Dizajn eksperimenata s pomoću latinskih kvadrata

Bilić-Pavlinović, Dora

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:168:105711

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 1434

DIZAJN EKSPERIMENATA S POMOĆU LATINSKIH KVADRATA

Dora Bilić-Pavlinović

Zagreb, lipanj 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 1434

DIZAJN EKSPERIMENATA S POMOĆU LATINSKIH KVADRATA

Dora Bilić-Pavlinović

Zagreb, lipanj 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Zagreb, 4. ožujka 2024.

ZAVRŠNI ZADATAK br. 1434

Pristupnica:	**Dora Bilić-Pavlinović (0036538609)**
Studij:	Elektrotehnika i informacijska tehnologija i Računarstvo
Modul:	Računarstvo
Mentorica:	izv. prof. dr. sc. Anamari Nakić

Zadatak: **Dizajn eksperimenata s pomoću latinskih kvadrata**

Opis zadatka:

Eksperimentiranje i testiranje je važan alat za inženjere u procesu izrade inovativnih proizvoda raznih vrsta koji omogućuje smanjenje troškova proizvodnje i veću kvalitetu finalnih proizvoda. Latinski kvadrati mogu se iskoristiti za planiranje eksperimenata s balansiranim svojstvima. Latinski kvadrat je pravokutna matrica reda n, čiji su elementi prirodni brojevi manji ili jednaki n, i svi elementi nekog retka ili stupca su različiti. U ovom će se radu predstaviti osnovna svojstva latinskih kvadrata. Iznijet će se poznati rezultati o egzistenciji i klasifikaciji latinskih kvadrata za dani n. Predstavit će se osnovni algoritam za konstrukciju latinskih kvadrata. Opisat će se primjena latinskih kvadrata na dizajn eksperimenata. Izradit će se interaktivna edukativna aplikacija o latinskim kvadratima.

Rok za predaju rada: 14. lipnja 2024.

Sadržaj

Uvod

Latinski kvadrati su matematički koncept proučavan u sklopu kombinatorike i statistike. Kao kvadratne matrice u kojima se svaki element iz n-članog skupa pojavljuje točno jednom u svakom retku i stupcu, u primjeni na dizajn eksperimenata latinski kvadrati osiguravaju ravnomjernu raspodjelu tretmana unutar eksperimentalnih jedinica. Ovaj pristup je posebno koristan u situacijama gdje je potrebno kontrolirati više izvora varijabilnosti, kao što su blokovi i tretmani, kako bi se izolirali efekti specifičnih faktora. Njihova primjena u dizajnu eksperimenata omogućava precizno upravljanje varijabilnošću.

Povijesno gledano, latinski kvadrati su se koristili implicitno u raznim kulturnim i znanstvenim kontekstima prije nego što su formalno definirani i analizirani od strane matematičara Leonharda Eulera. Eulerov rad postavio je temelje za daljnje istraživanje i primjenu latinskih kvadrata u mnogim disciplinama.

Primjena latinskih kvadrata u dizajnu eksperimenata omogućava istraživačima da minimiziraju utjecaj slučajnih varijacija i pristranosti, što rezultira pouzdanijim i točnijim rezultatima. U poljoprivredi, psihologiji, industrijskom inženjerstvu i mnogim drugim područjima, latinski kvadrati pružaju strukturiran način za organizaciju eksperimentalnih tretmana, čime se optimizira korištenje resursa i povećava statistička snaga eksperimenata.

Ovaj rad će istražiti teorijske osnove latinskih kvadrata, njihovu povijest i razvoj te praktične primjene u dizajnu eksperimenata. Osvrnut ćemo se i na problem s kojim se Leonhard Euler suočio, a koji je vezan za konstrukciju ortogonalnih latinskih kvadrata. Također ćemo razmotriti metode i algoritme za generiranje latinskih kvadrata. Kroz analizu konkretnih primjera, demonstrirat ćemo kako se latinski kvadrati mogu koristiti u eksperimentalnom dizajnu te kako se mogu analizirati podatci dobiveni u takvom istraživanju.

1. Latinski kvadrati

1.1 Osnovni rezultati

Za kvadratnu matricu reda n kažemo da je **latinski kvadrat** ako za nju vrijedi :

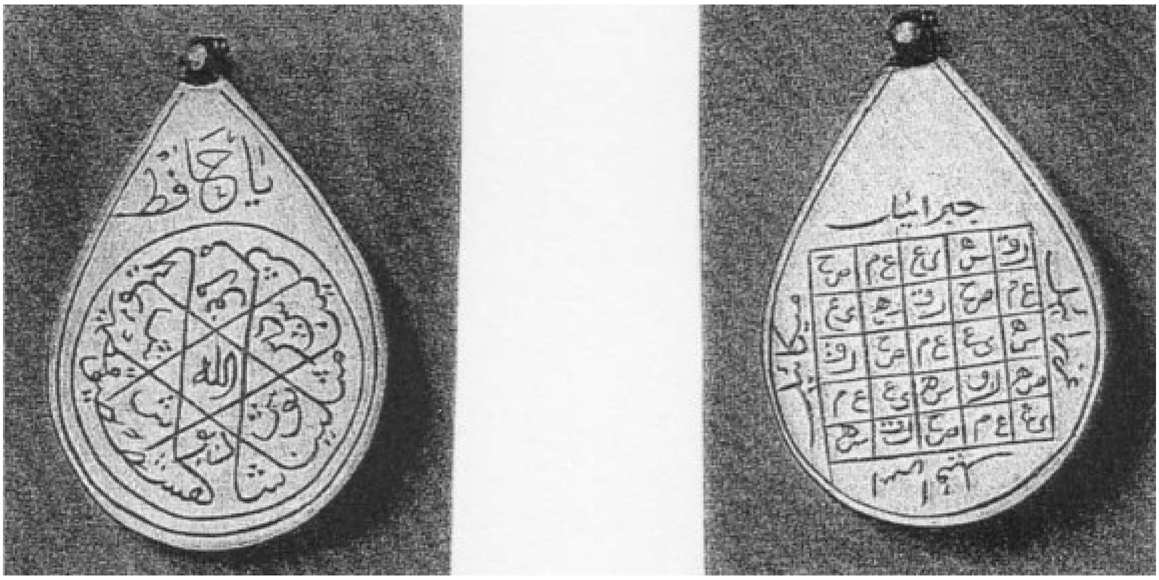
- elementi matrice su elementi n-članog skupa $\{ x_1, x_2, \ldots x_n \}$
- u svakom retku i u svakom stupcu matrice se svaki element x_i, $i = 1, 2, \ldots n$, nalazi na točno jednom mjestu

Evo primjer latinskog kvadrata reda 3:

A=

1	2	3
2	3	1
3	1	2

Latinski kvadrati su se implicitno koristili i prije nego su bili matematički definirani i analizirani. Najranija znana uporaba latinskih kvadrata je na amuletima (lat. Amuletum = privjesak) i u obredima u Arapskim i Indijskim društvima. Ovo je vrlo teško datirati, no svrstava se otprilike na 1000. godinu.



Slika 1 Srebreni amuleti iz Damaska

Francuski poljoprivredni istraživač Francois Cretté de Palluel smatra se prvom osobom koja je upotrijebila latinske kvadrate u svrhu statističke analize. 1788. izdao je rad „Sur les avantages et l'economie que procurent les raciness employees a l'engrais des moutons a l'étable, Mémoires d'Agriculture, trimester d'éte" ili prevedeno na hrvatski „O prednostima i ekonomičnosti hranidbe ovaca u štali korijenjem, Poljoprivredni ljetopis" s ciljem dokazivanja da se ovce mogu hraniti korjenastim povrćem zimi što bi bilo jednako efikasno kao dotadašnja dijeta kukuruza i sijena. Dizajnirao je eksperiment na način gdje je 16 ovci hranio različitim dijetama i usporedio tjelesne mase. Naravno, Francois nije izričito definirao latinski kvadrat u svom radu, no implicitno ga je koristio. Naime, eksperiment je esencijalno bio zapravo latinski kvadrat reda 4 gdje su redove predstavljale 4 vrste ovci, stupce 4 različite dijete, a simbole 4 različita vremena klanja. (Andersen, 2007)

Latinske kvadrate je konceptualno definirao Leonhard Euler, Švicarski matematičar i fizičar. Matematički ih je definirao, istražio im svojstva te im nadjenuo ime (Young, 2011).

Svoj naziv latinski kvadrati su dobili zbog toga što je Euler za simbole koristio latinična slova npr.

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Za par latinskih kvadrata kažemo da su **izomorfni** ako se mogu transformirati jedan u drugi putem permutacija redova, kolona ili simbola. To znači da, iako mogu izgledati drugačije na prvi pogled, njihova osnovna struktura je ista.

Predočimo koliko brzo raste broj različitih latinskih kvadrata kako raste dimenzija n na n$\epsilon$$\{1, 2, 3\}$.

Za n=1 možemo sastaviti samo jedan latinski kvadrat i to je :

1

Za n=2 možemo sastaviti dva različita latinska kvadrata:

1	2
2	1

2	1
1	2

Za n=3 taj broj se već penje na čak 12:

1	2	3
2	3	1
3	1	2

1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	3	2
3	2	1
2	1	3

2	3	1
1	2	3
3	1	2

2	3	1
3	1	2
1	2	3

2	1	3
1	3	2
3	2	1

2	1	3
3	2	1
1	3	2

3	2	1
1	3	2
2	1	3

3	2	1
2	1	3
1	3	2

3	1	2
1	2	3
2	3	1

3	1	2
2	3	1
1	2	3

2007. godine, u časopisu Journal of Combinatorial Designs, objavljeno je istraživanje o broju različitih n-dimenzionalnih latinskih kvadrata (Alturky, 2007.). Ovdje se nisu razmatrali svi latinski kvadrati koji nisu međusobno izomorfni nego oni kojima su vrijednosti tretmana raspoređeni na način da barem na jednom mjestu imaju različitu vrijednost.

Dobiveni su slijedeći rezultati:

Tablica 1 Broj različitih latinskih kvadrata za n ≤ 11

n	Broj latinskih kvadrata reda n
1	1
2	2
3	12
4	576
5	161280
6	812851200
7	61479419904000
8	108776032459082956800
9	5524751496156892842531225600
10	9982437658213039871725064756920320000
11	776966836171770144107444346734230682311065600000

Za n > 11 nije poznata točna vrijednost broja različitih latinskih kvadrata jer je analiza prezahtjevna. (Ban & Rukavina, 2012.)

Za konstrukciju latinskog kvadrata najlakše je započeti promatranjem standardnog latinskog kvadrata. **Standardni latinski kvadrat** reda n je latinski kvadrat za kojeg vrijedi da su elementi 1 do n raspoređeni u prvome retku i prvome stupcu prirodnim redoslijedom. Standardni latinski kvadrat reda 3 je

1	**2**	**3**
2	3	1
3	1	2

Već za n = 4 postoje može se sastaviti više od jednog različitog standardnog latinskog kvadrata. Međutim, uvijek nam je najlakše oblikovati kvadrat oblika

1	***2***	**...**	***n-1***	***n***
2	*3*	...	*n*	*1*
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
n	*1*	...	*n-2*	*n-1*

Nakon oblikovanja ovakvog latinskog kvadrata, permutacijom redova, stupaca i simbola možemo doći do svih latinskih kvadrata izomorfnih s prvotnim.

1.2 Sudoku

Primjer latinskog kvadrata reda 9 je upravo popularna logička igra **Sudoku**. Glavna struktura igre Sudoku je kvadratna mreža reda 9 koja je podijeljena na devet manjih kvadrata, svaki reda 3.

5	3			7				
6			1	9	5			
	9	8					6	
8				6				3
4			8		3			1
7				2				6
	6					2	8	
			4	1	9			5
				8			7	9

Slika 2 Izgled kvadratne mreže igre sudoku prije unosa korisničkog rješenja

Cilj igre je popuniti mrežu brojevima od 1 do 9 tako da se svaki broj pojavljuje točno jednom u svakom retku, svakom stupcu i svakom malom kvadratu reda 3. Sudoku je zapravo potkategorija latinskog kvadrata koja nadilazi osnovne zahtjeve latinskog kvadrata dodatnom restrikcijom da se svaki broj mora pojaviti točno jednom i u svakom od devet malih kvadrata reda 3. Ova dodatna pravila čine Sudoku složenijom i izazovnijom varijantom latinskog kvadrata, koja zahtijeva više pažnje i strategije za rješavanje.

5	3	4	6	7	8	9	1	2
6	7	2	1	9	5	3	4	8
1	9	8	3	4	2	5	6	7
8	5	9	7	6	1	4	2	3
4	2	6	8	5	3	7	9	1
7	1	3	9	2	4	8	5	6
9	6	1	5	3	7	2	8	4
2	8	7	4	1	9	6	3	5
3	4	5	2	8	6	1	7	9

Slika 3 Izgled točno popunjene mreže igre sudoku

1.3 Ortogonalni latinski kvadrati

Za dva latinska kvadrata $A=[a_{ij}]$ i $B=[b_{ij}]$ reda n kažemo da su **ortogonalni** ako vrijedi sljedeće:

za svaki uređeni par (m, n) takav da su $m,n \in \{1, 2, \dots , n\}$ postoji točno jedan uređeni par (i, j) takav da je

$$a_{ij} = m \text{ i } b_{ij} = n.$$

Drugačije rečeno, latinski kvadrati su ortogonalni ukoliko njihovim superponiranjem dobijemo točno n^2 različitih uređenih parova.

Primjerice, sljedeći latinski kvadrati

1	2	3	4
2	1	4	3
3	4	1	2
4	3	2	1

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

su međusobno ortogonalni latinski kvadrati jer superponiranjem dobivamo

(1,1)	(2,2)	(3,3)	(4,4)
(2,3)	(1,4)	(4,1)	(3,2)
(3,4)	(4,3)	(1,2)	(2,1)
(4,2)	(3,1)	(2,4)	(1,3)

(Ban & Rukavina, 2012.)

Euler je 1776. Akademiji znanosti u St. Petersburgu predstavio svoj rad pisan na Latinskom jeziku pod imenom „De quadratis magicis". Fokus rada bili su **magični kvadrati**. Magični kvadrati su matrice reda n za koje vrijedi da je suma elemenata jednaka za svaki red, stupac i dijagonalu.

Ovdje je Euler definirao latinski kvadrat

a	b	c
b	c	a
c	a	b

gdje je došao do zaključka da će svi redovi, stupci i dijagonale imati istu sumu elemenata ako i samo ako vrijedi

$$a + b + c = 3c \text{ tj. } a + b = 2c.$$

Htio je postići magični kvadrat spajanjem netom navedenog kvadrata i kvadrata sastavljenog od grčkih slova:

γ	β	α
α	γ	β
β	α	γ

za kojeg također želimo da vrijedi

$$\alpha + \beta = 2\gamma .$$

Cilj je bio testirati hipotezu da preklapanjem ova dva kvadrata dobijemo magični kvadrat.

Dakle, spajanjem imamo

$a+\gamma$	$b+\beta$	$c+\alpha$
$b+\alpha$	$c+\gamma$	$a+\beta$
$c+\beta$	$a+\alpha$	$b+\gamma$

Nužan je uvjet da se niti jedna kombinacija slova ne zbraja dvaput, što je u ovom uvjetu ispunjeno. Ovdje smo zapravo izveli **grčko-latinski kvadrat**. Grčko-latinski kvadrat ime dobiva zbog upotrebe slova latinične i grčke abecede. On kombinira dva međusobno ortogonalna latinska kvadrata: jednog s latiničnim i jednog s grčkim slovima.

Euler je odredio parametre s (a, b, c) = (0, 6, 3) i (α, β, γ) = (1, 3, 2) te je tako dobio sljedeći magični kvadrat :

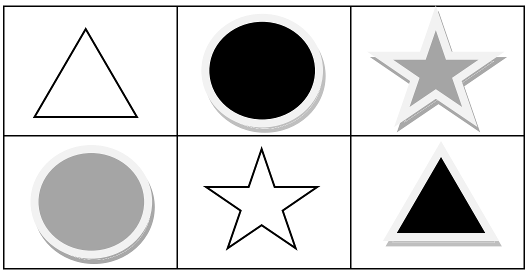
2	9	4
7	5	3
6	1	8

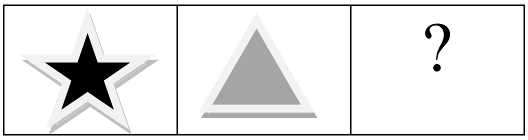
Očito, ovdje se Euler zapravo bavio ortogonalnim latinskim kvadratima iako to još nije znao. On je, zatim predložio poznati problem 36 oficira. Zadatak je sljedeći. 36 oficira koji dolaze iz 6 vojnih jedinica (po 6 iz svake) i za svaku vojnu jedinicu vrijedi da ti oficiri imaju 6 međusobno različitih činova. Ovu situaciju Euler je mukotrpno pokušavao modelirati ortogonalnim matricama reda 6, ali u tome nije uspio. Iz ovoga je zatim napravio predviđanje da se grčko-latinski kvadrat može sastaviti isključivo za veličine kvadrata $n \geq 3$ i $n \not\equiv 2 \pmod 4$, međutim ta teza se kroz narednih 180 godina skoro u potpunosti opovrgnula. (Andersen, 2007)

Ovu hipotezu nije bilo lako testirati pa je tek 1901. godine Gaston Tarry dokazao da ne postoje dva ortogonalna latinska kvadrata reda 6 ispitivanjem grubom silom. (Tarry, 1901.) On je, naime, pronašao sve latinske kvadrate šestog reda i provjerio sve kombinacije parova te uvidio da niti jedan par kvadrata nije međusobno ortogonalan. Međutim, 1959. se uspjelo dokazati da je moguće pronaći takve kvadrate za $n = 4k + 2$ (za svaki $k \geq 2$) čime je Eulerova teza opovrgnuta. (Bose & Shrikhande, 1959.)

1.4 Zagonetke s latinskim kvadratima

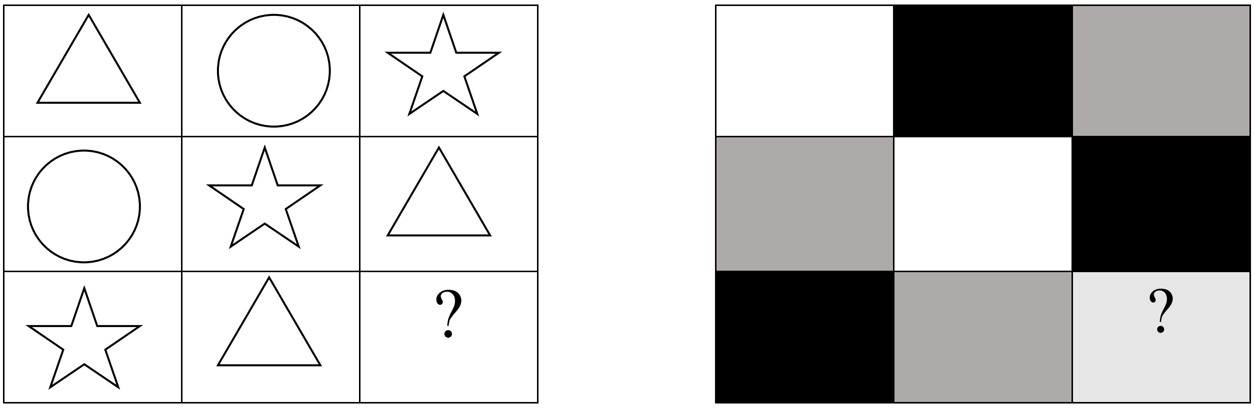
Zanimljivo mjesto gdje se testira vještina prepoznavanja latinskih kvadrata su upravo popularni IQ testovi. Naime, često se na IQ testovima mogu pronaći zagonetke poput sljedeće.





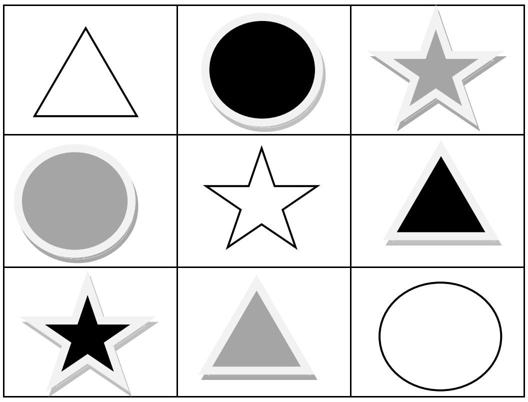
Slika 4 Primjer zagonetke koja koristi ortogonalne latinske kvadrate

Većina pri rješavanju ovog tipa zagonetke intuitivno zaključuje da u matrici trebaju biti svaki od tri oblika po tri puta gdje je svaki od ta tri puta obojan drugom bojom. Međutim, primjećujemo kako se od nas zapravo traži da popunimo kvadrat koji je sastavljen od dva međusobno ortogonalna latinska kvadrata. Ti kvadrati su:



Slika 5 Rastav zagonetke na ortogonalne latinske kvadrate

Ove latinske kvadrate zasigurno znamo popuniti. U prvome kvadratu nedostaje oblik kruga, dok u drugome bijela boja. Vidimo dakle da smo u ovim primjerima za simbole umjesto slova uzimali oblike i boje i to je sasvim validno. Stoga je rješenje ove zagonetke bijeli krug.



Slika 6 Rješenje promatrane zagonetke iz IQ testa

1.5 Analogija s bojanjem grafova

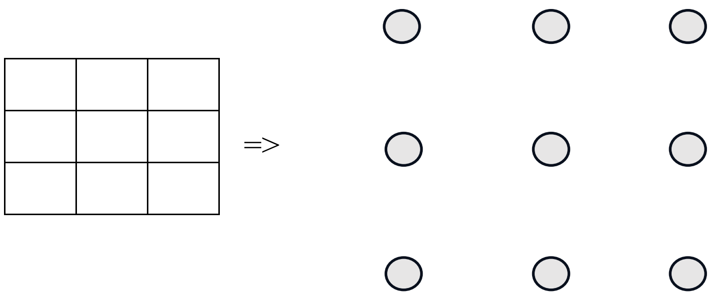
Graf je matematička struktura koja se sastoji od skupa vrhova i skupa bridova koji povezuju te vrhove. Graf se može formalno definirati kao uređeni par G=(V,E) gdje je:

- V skup vrhova, često označavamo V(G)
- E skup bridova, često označavamo E(G)

Bojanje grafa je dodjeljivanje boja vrhovima ili bridovima grafa na takav način da niti dva susjedna vrha (ili brida) ne dijele istu boju. Razlikujemo dvije glavne vrste bojenja:

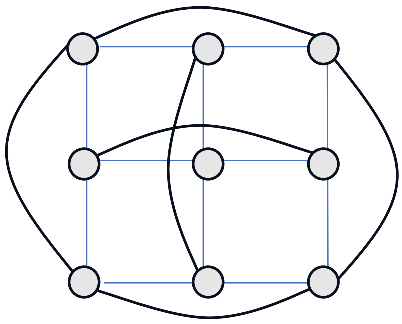
- **Bojanje vrhova:** cilj je dodijeliti boje čvorovima grafa tako da nikoja dva susjedna čvora nemaju istu boju. Broj potrebnih boja za bojanje grafa naziva se kromatski broj grafa, označen s $\chi(G)$.
- **Bojanje bridova:** cilj je dodijeliti boje bridovima grafa tako da nikoja dva ruba koji dijele zajednički vrh nemaju istu boju. Broj potrebnih boja za bojanje rubova naziva se kromatski indeks grafa, označen s $\chi'(G)$.

Latinski kvadrati se mogu poistovjetiti s grafom gdje svako polje kvadrata predstavlja jedan vrh.



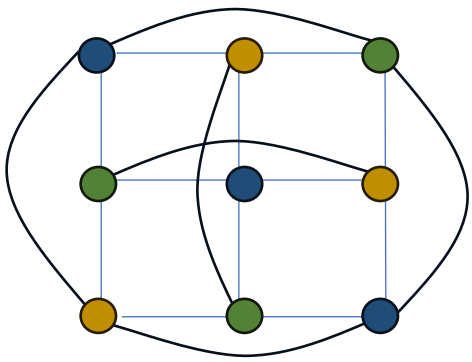
Slika 7 Analogija kvadrata i grafa

U tom grafu valja međusobno spojiti sve vrhove koji se nalaze u istome retku ili stupcu.



Slika 8 Prikaz susjedskih odnosa vrhova sukladno odnosima polja u matrici

Sada je bojanje vrhova ovoga grafa s n=3 boje na način da niti jedan par susjednih vrhova nije obojan istom bojom ekvivalentno popunjavanju 3x3 latinskog kvadrata. Pogledajmo primjer takvog bojanja:



Slika 9 Bojanje grafa sukladno pravilima latinskog kvadrata

Ako plava boja predstavlja 1, žuta 2, a zelena 3, ekvivalentni latinski kvadrat je

1	2	3
3	1	2
2	3	1

2. Dizajn eksperimenata

2.1 Opis problema

Najvažniji aspekt planiranja eksperimenta je definiranje predmeta istraživanja. Stoga se želimo baviti relevantnim pitanjima što se većinom iskazuje kao niz dobro definiranih pitanja i hipoteza. Zatim, moramo pažljivo izabrati testni skup nakon čega precizno definiramo tretmane koji će se koristiti. Tek nakon tih koraka se upuštamo u provedbu eksperimenta te statističku obradu prikupljenih rezultata i provođenje zaključaka. Prikupljanje testnog skupa uvelike ovisi o predmetu istraživanja i polju primjene. Naime, ono nam određuje hoćemo li birati jedinice što je moguće uniformnije ili po unaprijed definiranom pravilu.

Javlja se i pitanje uspostave ravnoteže između povećanja preciznosti i smanjenja troška. U velikoj većini situacija ova dva cilja rade jedan protiv drugoga tj. kako bismo povećali preciznost moramo povećati testni skup što iscrpljuje više materijalnih resursa. Zbog toga, pri dizajniranju eksperimenta moramo unaprijed promisliti i donijeti odluku o veličini testnog skupa kako bismo spriječili nepotrebno trošenje resursa, ali i lažne preciznosti. Primjerice, ako želimo provesti eksperiment na nekim skupocjenim proizvodima koji nakon testiranja više ne mogu biti pušteni u prodaju, moramo paziti da ih ne testiramo previše kako ne bismo izgubili prekomjerna financijska sredstva, ali ni premalo jer u tom slučaju su rezultati eksperimenta beskorisni.

U provedbi eksperimenata česta je upotreba grupiranja. Na taj način uklanjamo ili umanjujemo utjecaj rezultata koji nisu od značaja tj. koji su rezultat slučajne pogreške. Okosnica svih statističkih istraživanja je slučajan izbor. On je ključan kako bismo izbjegli zavisnost mjerenja i povećanje pogreške. Ovdje podrazumijevamo i slučajan odabir testnog uzorka i slučajan odabir rasporeda tretmana. U ovakvom eksperimentu rezultati pojedinih obilježja predstavljaju međusobno nezavisne veličine. Vanjske varijable mogu utjecati na rezultate eksperimenta. Identificiranje i kontroliranje tih varijabli pomaže u osiguravanju da rezultati eksperimenta budu što je moguće više rezultat tretmana, a ne nekih drugih faktora. Kontrola se može postići randomizacijom. Slučajnost se najčešće postiže pomoću generatora ili tablica slučajnih brojeva. Primjer izvedbe istraživanja koristeći princip slučajnog izbora postiže se upravo uz spomenute latinske kvadrate. (Milenković, 2012.)

2.2 Dizajn eksperimenata korištenjem latinskih kvadrata

Ranije smo se već upoznali s konceptom latinskog kvadrata, sada ćemo pogledati kako nam on služi u dizajnu eksperimenata. Latinski kvadrat je zapravo restrikcija na randomizaciju gdje se u svakome bloku kreiranom podjeli po dva faktora, svaki tretman koristi točno jedanput. Ovo nam je pogodno za provedbu istraživanja gdje na eksperimentalne jedinice imaju blokovi, tretmani, ali i još jedan faktor. Cilj je kontrolirati varijabilnost uzrokovanu blokovima kako bi se mogao izolirati efekt tretmana.

Pogledajmo ovo na primjeru testiranja sredstava za uklanjanje komaraca. Recimo da neki nepristrani kupac želi istražiti koji od pet najpopularnijih proizvođača sredstava za uklanjanje komaraca ima najučinkovitiji proizvod, kako bi ubuduće znao čije proizvode kupovati. Pri analizi i dizajnu eksperimenta kupac primjećuje da klima područja testiranja te mjesec testiranja imaju značajni utjecaj na broj komaraca, te stoga definira da će područje biti prvi, a period drugi faktor. Tretmani će, naravno, biti proizvodi različitih proizvođača. U tu svrhu, istraživač odabire pet raznovrsnih lokacija u koje postavlja veliku otvorenu kutiju u koju umeće neki od testiranih proizvoda, te eksperiment ponavlja kroz 5 različitih mjeseci. Imenujmo proizvode s latiničnim slovima A, B, C, D i E te recimo da su mjeseci testiranja siječanj, travanj, lipanj, srpanj te rujan.

Dakle

- prvi faktor je lokacija i ona ima pet mogućih vrijednosti {1, 2, 3, 4, 5}
- drugi faktor je vrijeme i ono također ima pet mogućih vrijednosti {Siječanj, Travanj, Lipanj, Srpanj, Rujan}
- tretman je proizvod jednog od pet mogućih proizvođača {A, B, C, D, E}

Stoga formira latinski kvadrat poput sljedećeg

\	1	2	3	4	5
Siječanj	A	B	C	D	E
Travan	B	E	A	C	D
Lipanj	C	A	D	E	B
Srpanj	D	C	E	B	A
Rujan	E	D	B	A	C

U ovom primjeru, latinski kvadrat omogućava istraživaču da kontrolira varijabilnost uzrokovanu klimom područja i mjesecima testiranja, izolirajući tako efekt različitih proizvoda za uklanjanje komaraca. Svaki proizvod se testira na svakoj lokaciji i u svakom mjesecu točno jedanput, čime se osigurava ravnomjerna raspodjela i eliminira pristranost.

Ovaj dizajn eksperimenta omogućava preciznije rezultate jer smanjuje utjecaj vanjskih faktora (klima i mjesec) na efikasnost proizvoda. Na taj način, kupac može objektivno procijeniti koji proizvod je najučinkovitiji.

Latinski kvadrati se često koriste u dizajnu eksperimenata kako bi se smanjila varijabilnost i kontrolirale dvije glavne varijable. Koriste se kada se u eksperimentu želi kontrolirati dva izvora varijabilnosti.

Iako je randomizacija ključna za smanjenje pristranosti u eksperimentima, latinski kvadrati ograničavaju randomizaciju jer nameću strogu strukturu na način raspoređivanja tretmana. Umjesto potpune randomizacije, latinski kvadrati osiguravaju da je svaki tretman istomjerno zastupljen u svim redovima i stupcima. To omogućuje kontrolu za dva faktora dok se još uvijek uvodi element slučajnosti kroz različite permutacije latinskih kvadrata.

Valja se dotaknuti i uporabe grčko-latinskih kvadrata u dizajnu eksperimenata. Ovakva struktura pogodna je za provedbu istraživanja s 4 faktora. Pogodni su za upotrebu u eksperimentima gdje želimo fiksirati tri parametra te proučavati četvrti, ili pak proučavati dva tretmana fiksiranjem dva parametra.

Latinski kvadrati nalaze široku primjenu u provedbi istraživanja različitim područjima, uključujući poljoprivredu, psihologiju, industrijsko inženjerstvo i računalne znanosti.

Evo nekoliko primjera njihove upotrebe:

- **Poljoprivredni eksperimenti:** Povijesno, kao u primjeru Francois Cretté de Palluela, latinski kvadrati su korišteni za optimizaciju rasporeda tretmana i kontrolu varijabilnosti među blokovima. Ovakav pristup omogućava precizniju analizu utjecaja različitih poljoprivrednih tretmana na prinos ili druge relevantne čimbenike.
- **Psihološki eksperimenti:** U psihologiji, latinski kvadrati pomažu u kontroli redoslijednih efekata u eksperimentima. Kada sudionici izvode različite zadatke u različitim redoslijedima, latinski kvadrati osiguravaju da svaki zadatak bude

ravnomjerno predstavljen u svim mogućim pozicijama, čime se smanjuje pristranost uzrokovana redoslijedom zadataka.

- **Testiranje proizvoda:** U industrijskom inženjerstvu, latinski kvadrati se koriste za testiranje različitih kombinacija faktora, poput temperature i pritiska, kako bi se optimizirali proizvodni procesi. Ovakvi eksperimenti omogućuju učinkovitije istraživanje utjecaja više varijabli na kvalitetu proizvoda, minimizirajući potrebu za velikim brojem eksperimenata.

Oni, dakle, osiguravaju strukturiran pristup koji pomaže u postizanju točnih i pouzdanih rezultata u različitim eksperimentalnim postavkama. (Eberly College of Science, 2024)

Unatoč svim navedenim prednostima korištenja latinskih kvadrata pri dizajniranju eksperimenata, mnoge su situacije kada je njihova upotreba neprikladna i ističu se njihovi nedostatci. Jedan od glavnih nedostataka latinskog kvadrata je njegova ograničenost na situacije u kojima broj tretmana mora biti jednak broju redaka i broju stupaca. Ova restrikcija smanjuje fleksibilnost dizajna modeliranog latinskim kvadratom.

Drugi je nedostatak taj što latinski kvadrati nemaju mogućnost modeliranja situacija gdje među tretmanima postoji bilo kakva interakcija. U ovakvim slučajevima, potrebno je koristiti složenije dizajne, poput grčko-latinskih kvadrata ili potpuno randomiziranih blok-dizajna.

Također, latinski kvadrati se pokazuju neprikladnima kada unutar blokova postoji heterogenost. Ako blokovi nisu homogeni, rezultati eksperimenta mogu biti iskrivljeni, jer se u analizi latinskih kvadrata uzima pretpostavka da su svi blokovi identični ili dovoljno slični. Primjer ovakvog slučaja je poljoprivredni eksperiment gdje karakteristike tla variraju unutar bloka. Ova neprikladnost može se manifestirati velikom varijabilnosti unutar rezultata zbog čega može postati vrlo teško detektirati efekte tretmana.

Zbog ovih ograničenja, važno je pažljivo razmotriti karakteristike eksperimenta prije odlučivanja o korištenju latinskog kvadrata. Istraživači moraju procijeniti specifične zahtjeve svog eksperimentalnog dizajna i razmotriti alternativne metode kada latinski kvadrat nije optimalno rješenje. (Milenković, 2012.)

2.3 Statistička obrada latinskog kvadrata

Nakon prikupljanja rezultata dobivenih na modelu latinskog kvadrata upuštamo se u analizu. Za daljnju analizu definirat ćemo y_{ijk} koji predstavlja element i-tog reda, j-tog stupca i k-tog tretmana. Pretpostavljamo da elementi i-tog stupca predstavljaju slučajan uzorak s normalnom raspodjelom $\mathcal{N}$ $(\mu_{i..}, \sigma^2)$ gdje je $\mu_{i..}$ srednja vrijednost tog retka . Isto tako, elementi j-tog stupca pripadaju raspodjeli $\mathcal{N}$ $(\mu_{.j.}, \sigma^2)$, a elementi k-tog uzorka $\mathcal{N}$ $(\mu_{..k}, \sigma^2)$. Pri analizi modela latinskog kvadrata reda n, varijable y_{ijk} ćemo opisivati kao:

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + e_{ijk} \qquad , \forall\ i = 1,\ldots,n\ , j = 1,\ldots,n\ , k = 1,\ldots,n$$

Pri čemu je

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij.}}{n^2},$$

$$\alpha_i = \mu_{i..} - \mu \text{ efekt i-tog reda },$$

$$\beta_j = \mu_{.j.} - \mu \text{ efekt j-tog stupca },$$

$$\gamma_k = \mu_{..k} - \mu \text{ efekt k-tog tretmana },$$

Suma svake od ove tri vrijednosti po cijeloj tablici je 0 tj.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \sum_{j=1}^{n} \beta_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = 0 ,$$

e_{ijk} je slučajna greška u mjerenju, te smo radi jednostavnosti tretmane označili brojevima umjesto velikim latiničnim slovima. (Milenković, 2012.)

Budući da u svakome bloku provodimo samo jedno mjerenje tj. koristimo samo jedan tretman, kako bismo definirali mjerenje dovoljno nam je znati samo vrijednosti dvije od tri varijable i, j, k. Ovo je direktna posljedica svojstva latinskog kvadrata, prema kojem se svaki tretman u svakome retku i svakome stupcu pojavljuje samo jedanput.

Na naše rezultate utječu tri faktora: redak, stupac i tretman. Stoga je prigodno obraditi rezultate koristeći trofaktorsku ANOVU. ANOVA (Analysis of Variance) je je statistička metoda koja se koristi za analizu razlika među srednjim vrijednostima (ili efektima) više grupa. ANOVA je bazirana na ideji podjele ukupne varijabilnosti na dijelove ovisno o uzročniku koji doprinosi ukupnoj varijabilnosti u nekoj mjeri. Metodu je razvio statističar Ronald Fisher (Fisher, 1925)

Pogledajmo od čega se sastoji sveukupna suma kvadrata SS_T.

$SS_T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \mu)^2$

$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left[(\mu_{i..} - \mu) + (\mu_{.j.} - \mu) + (\mu_{..k} - \mu) + (y_{ijk} - \mu_{i..} - \mu_{.j.} - \mu_{..k} + 2\mu) \right]^2$

$= n\sum_{i=1}^{n}(\mu_{i..} - \mu)^2 + n\sum_{j=1}^{n}(\mu_{.j.} - \mu)^2 + n\sum_{k=1}^{n}(\mu_{..k} - \mu)^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \mu_{i..} - \mu_{.j.} - \mu_{..k} + 2\mu)^2$

Produkti međusobnih množenja se krate jer je suma devijacija od sredine jednaka nuli.

Sveukupnu sumu kvadrata svih rezultata SS_T ćemo rastaviti na komponente po svim faktorima po kojima može doći do varijabilnosti.

$$SS_T = SS_{Redak} + SS_{Stupac} + SS_{Tretman} + SS_E$$

Pri tome vrijedi: $SS_T = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(y_{ijk} - \mu)^2$

$$SS_{Redak} = n\sum_{i=1}^{n}(\mu_{i..} - \mu)^2$$

$$SS_{Stupac} = n\sum_{j=1}^{n}(\mu_{.j.} - \mu)^2$$

$$SS_{Tretman} = n\sum_{k=1}^{n}(\mu_{..k} - \mu)^2$$

Dok SS_E računamo tako da od sveukupne sume kvadrata oduzmemo sume kvadrata sva tri faktora

$$SS_E = SS_T - SS_{Redak} - SS_{Stupac} - SS_{Tretman}$$

(Prasad, 2017.)

Za ove vrijednosti stupnjevi slobode su sljedeći (Montgomery, 2017.).

Tablica 2 Stupnjevi slobode sumi kvadrata potrebnih za statističku analizu

VRIJEDNOST	STUPANJ SLOBODE
SS_T	n^2 -1
SS_{Redak}	n-1
SS_{Stupac}	n-1
$SS_{Tretman}$	n-1
SS_E	(n-1)(n-2)

Za provedbu analize pomoću ANOVE, još nam je samo potrebno definirati sredinu kvadrata. Sredinu kvadrata dobijemo tako što određenu sumu kvadrata podijelimo s njenim stupnjem slobode.

Dakle vrijedi: $MSS_T = \frac{SS_T}{n^2 -1}$

$$MSS_{Redak} = \frac{SS_{Redak}}{\mathrm{n}-1}$$

$$MSS_{Stupac} = \frac{SS_{Stupac}}{\mathrm{n}-1}$$

$$MSS_{Tretman} = \frac{SS_{Tretman}}{\mathrm{n}-1}$$

$$MSS_E = \frac{SS_E}{(\mathrm{n}-1)(\mathrm{n}-2)}$$

Sada imamo sve što nam je potrebno za sastavljanje ANOVA tablice

Tablica 3 ANOVA tablica za analizu latinskih kvadrata

Izvor varijacije	**Stupanj slobode**	**SS**	**MSS**	**F**
Redak	n-1	SS_{Redak}	$MSS_{Redak} = \frac{SS_{Redak}}{n-1}$	$F_{Redak} = \frac{MSS_{Redak}}{MSS_E}$
Stupac	n-1	SS_{Stupac}	$MSS_{Stupac} = \frac{SS_{Stupac}}{n-1}$	$F_{Stupac} = \frac{MSS_{Stupac}}{MSS_E}$
Tretman	n-1	$SS_{Tretman}$	$MSS_{Tretman} = \frac{SS_{Tretman}}{n-1}$	$F_{Tretman} = \frac{MSS_{Tretman}}{MSS_E}$
Greška	(n-1)(n-2)	SS_E	$MSS_E = \frac{SS_E}{(n-1)(n-2)}$	
Ukupno	n^2-1	SS_T	$MSS_T = \frac{SS_T}{n^2-1}$	

U daljnjoj analizi, cilj nam je odrediti imaju li odabrani faktori statistički značajan utjecaj na rezultate. Zato ćemo postaviti neku do hipoteza:

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n \quad , \quad \text{za testiranje utjecaja faktora reda,}$$

$$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n \quad , \quad \text{za testiranje utjecaja faktora stupca,}$$

$$H_0: \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n \quad , \quad \text{za testiranje utjecaja faktora tretmana.}$$

Hipotezu koju odaberemo suprotstavljamo s hipotezom da efekti svih vrijednosti faktora nisu svi međusobno jednaki tj. barem neka vrijednost ima statistički značajan utjecaj. Potom računamo prikladnu test statistiku F_x koja će pratiti F distribuciju sa stupnjevima slobode [(n-1), (n-1)(n-2)]. Ukoliko je F_x veća od vrijednosti iščitane iz tablice razdiobe F[(n-1), (n-1)(n-2)] za određenu razinu značajnosti, odbacujemo nultu hipotezu.

Primjerice, ako smo odabrali hipotezu za testiranje utjecaja faktora reda

$$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n \ ,$$

računamo F_{Redak} prema vrijednostima iz ANOVA tablice (*Tablica 3*). Definiramo razinu značajnosti na npr. 5% te iščitavamo vrijednost F[(n-1), (n-1)(n-2)] za razinu značajnosti 5 % te ako vrijedi $F < F_{Redak}$ odbacujemo nultu hipotezu. (Prasad, 2017.)

2.4 Primjer modela latinskog kvadrata

U ovom odjeljku baviti ćemo se sljedećim problemom.

„ Kompanija koja se bavi telefonskom prodajom razvija 4 ponude za svoje kupce. U cilju im je doznati koja je od razvijenih ponuda kupcima najprimamljivija. Pri dizajniranju eksperimenata inženjer shvaća da 4 zaposlenika zadužena za zvanje kupaca imaju različito razvijene vještine te postotke uspješnih prodaja. Također, ponude se kupcima nude svaka u odvojenome pozivu. Zbog toga je za predvidjeti da bi kupci mogli postati iritabilni kada im pristigne primjerice treći i četvrti poziv. Drugim riječima, moguće je da će kupac biti otvoreniji i strpljiviji pri prvome pozivu dok će možda već na 4. poklopiti slušalicu. Stoga inženjer razvija dizajn u kojem kontrolira varijabilnost uzrokovanu redoslijedom poziva te operaterom koji obavlja poziv. Mjeriti ćemo postotak uspješnih prodaja. Pogodan model za ovo istraživanje je upravo latinski kvadrat koji slijedi. Analizirajmo podatke iz ovog eksperimenta (α = 0,05) i donesimo odgovarajuće zaključke.

Tablica 4 Primjer primjene latinskog kvadrata na konkretnom istraživanju

Redoslijed zvanja	Operater koji obavlja poziv			
	1	2	3	4
1	C=16	D=6	A=7	B=5
2	B=10	C=14	D=11	A=4
3	A=8	B=10	C=14	D=7
4	D=10	A=4	B=6	C=10

Provesti ćemo statističku obradu ovoga primjera u programu R pogodnim za ovakav tip analiza.

```
data <- data.frame(
  redosljed_zvanja = factor(rep(1:4, each=4)),
  operater = factor(rep(1:4, times=4)),
  ponuda = factor(c("C", "D", "A", "B", "B", "C", "D", "A", "A", "B", "C", "D", "D", "A", "B", "C")),
  mjerenje = c(16, 6, 7, 5, 10, 14, 11, 4, 8, 10, 14, 7, 10, 4, 6, 10)
)
model <- aov(mjerenje ~ ponuda + redosljed_zvanja + operater, data = data)
summary(model)
```

Slika 10 Obrada prikupljenih podataka u R-u

```
                 Df Sum Sq Mean Sq F value
ponuda            3 130.25   43.42   20.84
redosljed_zvanja  3  14.25    4.75    2.28
operater          3  42.75   14.25    6.84
Residuals         6  12.50    2.08
                  Pr(>F)
ponuda           0.00142 **
redosljed_zvanja 0.17947
operater         0.02308 *
Residuals
---
Signif. codes:
0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Slika 11 rezultati statističke obrade primjera u R-u

Vidimo da nam ispis daje numeričku vrijednost svih vrijednosti definiranih u tablici ANOVE (*Tablica 3*). Pri analizi dobivenih rezultata nužno je fokusirati se na P-vrijednosti (stupac Pr(>F)) jer nam je ona ključna za odluku o odbacivanju nulte hipoteze. P vrijednost je pojam iz statistike koji predstavlja vjerojatnost dobivanja rezultata koji su jednako ekstremni ili ekstremniji od dobivenih rezultata, pod pretpostavkom da je nulta hipoteza istinita. P vrijednost se koristi za testiranje hipoteza u statistici i određuje koliko su rezultati eksperimenta značajni. Niska p vrijednost ukazuje na to da su rezultati statistički značajni i da postoji dovoljno dokaza protiv nulte hipoteze, što sugerira da se nulta hipoteza može odbaciti. Dakle, definirali smo razinu značajnosti α = 0,05 te ukoliko je P-vrijednost manja od toga, odbacujemo pripadajuću nultu hipotezu.

Dakle, nultu hipotezu

$H_0: \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ za testiranje utjecaja faktora redoslijeda zvanja

nećemo odbaciti, dok nulte hipoteze

$H_0: \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n$ za testiranje utjecaja faktora operatera

$H_0: \gamma_1 = \gamma_2 = \cdots = \gamma_n$ za testiranje utjecaja faktora ponude

hoćemo. U specifičnom slučaju našeg inženjera, on doznaje da ponude nisu jednako primamljive kupcima, te da nisu svi operateri jednako uspješni.

3. Interaktivna webaplikacija za popunjavanje latinskih kvadrata

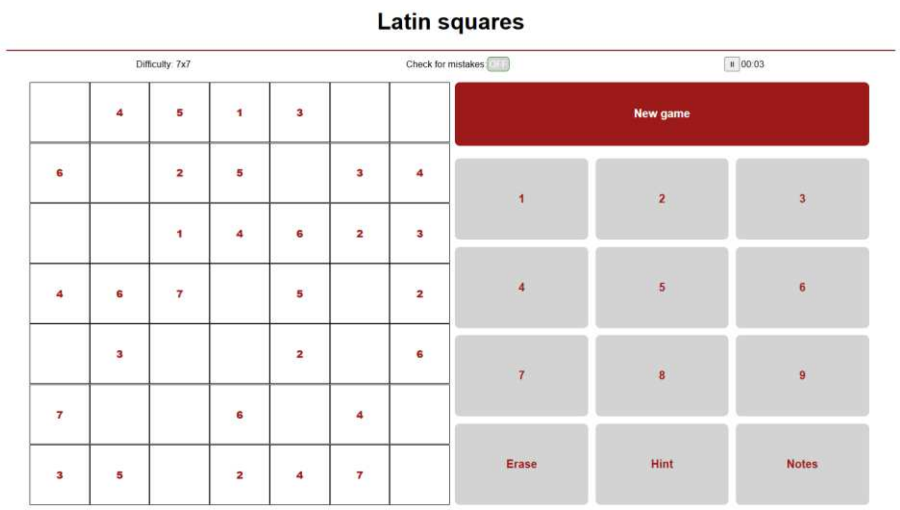
U svrhu predočavanja izgleda i funkcionalnosti latinskih kvadrata smo izradili interaktivnu aplikaciju za popunjavanje latinskih kvadrata.

3.1 Osnovne funkcionalnosti

Na primarnom sučelju, korisnik ima opciju biranja veličine latinskog kvadrata koji želi popunjavati. Opcije sežu od reda 3 do reda 9.

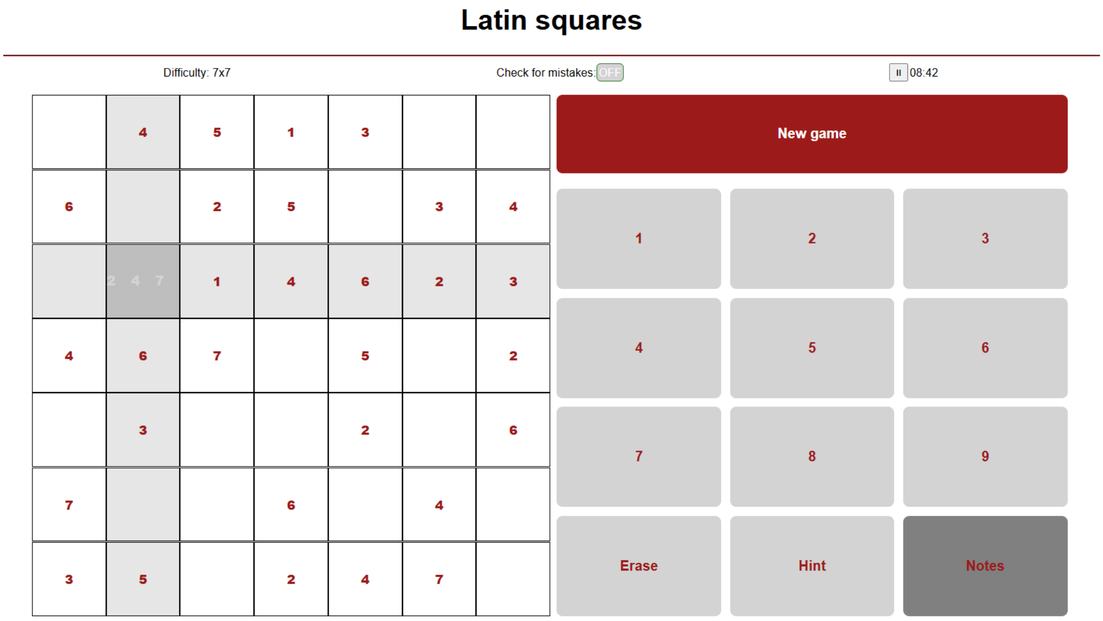
Slika 12 Primarno sučelje web aplikacije

Nakon odabira težine, prikazuje se latinski kvadrat reda n kojemu se vide vrijednosti samo nekolicine polja.



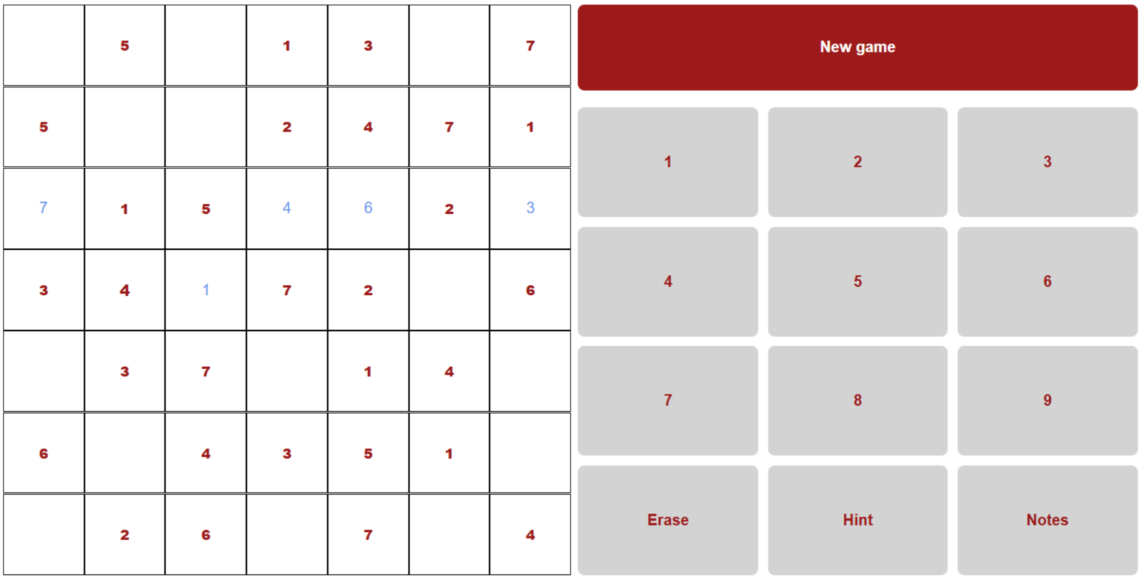
Slika 13 Izgled interaktivnog sučelja za popunjavanje latinskog kvadrata

Cilj korisnika je da točno dopuni predočeni latinski kvadrat koristeći stečeno znanje. Dakle, imajući na umu da brojevi 1 do n moraju biti pozicionirani u svakome redu i svakome stupcu točno jedanput, korisnik označava prazna polja te upisuje brojeve koje smatra da ondje pripadaju. Ukoliko smatra da je pogriješio, ima opciju brisanja unesenih podataka. Pri rješavanju velikih latinskih kvadrata, može biti korisno koristiti opciju unošenja bilješki (notes) gdje korisnik postupno sužava kandidate prikladne za određena polja.



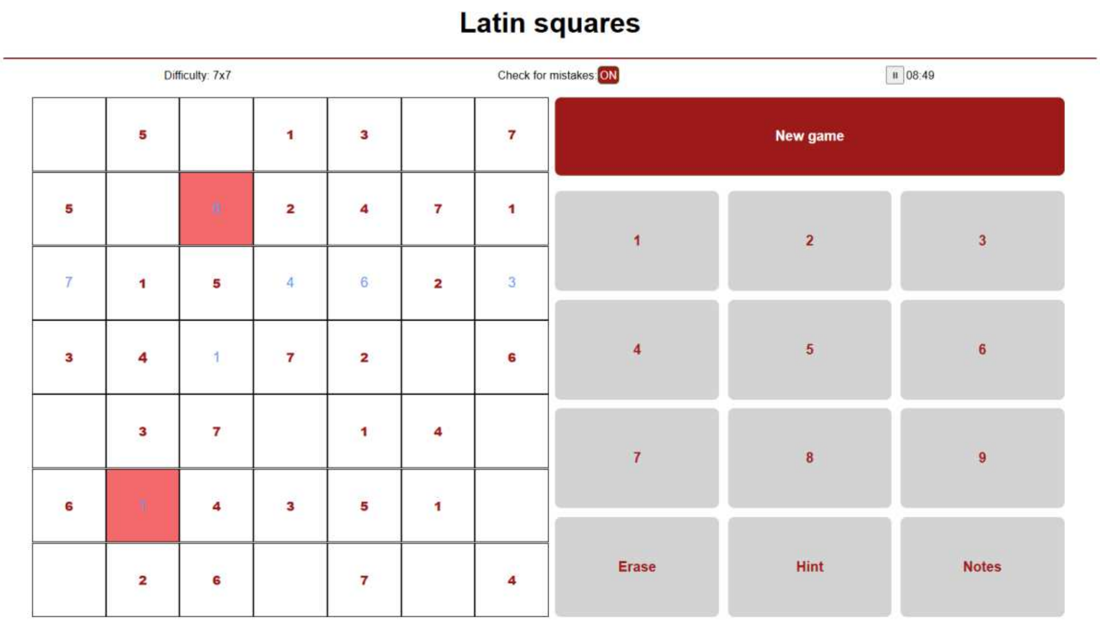
Slika 14 Korištenje opcije vođenja bilješki

Korisnicima kojima ipak treba malo pomoći, dostupna je opcija „hint“ s kojom se može odabrati polje za koje nam ona vraća točnu vrijednost koja se onda unosi te izgleda poput vrijednosti koje su bile inicijalno unesene. Vrijednosti koje korisnik sam unese su plave boje kako bi se diferencirale od vrijednosti koje su zasigurno točne te time korisnik može provjeriti svoje rješenje.



Slika 15 Usporedba unaprijed definiranih i unesenih vrijednosti

Kada korisnik misli da je stigao do točnog rješenja ili želi provjeriti točnost podataka koji su do sada uneseni, odabire opciju „check for mistakes“. Nakon odabira provjere, na latinskom kvadratu se netočno unesene vrijednosti bojaju crvenom bojom, dok pozadina točnih vrijednosti ostaje bijela.



Slika 16 Korištenje opcije provjere točnosti

Nakon označavanja bilo kojeg polja, opcija provjere se gasi te korisnik može ispraviti svoje greške. Međutim, ukoliko je pri odabiru provjere čitav latinski kvadrat popunjen i sve su vrijednosti ispravne, korisniku se prikazuje poruka o uspješnom popunjavanju te mu se prikazuje količina proteklog vremena.

Slika 17 Prikaz uspješnog završetka popunjavanja

3.2 Pozadinske funkcionalnosti

Svaki puta kada korisnik na početnom sučelju odabere novu igru, prikazat će mu se potpuno drugačiji nasumično generirani latinski kvadrat spreman za popunjavanje. Ovo će vrijediti zbog algoritma pozadinski definiranog koji kreira ovakav, djelomično popunjen, latinski kvadrat. Prvi korak algoritma je kreirati standardni latinski kvadrat dimenzija n

Tablica 5 Standardni latinski kvadrat kojeg koristimo u kreaciji randomiziranih latinskih kvadrata

1	***2***	…	***n-1***	***n***
2	*3*	…	*n*	*1*
⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
⋮	⋮	⋱	⋮	⋮
n	*1*	…	*n-2*	*n-1*

U cilju nam je, naravno, randomizirati ovaj kvadrat tj. želimo svaki puta generirati latinski kvadrat s potpuno različitim rasporedom elemenata. Zato nad ovim standardnim kvadratom vršimo zamjene redaka i stupaca. Prvo nasumični broj puta mijenjamo po dva nasumično odabrana retka, nakon čega radimo istu stvar za stupce. Ovime ne narušavamo pravila koja latinski kvadrat mora poštovati tj. naš kvadrat je i dalje latinski. Ovime je dovršen postupak kreiranja nasumičnog latinskog kvadrata reda n. Sve što je preostalo je odabrati koja polja će biti vidljiva korisniku, a koja ne tj. kreirati parcijalni latinski kvadrat. Međutim, ovdje trebamo biti oprezni. Moramo voditi računa o tome da se naš parcijalni kvadrat mora moći popuniti i to na točno jedan jedinstven način. Drugim riječima, točno rješenje mora biti jedinstveno kako bismo mogli evaluirati korisnikovo rješenje. Ovo je provedeno na način da se selektira nasumično odabrano polje te se provjerava može li se njegova vrijednost izbrisati.

Vrijednost polja se smije izbrisati ako unija svih polja koja su u istome stupcu ili retku sadrži sve vrijednosti 1 do n osim vrijednosti u odabranome polju.

Drugačije rečeno, a_{ij} brišemo ako vrijedi

$$\{1,2\ldots,n\} \setminus \{a_{ij}\} \subseteq \left(\left(\bigcup_{x=1}^{n} a_{ix}\right) \cup \left(\bigcup_{y=1}^{n} a_{yj}\right)\right).$$

Nakon nasumičnog odabira polja i provjere ispunjava li ono uvjete za brisanje vrijednosti, ako polje nije pogodno za brisanje ili je njegova vrijednost već pobrisana, povećavamo vrijednost brojača neuspjelih pokušaja brisanja. Na temelju vrijednosti brojača odlučujemo kada će algoritam završiti. Za latinske kvadrate reda manjeg od 5, limit je postavljen na 25 promašaja. Za kvadrate reda manjeg od 8, limit je 40 promašaja. Za kvadrate reda 8 i 9, limit iznosi 75 promašaja.

U nastavku ćemo prikazati pseudokod ovog dijela izrade aplikacije u svrhu boljeg shvaćanja.

```
static initializeLatinSquare(dimenzija){
      matrica=kreiramo kvadrat prikazan tablicom 5
      this.randomizeLatinSquare(matrica,dimenzija);
   }
static randomizeLatinSquare(matrica,dimenzija){
      koliko_redova_mijenjamo=nasumični cijeli broj između 8 i 15
      koliko_stupaca_mijenjamo= nasumični cijeli broj između 8 i 15

      for(let i=0;i<koliko_redova_mijenjamo;i++){
          red1, red2= nasumični broj od 0 do n-1
          zamijeni retke red1 i red2 u kvadratu
          koliko_redova_mijenjamo--
      }
     for(let i=0;i<koliko_stupaca_mijenjamo;i++){
            stupac1, stupac2= nasumični broj od 0 do n-1
```

```
            zamijeni stupce stupac1 i stupac2 u kvadratu
            koliko_stupaca_mijenjamo--
        }
        this.algorithmPartial(matrica,dimenzija);
    }
static algorithmPartial(matrica,dimenzija){
        let broj_promašaja, limit_promasaja =0;
        if(dimenzija<5) limit_promasaja =25;
        else if (dimenzija<8) limit_promasaja=40;
        else limit_promasaja=75;

        while(broj_promašaja<limit_promasaja){
            let row, col = nasumični broj od 0 do n-1;
            let odabrano_polje=matrica[row][col];
            let brojeviokolo= set vrijednosti u istome retku i
            istome stupcu;

            ako    je    odabrano    polje    već    pobrisano
broj_promašaja++
            let mozemobrisat=true;
            for (let i = 1; i < dimenzija + 1; i++) {
                if (i != vrijednosti odabranog polja a nije u
                setu      brojeviokolo)
                     mozesbrisat=false;
              }
        if(mozesbrisat)matrica[row][col]=null;
        else broj_promasaja ++;
    }
}
```

Zaključak

Latinski kvadrati su matrice reda n za koje vrijedi da se elementi 1 do n nalaze u svakome stupcu i u svakome retku točno jedanput. Implicitno su se koristili i prije nego što ih je Leonhard Euler konceptualno definirao, istražio svojstva i nadjenuo im ime.

Latinski kvadrati se često koriste u eksperimentalnom dizajnu kako bi se smanjila varijabilnost i kontrolirale dvije glavne varijable. Ipak, umjesto potpune randomizacije, osiguravaju da je svaki tretman jednakomjerno zastupljen u svim redovima i stupcima. Nalaze široku primjenu u različitim područjima, uključujući poljoprivredu, psihologiju, industrijsko inženjerstvo i računalne znanosti.

Okosnica svih statističkih istraživanja je slučajan izbor. On je ključan kako bismo izbjegli zavisnost mjerenja i povećanje pogreške. Ipak, u cilju nam je pronaći način na koji možemo osigurati randomizaciju uz što manji financijski trošak. Upravo su latinski kvadrati dobar kandidat za dizajn ovakvog eksperimenta.

Latinski kvadrati ipak ne valja birati kao model dizajna ukoliko broj tretmana nije jednak broju vrijednosti dva faktora po kojima sastavljamo kvadrat, ukoliko među tretmanima postoji interakcija, ili pak ukoliko su blokovi heterogeni.

U radu je prikazan način statističke obrade podataka dobivenih u eksperimentu na osnovi modela latinskog kvadrata te objašnjen način izvlačenja zaključaka iz istih.

Također, prikazana je funkcionalnost interaktivne aplikacije za popunjavanje latinskih kvadrata kao i način kreiranja parcijalnog latinskog kvadrata.

Literatura

Alturky, M. (2007.). On the number and equivalent latin squares. *Journal of Combinatorial Designs*, str. 71.-74.

Andersen, L. D. (2007). *Chapter on The history of latin squares.* Aalborg Universitet.

Ban, S., & Rukavina, S. (2.. travanj 2012.). Latinski kvadrati. *Matematičko fizički list*, str. 219.-222.

Bose, R. C., & Shrikhande, S. S. (1959.). *ON THE CONSTRUCTION OF SETS OF MUTUALLY ORTHOGONAL LATIN SQUARES AND THE FALSITY OF A CONJECTURE OF EULER.*

Eberly College of Science. (2024). *STAT 503 Design of Experiments*. Dohvaćeno iz Penn State University: https://online.stat.psu.edu/stat503/lesson/4/4.3

Fisher, R. (1925). *Statistical Methods for Research Workers.* Edinburg: Oliver & Boyd.

Milenković, D. (2012.). *Model latinskih kvadrata u planiranju eksperimenata.* Beograd: Univerzitet u Beogradu .

Montgomery, D. C. (2017.). *Design and Analysis of Experiments.* Arizona State University.

Prasad, J. (2017.). *Unit-11 Latin Square Design.* Dohvaćeno iz eGyanKosh: https://egyankosh.ac.in/bitstream/123456789/20729/1/Unit-11.pdf

Tarry, G. (1901.). *Le Probléme des 36 Officiers.* l'Association Française pour l'Avancement des Sciences.

Young, E. (Svibanj 2011). *Euler Squares - Euler's Officer Problem*. Dohvaćeno iz Mathematical assosiation of America: https://maa.org/press/periodicals/convergence/euler-squares-eulers-officer-problem

Sažetak

Latinski kvadrat je matematički koncept koji je izuzetno pogodan za upotrebu u dizajnu određenih eksperimenata. Ova metoda osigurava efikasnu randomizaciju uz relativno niske materijalne i financijske troškove. U ovom radu definirana su osnovna svojstva latinskih kvadrata, te su detaljno opisani načini njihove uporabe i analize rezultata u eksperimentalnim dizajnima.

Osim teoretskog pregleda, prikazana je i funkcionalnost interaktivne web aplikacije koja omogućuje jednostavno popunjavanje latinskih kvadrata. Ova aplikacija nudi korisnicima priliku za upoznavanje s osnovnim svojstvima latinskih kvadrata kroz zanimljivu igru.

Summary

A Latin square is a mathematical concept that is extremely suitable for use in experiment design. This method provides efficient randomization with relatively low material and financial costs. In this paper, the basic properties of Latin squares are defined , and the methods of their use in experimental designs and analysis of the results are described in detail . In addition to the theoretical overview, we present an interactive application for completing partially filled Latin squares. This application offers users an opportunity to learn about the basic properties of Latin squares through an interesting game.