by the Croatian Science Foundation. She is working on the code development for transformer electric field computation and implementation of matrix reduction techniques. She also participates as an assistant in courses: “Fundamentals of Electrical Engineering” and “Electromagnetic Fields”. Since 2017. she is a member of the organizing committee of the international colloquium “Transformer Research and Asset Management”. Also, from 2014. to 2015. she was a full time employee, and since 2016. is part time employed in ELPUT d.o.o.

Her research interests include computational electromagnetism and its application in power apparatus and systems.