Razvoj ortogonalnih portfelja zasnovan na portfelju minimalne varijance

Branica, Vilim

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:168:186300

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 1558

RAZVOJ ORTOGONALNIH PORTFELJA ZASNOVAN NA PORTFELJU MINIMALNE VARIJANCE

Vilim Branica

Zagreb, lipanj 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 1558

RAZVOJ ORTOGONALNIH PORTFELJA ZASNOVAN NA PORTFELJU MINIMALNE VARIJANCE

Vilim Branica

Zagreb, lipanj 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Zagreb, 4. ožujka 2024.

ZAVRŠNI ZADATAK br. 1558

Pristupnik:	**Vilim Branica (0036539237)**
Studij:	Elektrotehnika i informacijska tehnologija i Računarstvo
Modul:	Računarstvo
Mentor:	prof. dr. sc. Zvonko Kostanjčar

Zadatak: **Razvoj ortogonalnih portfelja zasnovan na portfelju minimalne varijance**

Opis zadatka:

U sklopu završnog zadatka potrebno je istražiti primjenu portfelja minimalne varijance u razvoju ortogonalnih portfelja kao strategije diverzifikacije investicijskog portfelja. Prvo je potrebno opisati portfelj minimalne varijance u slučaju kada su kratke pozicije dopuštene te u slučaju kada kratke pozicije nisu dopuštene. Zatim je potrebno na temelju portfelja minimalne varijance kreirati ortogonalne portfelje na zadanom skupu financijskih vrijednosnica. Na kraju je potrebno analizirati svojstva dobivenih ortogonalnih portfelja prema prinosu I riziku.

Rok za predaju rada: 14. lipnja 2024.

Sadržaj

Uvod

Financijska tržišta su složeni sustav putem kojeg se omogućava alokacija kapitala, transfer rizika i poticanje gospodarskog rasta. Ta tržišta pružaju platformu za trgovanje različitim financijskim instrumentima, te su ključna za funkcionalnost moderne ekonomije. Financijska tržišta se dijele na nekoliko osnovnih tipova investicijskih klasa, uključujući dionice, obveznice, tržište novca, robu i alternativne investicije, od kojih svaka ima svoje specifičnosti, rizike i potencijalne prinose.

Dionice (equities) predstavljaju vlasničke udjele u kompanijama i pružaju investitorima mogućnost ostvarivanja povrata u obliku kapitalnih dobiti i dividendi. Obveznice (bonds) su vrijednosni papir kod kojeg investitor pozajmljuje novac na određeni period određenom kamatnom stopom. **Obveznice** mogu izdati tvrtke ili državne strukture poput općina, županija, gradova ili država. **Tržište novca** karakterizira visoka likvidnost i manji rizik, a uključuje kratkoročne financijske instrumente poput trezorskih zapisa i komercijalnih papira s rokom dospijeća manjim od godinu dana. **Robe** (commodities), kao što su zlato, nafta i poljoprivredni proizvodi, pružaju dodatnu diverzifikaciju portfelja i zaštitu od inflacije. **Alternativne investicije**, uključujući hedge fondove, privatni kapital i kriptovalute, nude potencijal za visoke prinose, ali dolaze s većim rizikom i složenijim strukturama.

Ulaganje na financijskim tržištima neizbježno uključuje preuzimanje rizika. Svaki investitor pokušava uložiti tako da uz što manji rizik, ostvari što veći prinos. U praksi, instrumenti s većim prinosom u pravilu dolaze s većim rizikom. Zato je svakom investitoru bitno odrediti koliki rizik je za njega prihvatljiv. Mjera koja se često koristi za opisati odnos očekivanog povrata i rizika je **Sharpov omjer**. On se izračunava kao omjer viška povrata neke investicije u odnosu na stopu bezrizične investicije (u praksi je to često iznos stope državnih obveznica SAD-a) i standardne devijacije niza promjena cijena te investicije. Na ovaj će način ulaganja s većim Sharpovim omjerom imati bolji odnos očekivanog prinosa u odnosu na preuzeti rizik.

Minimizacija varijance portfelja jedna je od metoda za postizanje većeg Sharpovog omjera u investiranju. Varijanca je, kao i standardna devijacija, mjera oscilacije prinosa portfelja, a smanjenje varijance može se postići na dva načina. Prvi je ulaganjem u instrumente koji sami po sebi nose nizak rizik, a drugi je diverzifikacijom, odnosno ulaganjem u različite investicijske klase koje zbog svoje nesavršene koreliranosti efektivno smanjuju rizik portfelja. Ekstremno smanjenje koreliranosti među komponentama portfelja dovodi do njihove **ortogonalnosti**, što znači da promjene u vrijednosti jedne investicije nemaju utjecaja na ostale. Ortogonalnost komponenti u portfelju je poželjna jer omogućava investitoru smanjenje ukupnog rizika bez žrtvovanja prinosa.

Diverzifikacija se može postići ulaganjem u različite sektore, geografske regije i financijske instrumente. Na primjer, kombinacija dionica i obveznica može smanjiti rizik portfelja, jer se te dvije klase imovine često ponašaju suprotno u različitim ekonomskim uvjetima. Korištenjem analize korelacije, investitori mogu identificirati i odabrati investicije koje će doprinijeti smanjenju ukupne varijance portfelja, te time postići bolji omjer rizika i prinosa.

Cilj ovog rada je metodom portfelja minimalne varijance dobiti niz međusobno ortogonalnih portfelja. Očekujemo da će dobiveni portfelji osim ortogonalnosti imati i nisku varijancu zbog upotrebe metode portfelja minimalne varijance (MVP).

1. Podaci

U svrhu izrade rada korišteni su podaci dnevnih povrata za 8 instrumenata iz 3 različite investicijskih klasa:

Indeksi dionica (equity indices)

1. Indeks 500 najvećih američkih dionica, S&P 500
2. Indeks 50 najvećih europskih dionica, EURO STOXX 50
3. Indeks 300 najvećih kineskih dionica, CSI 300
4. Indeks 225 najvećih japanskih dionica, Nikkei 225

Budućnosnice roba (commodities futures)

5. Sirova nafta
6. Zlato
7. Kukuruz

Obveznice

8. Desetogodišnje državne obveznice SAD-a

Podaci su u obliku vremenskih serija koja za svaki dan trgovanja prikazuje cijenu instrumenta u trenutku zatvaranja burze. Pomoću tih cijena izračunate su aritmetičke promjene cijena za svaki dan trgovanja i nad njima su se radile daljnje analize.

2. Metode

2.1. Izrada portfelja minimalne varijance

Moderna teorija portfelja praktična je metoda za izgradnju investicijskog portfelja u kojoj se pokušava postići optimalan odnos povrata u odnosu na preuzeti rizik. Razvio ju je Harry Markowitz u radu „Portfolio Selection“ 1952. godine. Kasnije mu je dodijeljena Nobelova nagrada za njegov rad na modernoj teoriji portfelja.

Očekivani povrat i rizik su 2 glavne varijable koje uzimamo u obzir pri izgradnju investicijskog portfelja. Ako na povrat portfelja gledamo kao slučajnu varijablu R, logično je definirati očekivani povrat kao E(R) = μ, a rizik kao varijancu Var(R) = σ^2(R) ili standardnu devijaciju σ(R).

2.1.1. Analiza slučaja s 2 instrumenta

Ako promatramo portfelj s 2 vrijednosna papira, recimo dionice, opisanog pomoću binomnog modela s 2 moguća ishoda: u prvom ishodu vrijednost prve dionice poraste 10%, a druge dionice padne 5%, dok je u drugom slučaju obrnuto: prva dionice padne 5%, a druga poraste 10%. Vidljivo je da iako svaka od dionica pojedinačno nepredvidljiva i sa sobom nosi rizik, no ako konstruiramo portfelj s 50% iznosa u prvoj i 50% u drugoj dionici, njegov prinos postaje deterministički: uvijek 5% bez obzira koji se slučaj realizirao. Time slijedi da je rizik portfelja pao na nulu: Var(R) = 0. Ovim jednostavnim primjerom možemo vidjeti snagu diverzifikacije u svrhu minimizacije rizika.

Udio u portfelju (w) definiramo kao ukupna trenutna vrijednost novca uloženog u neki vrijednosni papir podijeljen s ukupnom trenutnom vrijednosti portfelja. Kako se ovdje razmatra slučaj s 2 vrijednosna papira u portfelju, oni imaju udjele w_1 i w_2. Mora vrijediti $w_1 + w_2 = 1$. Ako je dopušten „short selling“ moguće je da jedan w bude negativan.

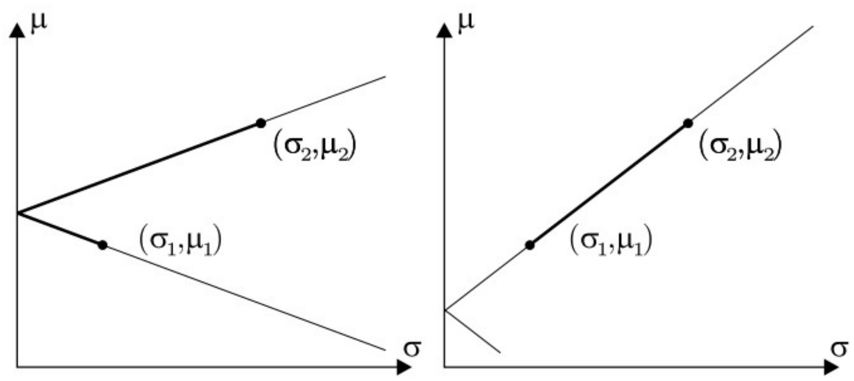
Ukupan povrat portfelja tada je $R_v = w_1\mu_1 + w_2\mu_2$

Varijanca ovakvog portfelja je

$$Var(R_V) = w_1^2\, Var(R_1) + w_2^2\, Var(R_2) + 2w_1w_2Cov(R_1, R_2)$$

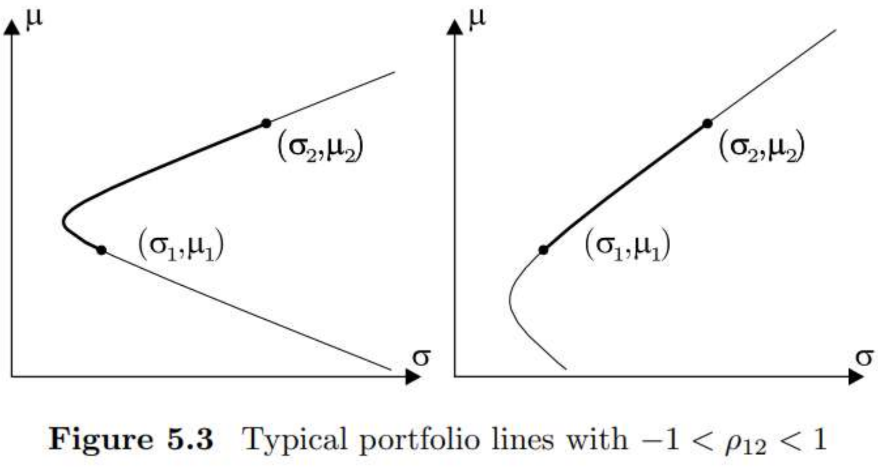
Pri čemu je $Cov(R_1, R_2) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2$

Ako fiksiramo koeficijent korelacije ρ_{12}, mijenjajući udio pojedinog vrijednosnog papira u portfelju možemo promatrati kako se mijenja odnos očekivanog povrata i rizika (standardne devijacije).



Slika 2.1. Odnos očekivanog prinosa i preuzetog rizika za savršeno korelirane i savršeno nekorelirane imovine (Capinski i Zastawniak)

Prikazani grafovi prikazuju slučajeve kad je $\rho_{12} = -1$ (lijevo) i $\rho_{12} = 1$ (desno). Za date korelacije, funkcije poprimaju oblike pravaca. Međutim, za vrijednosti $-1 < \rho_{12} < 1$, krivulja je zaobljena:



Slika 2.2. Odnos očekivanog prinosa i preuzetog rizika kod realnih imovina (Capinski i Zastawniak)

2.1.2. Portfelj minimalne varijance za 2 instrumenta

Za danu korelaciju, parametri krivulje u prinos-rizik grafu su udjeli pojedinog vrijednosnog papira u portfelju. U ovom su primjeru to w_1 i w_2, a kako mora vrijediti $w_1 + w_2 = 1$, supstitucijom možemo dobiti ovisnost očekivanja i varijance o samo jednom parametru. Stoga, ako izraz za varijancu deriviramo s obzirom na taj parametar i izjednačimo s nulom, možemo pronaći za koji parametar varijanca portfelja postiže svoj minimum. Važno je napomenuti da je ovdje dopušten „short selling“, odnosu težine mogu biti negativne.

2.1.3. Analiza slučaja s više od 2 instrumenta

U slučaju s više različitih vrijednosnih papira u portfelju, pogodno je za račun s njima umjesto varijabli koristiti vektore. Tako se udio u portfelju opisuje vektorom $w = [w_1\ w_2\ w_3\ \dots\ w_n]$. w mora zadovoljavati uvjet: $1 = u\, w^T$

Pri čemu je $u = [1\ 1\ 1\ \dots\ 1]$ jedinični vektor.

Očekivanja se prikazuju vektorom $m = [\mu_1\ \mu_2\ \mu_3\ \dots\ \mu_n]$, a kovarijanca kovarijacijskom matricom C, gdje je $c_{ij} = Cov(K_i, K_j)$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Tada vrijedi $\mu_v = m\, w^T$ i $\sigma_v^2 = wCw^T$.

2.1.4. Portfelj minimalne varijance za više od 2 instrumenta

Trebamo pronaći vektor w udjela u portfelju takav da za njega funkcija varijance postiže minimum uz uvjet da suma udjela mora biti 1: $1 = u\ \ w^T$. Ovaj se problem rješava pomoću Lagrangeovih multiplikatora s jednim multiplikatorom, budući da je prisutno jedno ograničenje. Računom se dobije da je traženi vektor:

$$\vec{w} = \frac{u\, C^{-1}}{u\, C^{-1}\, u}$$

2.2. Metoda ortogonalizacije

Nakon dobivanja težina pomoću MVP metode, množenjem matrice povrata s težinama portfelja možemo izračunati povrat portfelja:

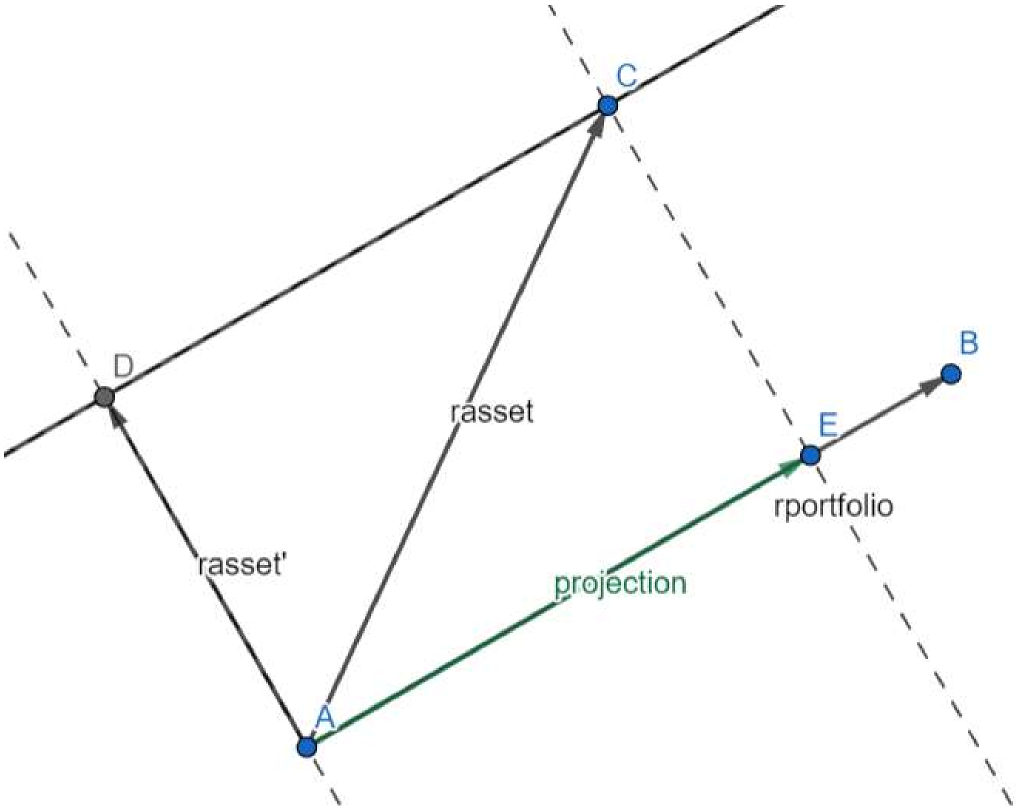
$$r_{portfolio} = \boldsymbol{M}\, w$$

Postupkom ortogonalizacije tražimo vektore okomite na $r_{portfolio}$. Ideja metode je od svakog vektora povrata r_{asset} oduzeti komponentu tog vektora u smjeru vektora povrata portfelja $r_{portfolio}$. Ponavljanjem ovog postupka za svaku imovinu dobivamo novu bazu vektorskog prostora u kojoj je svaki vektor baze ortogonalan na $r_{portfolio}$ kao i svaka linearna kombinacija tih vektora baze.

Komponentu vektora r_{asset} ortogonalnu na $r_{portfolio}$ dobijemo tako da prvo odredimo projekciju vektora r_{asset} na $r_{portfolio}$ i zatim od r_{asset} oduzmemo tu projekciju. Ako s α označimo broj s kojim se skalira duljina projekcije, onda slijedi:

$$\alpha = \frac{r_{asset} \cdot r_{portfolio}}{r_{portfolio} \cdot r_{portfolio}}$$

$$r_{asset}' = r_{asset} - \alpha \cdot r_{portfolio}$$



Slika 2.3. Prikaz metode ortogonalizacije (Geogebra)

Kada ovaj postupak provedemo za vektor povrata svake imovine, dobivamo novu bazu za ponovnu provedbu metode MVP.

2.2.1. Smanjenje dimenzionalnosti podataka

Ako bismo direktno proveli MVP metodu nad novim vektorima baze, dobili bismo da je vektor povrata takvog novo dobivenog portfelja nul vektor. Razlog tome je što smo podacima smanjili dimenzionalnost metodom ortogonalizacije, a broj vektora baze je ostao isti. Možemo reći da je model pretreniran. Zato prije sljedeće iteracije metode MVP trebamo ukloniti jedan od vektora baze kako bi broj vektora baze bio jednak dimenzionalnosti podataka.

2.2.2. Povratak u početnu bazu

Kada se s novim vektorima baze provede MVP metoda, dobivene težine nisu izražene u početnim imovinama, stoga ih trebamo vratiti u početnu bazu. Prvo izračunamo povrat portfelja $r_{portfolio}$ s težinama dobivenim metodom MVP i zatim se metodom najmanjih kvadrata (metoda lstsq iz biblioteke numpy.linalg) odredi koje bi trebale biti težina početnih imovina u portfelju za postizanje danih povrata.

2.2.3. Skaliranja težina

Povratkom u početnu bazu vektorskog prostora, izgubio se uvjet da suma težina portfelja mora biti 1. Stoga trebamo skalirati težine tako da se svaka težina podijeli s ukupno sumom težina. S novo dobivenim težinama izračunamo povrate takvog portfelja.

Algoritam izgradnje ortogonalnih portfelja dan je sljedećim pseudokodom:

```
ponavljaj koliko ima imovina:
      izračunaj težine provedbom MVP-a
      izračunaj povrate portfelja tih težina
      odredi težine u početnoj bazi
      skaliraj težine
      odredi povrate sa skaliranim težinama
      provedi ortogonalizaciju
      nove vektore baze spremi u matricu povrata
      ponavljaj
```

Kod 2.1. Algoritam izgradnje ortogonalnih portfelja metodom MVP

Problem ovog pristupa je skaliranje težina kojoj je suma težina blizu 0. Tada, ako želimo težine podijeliti sa sumom koja je blizu 0, suma skaliranih težina će tada biti 1, ali iznosi težina će biti znatno veći od 1. Posljedično, s toliko velikim iznosima težina, varijanca povrata će također biti izrazito velika. Javlja se potreba za drugačijim pristupom problemu.

2.3. Optimizacijski pristup MVP metodi

Umjesto provedbe metode MVP i kasnije skaliranja, voljeli bismo uz varijancu kao funkciju minimizacije, imati uvjet da je suma težina izraženih u početnim imovinama jednaka 1. Svakoj težini u novoj bazi moramo pridružiti skalar s kojim ju moramo pomnožiti da bi dobili ukupni iznos težine. Suma tih ukupnih težina tada mora iznositi 1.

Vektor tih skalara je na početku jednak u, a onda se svakom iteracijom računa sljedećim postupkom:

```
ukupna_težina = np.dot(w, skalar_vektor)
skalar_vektor -= alfas * ukupna_težina
```

Kod 2.2. Izračun skalar_vektora kod izračuna ukupne težine

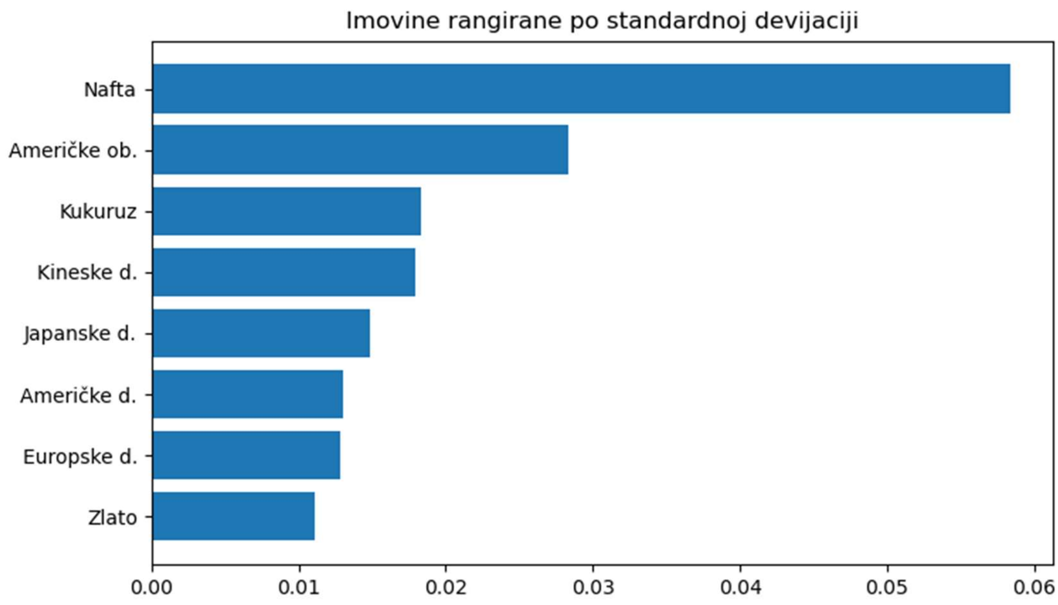
Pri čemu je alfas vektor dobiven projekcijama vektora r_{asset} na vektor portfelja $r_{portfolio}$ tijekom metode ortogonalizacije.

Za pronalazak minimuma varijance uz ovakav uvjet, koristimo metodu *minimize* iz biblioteke *scipy.optimize*. Metoda treba za kovarijacijsku matricu povrata imovina pronaći težine portfelja takve da se za njih postiže minimum varijance uz uvjet da je skalarni produkt skalar_vektora i težina jednak 1. Ovim pristupom nije potrebno skalirati težine nakon povratka težina u početnu bazu, pa povrati portfelja imaju puno manju varijabilnost, što smo htjeli postići.

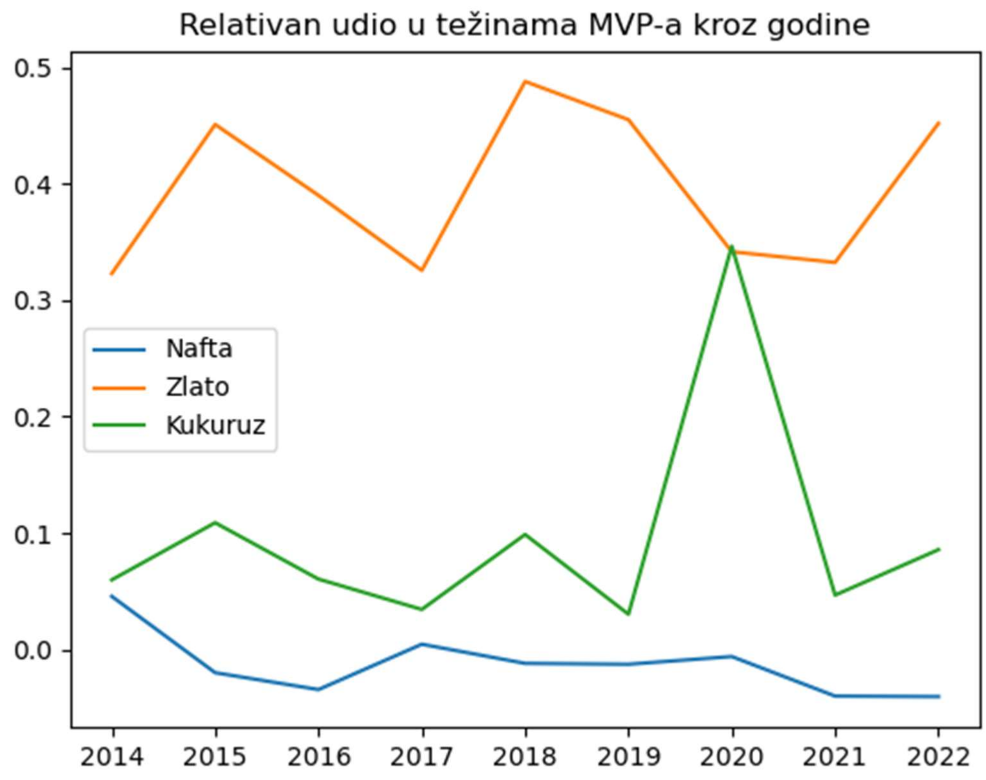
3. Rezultati i analiza

3.1. Analiza portfelja minimalne varijance

Kako bismo analizirali efektivnost portfelja minimalne varijance, podijelili smo podatke po godinama i za svaku godinu proveli metodu MVP. Analizirali smo kako se težine mijenjaju iz godine u godinu i kako volatilnost pojedinog instrumenta utječe na njegovu relativnu težinu u portfelju.



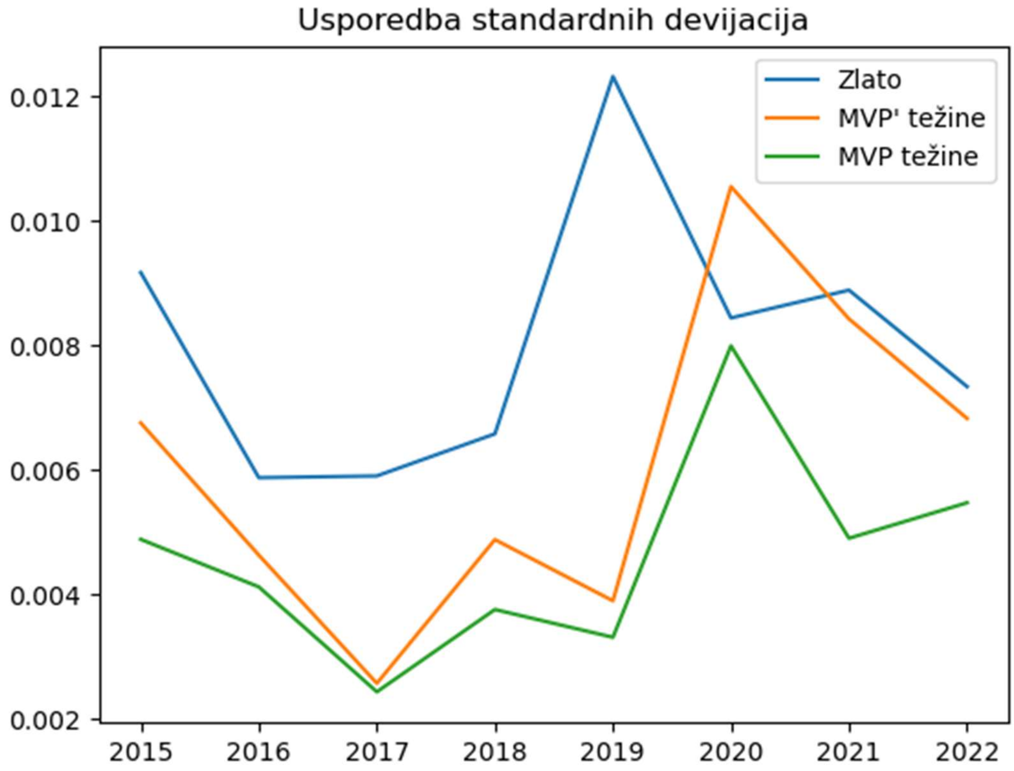
Slika 3.1. Imovine rangirane po standardnoj devijaciji u periodu 2014 - 2022



Slika 3.2. Relativan udio u težinama MVP-a kroz godine

Iz grafova možemo vidjeti da instrumenti s manjom varijabilnosti u pravilu imaju veći relativni udio u portfelju minimalne varijance, što je očekivano. Zlato kao instrument s najmanjom varijabilnosti u skoro svakom periodu ima najveći relativni udio u portfelju.

Kako bismo procijenili uspješnost metode MVP za predviđanje budućeg portfelja minimalne varijance, usporedili smo varijabilnost povrata dobivenih portfeljem minimalne varijance (MVP) i varijabilnost povrata dobivenih upotrebom težina portfelja minimalne varijance iz prethodnog perioda (MVP'). Radi usporedbe, dodana je i standardna devijacija zlata za svaki period, kao imovine s najmanjom varijabilnosti. Rezultati su prikazani u nastavku.



Slika 3.3. Usporedba standardnih devijacija

Budući da metoda MVP pronalazi težine s minimalnom varijancom, ako umjesto njih koristimo težine iz prošlog perioda, nikad nećemo dobiti nižu varijancu, odnosno varijabilnost MVP' težina će uvijek biti veća od MVP. Možemo vidjeti da je u pravilu varijabilnost MVP' kroz vrijeme bliža varijabilnosti MVP-a nego zlata, što sugerira pouzdanost metode MVP za predikciju portfelja minimalne varijance, kao i snagu diverzifikacije s ciljem smanjenja rizika pri investiranju. Iznimka je period 2020-2022 koja je zbog globalne pandemije pridonijela nagloj promijeni tržišnih uvjeta, čime korištenje težina iz prošlosti gubi snagu.

3.2. Izgradnja ortogonalnih portfelja minimalne varijance

U svrhu izgradnje ortogonalnih portfelja minimalne varijance, odabrali smo 2015. godinu kao period u kojem ćemo provoditi daljnju analizu.

3.2.1. Izgradnja ortogonalnih portfelja metodom MVP i skaliranjem težina

Tablica 3.1. Iznosi težina prvog portfelja minimalne varijance

Nafta	Zlato	Kukuruz	Kina d.	US d.	EU d.	Japan d.	US ob.
-0.02	0.451	0.109	-0.018	0.213	0.059	0.166	0.041

Iz tablice možemo vidjeti da je najzastupljenija imovina u portfelju zlato, a najmanje zastupljena nafta, što je u skladu s prethodnim analizama o njihovim standardnim devijacijama.

Tablica 3.2. Varijance portfelja minimalne varijance

Komponenta	1	2	3	4	5	6	7	8
Std dev	4.89e-3	13.29	12.02	19.23	10.36	9.73	40.58	14.37

Lako možemo vidjeti da ova metoda ne daje zadovoljavajuće rezultati. Dobivene komponente jesu međusobno ortogonalne, no standardne devijacije svih komponenti, osim prve, su vrlo visoke. Uzrok tome je skaliranje, kako je opisano ranije. Metoda pronalazi portfelj minimalne varijance za uvjet da je suma težina jednaka 1, ali nakon skaliranja, varijanca je izrazito visoka i vrlo nepredvidljiva. Varijanca prve komponente je niska jer se ona ne skalira.

3.2.2. Izgradnja ortogonalnih portfelja optimizacijom

Tablica 3.3. Ortogonalni portfelji minimalne varijance i pripadne varijance

	Nafta	Zlato	Kuk	Kin d.	US d.	EU d.	Jap d.	US ob.	Std dev
K1	0.124	0.126	0.125	0.124	0.125	0.125	0.126	0.124	8.78e-3
K2	0.143	0.365	0.284	0.104	0.29	0.265	0.304	-0.754	1.87e-2
K3	-0.029	0.673	0.431	-0.231	0.481	0.355	-0.699	0.02	1.38e-2
K4	-0.489	0.864	0.355	0.316	0.613	-0.518	-0.24	0.099	1.73e-2
K5	0.227	0.933	0.188	-0.142	-0.439	-0.692	0.778	0.146	1.55e-2
K6	-0.19	0.618	-0.022	-0.137	-0.498	0.607	0.468	0.155	1.07e-2
K7	-0.269	-1.135	0.676	-0.392	2.356	-0.909	0.812	-0.139	2.45e-2
K8	0.039	0.834	-1.067	-0.019	1.459	-0.342	0.071	0.025	1.87e-2

Tablica prikazuje 8 težina (nafta, zlato…) svih 8 komponenti (K1… K8) dobivenih optimizacijskim pristupom zajedno s pripadnom standardnom devijacijom portfelja. Standardna devijacija ovih portfelja je vidljivo znatno manja od portfelja dobivenih metodom MVP i skaliranjem, što ovu metodu čini daleko učinkovitijom.

Bitno je primijetiti da je standardna devijacija prve komponente ove metode (8.78e-3) veća od standardne devijacije prve komponente dobivene metodom MVP i skaliranjem (4.89e-3). Razlog tome je što je optimizacijski postupak korišten za pronalazak težina aproksimativan, dok je MVP metoda dobivena Lagrangeovim multiplikatorima egzaktna. Iz istog razloga, standardna devijacija komponenti većih indeksa nije nužno veća od prethodne, što bi očekivali budući da smo bazi prostora oduzeli jednu komponentu.

Također, prvi portfelj ovog optimizacijskog postupka raspodjeljuje težine portfelja vrlo uniformno, svaka težina je vrlo blizu 1/8, po čemu se razlikuje od MVP metode, koja je skoro pola udjela imala u zlatu, kao imovini s najmanjom varijabilnosti.

4. Zaključak

U ovom radu istražena je primjena portfelja minimalne varijance u razvoju ortogonalnih portfelja kao strategije diverzifikacije investicijskog portfelja. Koristeći se povijesnim podacima različitih financijskih instrumenata, pokazano je da metoda portfelja minimalne varijance omogućava stvaranje portfelja koji na budućim podacima ostvaruju nisku varijancu. Prediktivna sposobnost MVP metode opada kod većih i naglih promjena na tržištu, poput globalne pandemije.

Daljnja analiza ortogonalnih portfelja pokazala je da skaliranje težina portfelja, s ciljem postizanja uvjeta da suma težina portfelja iznosi jedan, iako osigurava ortogonalnost komponenti, dovodi do visokih varijanci pojedinih komponenti. Optimizacijski pristup, s druge strane, iako aproksimativne prirode, pokazao se učinkovitijim, omogućujući postizanje niskih varijanci uz održavanje ortogonalnosti.

Zaključno, primjena ortogonalnih portfelja temeljenih na MVP metodi predstavlja značajan korak naprijed u strategijama diverzifikacije portfelja, omogućavajući investitorima smanjenje rizika i postizanje stabilnih prinosa. Daljnji tijek istraživanja bio bi odrediti kako u metodi MVP uvesti uvjet iz optimizacijskog pristupa. Ako bi takav pokušaj uspio, portfelji dobiveni takvom egzaktnom metodom bi u teoriji trebali postići nižu varijancu od optimizacijskog aproksimativnog postupka.

Literatura

[1] Marek Capinski, Tomasz Zastawniak *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering, 2003*

[2] Adam Hayes, *Financial markets*, Investopedia, (2024, lipanj). Poveznica: https://www.investopedia.com/terms/f/financial-market.asp

[3] Jason Fernando, *Sharpe Ratio: Definition, Formula, and Examples,* Investopedia, (2024, lipanj). Poveznica: https://www.investopedia.com/terms/s/sharperatio.asp

[4] Quantitative Finance forum: „*Why the weight vector of 'global minimum variance' the 'eigenvector' with the minimum eigenvalue*?" (travanj, 2024). Poveznica: https://quant.stackexchange.com/questions/46685/why-the-weight-vector-of-global-minimum-variance-the-eigenvector-with-the-mi

[5] Kovačević R. *Testiranje stabilnosti portfelja imovine hrvatskih osiguravajućih društava primjenom nenadziranog učenja*. Završni specijalistički rad. Sveučilište u Zagrebu Fakultet eletkrotehnike i računarstva, 2022

[6] Tomislav Buric, Lana Horvat Dmitrović, Domagoj Kovačević, Mervan Pašić, Mate Puljiz, Tomislav Šikić, Igor Velčić, Ana Žgaljić Keko *Matematicka analiza 2, 3. poglavlje – Primjena diferencijalnog računa funkcije više varijabli,* 2022.

[7] Alat *Geogebra.* Poveznica: https://www.geogebra.org/calculator

Sažetak

Razvoj ortogonalnih portfelja zasnovan na portfelju minimalne varijance

U ovom završnom radu istražena je primjena portfelja minimalne varijance (MVP) u razvoju ortogonalnih portfelja kao strategije diverzifikacije investicijskog portfelja. Istraživanje je obuhvatilo analizu slučajeva s različitim financijskim instrumentima, uključujući dionice, budućnosnice i obveznice, kako bi se pokazala učinkovitost MVP metode. Rezultati su pokazali da MVP metoda iz povijesnih podataka omogućava stvaranje portfelja koji u budućnosti postižu nisku razinu varijance. Također je analizirana metoda ortogonalizacije portfelja, pri čemu je optimizacijski pristup pokazao veću učinkovitost u smanjenju varijance u usporedbi s metodom skaliranja težina. Zaključeno je da MVP metoda zajedno s metodom ortogonalizacije nudi investitorima ulaganje uz nisku razinu rizika.

Ključne riječi: portfelj minimalne varijance, ortogonalni portfelji, diverzifikacija, optimizacija, financijski instrumenti

Summary

Development of Orthogonal Portfolios Based on the Minimum Variance Portfolio

This thesis explores the application of the Minimum Variance Portfolio (MVP) in developing orthogonal portfolios as a diversification strategy for investment portfolios. The research included case analyses with various financial instruments, such as stocks, futures, and bonds, to demonstrate the effectiveness of the MVP method. The results showed that the MVP method, based on historical data, allows for creating portfolios that achieve low variance in the future. Additionally, the orthogonalization method of the portfolio was analysed, with the optimization approach proving more effective in reducing variance compared to the weight scaling method. It was concluded that the MVP method, together with the orthogonalization method, offers investors low-risk investment opportunities.

Keywords: minimum variance portfolio, orthogonal portfolios, diversification, optimization, financial instruments