

Primjena kvaterniona u računalnoj grafici

Kolobarić, Ante

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:168:717563>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-29**



Repository / Repozitorij:

[FER Repository - University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing repository](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 1298

PRIMJENA KVATERNIONA U RAČUNALNOJ GRAFICI

Ante Kolobarić

Zagreb, lipanj 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 1298

PRIMJENA KVATERNIONA U RAČUNALNOJ GRAFICI

Ante Kolobarić

Zagreb, lipanj 2024.

ZAVRŠNI ZADATAK br. 1298

Pristupnik: **Ante Kolobarić (0035222534)**
Studij: Elektrotehnika i informacijska tehnologija i Računarstvo
Modul: Računarstvo
Mentor: izv. prof. dr. sc. Mate Puljiz

Zadatak: **Primjena kvaterniona u računalnoj grafici**

Opis zadatka:

Cilj rada je opisati primjenu kvaterniona u računalnoj grafici. Strogo matematički bi se uveo pojam kvaterniona i obradila njihova svojstva prateći knjigu [1]. Među ostalim bi se objasnio problem blokade kardanskih osi (gimbal lock) i kako ga kvaternioni rješavaju. Sve bi bilo popraćeno vizualizacijama u OpenGL-u. [1] Vince, J. Quaternions for computer graphics. (Springer,2011) [2] Čupić, M.; Mihajlović, Ž. Interaktivna računalna grafika kroz primjere u OpenGL-u. (FER,2021) <https://www.zemris.fer.hr/predmeti/irg/knjiga.pdf> [3] Wikipedia Quaternions and spatial rotation - Wikipedia, The Free Encyclopedia. [4] 3D Rotations in Processing (Vectors, Matrices, Quaternions) - Medium.

Rok za predaju rada: 14. lipnja 2024.

Sadržaj

Uvod	1
1. Eulerovi kutovi	3
1.1. Definicija i svojstva	3
1.2. 3D rotacije	4
1.3. Interpolacija između rotacija	5
1.4. Gimbal lock	6
1.5. Kako INS prati položaj letjelice	7
1.6. Problem sa žiroskopom u misiji Apollo	9
2. Kvaternioni	11
2.1. Definicija	11
2.2. Svojstva	12
2.3. Kvaternioni i 3D rotacije	12
2.4. Prednosti korištenja nad Eulerovim kutovima	16
2.5. Veza između kvaterniona i Eulerovih kutova	16
3. Aplikacija	18
3.1. Opis	18
3.2. Prikaz objekta	18
3.3. Ažuriranje prikaza	19
Zaključak	21
Literatura	22
Sažetak	24
Summary	25
Skraćenice	26

Uvod

Ovaj rad bavit će se 3D rotacijom u računalnoj grafici. Postoji više načina rotiranja objekta ili točke u 3D prostoru, ali ovaj rad fokusirati će se na konkretno dvije najčešće korištene. Rotaciju preko Eulerovih kutova i rotaciju pomoću kvaterniona te usporedbu tih dviju metoda i prednosti korištenja jedne u odnosu na drugu.

Eulerova rotacija rotira objekt koristeći Eulerove kutove gdje svaki kut označava rotaciju oko osi. Tri kuta su ϕ koji označava rotaciju oko x-osi i zove se “roll”, θ označava rotaciju oko y-osi i zove se “pitch” te na kraju ψ koji označava zakrenutost oko z-osi i naziva se “yaw”. Ovim pristupom rotacija postaje dosta intuitivna i lako razumljiva, ali dolazi sa mogućim problemom poklapanja dviju osi rotacija koji se naziva blokada kardanskog mehanizma (eng. Gimbal lock). Pri dešavanju blokade kardanskog mehanizma gubi se jedan stupanj slobode za rotaciju što predstavlja problem.

Kvaternioni s druge strane su matematički objekti koji se koriste za predstavljanje rotacije u 3D svijetu. U usporedbi s vektorima koji nose informacije o duljini i smjeru, kvaternioni nose i dodatne informacije o orijentaciji objekta u 3D prostoru. Sastoje se od četiri dijela, jednog realnog i tri imaginarna. Realni dio predstavlja skalarnu vrijednost, a tri imaginarna vektorsku komponentu. Velika prednost u korištenju kvaterniona u odnosu na Eulerove kutove je ta da rotacijom korištenjem kvaterniona ne možemo izazvati blokadu kardanskog mehanizma i tako izgubiti os rotacije.

U ovom radu detaljno će se analizirati i opisati obje metode rotacije te radi lakšeg razumjevanja samih metoda uz rad je izrađena i mini aplikacija koja služi vizualizaciji rotacije objekta u 3D svijetu. U aplikaciji je omogućena rotacija koristeći obje iznad navedene metode preko klizača koji određuju kut zakrenutosti oko određene osi. Manipulacijom kuta zakrenutosti oko osi moguće je izazvat blokadu kardanskog mehanizma u dijelu aplikacije koja koristi Eulerove rotacije i time pokazati gubitak jednog stupnja slobode.

1. Eulerovi kutovi

1.1. Definicija i svojstva

Eulerovi kutovi su tri kuta koje je uveo Leonhard Euler kako bi opisao orijentaciju krutog tijela u odnosu na fiksni koordinatni sustav. Klasični Eulerovi kutovi obično uzimaju kut nagiba na takav način da nula stupnjeva predstavlja okomitu orijentaciju. Kasnije su Peter Guthrie Tait i George H. Bryan predstavili alternativne oblike namijenjene uporabi u aeronautici i inženjerstvu u kojima nula stupnjeva predstavlja vodoravni položaj.

Eulerovi kutovi mogu se definirati elementarnom geometrijom ili kompozicijom rotacija. Geometrijska definicija pokazuje da su tri ulančane elementarne rotacije (rotacije oko osi koordinatnog sustava) uvijek dovoljne da se postigne bilo koja ciljna rotacija. Tri elementarne rotacije mogu biti ekstrinzične (rotacije oko osi xyz izvornog koordinatnog sustava, za koje se pretpostavlja da ostaju nepomične), ili intrinzične (rotacije oko osi rotirajućeg koordinatnog sustava XYZ , osi se okreću skupa s tijelom koje se kreće, koje mijenja svoju orijentaciju u odnosu na ekstrinzični okvir nakon svake elementarne rotacije). Eulerovi kutovi obično se označavaju kao α , β , γ ili ψ , θ , φ .

Bez razmatranja mogućnosti korištenja dviju različitih konvencija za definiranje rotacijskih osi (intrinzičnih ili ekstrinzičnih), postoji dvanaest mogućih nizova rotacijskih osi, podijeljenih u dvije skupine:

- Pravi Eulerovi kutovi ($z-x-z$, $x-y-x$, $y-z-y$, $z-y-z$, $x-z-x$, $y-x-y$)
- Tait–Bryanovi kutovi ($x-y-z$, $y-z-x$, $z-x-y$, $x-z-y$, $z-y-x$, $y-x-z$).

Tait–Bryanovi kutovi također se nazivaju i Cardanovi kutovi ili nautički kutovi. Mogu označavati smjer, visinu i nagib nekog sustava ili količinu zakretanja, nagiba i kotrljanja (eng. yaw, pitch, roll) nekog sustava.

Prilikom izvođenja elementarnih rotacija oko svake od tri osi bitan je redoslijed kojim se rotacije izvode. To jest, izvođenje elementarnih rotacija oko osi u redoslijedu z , zatim y , zatim x proizvest će različite rezultate od izvođenja istih rotacija u bilo kojem od ostalih pet mogućih redoslijeda.

1.2. 3D rotacije

Na inicijalnoj poziciji objekta kojeg želimo rotirati, nalazi se njegov vlastiti koordinatni sustav, na početku prije same rotacije taj koordinatni sustav je poravnat sa koordinatnim sustavom svijeta. Ako želimo rotirati objekt, izvodimo tri elementarne rotacije na sljedeći način:

- Rotacija oko x osi prema kutu zakretanja (u):

$$x_1 = x_0$$

$$y_1 = y_0 \cos(u) - z_0 \sin(u)$$

$$z_1 = y_0 \sin(u) + z_0 \cos(u)$$

- Rotacija oko y osi po kutu nagiba (v):

$$x_2 = x_1 \cos(v) + z_1 \sin(v)$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = -x_1 \sin(v) + z_1 \cos(v)$$

- Rotacija oko osi z za kut skretanja (w):

$$x_3 = x_2 \cos(w) - y_2 \sin(w)$$

$$y_3 = x_2 \sin(w) + y_2 \cos(w)$$

$$z_3 = z_2$$

Gdje su:

(x_0, y_0, z_0) koordinate izvorne, nerotirane točke

(x_1, y_1, z_1) koordinate točke nakon prve elementarne rotacije

(x_2, y_2, z_2) koordinate točke nakon druge elementarne rotacije

(x_3, y_3, z_3) koordinate točke nakon što su sve tri rotacije dovršene

Da bi se rotacija obrnula, to jest rotirana točka vratila na inicijalnu poziciju, treba se obrnuti redoslijed izvršenih rotacija i promijeniti predznak triju kutova rotacije. Dakle, ako je rotacija unaprijed bila $\text{roll}(u)$, $\text{pitch}(v)$, $\text{yaw}(w)$, onda je inverzna rotacija $\text{yaw}(-w)$, $\text{pitch}(-v)$, $\text{roll}(-u)$.

1.3. Interpolacija između rotacija

Za neke primjene može biti potrebno ili interpolirati između orijentacija ili izračunati prosječnu od svih rotacija.

Interpolacija je potrebna ako, na primjer, želimo glatko rotirati 3D objekt između dvije poznate orijentacije i moramo generirati rotacije za sve međukorake.

Određivanje prosječne rotacije može biti potrebno kada se radi o fizičkim instrumentima kao što su npr. inercijske mjerne jedinice (IMU). Na primjer, kod implementacije aplikacije virtualne stvarnosti u pametni telefon kad se treba odrediti u kojem smjeru telefon pokazuje. Telefon će imati nekoliko senzora kao što su akcelerometri i žiroskopi koji daju informacije o orijentaciji u stvarnom vremenu. Senzori će obaviti desetke ili stotine mjerenja u sekundi - mnogo brže nego što to zahtijeva aplikacija. Međutim, može se desiti da je svako pojedinačno mjerenje u sebi ima šum, što uzrokuje poskakivanje slike u aplikaciji. Rješenje je izjednačiti podatke koristeći prosječnu od svih informacija o orijentaciji.

Nije moguće izračunati niti prosječne vrijednosti rotacija niti interpolirati pomoću prikaza preko Eulerovih kutova. Zbog blokade kardanskog mehanizma u prikazu preko Eulerovih kutova, u nekim dijelovima prostora rotacije mogu se desiti „skokovi“ objekta u 3D prostoru. Pokušati izračunati prosječnu rotaciju ili interpolirati preko ili blizu tih kritičnih dijelova prostora dati će nepouzdanе i neočekivane rezultate.

Moguće je interpolirati između orijentacija pomoću rotacijskih matrica. Rotacijske matrice su još jedan način za prikazivanje i opisivanje rotacija u 3D prostoru. Algoritam se naziva „Sferna linearna interpolacija“ (SLERP) [7]. Također je moguće izračunati i prosjek skupa rotacijskih matrica, ali u ovom radu neće se pisati o metodama korištenjem rotacijskih matrica.

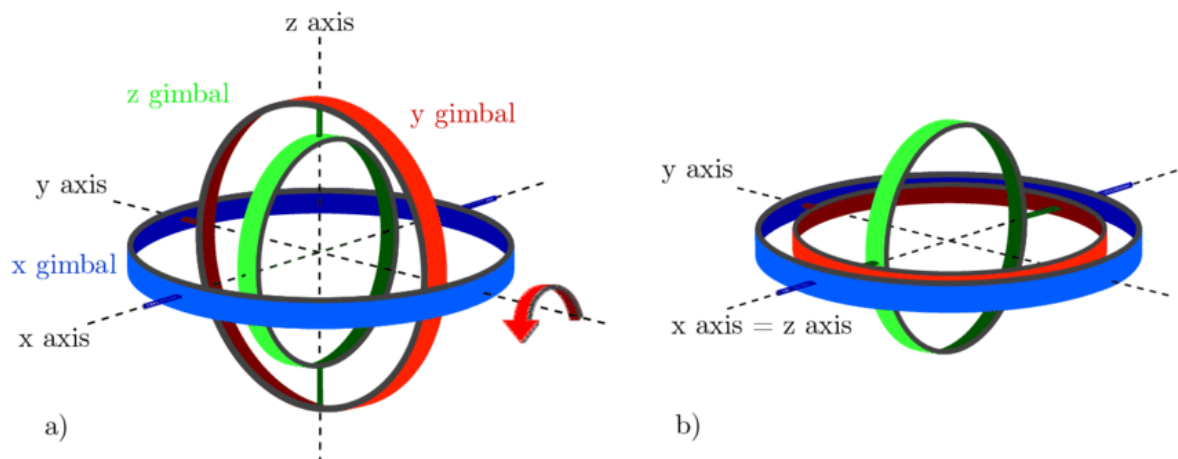
Iako je moguće izračunati prosjek rotacija i interpolirati, nije preporučljivo koristiti iznad navedene metode. Ako se treba odrediti prosječna rotacija ili ako se treba interpolirati, koristit će se kvaternioni [4], [5].

1.4. Gimbal lock

Blokada kardanskog mehanizma je gubitak jednog stupnja slobode u višedimenzionalnom mehanizmu pri određenim poravnanjima osi. U trodimenzionalnom mehanizmu s tri prstena, blokada kardanskog mehanizma se događa kada se osi dva prstena usmjere u paralelnu konfiguraciju, "zaključavajući" sustav u rotaciji u degeneriranom dvodimenzionalnom prostoru kao na slici Slika 1. U pravom svijetu kardanski mehanizam se sastoji od tri međusobno povezana prstena, gdje se svaki prsten može okretati svih 360 stupnjeva. Kardanski mehanizam je izgrađen na način da su prsteni međusobno povezani i to tako da su jedan unutar drugoga odnosno dimenzije su im različite. U središtu kardanskog mehanizma odnosno usred sva tri prstena nalazi se objekt koji je fizički spojen na unutarnji odnosno najmanji prsten, važno je napomenuti da objekt u središtu nije direktno fizički povezan sa ostalim prstenima. To znači da rotacijom unutarnjeg najmanjeg prstena direktno rotiramo i objekt, rotacijom srednjeg prstena ne rotiramo objekt direktno već rotiramo unutarnji najmanji prsten na koji je spojen objekt i tako indirektno vršimo rotaciju objekta. Rotacijom vanjskog najvećeg prstena situacija je ista, rotacija vanjskog prstena sa sobom rotira srednji prsten koji zatim rotira najmanji prsten na kojeg je spojen objekt.

Na računalu se kardanski mehanizam može izgraditi tako da određene osi rotacije postavimo u hijerarhiju. Objektu rotacije postavimo njegov vlastiti koordinatni sustav koji se razlikuje od koordinatnog sustava svijeta. Odaberemo jednu hijerarhiju, npr. hijerarhija x-y-z, što bi bio ekvivalent pravog svijeta gdje bi „x“ bio najveći prsten dok bi „z“ bio najmanji prsten na koji je direktno spojen objekt. Hijerarhija predstavlja odnos roditelj-dijete između osi rotacije vlastitog koordinatnog sustava objekta. Rotacija oko neke osi za s stupnjeva, uz rotaciju objekta oko te osi, rezultira i rotacijom svih osi kojima je inicijalna os „roditelj“ to jest svih osi koje su u hijerarhiji ispod inicijalne ose oko koje se obavlja rotacija.

Problem se javlja ako objekt rotira 90 stupnjeva oko osi koja je srednja u hijerarhiju, u ovom slučaju srednja os u hijerarhiji će biti os y. Rezultat rotacije za 90 stupnjeva oko osi y biti će poravnavanje roditeljske osi, osi x i osi djetete, osi z u istu ravninu. U tom trenutku ako pokušamo rotirati oko x osi i ako pokušamo rotirati oko z osi, dobiti će se ista rotacija odnosno jedan stupanj slobode za rotaciju se izgubio. Moguće je rotirati objekt u bilo koju drugu poziciju, ali morati će se rotirati sve tri osi da bi se postigla željena rotacija. Ako smo se našli u poziciji blokade kardanskog mehanizma i želimo otići u drugu poziciju, kako je rečeno prije, moguće je, ali zahtjeva rotaciju oko svih triju osi. Odaberimo sad jednu zamišljenu točku na objektu koja će tokom rotacije iscrtavati svoju putanju i izvršimo kompozitnu rotaciju iz sadašnje pozicije u željenu poziciju. Objekt se sada nalazi u toj željenoj poziciji, ali ako pogledamo iscrtanu putanju točke na objektu vidjet ćemo da putanja nije ravna linija (dio kružnice) već zakrenuta krivulja. I upravo ta zakrenuta krivulja je problem u računalnoj grafici, jer ta iscrtana putanja predstavlja rotaciju objekta kroz vrijeme i kroz frame-ove na ekranu, rezultat je neprirodna i neočekivana animacija i kretanje objekta na ekranu.

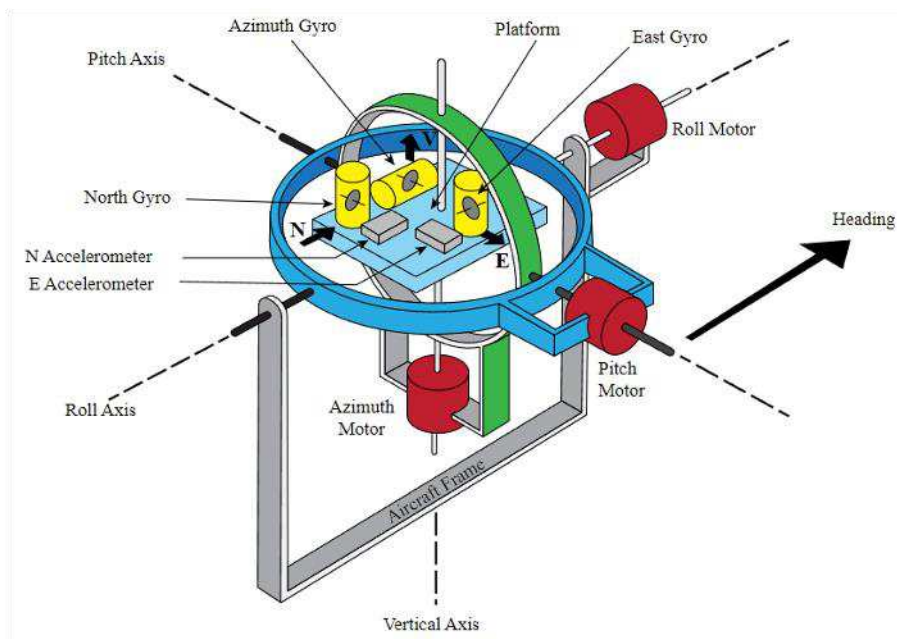


Slika 1, Prikaz blokade kardanskog mehanizma [9]

1.5. Kako INS prati položaj letjelice

INS ili inercijski navigacijski sustav u letjelicama ima važan cilj utvrđivanja položaja letjelice u kojoj se nalazi. Računajući lokaciju letjelice, inercijski navigacijski sustavi mogu biti korišteni za navigiranje same letjelice po predodređenoj ruti, ali također mogu biti korišteni za navigaciju raketa do mete. INS radi nezavisno od vanjskog svijeta, što

znači da se ne oslanja na stvari poput satelita i radio signala. To ga čini jedinstvenim zato što inače letjelice koriste različite vrste povezivanja sa zemaljskim stanicama kako bi im pomogle odrediti njihovu lokaciju. Jedan primjer INS-a bila bi platforma spojena na sustav od tri prstena, gdje je jedina direktna veza platforme sa unutarnjim prstenom, a vanjski prsten je spojen na letjelicu kako je prikazano na slici Slika 2. Platforma uvijek zadržava istu orijentaciju relativnu horizontu. INS ima pet glavnih instrumenata, tri akcelerometra i dva žiroskopa. Tri akcelerometra mjere kako se brzina mijenja obzirom na vrijeme. Analogni primjer bi bio čovjek u automobilu, ako automobil krene iz mirovanja prema naprijed, čovjek će osjetiti kako ga sila gura u sjedalo. Ako automobil skreće lijevo, čovjek će osjetiti kako ga sila gura desno. Na isti način rade akcelerometri, u svakom trenutku znaju koliko je ubrzanje, po kojoj osi i tako mogu odrediti smjer kretanja. Problem se javlja kod naginjanja i rolanja, ekvivalent bi bio čovjek u parkiranoj autom na brijegu, čovjek bi osjetio da ga sila gura prema iza u sjedalo, ali da ima zatvorene oči, ne bi znao kreće li se unaprijed ili samo stoji na brijegu. Zbog tog je bitno da je platforma uvijek ravna, kako bi se eliminirao problem kod mjerenja akceleracije pri naginjanju i rolanju. Još jedan problem javlja se zbog zakrivljenosti Zemlje, platforma je levelirana na jednom mjestu, ali letenjem aviona od tog mjesta, ravnina tla se mijenja zbog zakrivljenosti i platforma više nije levelirana sa tlom ispod letjelice. Da bi se kompenzirale neželjene rotacije koriste se akcelerometri kako bi nam dali poziciju i brzinu u pravom vremenu, to dopušta da se kontinuirano ispravljaju žiroskopi kako bi pratili rotaciju Zemlje i držali platformu ravnom u odnosu na horizont cijelo vrijeme.



Slika 2, Shematski prikaz INS-a [10]

1.6. Problem sa žiroskopom u misiji Apollo

Do blokade kardanskog mehanizma dolazi kada se dva prstena poravnaju, zbog čega sustav gubi sposobnost preciznog praćenja orijentacije. U sustavu s tri prstena, svaki prsten je odgovoran za mjerenje rotacije oko jedne od tri ortogonalne osi (x, y, z). Kada se dva prstena poravnaju, sustav gubi mogućnost mjerenja rotacije oko jedne od tih osi, što dovodi do netočnih podataka o orijentaciji. Ovo je pitanje posebno problematično u kontekstu navigacije svemirskih letjelica, gdje su precizne informacije o orijentaciji presudne za održavanje ispravne putanje.

Inertial Measurement Unit (IMU) je uređaj koji mjeri i izvještava o linearnoj akceleraciji, kutnoj brzini i orijentaciji svemirske letjelice. Kombinira podatke iz akcelerometara i žiroskopa kako bi pružio ključne informacije za navigaciju letjelice. Misija Apollo 11, kao i druge misije Apollo, oslanjala se na IMU za održavanje točnih podataka o orijentaciji tijekom leta.

U središtu sustava za navigaciju letjelice nalazila se IMU. IMU je sfera veličine nogometne lopte u koju su postavljena tri ugnježdjena prstena koja su činila kardanski mehanizam. U središtu je bila platforma postavljena i spojena na unutrašnji prsten kardanskog mehanizma. Vanjski prsten bio je spojen na navigacijsku bazu koja je spojena

fiksno za samu letjelicu. Svaki put kad bi se letjelica pomakla, IMU bi detektirala promjenu položaja i dala uputu motorima da okrenu prstene kardanskog mehanizma kako bi se platforma vratila u prvotni položaj. Kako se letjelica kretala i pomicala, platforma je bila stabilna i mirna. Platforma je bila kalibrirana i levelirana na Zemlji prije samog polijetanja. Apollo navigacijsko računalo bilo je dizajnirano da spriječi blokadu kardanskog mehanizma tako što bi posadi dalo upozorenje kad bi se približili položaju poravnavanja dva prstena, međutim i dalje je bilo moguće doći u poziciju blokade kardanskog mehanizma. To se konkretno dogodilo na misiji Apollo 13 kad se letjelica naglo i nekontrolirano nagnjalo i skretalo zbog eksplozije spremnika sa kisikom. Najjednostavnije rješenje blokade kardanskog mehanizma bilo bi dodavanje četvrtog vanjskog prstena u IMU. Astronaut Mike Collins je na misiji Apollo 11 orbitirao oko Mjeseca u komandnom modulu i pokušavao naći mjesečev modul Eagle na površini, ali svaki put kad bi došao blizu pozicije blokade kardanskog mehanizma morao se zaustaviti, u šali je zbog toga rekao da za Božić želi četvrti prsten u kardanskom mehanizmu.

2. Kvaternioni

2.1. Definicija

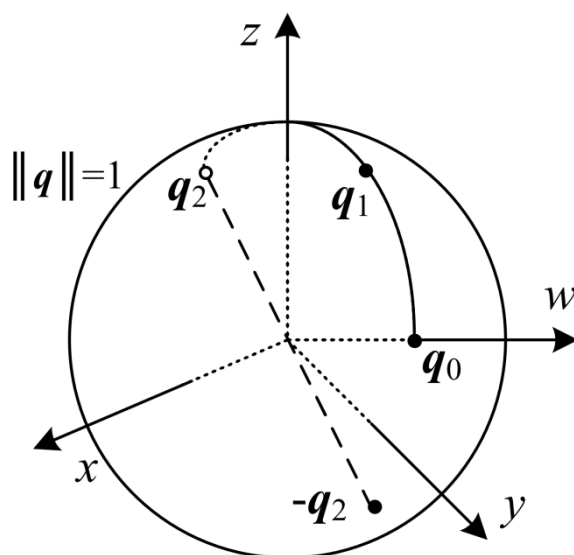
Kvaternion je četverodimenzionalan broj i opisuju ga četiri elementa:

$$q = q_0 + iq_1 + jq_2 + kq_3 \quad (1)$$

gdje su q_0, q_1, q_2 i q_3 realni brojevi, a i, j i k su međusobno ortogonalni imaginarni jedinični vektori. Koeficijent q_0 označava realni dio, a ostala tri koeficijenta označavaju imaginarni dio kvaterniona. U praksi, imaginarna notacija se podrazumijeva, a samo se četiri koeficijenta koriste za određivanje kvaterniona:

$$q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \quad (2)$$

Rotacijski kvaternioni su mehanizam za predstavljanje rotacija u tri dimenzije i mogu se koristiti kao alternativa rotacijskim matricama u računalnoj grafici kako je navedeno u [1] i [2].



Slika 3, Prikaz kvaterniona q_0, q_1, q_2 i $-q_2$ na 3D sferi [11]

2.2. Svojstva

- Duljina kvaterniona je $|q| = \sqrt{(q * q^*)} = \sqrt{(q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)}$
- Kvaternion je jedinični kvaternion ako je $|q| = 1$
- Svi rotacijski kvaternioni moraju biti jedinični kvaternioni
- Kvaternion $q = (1, 0, 0, 0)$ je identifikacijski kvaternion. On ne predstavlja nikakvu rotaciju. Ako je q proizvoljan kvaternion, a i identifikacijski kvaternion onda vrijedi: $qi = iq = q$.
- Konjugacija kvaterniona je $q^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$
- Inverz kvaterniona je $q^{-1} = \frac{q^*}{|q|^2}$. Umnožak kvaterniona i njegovog inverza je identifikacijski kvaternion: $qq^{-1} = q^{-1}q = (1, 0, 0, 0)$
- Za rotacijske kvaternione, inverz je jednak konjugaciji. Dakle, za rotacijske kvaternione vrijedi: $q^{-1} = q^* = (q_0, -q_1, -q_2, -q_3)$.
- Invertiranje ili konjugiranje rotacijskog kvaterniona rezultira okretanjem osi rotacije, što ga modificira tako da se okreće u suprotnom smjeru od inicijalnog. To jest, ako se točka rotira na novu poziciju pomoću q , tada će se rotiranjem pomoću q^{-1} ili q^* vratiti na prvotnu poziciju.
- Svaka rotacija ima dvije moguće reprezentacije (dva kvaterniona). Ako je jedan kvaternion poznat, drugi se može izračunati uzimanjem negativne vrijednosti sva četiri koeficijenta. To rezultira preokretanjem i kuta rotacije i osi rotacije. Dakle, ako je q rotacijski kvaternion, tada će i q^{-1} proizvesti istu rotaciju.
- Rotacija q_a nakon koje slijedi rotacija q_b može se kombinirati u jednu rotaciju $q_c = q_b q_a$. Kombinacija se može proširiti na proizvoljan broj rotacija. Važno je napomenuti da je redoslijed bitan.
- Množenje kvaterniona je asocijativno: $(ab)c = a(bc)$
- Množenje kvaterniona nije komutativno: $ab \neq ba$ [6]

2.3. Kvaternioni i 3D rotacije

Za rotiranje pomoću kvaterniona prvo je potrebno definirati umnožak kvaterniona:

$$t = rs \quad (3)$$

$$(t_0, t_1, t_2, t_3) = (r_0, r_1, r_2, r_3) \times (s_0, s_1, s_2, s_3) \quad (4)$$

Gdje su koeficijenti novog kvaterniona definirani kao:

$$t_0 = (r_0s_0 - r_1s_1 - r_2s_2 - r_3s_3) \quad (5)$$

$$t_1 = (r_0s_1 + r_1s_0 - r_2s_3 + r_3s_2) \quad (6)$$

$$t_2 = (r_0s_2 + r_1s_3 + r_2s_0 - r_3s_1) \quad (7)$$

$$t_3 = (r_0s_3 - r_1s_2 + r_2s_1 + r_3s_0) \quad (8)$$

Ako želimo rotirati točku (x, y, z) kvaternionom q prvo moramo točku pretvoriti u kvaternion, to se napravi na način da koordinate točke prepisemo na mjesta koeficijenata koji stoje uz imaginarne dijelove, a realni dio postavimo na nulu. Točka (x, y, z) pretvorena u kvaternion bi izgledala ovako:

$$p = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (0, x, y, z) \quad (9)$$

Rotacija pomoću kvaterniona zahtjeva dva množenja.

Za aktivne rotacije: $p' = q^{-1} p q$

Za pasivne rotacije: $p' = q p q^{-1}$

U kojima je:

p kvaternion koji sadržava koordinate točke koju rotiramo

q kvaternion rotacije

q^{-1} inverz od q

p' kvaternion koji sadrži koordinate novo rotirane točke

Aktivna rotacija je kada se točka rotira u odnosu na koordinatni sustav, a pasivna rotacija je kada se koordinatni sustav zakrene u odnosu na točku. Te dvije rotacije su suprotne jedna od druge.

Na kraju se još trebaju izvući koordinate točke iz novog kvaterniona p' :

$$p' = (0, x', y', z')$$

Rotirani kvaternion p' će imati četiri koeficijenta kao i svaki drugi kvaternion. Međutim, realni dio će uvijek biti jednak nuli. Dakle, 3D koordinate novo rotirane točke (x', y', z') su stoga koeficijenti uz imaginarne dijelove kvaterniona.

Još jedan način gledanja je preko sfere. Zamislimo jediničnu sferu u 3D koordinatnom sustavu, gdje se središte sfere nalazi u ishodištu koordinatnog sustava sa koordinatama $(0, 0, 0)$. Odabiru se dvije točke na površini sfere, npr. T_1 i T_2 . Točke možemo opisati kao vektore kojima je početak u središtu sfere (ishodište koordinatnog sustava), a kraj u samoj točki, time točke postaju vektori $\vec{T_1}$ i $\vec{T_2}$. Cilj je opisati i označiti rotaciju vektora $\vec{T_1}$ na poziciju vektora $\vec{T_2}$. Ako zamislimo najkraću udaljenost između vrhova vektora $\vec{T_1}$ i $\vec{T_2}$, dobit ćemo krivulju na površini sfere. Duljinu krivulje (kružnog luka) povećavamo sve dok se krivulja ne zatvori te postane kružnica na površini sfere. Odredimo pripadni kut w izvornog kružnog luka, taj kut je ujedno i kut rotacije između vektora $\vec{T_1}$ i $\vec{T_2}$. Kut w leži u ravnini koju čini kružnica i vektori $\vec{T_1}$ i $\vec{T_2}$. Sada povlačimo vektor \vec{v} iz središta koordinatnog sustava koji je okomit na iznad spomenutu ravninu, a samim time i vektore $\vec{T_1}$ i $\vec{T_2}$. Vrh tog vektora također dira površinu sfere te mu je vrh točka na samoj površini. Ako se vratimo na početak, vidimo da je cilj bio opisati rotaciju vektora $\vec{T_1}$ na poziciju vektora $\vec{T_2}$, sad se vidi da je to isto kao i rotacija vektora $\vec{T_1}$ za kut w , oko osi

rotacije što je u ovom slučaju vektor \vec{v} .

Kvaternion je definiran kao skalar + vektor i upravo time možemo opisati iznad opisanu rotaciju. Konstruiramo kvaternion:

$$Q = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right) + \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\vec{v}$$

Četiri koeficijenta (q_0, q_1, q_2, q_3) lako se dobivaju koristeći [8]:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

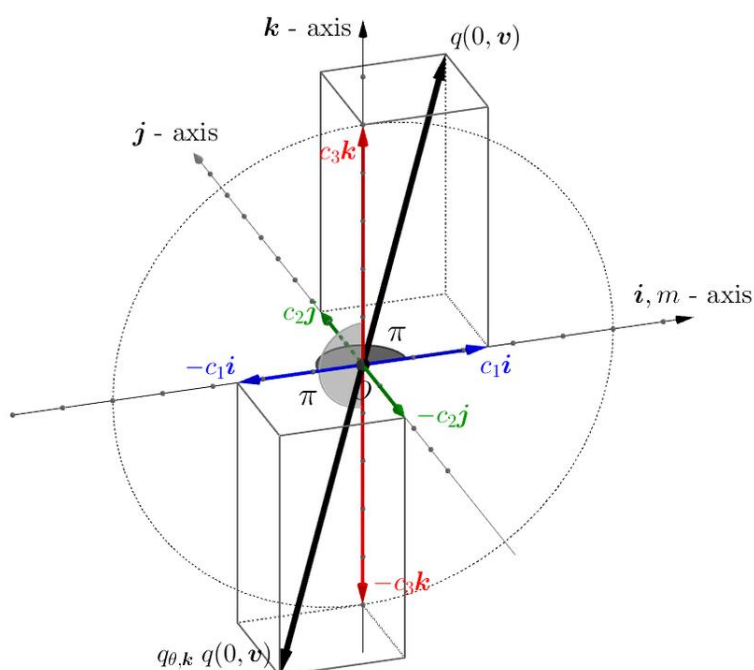
$$q_1 = \hat{x}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$q_2 = \hat{y}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$q_3 = \hat{z}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

Dobiveni kvaternion sada se koristi na način da množimo početni vektor $\vec{T1}$ s obje strane kvaternionom Q i njegovim inverzom kvaternionom Q^{-1} , dobiveni rezultat naziva se Hamiltonov produkt i ekvivalentan je u ovom konkretnom slučaju vektoru $\vec{T2}$.

$$\vec{T2} = Q \vec{T1} Q^{-1}$$



Slika 4, Množenje jediničnog kvaterniona i uzrokovanje rotacije [12]

2.4. Prednosti korištenja nad Eulerovim kutovima

Jedna od glavnih prednosti korištenja kvaterniona je u tome što omogućuju prikaz „glatkih“ rotacija u računalnoj grafici. Kvaternioni jako dobro rade sa interpolacijom rotacija što rezultira preciznijom animacijom objekta.

Rotacije objekta koristeći kvaternione otporne su na blokadu kardanskog mehanizma, upravo zbog četiri komponente. Objašnjeno u [3].

2.5. Veza između kvaterniona i Eulerovih kutova

Moguće je mijenjati prikaze rotacije iz jednog sustava u drugi, pretvorba iz Eulerovih kutova u kvaternion se obavlja na slijedeći način:

$$q_0 = \cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{v}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$q_1 = \sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) - \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{v}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$q_2 = \cos\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{v}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right) + \sin\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right)$$

$$q_3 = \cos\left(\frac{u}{2}\right)\cos\left(\frac{v}{2}\right)\sin\left(\frac{w}{2}\right) - \sin\left(\frac{u}{2}\right)\sin\left(\frac{v}{2}\right)\cos\left(\frac{w}{2}\right)$$

Gdje je:

u = kut rolanja (roll)

v = kut nagiba (pitch)

w = kut zakretanja (yaw)

Kutovi moraju biti u radianima.

Pretvorba iz kvaterniona u Eulerove kutove:

$$u = \tan^{-1}\left(\frac{2(q_0q_1+q_2q_3)}{q_0^2-q_1^2-q_2^2+q_3^2}\right) = \text{atan2}[2(q_0q_1 + q_2q_3), q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2]$$

$$v = \sin^{-1}(2(q_0q_2 - q_1q_3)) = \text{asin}(2(q_0q_2 - q_1q_3))$$

$$w = \tan^{-1}\left(\frac{2(q_0q_3+q_1q_2)}{q_0^2+q_1^2-q_2^2-q_3^2}\right) = \text{atan2}[2(q_0q_3 + q_1q_2), q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2]$$

Poseban slučaj sa blokadom kardanskog mehanizma:

U posebnom slučaju kad je kut nagiba (pitch) $+90^\circ$ ili -90° svi argumenti u jednadžbama za u i w će biti nula, za što je funkcija atan2 nedefinirana.

Upravo taj slučaj se naziva blokada kardanskog mehanizma. To se događa jer su pri kutu nagiba $+90^\circ$ i -90° , osi rotacije zakretanja i rolanja međusobno poravnate u vanjskom koordinatnom sustavu i zato proizvode istu rotaciju. To znači da ne postoji jedinstveno rješenje, bilo koja orijentacija može se opisati korištenjem beskonačnog broja kombinacija kutova u , v i w .

Da bismo riješili blokadu kardanskog mehanizma, prvo se pretvara kut nagiba v . Ako se utvrdi da je kut nagiba v jednak $+\frac{\pi}{2}$ ili $-\frac{\pi}{2}$, tada se postavlja ili kut rolanja u ili kut zakretanja w na 0 te se rješavanjem jednadžbi dobiva:

$$u = 0$$

$$w = -2\text{atan2}(q_1, q_0), \text{ za } v = +\frac{\pi}{2}$$

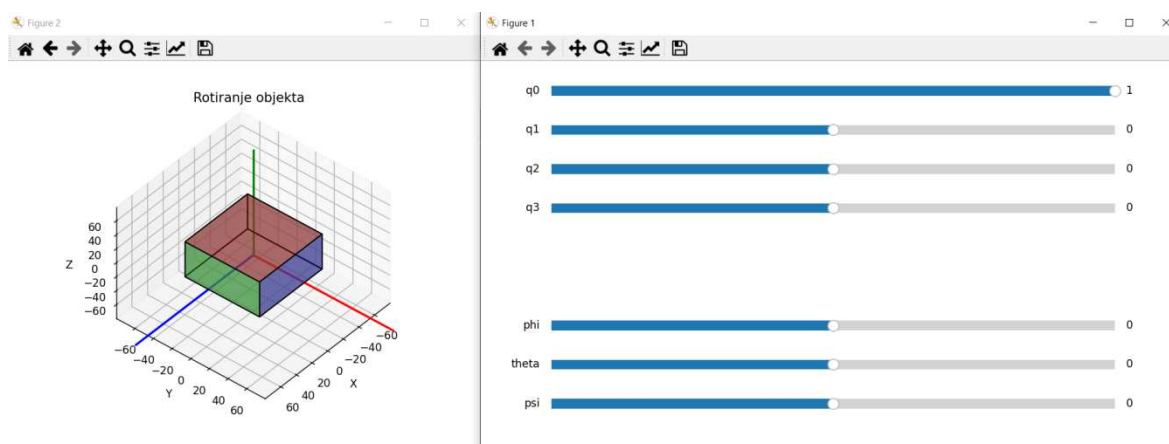
$$u = 0$$

$$w = 2\text{atan2}(q_1, q_0), \text{ za } v = -\frac{\pi}{2}$$

3. Aplikacija

3.1. Opis

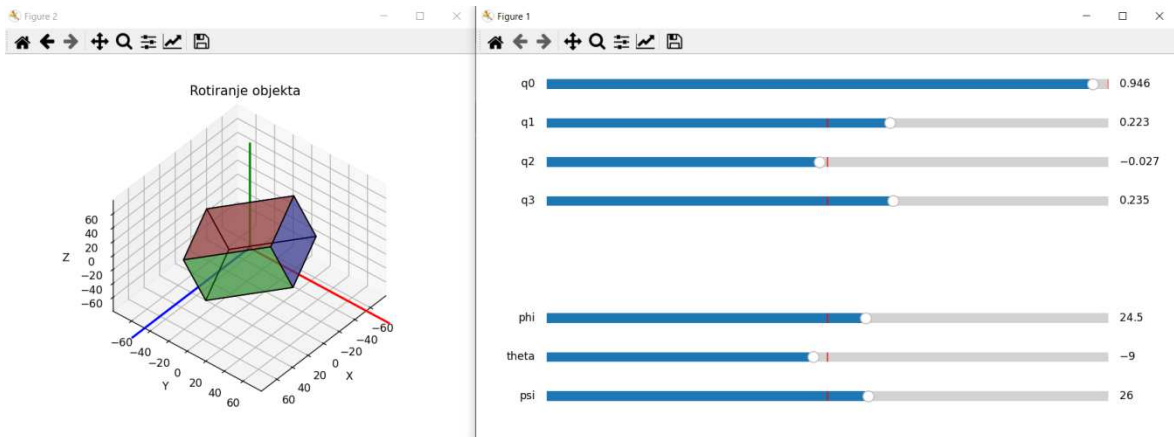
Cilj izrade aplikacije bio je vizualizirati rotaciju objekta koristeći metodu Eulerovih kutova i rotaciju pomoću kvaterniona. Pri pokretanju aplikacije, otvaraju se dva prozora, jedan u kojemu je prikazan 3D objekt i jedan kontrolni gdje se upravlja rotacijom objekta. U samom kontrolnom prozoru moguće je određivati Eulerove kutove odnosno roll, pitch i yaw komponentu objekta, također moguće je određivati sve komponente kvaterniona. Promjenom jednog od parametara, automatski mijenjamo i sve druge parametre te su pripadne rotacije objekta prikazane u prozorima.



Slika 5, Aplikacija incijalni prikaz

3.2. Prikaz objekta

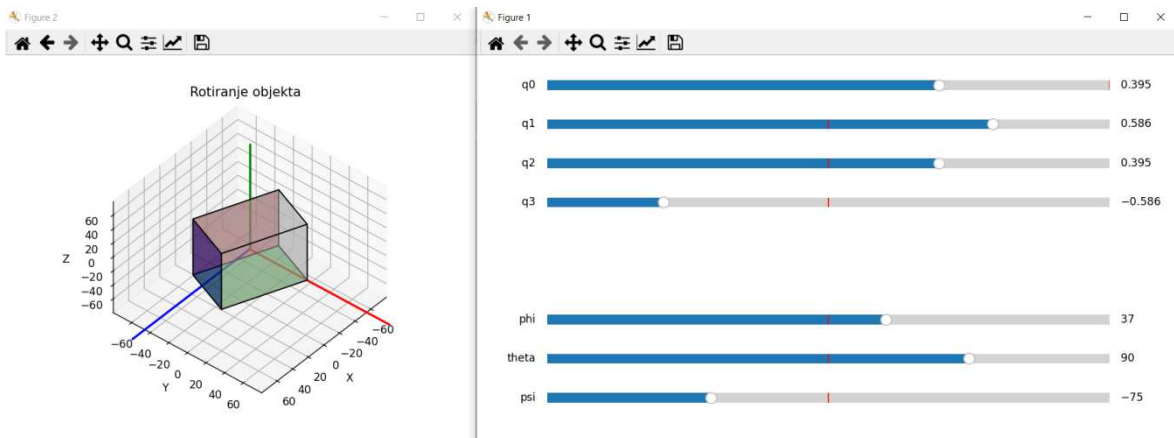
Prikaz objekta u 3D prostoru napravljen je uz Python biblioteku Matplotlib. Na početku se konstruktoru predaju željene dimenzije objekta i željene duljine koordinatnih osi. Pri inicijalizaciji objekta kreiraju se Numpy nizovi, gdje svaki niz sadrži tri elementa koji predstavljaju koordinate u 3D prostoru izračunate na temelju inicijalno zadanih željenih dimenzija objekta. Svaki niz predstavlja jedan vrh (jednu točku). Prije prikaza kreiraju se nizovi kojima su elementi određeni vrhovi, vrhovi se biraju na način da se uzimaju vrhovi koji tvore stranicu objekta, npr. gornja stranica će sadržavati vrhove 1, 2, 3 i 4.



Slika 6, Rotiranje objekta i promjena vrijednosti u pravom vremenu

3.3. Ažuriranje prikaza

Kako su nam jedine točke u objektu vrhovi preko kojih onda radimo prikaz stranica, u stvari svakom rotacijom se radi rotacija, to jest promjena koordinata osam točaka koje predstavljaju vrhove objekta. Da bi promjenili koordinate neke točke koristi se funkcija modula Numpy, „numpy.put()“, koja u ciljnom nizu radi zamjenu elemenata na željenim indeksima sa željenim vrijednostima. Nakon izmjena koordinata točaka ponovo se kreiraju stranice (lica) objekta uzeći u obzir nove (rotirane) koordinate točaka.



Slika 7, Demonstracija blokade kardanskog mehanizma

Zaključak

Na kraju može se zaključiti da su kvaternioni efikasniji prikaz rotacija u računalnoj grafici u odnosu na Eulerove kutove. Kvaternioni su kompaktniji za računanje te traže manje procesorske snage za rad. Zbog četiri komponente ne podliježu problemu blokade kardanskog mehanizma što je još jedna velika prednost koja čini njihovu primjenu u računalnoj i 3D animaciji puno praktičnijom. Konkretno kod 3D animacije, na početku kadra se postavi željena rotacija dok se u zadnjem frame-u postavi ciljna rotacija i položaj objekta. Računalo će samo napraviti interpolaciju, ovisno kojom metodom je interpolacija napravljena, rezultati će varirati. Ako su se za interpolaciju koristili Eulerovi kutovi, može se dobiti animaciju koja je neočekivana i kadrovi ne prate zamišljeni „put rotacije“, dok korištenjem kvaterniona interpolacija će biti očekivana i proizvesti će „glatku“ i „prirodnu“ animaciju.

Pristup preko Eulerovih kutova lakši je i intuitivniji za raumijevanje, ali kvaternioni pružaju preciznije i stabilnije rezultate. Rotacija korištenjem Eulerovih kutova trebala bi se koristiti za jednostavnije animacije gdje se očekuje rotacija oko samo jedne ili dvije osi, dok bi za ostale stvari trebalo koristiti kvaternione.

Literatura

1. Vince J. *Quaternions for Computer Graphics*. 2. izdanje. Springer, 2021.
2. Wikipedia, Quaternion, Wikipedia, (2024, lipanj). Poveznica: <https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion>
3. Mateen Ulhaq, Why are quaternions used for rotations, Stack Overflow, (2018, lipanj). Poveznica: <https://stackoverflow.com/questions/8919086/why-are-quaternions-used-for-rotations>
4. Tibor Stanko, Lerp vs Slerp, tiborstanko.sk, (2018, svibanj). Poveznica: <https://tiborstanko.sk/lerp-vs-slerp.html>
5. Generated from documentation, Spherical Linear Interpolation (Slerp), Splines, (2024, ožujak). Poveznica: <https://splines.readthedocs.io/en/latest/rotation/slerp.html>
6. Toby Norris, Quaternion Background, tobynorris.com, (2022, svibanj). Poveznica: https://www.tobynorris.com/work/prog/csharp/quatview/help/orientations_and_quaternions.htm
7. Wikipedia, Slerp, Wikipedia, (2023, studeni). Poveznica: <https://en.wikipedia.org/wiki/Slerp>
8. SvJohn, Concise description of why rotation quaternions use half the angle, math.stackexchange.com, (2019, srpanj). Poveznica: <https://math.stackexchange.com/questions/1385028/concise-description-of-why-rotation-quaternions-use-half-the-angle>
9. Julian Zeitlhofer, Illustrates-the-principle-of-gimbal-lock, researchgate.net, (2024, veljača). Poveznica: <https://www.researchgate.net/profile/Julian-Zeitlhofer/publication/338835648/figure/fig4/AS:865379593252879@1583333981731/illustrates-the-principle-of-gimbal-lock-The-outer-blue-frame-represents-the-x-axis-the.png>
10. Dextermag.com, Accelerometer1, dextermag.com, (2022, siječanj). Poveznica: <https://www.dextermag.com/wp-content/uploads/2022/01/accelerometer1.png>

11. Lei Mao, Quaternion Rotation Representation, leimao.github, (2022, travanj).
Poveznica: <https://leimao.github.io/images/blog/2022-04-20-3D-Rotation-Unit-Quaternion/quaternion.png>
12. Jongchan Baek, Visualizing Quaternion Multiplication, researchgate.net, (2017, svibanj).
Poveznica: <https://www.researchgate.net/publication/317032337/figure/fig4/AS:497274124226560@1495570798828/Left-hand-side-multiplication-of-a-unit-quaternion-q-th-k-to-a-pure-quaternion-q0-v.png>

Sažetak

U radu se opisuju dvije metode prezentiranja rotacija u 3D svijetu, jedna metoda je opis rotacija preko Eulerovih kutova dok je druga metoda, opisivanje rotacija koristeći kvaternione. Detaljno se opisuju obe metode, također opisana su svojstva svake od metoda. Prikazani su i načini kako iz jednog sustava prijeći u drugi (jedna metoda opisa u drugu). Razmatranje razlika tih dviju metoda te usporedba jedne u odnosu na drugu. Opis kako se jedna, a kako druga metoda može koristiti za interpolaciju. Za potpunije razumijevanje izgrađena je aplikacija gdje korisnik može rotirati objekt u 3D prostoru modifikacijom Eulerovih kutova ili kvaterniona te vidjeti kako promjena jedne komponente utječe na promjenu drugih, također moguće je vidjeti kako izgleda kad se izazove blokada kardanskog mehanizma na objektu.

Summary

The paper describes two methods of presenting rotations in the 3D world, one method is the description of rotations via Euler angles, while the other method is the description of rotations using quaternions. Both methods are described in detail, the properties of each method are also described. Ways to convert from one system to another (one method of description to another) are also shown. Consideration of the differences between these two methods and a comparison of one in relation to the other. Description of how one and how the other method can be used for interpolation. For a more complete understanding, an application was built where the user can rotate the object in 3D space by modifying the Euler angles or quaternions and see how the change of one component affects the change of others, it is also possible to see what it looks like when gimbal lock is triggered on the object.

Skraćenice

IMU	<i>Inertial measurement unit</i>	inercijska mjerna jedinica
INS	<i>Inertial navigation system</i>	inercijski navigacijski sustav
SLERP	<i>Spherical linear interpolation</i>	sferna linearna interpolacija