Algoritam konstrukcije t-dizajna zasnovan na razvijanju matrica taktičke dekompozicije

Martinjak, Ivica

Algoritam konstrukcije t-dizajna zasnovan na razvijanju matrica taktičke dekompozicije

Ivica Martinjak
ivica.martinjak@fer.hr

29. kolovoza 2010.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvod

Teorija dizajna je dio diskretne matematike koji se bavi posebno pravilnim konačnim incidencijskim strukturama. Incidencijska struktura je uređena trojka $(\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ sastavljena od skupa točaka $\mathcal{P}$, skupa blokova $\mathcal{B}$ i relacije incidencije I na tim skupovima; a prirodno se javlja u raznim oblicima i situacijama. Osnovna pitanja kojima se teorija dizajna bavi jesu pitanja egzistencije i klasifikacije kombinatoričkih dizajna s određenim, unaprijed zadanim parametrima. Ta je zadaća iznimno zahtjevna budući da prostor rješenja kombinatoričkih struktura izrazito raste s brojem točaka, te se redovito govori o kombinatoričkoj eksploziji. Obzirom da potpuna klasifikacija takvih struktura nije moguća, konstrukciji se pristupa pretpostavljanjem dodatnih pravilnosti koje struktura sadrži. Od posebnog su interesa dizajni s trivijalnom grupom automorfizama, kakvih je najviše, a vrlo malo poznatih - zbog otežane konstrukcije jer ne sadrže nikakve dodatne simetrije. Ovaj se rad bavi razvojem efikasnih algoritama za konstrukciju kombinatoričkih struktura, u prvom redu t-dizajna, na osnovi taktičke dekompozicije kakva bi mogla nastati djelovanjem automorfizma prim reda. Pri tome, jedan od glavnih ciljeva su baš konstrukcije dizajna s trivijalnom grupom automorfizama.

Naziv kombinatorički dizajn pojavljuje se prilikom eksperimenata u biologiji 30-ih godina 20-og stoljeća. No, istraživanje takvih objekata seže znatno ranije u prošlost. Sredinom 19-og stoljeća Thomas P. Kirkman, Jacob Steiner i ostali daju klasifikacijske rezultate za više kombinatoričkih objekata, uključujući i Steinerove sustave trojki. Među najznačajnije rezultate iz razdoblja prije upotrebe računala u istraživanju kombinatoričkih dizajna spada klasifikacija Steinerovog sustava trojki reda 15. Sredina 20-og stoljeća donosi nekoliko teorijskih rezultata s područja nužnih uvjeta postojanja kombinatoričkih dizajna. Nakon toga, razvojem računalnih sustava započinje razdoblje upotrebe računala u istraživanju sa značajnim rezultatima u drugoj polovici tog stoljeća.

Pri tome, od posebnog su interesa 2-dizajni, dakle t-dizajni s parametrima 2-(v, k, λ). Posebnost 2-dizajna, u odnosu na t-dizajne, je sadržavanje svakog para točaka u λ blokova, te činjenica da je svaki t-dizajn ujedno i 2-dizajn. Nadalje, istaknutu klasu unutar 2-dizajna čine dizajni s jednakim brojem točaka i blokova. Takvi se dizajni nazivaju simetričnima i predstavljaju konačne strukture visoke pravilnosti. U ovom radu posebni istraživački napori posvećeni su upravo konstrukcijama simetričnih dizajna.

Svi razmatrani dizajni, u ovome radu, reprezentirani su pomoću incidencijskih matrica, te se kod svih algoritama konstrukcije dizajna svode na konstrukciju incidencijskih matrica. Razvijeni algoritmi implementirat će se u programskom jeziku C, a izvodit će se na računalima s Windows i Linux operativnim sustavima.

U istraživanju se polazi od metode konstrukcije kombinatoričkih dizajna pomoću taktičke dekompozicije. Prema toj metodi najprije se pretpostavlja djelovanje određene grupe automorfizama na promatrani dizajn. Redovito se tada pretpostavlja djelovanje grupe prim reda, prvenstveno zbog činjenice da se provođenjem parcijalnih klasifikacija za svaki prim automorfizam koji na istraživani dizajn djeluje, dobivaju sve dotične strukture s netrivijalnom grupom automorfizama. Vrlo je značajno da u tom slučaju duljine staza točaka i blokova mogu biti jedino 1 i red pretpostavljenog automorfizma, budući da je konstrukcija time olakšana. Međutim, ovaj rad donosi i drugačiji pristup istraživanju tj. konstrukciji dizajna. Naime, zaboravljanjem na djelovanje grupe pristupit će se konstruiranju novih dizajna, i to s primarnim ciljem dobivanja struktura s trivijalnom grupom automorfizama. Budući da je broj 3 najmanji red prim automorfizma koji omogućuje izostavljanje djelovanja grupe, u ovom radu primarno će se pretpostavljati upravo djelovanje automorfizma reda 3.

Drugo poglavlje rada iznosi osnove teorije dizajna te činjenice iz teorije grupa potrebne za razumijevanje metode taktičke dekompozicije. Treće poglavlje je središnje poglavlje ovog rada budući da donosi opis razvijenog algoritma za indeksiranje matrica taktičke dekomopozicije. Osim opisa algoritma i njegovih inačica, opisane su i konstrukcije dizajna s malim parametrima, koje su uglavnom izvedene sa svrhom provjere razvijenih algoritama. Slijede tri poglavlja posvećena konstrukcijama simetričnih, nesimetričnih 2-dizajna i 3-dizajna, među kojima se nalaze i dizajni s otvorenim pitanjima klasifikacije. Naposljetku se opisuju razvijeni pomoćni računalni programi. Rad je opremljen s četiri priloga, koji se nalaze na priloženom CD-u. Prvi prilog sadrži incidencijske matrice konstruiranih dizajna, drugi prilog sadrži datoteke s izvornim kodom razvijenih programa za indeksiranje, u trećem prilogu se nalaze datoteke s izvornim kodom pomoćnih računalnih programa, dok se u četvrtom prilogu mogu pronaći korisne proračunske tablice i druge datoteke korištene pri analizi algoritama.

Poglavlje 2

Djelovanje grupa na kombinatoričke dizajne

2.1 Kombinatorički dizajni

Definicija 2.1 *Neka su t, v, k i λ prirodni brojevi i neka vrijedi $v > k \geq t \geq 1$ i $\lambda \geq 1$. Neka su $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_v\}$ i $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_b\}$ skupovi, a $I \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{B}$ relacija incidencije na tim skupovima. Kombinatorički dizajn $\mathcal{D}$ s parametrima t-(v, k, λ) je uređena trojka $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$, sastavljena od skupa točaka $\mathcal{P}$, skupa blokova $\mathcal{B}$ i relacije incidencije I, za koju vrijede aksiomi:*
(i) $\mathcal{D}$ ima v točaka,
(ii) svaki je blok od $\mathcal{D}$ incidentan s k točaka,
(iii) svakih je t različitih točaka od $\mathcal{D}$ sadržano u λ blokova od $\mathcal{D}$,
(iv) $1 < k < v - 1$.
Takav kombinatorički dizajn naziva se t-dizajn. Pri tome je sa b označen broj blokova u dizajnu.

Iz navedenih aksioma proizlaze još neke pravilnosti u strukturi kombinatoričkih dizajna. Može se pokazati da je svaka točka iz skupa $\mathcal{P}$ incidentna s istim brojem blokova r, iz skupa $\mathcal{B}$. Parametri b i r jednoznačno su određeni osnovnim parametrima dizajna t, v, k i λ na način

$$b = \lambda \binom{v}{t} / \binom{k}{t}, \tag{2.1}$$

$$r = \lambda \binom{v-1}{t-1} / \binom{k-1}{t-1}. \tag{2.2}$$

Nadalje, vrijedi sljedeći odnos između parametara v, k, b i r.

Propozicija 2.1 *Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ dizajn s parametrima t-(v, k, λ). Tada vrijedi*

$$v \cdot r = b \cdot k. \tag{2.3}$$

Dokaz. Prebrojimo skup $S = \{(p, B) \mid p \in \mathcal{P},\ \ B \in \mathcal{B},\ \ p \in B\}$ na dva načina. Točku $p \in \mathcal{P}$ očito je moguće odabrati na v načina. Nadalje, za svaki p postoji r blokova koji su incidentni sa p, pa vrijedi $|S| = v \cdot r$. U drugu ruku, očito postoji b načina za izbor bloka $b \in \mathcal{B}$. Budući da svaki blok sadrži k točaka slijedi $|S| = b \cdot k$.

Želi li se istaći vrijednost svih parametara, sustav parametara od $\mathcal{D}$ reprezentira se i zapisom t-(v, b, r, k, λ).

Od posebnog interesa u teoriji dizajna su 2-*dizajni*, dakle t-dizajni s parametrima 2-(v, k, λ). Posebnost 2-dizajna, u odnosu na ostale t-dizajne, je sadržavanje svakog para točaka u λ blokova, te činjenica da je svaki t-dizajn ujedno i 2-dizajn [18], za $t \geq 2$. Parametri 2-dizajna v, k, λ *i* r povezani su relacijom

$$\lambda \cdot (v - 1) = r \cdot (k - 1), \tag{2.4}$$

što slijedi iz 2.2.

Istaknutu klasu 2-dizajna čine dizajni koji imaju jednaki broj točaka i blokova. Takvi se dizajni nazivaju *simetrični dizajni*. Više je klasa simetričnih dizajna [10], s otvorenim pitanjima postoji li konačan ili beskonačan broj pripadnika tih klasa.

Kombinatorički dizajn je moguće reprezentirati pomoću 0-1 matrice, a takav zapis posebice je pogodan kod konstrukcija pomoću računala.

Definicija 2.2 *Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ t-dizajn i neka je $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_v\}$ a $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_b\}$. Matrica $M = [m_{ij}]$, dimenzija $v \times b$, definirana sa*

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{ako } (p_i, B_j) \in I \\ 0, & \textit{inače} \end{cases}$$

naziva se incidencijska matrica t-dizajna $\mathcal{D}$.

Lako se vidi da je neka 0-1 matrica dimenzija $v \times b$ incidencijska matrica dizajna t-(v, k, λ) ako i samo ako ima sljedeća tri svojstva:
(i) svaki stupac ima k jedinica,
(ii) svaki redak ima r jedinica i
(iii) bilo kojih t redaka ima na točno λ pozicija (stupaca) same jedinice.

Definicija 2.3 *Neka su* $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ *i* $\mathcal{D}' = (\mathcal{P}', \mathcal{B}', I')$ *dva t-dizajna. Bijekcija* $\phi : \mathcal{P} \cup \mathcal{B} \to \mathcal{P}' \cup \mathcal{B}'$ *naziva se izomorfizam ako vrijedi:*
(i) ϕ *preslikava točke na točke a blokove na blokove, te*
(ii) $(p, B) \in I \Leftrightarrow (\phi(p), \phi(B)) \in I', \ \ \forall p \in \mathcal{P}, \ \ \forall B \in \mathcal{B}$.

Za dva t-dizajna $\mathcal{D}$ i $\mathcal{D}'$ kaže se da su *izomorfni*, i piše $\mathcal{D} \approx \mathcal{D}'$, ako postoji izomorfizam s $\mathcal{D}$ na $\mathcal{D}'$. Izomorfizam t-dizajna $\mathcal{D}$ na samog sebe naziva se *automorfizam* od $\mathcal{D}$. Poznato je da skup svih automorfizama strukture $\mathcal{D}$ čini grupu obzirom na standardno komponiranje funkcija, i ta se grupa naziva *puna grupa automorfizama* a označava s $Aut(\mathcal{D})$. *Red grupe automorfizama dizajna* $\mathcal{D}$ definira se kao kardinalni broj pripadne pune grupe automorfizama te označava sa $|Aut(\mathcal{D})|$.

Osim grupe automorfizama, kombinatorički dizajn ima i drugih strukturalnih karakteristika. Za t-dizajn $\mathcal{D}$ kaže se da je *jednostavan* ukoliko se blokovi ne ponavljaju. Danom t-dizajnu $\mathcal{D}$ može se pridružiti dualna struktura *(dual)* na način da se zamijene uloge točaka i blokova. Posebno, ako se radi o simetričnom 2-dizajnu, može se definirati pojam samodualnosti: ukoliko je dual izomorfan izvornom dizajnu $\mathcal{D}$ tada se $\mathcal{D}$ naziva *samodualnim*. *Komplement* je struktura pridružena danom t-dizajnu na način da se zamijeni odnos između incidentnih i neincidentnih parova točaka i blokova, što znači da je komplement moguće kreirati zamjenom nula i jedinica u incidencijskoj matrici. Broj $n = r - \lambda$ naziva se *red t-dizajna*.

Primjer 2.1 *Jedna reprezentacija simetričnog dizajna* 2-$(7, 3, 1)$ *(Fanova ravnina) je sljedeća:*

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \\ \mathcal{B} &= \{123, 145, 167, 246, 257, 347, 356\}. \end{aligned}$$

Prethodni primjer prikazuje najmanji netrivijalni dizajn iz klase *konačnih projektivnih ravnina*. Konačna projektivna ravnina je simetrični dizajn kod kojeg svaka dva bloka imaju jednu zajedničku točku, tj. vrijedi $\lambda = 1$. U ovom primjeru svaki blok sadrži 3 točke, a svaki se par točaka nalazi u jednom bloku; sukladno aksiomima kombinatoričkog dizajna. Svaka je točka incidentna sa 3 bloka a budući da se radi o simetričnom dizajnu vrijedi $k = r$. Do na izomorfizam postoji jedna Fanova ravnina, i njezin je red grupe automorfizama 168. Fanova ravnina je ujedno i *Steinerova trojka* STS(7) dok je njezin *komplement dvoravnina* 2-$(7, 4, 2)$. Dvoravnina je simetrični 2-(v, k, λ) dizajn, za kojeg vrijedi $\lambda = 2$. Više o vezi između pojedinih klasa kombinatoričkih dizajna može se vidjeti u [10].

Primjer 2.2 *Nesimetrični dizajn s parametrima* 2-$(9, 3, 1)$ *može se reprezentirati incidencijskom matricom* M*,*

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

U prethodnom primjeru riječ je o *konačnoj afinoj ravnini* (kombinatorički dizajn s parametrima 2-$(n^2, n, 1)$, gdje je n prirodni broj) najmanjih netrivijalnih parametara. Do na izomorfizam, postoji jedna ravnina s ovim parametrima i njezin je red grupe automorfizama 432. Inače, značajna je veza između projektivnih i afinih ravnina: afina se ravnina može dobiti iz projektivne odstranjivanjem jednog bloka i svih njegovih točaka [31].

Primjer 2.3 *Neka je* $\mathcal{P}$ *skup točaka koje predstavljaju* 8 *vrhova kocke. Neka je skup blokova* $\mathcal{B}$ *generiran na sljedeći način: a) prvih* 8 *blokova je formirano od neke točke iz* $\mathcal{P}$ *i njene tri susjedne točke, b) daljnjih* 6 *blokova tvore parovi dijagonalno suprotnih točka. Tada* $\mathcal{P}$ *i* $\mathcal{B}$ *tvore dizajn s parametrima* 3-$(8, 4, 1)$*. Do na izomorfizam postoji jedan takav dizajn, s redom grupe* 1344*. Riječ je o Hadamard-ovom* 3*-dizajnu najmanjeg reda; opći oblik parametara te klase dizajna je* 3-$(4n, 2n, n-1)$*, gdje je* n *prirodni broj.*

2.2 Grupe permutacija

Neka je X konačan skup. Bijekcija $f : X \to X$ naziva se permutacija skupa X. Skup svih permutacija skupa X čini grupu obzirom na standardno komponiranje funkcija. Ta se grupa označava sa $S(X)$ i naziva simetrična grupa. Ako je X n-člani skup, tada se dotična simetrična grupa označava još i sa S_n.

Definicija 2.4 *Neka je* G *podgrupa simetrične grupe* $S(X)$*. Tada se kaže da grupa* G *djeluje na skupu* X*, i takva se grupa naziva grupa permutacija na* X *ili grupa permutacija stupnja* $|X|$*.*

Kao što je poznato, svaka se grupa, do na izomorfizam, može reprezentirati nekom grupom permutacija (Cayley).

Definicija 2.5 *Neka grupa G djeluje na skupu X i neka je $x \in X$. Onda se skup*

$$Gx = \{g(x) \mid g \in G\}$$

naziva staza ili orbita točke x pod djelovanjem grupe G, ili kraće G-staza od x.

Orbite čine particiju skupa X. Naime, na skupu X se može definirati sljedeća relacija:

$$\text{za } x, y \in X, \;\; x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G \text{ takav da je } g(x) = y$$

Može se pokazati da je ova relacija jedna relacija ekvivalencije na skupu X. Razredi ekvivalencije te relacije upravo su G-staze. Broj elemenata razreda, odnosno staze Gx, naziva se *duljina staze.*

Definicija 2.6 *Neka je G grupa koja djeluje na skupu X i neka je $x \in X$. Onda se podgrupa*

$$G_x = \{g \in G \mid g(x) = x\}$$

naziva stabilizator ili ustalitelj točke x u grupi G.

Pojam stabilizatora može se poopćiti i proširiti: zahtijevanjem da se sam u sebe preslikava bilo koji podskup $A \subseteq X$, te presjekom svih stabilizatora koji fiksiraju neku točku iz skupa A. U oba slučaja riječ je o grupama. Dakle, pri djelovanju grupe G na skup X, gdje je $A \subseteq X$, definira se:
(i) skupovni stabilizator od A u G kao podgrupa

$$G_A = \{g \in G \mid gA = A\}$$

(ii) točkovni stabilizator od A u G kao podgrupa

$$G_{(A)} = \bigcap_{a \in A} G_a$$

Lema 2.1 *Neka je G grupa koja djeluje na skupu X. Tada $\forall x \in X$ vrijedi:*

$$|Gx| = [G : G_x] = \frac{|G|}{|G_x|} \tag{2.5}$$

DOKAZ. Neka je ϕ preslikavanje iz grupe G u orbitu Gx definirano na način $\phi(g) = g(x)$. Tada, za bilo koje $g_1, g_2 \in G$ vrijedi $\phi(g_1) = \phi(g_2) \Leftrightarrow g_1(x) = g_2(x) \Leftrightarrow g_1, g_2 \in gG_x$. Dakle, svi elementi od gG_x imaju istu sliku. Budući da je preslikavanje ϕ očito surjekcija, slijedi da je broj elemenata orbite Gx jednak broju razreda od G_x u G, čime je tvrdnja dokazana.

Lema 2.2 *(Burnside, Cauchy-Frobenius) Broj staza, u oznaci u, grupe G na skupu X dan je sa*

$$u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} F(g) \tag{2.6}$$

pri čemu je $F(g)$ broj stalnih točaka permutacije $g \in G$.

DOKAZ. Parovi (g, x), gdje je $g \in G, x \in X$ i $g(x) = x$ mogu se prebrojati na dva načina. Za dani $g \in G$ takvih je parova $F(g)$, dok je za dani $x \in X$ taj broj jednak $|G_x|$. Stoga za ukupni broj parova vrijedi $\sum\limits_{g \in G} F(g) = \sum\limits_{x \in X} |G_x|$. Primjenom prethodne leme vrijedi: $\sum\limits_{x \in X} |G_x| = \sum\limits_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} = |G| \sum\limits_{x \in X} \frac{1}{|Gx|} = |G| \cdot u$.

Primjer 2.4 *Razmatra se djelovanje grupe $\left\{ \binom{123}{123}, \binom{123}{132} \right\}$ na skupu $X = \{1, 2, 3\}$. Neka je sa*

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \dots, f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

označeno svih šest permutacija skupa X. Dakle, $S_3 = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ a $G = \{f_1, f_2\} \leq S_3$.
Tada za orbite i stabilizatore skupa X vrijedi:

$$\begin{aligned} G1 &= \{g(1) \mid g \in G\} = \{1\} \\ G2 &= \{2, 3\} \\ G3 &= \{2, 3\} \\ G_1 &= \{g \in G \mid g(1) = 1\} = \{f_1, f_2\} \\ G_2 &= \{f_1\} \\ G_3 &= \{f_1\} \end{aligned}$$

U prethodnom primjeru grupa G ima dvije orbite na skupu X, kao što lema 2.2 i utvrđuje: budući da za broj fiksnih točaka vrijedi $F(f_1) = 3$ te $F(f_2) = 1$, slijedi

$$u = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} F(g) = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2.$$

Također je vidljivo da vrijedi $X = G1 \cup G2 = G1 \cup G3$ tj. da orbite čine particiju skupa X.

2.3 Automorfizmi simetričnih dizajna

Definicija 2.7 *Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ kombinatorički dizajn, $G \leq Aut(\mathcal{D})$ a $g \in G$. Točka $p \in \mathcal{P}$ naziva se stalnom (fiksnom) točkom automorfizma g ako je $g(p) = p$. Točka p naziva se stalnom (fiksnom) točkom dizajna $\mathcal{D}$ ako je $g(p) = p, \ \forall g \in G$.*

Sukladno prethodnoj definiciji, definira se stalni (fiksni) blok automorfizma g, kao i dizajna $\mathcal{D}$. Skup svih fiksnih točaka i fiksnih blokova grupe G koja djeluje na dizajnu $\mathcal{D}$, skupa s relacijama definiranim na njima naziva se *stalna (fiksna) struktura kombinatoričkog dizajna $\mathcal{D}$.*

Teorem 2.1 *Neka je $\mathcal{D}$ simetrični (v, k, λ) dizajn i neka je $g \in Aut(\mathcal{D})$. Tada automorfizam g ima jednak broj fiksnih točaka i fiksnih blokova.*

DOKAZ. Elementi skupa $S = \{(p, B) \mid p \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{B}, \ p, g(p) \in B\}$ mogu se prebrojati na dva načina. Neka je s f označen broj fiksnih točaka a s F broj fiksnih blokova automorfizma g. Budući da neke točke $p \in \mathcal{P}$ automorfizam g fiksira a neke ne, prebrajanjem po točkama slijedi da je broj elemenata skupa S jednak zbroju izraza

$$\sum_{\{p \in \mathcal{P} | g(p) = p\}} |\{B \in \mathcal{B} \mid p, g(p) \in B\}|$$

i

$$\sum_{\{p \in \mathcal{P} | g(p) \neq p\}} |\{B \in \mathcal{B} \mid p, g(p) \in B\}|.$$

Obzirom da je pojedina točka $p \in \mathcal{P}$ incidentna sa k blokova, prvi od izraza jednak je umnošku $f \cdot k$; drugi izraz jednak je umnošku $(v - F) \cdot \lambda$ budući da se svake dvije različite točke nalaze u λ blokova. Dakle, vrijedi

$$|S| = f \cdot k + (v - f) \cdot \lambda.$$

U drugu ruku, analognim razmatranjem prebrajanja elemenata skupa S po blokovima dobiva se

$$|S| = F \cdot k + (v - F) \cdot \lambda.$$

Naposljetku, izjednačavanjem dobivenih izraza dobiva se $f \cdot k + (v - f) \cdot \lambda = F \cdot k + (v - F) \cdot \lambda \Leftrightarrow f(k - \lambda) - F(k - \lambda) = 0 \Leftrightarrow (k - \lambda)(f - F) = 0 \Leftrightarrow f = F$.

Kao što je iskazano definicijom 2.5, automorfizam $g \in G$, $G \leq Aut(\mathcal{D})$ tvori orbite na skupu točaka $\mathcal{P}$ te na skupu blokova $\mathcal{B}$. Pojedina orbita skupa točaka naziva se *točkovna orbita* ili *orbita na skupu točaka.* Analogno, ako se radi o skupu blokova, govori se o blokovnim orbitama ili orbitama na skupu blokova.

Dakle, automorfizmi dizajna $\mathcal{D}$ dijele skup točaka $\mathcal{P}$, kao i skup blokova $\mathcal{B}$, na disjunktne podskupove koji čine particiju dotičnog skupa. Sljedeći teorem daje vezu između broja staza na skupu blokova i skupu točaka kod simetričnog dizajna. Taj teorem, te naredna propozicija, od velike su važnosti pri konstrukciji dizajna.

Teorem 2.2 *Neka je $\mathcal{D}$ simetrični dizajn i neka je $G \leq Aut(\mathcal{D})$ grupa automorfizama koja djeluje na $\mathcal{D}$. Tada grupa G ima jednak broj staza na skupu točaka kao i na skupu blokova.*

DOKAZ. Prema Lemi 2.2 za broj orbita na skupu točaka u_p vrijedi $u_p = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} f(g)$, te analogno za orbite na skupu blokova $u_b = \frac{1}{|G|}\sum\limits_{g\in G} F(g)$; gdje je $f(g)$ broj fiksnih točaka a $F(g)$ fiksnih blokova, za pojedini $g \in G$. Sukladno Teoremu 2.1 vrijedi $f(g) = F(g), \forall g \in G \Leftrightarrow u_p = u_b$.

Propozicija 2.2 *Neka je G grupa koja djeluje na simetrični dizajn s parametrima (v, k, λ) i neka je njen element $g \in G$ prim reda. Tada vrijedi:*

$$v = F + |g| \cdot (u - F) \tag{2.7}$$

gdje je u broj orbita a F broj fiksnih točaka te blokova danog dizajna.

DOKAZ. Budući da svaki element grupe generira cikličku podgrupu (čiji je red jednak redu dotičnog elementa) te budući da su sve grupe prim reda međusobno izomorfne, slijedi da se ekvivalentno može govoriti o djelovanju cikličke grupe $Z_{|g|}$ na dizajn danih parametara.
Nadalje, budući da ciklička grupa prim reda ima samo trivijalne podgrupe, duljine staza i blokova u tom slučaju mogu biti jedino 1 i $|g|$. Obzirom da je kod simetričnog dizajna broj fiksnih točaka jednak broju fiksnih blokova, dalje slijedi da su multiskupovi čiji su elementi duljine staza te duljine blokova jednaki.

Dakle, u opisanom slučaju, kandidati za broj fiksnih točaka F su brojevi za koje je razlika $v - F$ višekratnik od $|g|$ tj. vrijedi

$$F \equiv v(mod|g|). \tag{2.8}$$

Kod konstrukcije je važno odabrati automorfizam koji djeluje na razmatrani dizajn, kao i točno znati koje se sve fiksne točke pojavljuju pri njegovom djelovanju. Poznato je više rezultata koji govore o gornjoj granici za broj fiksnih točaka te o uvjetima djelovanja nekog automorfizma [18] [26]. U nastavku slijede neki od tih rezultata.

Teorem 2.3 *Neka netrivijalni automorfizam g djeluje na simetrični dizajn s v točaka i neka pritom fiksira F točaka. Tada vrijedi:*

$$F \leq \frac{1}{2}v$$

Nadalje, ukoliko vrijedi jednakost tada je $v = 4n$ i g je automorfizam reda 2 (involucija).

Teorem 2.4 *Neka netrivijalni automorfizam g djeluje na simetrični dizajn reda n, s parametrima (v, k, λ) i neka pritom fiksira F točaka. Tada vrijedi:*
(i) $F \leq v - 2n$
(ii) $F \leq k + \sqrt{n}$
Nadalje, ako u bilo kojem od izraza vrijedi jednakost, onda je g automorfizam reda 2 i svaki nestalni blok sadrži točno λ stalnih točaka.

Teorem 2.5 *Ako je g automorfizam simetričnog t-dizajna $\mathcal{D}$ i $|g|$ prim broj, onda $|g|$ dijeli v ili je $|g| \leq k$.*

Primjer 2.5 *Jedan od automorfizama koji djeluje na dizajn* 2-$(7, 3, 1)$ *(Primjer 2.1) je permutacija $\alpha = (124)(365)(7)$; $G = \{\alpha^i | i = 0, 1, 2\} \leq AutD$.*

Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha^0 &= (1)(2)(3)(4)(5)(6)(7) \\ \alpha^1 &= (124)(365)(7) \\ \alpha^2 &= (142)(356)(7) \end{aligned}$$

Nadalje, orbite na skupu točaka jesu

$$\begin{aligned} G1 = G2 = G4 &= \{1, 2, 4\} \\ G3 = G5 = G6 &= \{3, 5, 6\} \\ G7 &= \{7\} \end{aligned}$$

a na skupu blokova

$$\begin{aligned} G123 = G145 = G246 &= \{123, 145, 246\} \\ G167 = G257 = G347 &= \{167, 257, 347\} \\ G356 &= \{356\} \end{aligned}$$

U Primjeru 2.5 vidljivo je da su na skupu točaka (blokova) tri orbite, kao što Lema 2.2 i pokazuje: $u = \frac{1}{3}(7+1+1) = 3$. Jednak je broj orbita na skupu točaka kao i na skupu blokova. Budući da je $|\alpha| = 3$ prim broj, pripadne staze su redova 1 i 3.

2.4 Taktičke dekompozicije kombinatoričkih dizajna

Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ kombinatorički dizajn. Bilo koja particija skupa točaka $\mathcal{P}$ i skupa blokova $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{P}_m \text{ i } \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_n\,,$$

naziva se *dekompozicija dizajna* $\mathcal{D}$.

Definicija 2.8 *Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ kombinatorički dizajn, i neka je*

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{P}_m \; i \; \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_n\,,$$

jedna njegova dekompozicija. Neka je svaka točka iz skupa $\mathcal{P}_i$, $i = 1, \ldots, m$ sadržana u jednakom broju blokova iz skupa $\mathcal{B}_j$, $j = 1, \ldots, n$; odnosno, neka je svaki blok iz skupa $\mathcal{B}_i$, $i = 1, \ldots, n$ incidentan sa jednakim brojem točaka iz skupa $\mathcal{P}_j$, $j = 1, \ldots, m$. Tada se govori o taktičkoj dekompoziciji kombinatoričkog dizajna $\mathcal{D}$.

Ukoliko su ispunjeni uvjeti iz ove definicije, incidencijska matrica $M = [m_{ij}]$ dizajna $\mathcal{D}$ ima sljedeće istaknuto svojstvo. Dobivena taktička dekompozicija tada prirodno dijeli matricu M na podmatrice A_{ij}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ gdje je pojedina podmatrica A_{ij} dimenzija $|\mathcal{P}_i| \times |\mathcal{B}_j|$;

$$M = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & ... & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & ... & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & ... & A_{mn} \end{bmatrix}.$$

Te podmatrice imaju jednaki broj jedinica u svakom retku te jednaki broj jedinica u svakom stupcu. Jednako tako, ukoliko podmatrice imaju tu karakteristiku vrijede uvjeti iz prethodne definicije. Ukoliko je dekompozicija incidencijske strukture $\mathcal{I} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ taktička, tada se mogu definirati koeficijenti

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= |\{B \in \mathcal{B}_j \mid (p, B) \in I,\;\; p \in \mathcal{P}_i\}| \text{ i} \\ \kappa_{ij} &= |\{p \in \mathcal{P}_i \mid (p, B) \in I,\;\; B \in \mathcal{B}_j\}|, \end{aligned}$$

koji predstavljaju broj blokova iz skupa $\mathcal{B}_j$ koji su incidentni s pojedinom točkom iz skupa $\mathcal{P}_i$, te broj točaka skupa $\mathcal{P}_i$ koje su sadržane u pojedinom bloku skupa $\mathcal{B}_j$, pri čemu je $i = 1, \ldots, m$ i $j = 1, \ldots, n$.

Definicija 2.9 *Matrice $[\rho_{ij}]$ i $[\kappa_{ij}]$ nazivaju se matricama taktičke dekompozicije kombinatoričkog dizajna $\mathcal{D}$.*

Lema 2.3 *Neka je $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$ kombinatorički dizajn s parametrima 2-(v, k, λ), $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \sqcup \mathcal{P}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{P}_m$ i $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \sqcup \mathcal{B}_2 \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{B}_n$, njegova taktička dekompozicija, a $[\rho_{ij}]$ i $[\kappa_{ij}]$ pripadne matrice taktičke dekompozicije. Tada vrijedi:*

$$(i) \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij} = r, \forall i; \ \sum_{i=1}^{m} \kappa_{ij} = k, \forall j \tag{2.9}$$

$$(ii) \quad |\mathcal{P}_i|\rho_{ij} = |\mathcal{B}_j|\kappa_{ij}, \ \ \forall i \ \ \forall j \tag{2.10}$$

$$(iii) \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}\kappa_{lj} = \lambda|\mathcal{P}_l| + \delta_{il}(r - \lambda), \ \ \forall i, l, \tag{2.11}$$

gdje je δ_{il} Kronecker-ov simbol ($\delta_{il} = 1$, ako je $i = l$, inače je $\delta_{il} = 0$).

Dokaz.
(i) Tvrdnje slijede neposredno iz definicije koeficijenata ρ_{ij} i κ_{ij}.
(ii) Elementi skupa

$$S = \{(p, B) \mid (p, B) \in I, \ \ p \in \mathcal{P}_i, B \in \mathcal{B}_j\}$$

mogu se prebrojiti na dva načina. Za prebrajanje po blokovima vrijedi:

$$\begin{aligned} |S| &= \sum_{B \in \mathcal{B}_j} |\{(p, B) \mid (p, B) \in I, \ \ p \in \mathcal{P}_i\}| \\ &= \sum_{B \in \mathcal{B}_j} |\{p \in \mathcal{P} \mid (p, B) \in I\} \cap \mathcal{P}_i| \end{aligned}$$

Budući da je koeficijent κ_{ij} definiran kao broj točaka skupa $\mathcal{P}_i$ koje su sadržane u pojedinom bloku skupa $\mathcal{B}_j$, slijedi da je prethodni izraz jednak

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_j} \kappa_{ij} = |\mathcal{B}_j|\kappa_{ij}.$$

Analognim prebrajanjem po točkama dobiva se

$$|S| = |\mathcal{P}_i|\rho_{ij}$$

Izjednačavanjem dobivenih izraza, tvrdnja je dokazana.
(iii) Dokaz se može pronaći u radu [26].

Druga relacija iz prethodnog sustava jednadžbi (2.10) poznata je i pod nazivom Alltop-ova lema, prema radu [1]. Ovaj sustav jednadžbi zadovoljavaju matrice taktičke dekompozicije danog dizajna. No, prilikom konstrukcije najčešće se koristi sustav jednadžbi

$$\sum_{i=1}^{m} \kappa_{ij} = k, \forall j \tag{2.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{|\mathcal{B}_j|}{|\mathcal{P}_i|} \kappa_{ij}\kappa_{lj} = \lambda \cdot |\mathcal{P}_l| + \delta_{il}(r - \lambda), \tag{2.13}$$

ekvivalentan prethodnome (koeficijent ρ_{ij} izrazi se iz jednadžbe 2.10 i zatim uvrsti u 2.11). Ekvivalentno se mogu izraziti dualne tvrdnje, u kojima su nepoznanice koeficijenti ρ_{ij}. Poznate su analogne jednadžbe i za t-dizajne, $t \geq 2$, koje su znatno složenije.

2.5 Konstrukcije kombinatoričkih dizajna metodom taktičke dekompozicije

Postojanje taktičke dekompozicije predstavlja dodatni uvjet na strukturu dizajna. Sljedno tome, ukoliko se (pretpostavljena) taktička dekompozicija koristi za konstrukciju dizajna, kao takva sužava *prostor rješenja* i u tom smislu olakšava konstrukciju. Na osnovi jednadžbi 2.12-2.13 moguće je konstruirati kandidate za matrice taktičke dekompozicije traženog dizajna. No, da bi se taj sustav jednadžbi mogao primijeniti potrebno je poznavati (pretpostaviti) neku taktičku dekompoziciju. U tom smislu značajna je sljedeća lema.

Lema 2.4 *Neka je G grupa automorfizama koja djeluje na dizajn $\mathcal{D} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, I)$. Tada orbite grupe G, na točkama i na blokovima, tvore taktičku dekompoziciju dizajna $\mathcal{D}$.*

Dakle, dekompozicija dizajna, koju tvore orbite dane grupe G koja na tom dizajnu djeluje, je taktička. Pri tome, od posebnog interesa je djelovanje grupa čiji je red $|G|$ prim broj, budući da su tada jedine moguće duljine staza 1 i $|G|$. Metodu konstrukcije simetričnih kombinatoričkih dizajna temeljenu na djelovanju grupe automorfizama razvili su Z.Janko i V.Ćepulić [6], [12]. Prema toj metodi, konstrukcija se temelji na taktičkoj dekompoziciji skupa točaka i skupa blokova (kakvu tvori pretpostavljeni automorfizam) a sastoji se od dva osnovna dijela:

1. nalaženja matrica taktičke dekompozicije (stazne strukture) i

2. *indeksiranja* dobivenih staznih struktura.

Dakle, najprije se na osnovu sustava jednadžbi 2.12 - 2.13 konstruiraju potencijalne matrice taktičke dekompozicije, koje pokazuju koliko je blokova iz određene blokovne orbite incidentno s pojedinom točkom iz točkovne orbite. U drugom koraku (indeksiranje), potrebno je točno utvrditi incidenciju između točaka i blokova. Drugim riječima, svaki koeficijent ρ_{ij} potrebno je zamijeniti matricom A_{ij} dimenzija $|\mathcal{P}_i| \times |\mathcal{B}_j|$, koja ima ρ_{ij} jedinica u pojedinom retku. Nadalje, budući da matrica taktičke dekompozicije odražava djelovanje pretpostavljene grupe automorfizama G, dovoljno je odrediti prvi redak za svaku matricu A_{ij} dok su ostali retci jednoznačno određeni djelovanjem grupe G. Stoga, ukoliko je pretpostavljeni automorfizam prim reda, elementi matrice taktičke dekompozicije zamjenjuju se cikličkim matricama reda 3. Oba se ta, temeljna, koraka mogu ilustrirati narednim Primjerom 2.6.

Definicija 2.10 *Neka je $M = [m_{ij}]$ matrica reda n čiji su elementi definirani na način*

$$M = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & ... & a_{n-1} & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & ... & a_{n-2} & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & ... & a_n & a_1 \end{bmatrix}.$$

Tada se matrica M naziva ciklička matrica.

Dakle, ciklička matrica se definira kao tip matrice s konstantnom dijagonalom (Toeplitz) kod koje je svaki sljedeći redak dobiven "pomicanjem" prethodnog retka za jedno mjesto u desno.

Primjer 2.6 *Jedna od grupa koje djeluju na Fanovu ravninu je $G = \{\alpha^i | i = 0, 1, 2\} \leq AutD$, $\alpha = (123)(456)(7)$. Potrebno je odrediti matrice taktičke dekompozicije*

$$[\kappa_{ij}] = \begin{bmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & \kappa_{13} \\ \kappa_{21} & \kappa_{22} & \kappa_{23} \\ \kappa_{31} & \kappa_{32} & \kappa_{33} \end{bmatrix}$$

te na osnovu tih matrica konstruirati projektivnu ravninu 2-$(7, 3, 1)$. Automorfizam α ima jednu fiksnu točku te dvije orbite duljine 3 na skupu točaka a analogno vrijedi za skup blokova,

$$|\mathcal{P}_1| = 3, \quad |\mathcal{P}_2| = 3, \quad |\mathcal{P}_3| = 1,$$
$$|\mathcal{B}_1| = 3, \quad |\mathcal{B}_2| = 3, \quad |\mathcal{B}_3| = 1.$$

Uvrštavanjem poznatih vrijednosti u jednadžbe 2.12 − 2.13 *dobiva se sljedeći sustav jednadžbi:*

$$\begin{aligned}
\kappa_{11} + \kappa_{12} + \kappa_{13} &= 3\\
\kappa_{21} + \kappa_{22} + \kappa_{23} &= 3\\
\kappa_{31} + \kappa_{32} + \kappa_{33} &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3\kappa_{11}^2 + 3\kappa_{12}^2 + \kappa_{13}^2 &= 15\\
3\kappa_{11}\kappa_{21} + 3\kappa_{12}\kappa_{22} + \kappa_{13}\kappa_{23} &= 9\\
3\kappa_{11}\kappa_{31} + 3\kappa_{12}\kappa_{32} + \kappa_{13}\kappa_{33} &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3\kappa_{21}\kappa_{11} + 3\kappa_{22}\kappa_{12} + \kappa_{23}\kappa_{13} &= 9\\
3\kappa_{21}^2 + 3\kappa_{22}^2 + \kappa_{23}^2 &= 15\\
3\kappa_{21}\kappa_{31} + 3\kappa_{22}\kappa_{32} + \kappa_{23}\kappa_{33} &= 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3\kappa_{31}\kappa_{11} + 3\kappa_{32}\kappa_{12} + \kappa_{33}\kappa_{13} &= 3\\
3\kappa_{31}\kappa_{21} + 3\kappa_{32}\kappa_{22} + \kappa_{33}\kappa_{23} &= 3\\
3\kappa_{31}^2 + 3\kappa_{32}^2 + \kappa_{33}^2 &= 3
\end{aligned}$$

Rješavanjem ovog sustava jednadžbi, dobiva se sljedeća matrica taktičke dekompozicije

$$M7F1 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 3 & 0\\ \hline 1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right],$$

čime je završen prvi korak konstrukcije. Nadalje je potrebno odrediti kandidate za podmatrice

$$\begin{aligned}
&A_{11}, A_{12}, A_{13},\\
&\qquad\ldots,\\
&A_{31}, A_{32}, A_{33}.
\end{aligned}$$

U slučaju kad podmatrica ima po jednu jedinicu u svakom stupcu, kandidati za takve podmatrice su cikličke matrice reda 3*:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kada su, pak, dvije jedinice u svakom stupcu, tada su kandidati za takvu podmatricu sljedeći:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Budući da su podmatrice koje tvore orbite duljine 1 *jednoznačno određene, ostaje provjeriti koje kombinacije preostalih četiriju podmatrica tvore incidencijsku matricu traženog dizajna. Od mogućih* 81 *kombinacija (u svakom od dva retka* 9 *je kandidata),* 27 *njih tvori incidencijsku matricu Fanove ravnine od kojih se, kako je poznato, dobiva do na izomorfizam jedna matrica M.*

$$M = \left[\begin{array}{c|ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Poznata je činjenica da je red podgrupe $H \leq G$ svake konačne grupe G djelitelj od $|G|$ (Lagrange). U slučaju kada je grupa G prim reda vrijedi i obrat, kao što iskazuje sljedeći teorem.

Teorem 2.6 *Neka je G konačna grupa i neka je p prost broj. Ako p^k dijeli $|G|$, tada postoji podrupa $H \leq G$ reda p^k.*

Kao posljedica ovog teorema, vrijedi da će pri parcijalnoj klasifikaciji danog dizajna $\mathcal{D}$ - uz pretpostavljeno djelovanje automorfizma prim reda p, biti konstruirani svi dizajni čiji je red grupe automorfizama $|Aut(\mathcal{D})|$ višekratnik od p. Ukoliko bi se za dani dizajn $\mathcal{D}$ provele parcijalne klasifikacije za automorfizme svih prim redova koji djeluju na $\mathcal{D}$, bile bi dobivene sve strukture s netrivijalnom grupom automorfizama [13]. Tako, primjerice, u prethodnom Primjeru 2.6 Fanova ravnina je konstruirana na osnovi taktičke dekompozicije koja je nastala djelovanjem automorfizma reda 3, a sve dobivene matrice (jedna, do na izomorfizam) imaju red grupe automorfizama 168.

Poglavlje 3

Algoritam za razvoj matrica taktičke dekompozicije pri djelovanju automorfizma reda 3

3.1 Razvoj algoritma za razvoj matrica taktičke dekompozicije 2-dizajna

Neka je $\mathcal{D}$ dizajn s parametrima 2-(v, k, λ) na kojem djeluje automorfizam reda p. Neka je f broj fiksnih točaka a F broj fiksnih blokova pripadne matrice taktičke dekompozicije MTD. Sa t_p i t_B neka je označen broj staza na skupu točaka te na skupu blokova. Sukladno relaciji 2.8, tada vrijedi

$$v = f + p(t_p - f), \tag{3.1}$$

$$b = F + p(t_B - F). \tag{3.2}$$

Matrica taktičke dekompozicije MTD je $t_p \times t_B$ matrica čiji elementi poprimaju vrijednosti iz skupa $\{0, 1, ..., p\}$. Shema

$$\begin{array}{c|ccc|ccc|}
 & 1 & \dots & 1 & p & \dots & p \\ \hline
1 & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
1 & & & & & & \\ \hline
p & & & & & & \\
\vdots & & & & & & \\
p & & & & & & \\ \hline
\end{array}$$

prikazuje opći oblik matrice MTD. Dakle, staze mogu biti duljina 1 i p; dio stazne strukture koji nije fiksna struktura, u nastavku će se nazivati *varijabilna* *struktura* ili *varijabilni* dio stazne strukture. Analogno će se govoriti o *stalnom (fiksnom)* i *varijabilnom dijelu* matrice taktičke dekompozicije. Na shemi koja prikazuje opći oblik MTD, varijabilni dio stazne strukture naznačen je donjim desnim kvadratom.

Definicija 3.1 *Neka je $M = [a_{ij}]$ potencijalna matrica taktičke dekompozicije 2-dizajna $\mathcal{D}$, dobivena pretpostavljanjem djelovanja automorfizma prim reda p na dizajn $\mathcal{D}$. Indeksiranje je postupak kojim se*
(i) fiksnom dijelu matrice M pridjeljuju matrice dimenzija $1 \times p$ odnosno $p \times 1$
(ii) varijabilnom dijelu matrice M pridjeljuju se cikličke (anticikličke) matrice reda p tako da se svaki par dobivenih redaka incidencijske matrice siječe u λ točaka.
Ovaj postupak još će se nazivati i razvoj matrice taktičke dekompozicije.

Definicija se može proširiti i na t-dizajne, zahtjevom da se svakih t-redaka siječe u λ točaka. Završetkom postupka indeksiranja konstruiran je razmatrani dizajn.

U nastavku se razmatranja ne provode u punoj općenitosti, već za pretpostavljeno djelovanje automorfizma reda 3. Broj 3 je odabran za vrijednost p primarno s ciljem dobivanja novih dizajna s trivijalnom grupom automorfizama, kako će biti obrazloženo u poglavlju 3.2.3.

3.1.1 Pridruživanje cikličkih matrica reda 3 elementima matrice taktičke dekompozicije

Prethodnom definicijom indeksiranje je opisano kao postupak pridruživanja određenih podmatrica elementima dane matrice taktičke dekompozicije, i to na način da među dobivenim retcima incidencijske matrice vrijedi svojstvo *balansiranosti* (tj. da se svakih t redaka siječe u λ točaka). Stoga se može reći da se indeksiranje dane matrice taktičke dekompozicije sastoji od indeksiranja njene fiksne strukture i indeksiranja varijabilnog dijela njene stazne strukture. Indeksiranje stalne strukture MTD je jednoznačno, budući da se stalni blokovi sastoje od punih staza točaka a stalne točke se na blokovima nalaze ili ne nalaze. Na razini algoritma, fiksni dio matrice taktičke dekompozicije transformira se u odgovarajući broj prvih redaka te prvih stupaca traženih incidencijskih matrica u koracima koje definira pseudokod

Procedure InitINC()
$\underline{\text{int}}\ i, j, l$
$INC[i, j] = 0;\ \ i = 1, ..., v, j = 1, ..., b$
$INC[i, j] = MTD[i, j];\ \ i = 1, ..., f, j = 1, ..., F$
$\forall i, j;\ \ i = 1, ..., f, j = F + 1, ..., t_B$
$\quad \underline{\text{if}}\ (MTD[i, j] = 3)\ \underline{\text{then}}$
$\quad\quad INC[i, F + 3(j - 1) + l] = 1;\ \ l = 1, 2, 3$
$\forall i, j;\ \ i = f, ..., t_p, j = 1, ..., F$
$\quad \underline{\text{if}}\ (MTD[i, j] = 3)\ \underline{\text{then}}$
$\quad\quad INC[f + 3(i - 1) + l, i] = 1;\ \ l = 1, 2, 3,$
$\underline{\text{end}},$

u kojem je INC matrica dimenzija $v \times b$. Ovako definirani retci i stupci bit će zajednički svim incidencijskim matricama koje će se dobiti iz polazne matrice taktičke dekompozicije. Za ovako definirane retke i stupce incidencijske matrice uvodi se naziv *fiksni dio incidencijske matrice*; preostali elementi incidencijske matrice nazivati će se *varijabilnim dijelom incidencijske matrice.*

Primjer 3.1 *Zadana je sljedeća matrica taktičke dekompozicije:*

$$M16F4 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

Nakon provođenja algoritma opisanog u $ProcedureInitINC$ dobivena matrica

INC_{M16F4} će izgledati kako slijedi.

$$INC_{M16F4} = \left[\begin{array}{c|c|c|c|ccc|ccc|ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right].$$

Za potrebe indeksiranja varijabilnog dijela matrice taktičke dekompozicije uvodi se pojam *ekspandirani koeficijent*. Točnije, koeficijenti u oznaci $0_1, 1_1, 1_2, 1_3, 2_1, 2_2, 2_3, 3_1$ definirani na način

$$0_1 \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1_1 \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 1_2 \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 1_3 \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2_1 \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 2_2 \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, 2_3 \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$3_1 \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

u ovom se radu nazivaju ekspandirani koeficijenti. Sada, indeksiranje varijabilnog dijela matrice taktičke dekompozicije započinje pridjeljivanjem ekspandiranih koeficijenata elementima koji čine varijabilni dio matrice taktičke dekompozicije. Elementima 0 i 3 pridružuju se jedinstveni ekspandirani koeficijenti, na trivijalan način, dok je ostalim elementima moguće pridružiti neku od tri cikličke matrice reda 3. Točnije, vrijedi

$$0 \leftarrow \{0_1\},\;\; 1 \leftarrow \{1_1, 1_2, 1_3\},\;\; 2 \leftarrow \{2_1, 2_2, 2_3\},\;\; 3 \leftarrow \{3_1\}.$$

Opisano pridruživanje definirano je matricom $STATE$ dimenzija $(t_p - f) \times (t_B - F)$, čiji su elementi skupovi. Točnije, vrijedi:

$$STATE[i,j] = \begin{cases} \{0_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 0 \\ \{1_1, 1_2, 1_3\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 1 \\ \{2_1, 2_2, 2_3\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 2 \\ \{3_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 3 \end{cases}, \qquad (3.3)$$

gdje je $i = 1, ..., t_p - f,\;\; j = 1, ..., t_B - F$.

Sa stajališta konstrukcije, ekvivalentno se umjesto cikličkih matrica mogu koristiti anticikličke matrice reda 3, tj. ekspandirani koeficijenti se varijabilnom dijelu matrice taktičke dekompozicije mogu pridružiti na način

$$0 \leftarrow \{0_1\},\;\; 1 \leftarrow \{1_4, 1_5, 1_6\},\;\; 2 \leftarrow \{2_4, 2_5, 2_6\},\;\; 3 \leftarrow \{3_1\},$$

gdje za koeficijente $1_4, 1_5, 1_6, 2_4, 2_5, 2_6$ vrijedi

$$1_4 \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, 1_5 \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 1_6 \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2_4 \leftarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, 2_5 \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, 2_6 \leftarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primjer 3.2 *Za matricu $M16F4$ zadanu u primjeru 3.1 potrebno je definirati pripadnu matricu $STATE$, u oznaci $STATE_{M16F4}$, koja, dakle, sadrži ekspandirane koeficijente. Sukladno prethodnim razmatranjima slijedi*

$$STATE_{M16F4} = \begin{bmatrix} \{1_1, 1_2, 1_3\} & \{1_1, 1_2, 1_3\} & \{1_1, 1_2, 1_3\} & \{2_1, 2_2, 2_3\} \\ \{1_1, 1_2, 1_3\} & \{1_1, 1_2, 1_3\} & \{2_1, 2_2, 2_3\} & \{1_1, 1_2, 1_3\} \\ \{1_1, 1_2, 1_3\} & \{2_1, 2_2, 2_3\} & \{1_1, 1_2, 1_3\} & \{1_1, 1_2, 1_3\} \\ \{2_1, 2_2, 2_3\} & \{1_1, 1_2, 1_3\} & \{1_1, 1_2, 1_3\} & \{1_1, 1_2, 1_3\} \end{bmatrix}.$$

3.1.2 Određivanje presjeka ekspandiranih koeficijenata

Nakon pridruživanja ekspandiranih koeficijenata svakom elementu varijabilnog dijela matrice MTD, iscrpnom pretragom svih kombinacija tih koeficijenata potrebno je konstruirati pripadne incidencijske matrice. Ta pretraga čini esencijalni dio algoritma za indeksiranje, a izvodi se "backtracking" strategijom, što se u nastavku detaljno razrađuje. Osnovna operacija koja se pritom izvodi je određivanje presjeka dvaju binarnih vektora duljine b, tj. provjera da li je taj presjek λ. U nastavku će se ta operacija kadkad nazivati *osnovna operacija reda* 1.

Uvodi se oznaka $\cup_+$ za operaciju definiranu na sljedeći način. Neka su $A = [a_1, a_2, ..., a_n]$ i $B = [b_1, b_2, ..., b_m]$ dva vektora. Tada će se za vektor $C = [a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_m]$ pisati $C = A \cup_+ B$.

Definicija 3.2 *Neka je matrica FIX_i podmatrica matrice INC, dimenzija $3 \times F$, pri čemu vrijedi*

$$\begin{aligned} FIX_i[1,1] &= INC[f + 3(i-1) + 1, 1], \\ &\;\;... \\ FIX_i[1,F] &= INC[f + 3(i-1) + 1, F], \\ &\;\;... \\ FIX_i[3,F] &= INC[f + 3(i-1) + 3, F], \end{aligned}$$

Neka za matrice $M_1, M_2, ..., M_{t_B - F}$ vrijedi

$$\begin{aligned} M_1 &\in STATE[i,1], \\ M_2 &\in STATE[i,2], \\ &\;\;... \\ M_{t_B-F} &\in STATE[i, t_B - F]. \end{aligned}$$

Tada je i-ti redak ekspandiranih koeficijenata, u oznaci R_i, matrica (sastavljena od tri retka) definirana na način

$$R_i = FIX_i \cup_+ M_1 \cup_+ M_2 \cup_+ \cdots \cup_+ M_{t_B - F}.$$

Dakle, vektori ekspandiranih koeficijenata koji pripadaju prvom retku MTD započinju fiksnim dijelovima redaka $f+1, f+2, f+3$ matrice INC, dok preostali dio čini neka moguća kombinacija ekspandiranih koeficijenta; vektori za drugi redak MTD započinju fiksnim dijelovima redaka $f+4, f+5, f+6$, ... a na početku vektora u zadnjem retku nalaze se fiksni dijelovi redaka $t_p - 2, t_p - 1, t_p$ matrice INC.

Primjer 3.3 *Na osnovi matrice $STATE_{M16F4}$ iz prethodnog primjera potrebno je ispisati neke retke ekspandiranih koeficijenata R_1 i R_2. U ovom slučaju,* *za svaki redak postoji* 81 *moguća kombinacija* (3^4)*. Leksikografski prve kombinacije, obzirom na indekse ekspandiranih koeficijenata, jesu* $1_1, 1_1, 1_1, 2_1$ *te* $1_1, 1_1, 2_1, 1_1$*, a u tom slučaju pripadni retci* R_1 *i* R_2 *su definirani kako slijedi.*

$$
\begin{aligned}
R_1 &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cup_+ 1_1 \cup_+ 1_1 \cup_+ 1_1 \cup_+ 2_1 \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c|c|ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_2 &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \cup_+ 1_1 \cup_+ 1_1 \cup_+ 2_1 \cup_+ 1_1 \\
&= \left[\begin{array}{c|c|c|c|ccc|ccc|ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\end{aligned}
$$

Lako se je uvjeriti da cikličke matrice reda 3 imaju svojstvo da je presjek bilo koja dva retka isti. Štoviše, iz relacije 2.11 proizlazi da se svaka dva vektora (retka) unutar nekog retka ekspandiranih koeficijenata sijeku u λ točaka, kada se pretpostavlja djelovanje automorfizma reda 3.

Budući da je, dakle, unaprijed poznato da se svaka dva vektora unutar danog retka ekspandiranih koeficijenata sijeku u λ točaka, to svojstvo, više nije potrebno provjeravati unutar algoritma. Ta je činjenica motivacija za uvođenje pojma *osnovna operacija reda* 2 ili *presjek dvaju redaka ekspandiranih koeficijenata*, u oznaci $\cap'$, kojim se označava operacija utvrđivanja da li se svi parovi redaka dvaju danih redaka ekspandiranih koeficijenata sijeku u λ točaka. Za provođenje osnovne operacije reda 2 nije, dakle, potrebno provesti svih $\binom{6}{2}$ osnovnih operacija reda 1 već je dovoljno odrediti presjeke za 9 očiglednih parova redaka (svaki vektor iz prvog retka ekspandiranih koeficijenata sa svakim iz drugog). U nastavku će se pokazati da je taj broj presjeka moguće još više smanjiti. S tom svrhom razmatra se najprije sljedeći primjer.

Primjer 3.4 *Neka su* R_1 *i* R_2 *dva retka ekspandiranih koeficijenata;* $R_1 = FIX_1 \cup_+ 1_1 \cup_+ 1_2 \cup_+ 2_2$ *a* $R_2 = FIX_2 \cup_+ 2_1 \cup_+ 2_3 \cup_+ 1_2$*. Neka za matrice* FIX_1 *i* FIX_2 *vrijedi*

$$
FIX_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad FIX_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
$$

Općenito, neka su presjeci 9 *parova redaka označeni sa* $(R_1[1], R_2[1])$, $(R_1[1], R_2[2])$,...,$(R_1[3], R_3[3])$. *Tada, za svaki par redaka vrijedi: njihov presjek je jedak zbroju presjeka između pripadnih vektora duljine* 4 *i* 3 *- koji te retke čine. Naposljetku, za presjek* $(R_1[2], R_2[3])$ *vrijedi:*

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|ccc|ccc} & ... & & & & ... & & & ... & & & ... & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ & ... & & & & ... & & & ... & & & ... & \end{array}\right] \cap'$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc|ccc|ccc} & ... & & & & ... & & & ... & & & ... & \\ & ... & & & & ... & & & ... & & & ... & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$$\begin{bmatrix} & ... & & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ & ... & & \end{bmatrix} \cap' \begin{bmatrix} & ... & & \\ & ... & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} & ... & \\ 0 & 1 & 0 \\ & ... & \end{bmatrix} \cap' \begin{bmatrix} & ... & \\ & ... & \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} & ... & \\ 0 & 0 & 1 \\ & ... & \end{bmatrix} \cap' \begin{bmatrix} & ... & \\ & ... & \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} & ... & \\ 1 & 0 & 1 \\ & ... & \end{bmatrix} \cap' \begin{bmatrix} & ... & \\ & ... & \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$0 + 0 + 1 + 1 = 2$$

Može se zapaziti da trojke parova

$$\begin{gathered} (R_1[1], R_2[1]), (R_1[2], R_2[2]), (R_1[3], R_2[3]) \\ (R_1[1], R_2[2]), (R_1[2], R_2[3]), (R_1[3], R_2[1]) \\ (R_1[1], R_2[3]), (R_1[2], R_2[1]), (R_1[3], R_2[2]) \end{gathered}$$

imaju jednak presjek. Lako je uvjeriti se da to pravilo vrijedi generalno, za bilo koja dva retka ekspandiranih koeficijenata. Dakle, za provedbu osnovne operacije reda 2 dovoljno je odabrati jednu trojku parova redaka i za nju odrediti presjek. U ovom radu (algoritmu) odabire se trojka

$$(R_1[1], R_2[1]), (R_1[1], R_2[2]), (R_1[1], R_2[3]),$$

a presjek dvaju redaka ekspandiranih koeficijenata označava se uređenom trojkom $[a, b, c]$, pri čemu a, b i c poprimaju vrijednosti iz skupa $\{0, 1, 2, 3\}$. Tako, primjerice u prethodnom primjeru za razmatrani presjek redaka ekspandiranih koeficijenata R_1 i R_2 vrijedi

$$R_1 \cap' R_2 = [0,0,0] + [1,0,1] + [0,1,1] + [1,1,0] = [2,2,2],$$

što nam govori da se svaka dva vektora iz promatranih redaka ekspandiranih koeficijenata R_1 i R_2 sijeku u dvije točke. Općenito, dakle, kada je rezultat $[\lambda, \lambda, \lambda]$, tada se dva razmatrana vektora sijeku u λ točaka.

Naredna tablica prikazuje presjeke svih mogućih parova cikličkih ekspandiranih koeficijenata, koji se javljaju pri razvoju matrica taktičke dekompozicije pomoću cikličkih matrica reda 3.

	0_1	1_1	1_2	1_3	2_1	2_2	2_3	3_1
0_1	$[0,0,0]$	$[0,0,0]$	$[0,0,0]$	$[0,0,0]$	$[0,0,0]$	$[0,0,0]$	$[0,0,0]$	$[0,0,0]$
1_1	$[0,0,0]$	$[1,0,0]$	$[0,0,1]$	$[0,1,0]$	$[1,0,1]$	$[0,1,1]$	$[1,1,0]$	$[1,1,1]$
1_2	$[0,0,0]$	$[0,1,0]$	$[1,0,0]$	$[0,0,1]$	$[1,1,0]$	$[1,0,1]$	$[0,1,1]$	$[1,1,1]$
1_3	$[0,0,0]$	$[0,0,1]$	$[0,1,0]$	$[1,0,0]$	$[0,1,1]$	$[1,1,0]$	$[1,0,1]$	$[1,1,1]$
2_1	$[0,0,0]$	$[1,1,0]$	$[1,0,1]$	$[0,1,1]$	$[2,1,1]$	$[1,1,2]$	$[1,2,1]$	$[2,2,2]$
2_2	$[0,0,0]$	$[0,1,1]$	$[1,1,0]$	$[1,0,1]$	$[1,2,1]$	$[2,1,1]$	$[1,1,2]$	$[2,2,2]$
2_3	$[0,0,0]$	$[1,0,1]$	$[0,1,1]$	$[1,1,0]$	$[1,1,2]$	$[1,2,1]$	$[2,1,1]$	$[2,2,2]$
3_1	$[0,0,0]$	$[1,1,1]$	$[1,1,1]$	$[1,1,1]$	$[2,2,2]$	$[2,2,2]$	$[2,2,2]$	$[3,3,3]$

3.1.3 Smanjenje složenosti algoritma redukcijom prostora rješenja

Da bi se za danu matricu taktičke dekompozicije konstruirale sve incidencijske matrice na kojima djeluje automorfizam reda 3, potrebno je pronaći sve kombinacije ekspandiranih koeficijenata koje tvore incidencijsku matricu. Dakle, prirodni prostor rješenja kod algoritma za indeksiranje je broj svih različitih kombinacija ekspandiranih koeficijenata. Uz pretpostavku da varijabilni dio matrice taktičke dekompozicije sadrži jedino elemente 1 i 2, broj različitih kombinacija ekspandiranih koeficijenata jednak je $(3^{t_B - F})^{t_p - f}$. Svaki element varijabilnog dijela matrice taktičke dekompozicije koji je jednak 0 ili 3, smanjuje taj broj za faktor 3.

Prostor rješenja izrazito raste s brojem točaka dizajna (kombinatorička eksplozija), dovodeći u pitanje mogućnost konstrukcije već za relativno male parametre. Tako, primjerice, broj mogućih kombinacija ekspandiranih koeficijenata za konačnu projektivnu ravninu (7,3,1) iznosi 81, za dvoravninu (16,6,2) 43046721 a za simetrični dizajn (31,10,3) $1.14 \cdot 10^{30}$ (kako dotični broj kombinacija ovisi o izgledu matrice taktičke dekompozicije, navedimo redom matrice o kojima se radi: $M7F1$ (Primjer 2.6), $M16F4$ (Primjer 3.1), $M31F4_1$ (Prilog

A)). Jedan očigledni pristup iscrpnoj pretrazi svih kombinacija ekspandiranih koeficijenata bila bi pretraga matrice $STATE$ "backtracking" strategijom. Takav algoritam, u slučaju Fanove ravnine konstruira 27 incidencijskih matrica (od 81 matrice - kandidata), a u slučaju dvoravnine $(16, 6, 2)$ konstruira se 15309 incidencijskih matrica (od 43046721 kandidata). Već dizajn $(31, 10, 3)$ je izvan dosega za iscrpnu pretragu pomoću takvog algoritma.

Ne smanjujući općenitost, u prvom retku te u prvom stupcu varijabilnog dijela matrice taktičke dekompozicije, može se uzeti u obzir samo jedna (bilo koja) kombinacija ekspandiranih koeficijenta. Točnije, u svakom retku i u svakom stupcu može se fiksirati jedan element jednak 1 ili 2 (što znači da se u obzir uzima samo jedna (bilo koja) od matrica reda 3). To fiksiranje izvoditi će se u dva koraka: najprije se fiksiraju elementi prvog stupca i prvog retka varijabilnog dijela a zatim eventualno i elementi u odgovarajućim drugim retcima/stupcima - na račun elemenata iz prvog retka ili stupca koji su jednaki 0 ili 3. Prvi opisani korak definiran je relacijama

$$STATE[1, j] = \begin{cases} \{0_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 0 \\ \{1_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 1 \\ \{2_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 2 \\ \{3_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 3 \end{cases}, \tag{3.4}$$

$j = 1, 2, ..., (t_B - F)$,

$$STATE[i, 1] = \begin{cases} \{0_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 0 \\ \{1_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 1 \\ \{2_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 2 \\ \{3_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 3 \end{cases}, \tag{3.5}$$

$i = 1, 2, ..., (t_p - f)$,

kojima se redefinira prvi redak i prvi stupac matrice $STATE$. Drugi korak u algoritmu se ostvaruje potprogramom $FiksirajDodatnoSTATE$. Ovim postupcima prostor rješenja je znatno smanjen. Točnije, ako je u prvom retku varijabilnog dijela matrice taktičke dekompozicije m elemenata iz skupa $\{0,3\}$, tada je fiksiranjem tog retka prostor rješenja smanjen za faktor 3^{t_B-F-m}. Analogno tome, ako se u prvom stupcu varijabilnog dijela matrice taktičke dekompozicije nalazi n elemenata iz skupa $\{0,3\}$, tada se njegovim fiksiranjem prostor rješenja smanjuje za faktor 3^{t_p-f-n} (prvi element stupca neka bude razmatran kod fiksiranja prvog retka - budući da je zajednički retku i stupcu). Ukupno se na ovaj način prostor rješenja smanjuje za faktor $3^m 3^n$.

Tablica 3.1 uspoređuje veličinu prostora rješenja prije i nakon redukcije fiksiranjem, za nekoliko matrica taktičke dekompozicije. U prvom stupcu navedena

Procedure FiksirajDodatnoSTATE()
int i, j
$\forall j; j = 2, ..., t_B - F$
$i = 1$
while $STATE[i,j] = (\{0_1\} \text{ or } \{3_1\})\ i++$
$$STATE[i,j] = \begin{cases} \{1_1\}, & \text{if } STATE[i,j] = \{1_1, 1_2, 1_3\} \\ \{2_1\}, & \text{if } STATE[i,j] = \{2_1, 2_2, 2_3\} \end{cases}$$
$\forall i; i = 2, ..., t_p - f$
$j = 1$
while $STATE[i,j] = (\{1_1\} \text{ or } \{3_1\})\ j++$
$$STATE[i,j] = \begin{cases} \{1_1\}, & \text{if } STATE[i,j] = \{1_1, 1_2, 1_3\} \\ \{2_1\}, & \text{if } STATE[i,j] = \{2_1, 2_2, 2_3\} \end{cases}$$
end

Tablica 3.1: Usporedba veličine prostora rješenja

Oznaka matrice	Dizajn	Sve kombinacije	Fiksiran redak i stupac	Maksimalno fiksiranje
$M16F4$	2−(16,6,2)	43046721	19683	19683
$M31F7$	2−(31,10,3)	$5.2E+26$	$1,0E+20$	$1,0E+20$
$M31F4$	2−(31,10,3)	$1,1E+30$	$2,3E+23$	$2,6E+22$
$M31F1$	2−(31,10,3)	$2,5E+33$	$1,5E+27$	$2,1E+24$
$M36F9$	2−(36,15,6)	$4,4E+38$	$3,4E+30$	$3,4E+30$
$M36F0$	2−(36,15,6)	$5,0E+68$	$8,7E+42$	$1,0E+41$

je oznaka matrice taktičke dekompozicije (brojka iza slova "M" predstavlja broj točaka dizajna a brojka iza slova "F" predstavlja broj fiksnih točaka). U drugom stupcu se navode parametri dizajna. Treći stupac navodi broj svih mogućih kombinacija ekspandiranih koeficijenata, definiranih matricom $STATE$. Nadalje se navodi veličina prostora rješenja nakon fiksiranja prvog retka i prvog stupca varijabilnog dijela matrice taktičke dekompozicije (odnosno matrice $STATE$), te naposljetku, veličina prostora rješenja nakon potpuno provedenog fiksiranja za jednu odabranu matricu taktičke dekompozicije. (U slučaju kada za dani dizajn postoji više matrica taktičke dekompozicije, razmatrana je prva matrica iz datoteke u prilogu.)

Primjer 3.5 *Dvoravnina* $(16, 6, 2)$ *dopušta djelovanje automorfizma reda* 3*, pod čijim djelovanjem nastaju tri matrice taktičke dekompozicije. Dvije su od* *tih matrica s jednom fiksnom točkom a jedna je matrica s 4 fiksne točke. Razmatra se indeksiranje matrice $M16F4$ s 4 fiksne točke, što je za ove parametre još uvijek moguće provesti ručno.*

$$M16F4 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Dakle, na osnovi matrice taktičke dekompozicije $M16F4$, potrebno je izgraditi sve pripadne incidencijske matrice. U tu svrhu, kao prvo, prema fiksnoj strukturi dane matrice taktičke dekompozicije odrede se prva 4 retka te prva 4 stupca buduće incidencijske matrice, na očigledan način (prema potprogramu "InitINC"). Od tako dobivene strukture, formiraju se incidencijske matrice dodavanjem onih kombinacija od 16 podmatrica koje udovoljavaju uvjetu balansiranosti dizajna. (To je, naime, jedini uvjet kojeg još treba provjeriti, budući da svaka kombinacija indeksiranih koeficijenata ispunjava ostala dva uvjeta koja neku binarnu matricu čine incidencijskom matricom dizajna.)

Bez smanjenja općenitosti, za prvi redak nedostajuće strukture može se uzeti samo jedna od mogućih kombinacija; a isto vrijedi i za prvi stupac. Stoga, u ovom slučaju, fiksni redak neka bude $[1_1 1_1 1_1 2_1]$ (u fiksnom dijelu nema presjeka, pa se isti zanemaruje). Od kombinacija ekspandiranih koeficijenata u drugom retku, a to su

$$\begin{array}{c} [1_1 1_1 2_1 1_1] \\ [1_1 1_1 2_1 1_2] \\ [1_1 1_1 2_1 1_3] \\ [1_1 1_1 2_2 1_1] \\ [1_1 1_1 2_2 1_2] \\ [1_1 1_1 2_2 1_3] \\ [1_1 1_1 2_3 1_1] \\ [1_1 1_1 2_3 1_2] \\ [1_1 1_1 2_3 1_3] \\ \hline [1_1 1_2 2_1 1_1] \\ \vdots \\ \hline [1_1 1_3 2_1 1_1] \\ \vdots \\ [1_1 1_3 2_3 1_3], \end{array}$$

potrebno je sada izabrati one koji se s retkom $[1_1 1_1 1_1 2_1]$ *sijeku u dvije točke. Za prvog kandidata vrijedi*

$$\begin{aligned}[1_1 1_1 1_1 2_1] \cap' [1_1 1_1 2_1 1_1] &= [1,0,0]+[1,0,0]+[1,0,1]+[1,1,0]\\ &= [4,1,1]\\ &\neq [2,2,2],\end{aligned}$$

za sljedećeg

$$\begin{aligned}[1_1 1_1 1_1 2_1] \cap' [1_1 1_1 2_1 1_2] &= [1,0,0]+[1,0,0]+[1,0,1]+[1,0,1]\\ &= [4,0,2]\\ &\neq [2,2,2],\end{aligned}$$

itd. Kada su odabrani svi kandidati iz drugog retka koji se u dvije točke sijeku s fiksnim retkom, tada se za svakog od njih biraju kandidati iz trećeg retka koji se ujedno i s fiksnim retkom sijeku u dvije točke. Analogno se provodi i za zadnji, četvrti redak. Na kraju, dobivaju se sve tražene kombinacije, kako prikazuje sljedeća shema:

$$\begin{array}{ccccccc}
[1_1 1_1 1_1 2_1] & & & & & & \\
\downarrow & & & & & & \\
[1_1 1_1 2_2 3_1] & & & [1_1 1_2 2_2 1_1] & [1_1 1_2 2_3 3_1] & [1_1 3_1 2_1 3_1] & [1_1 3_1 2_2 1_2] \\
\downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
[1_1 2_2 1_1 3_1] & [1_1 2_2 1_2 1_1] & [1_1 2_2 3_1 1_2] & [1_1 2_2 1_1 1_3] & [1_1 2_3 1_2 3_1] & [1_1 2_1 3_1 3_1] & [1_1 2_2 1_1 3_1] \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
[2_1 3_1 3_1 1_2] & [2_1 3_1 1_1 3_1] & [2_1 3_1 1_2 1_1] & [2_1 1_1 3_1 3_1] & [2_1 3_1 3_1 1_2] & [2_1 3_1 3_1 1_2] & [2_1 1_2 3_1 1_1]
\end{array}.$$

Dakle, iz dane matrice taktičke dekompozicije moguće je konstruirati 7 *incidencijskih matrica. Varijabilni dijelovi tih matrica određeni su, dakle, sljedećim strukturama.*

$$\begin{matrix}[1_1 1_1 1_1 2_1]\\ [1_1 1_1 2_2 3_1]\\ [1_1 2_2 1_1 3_1]\\ [2_1 3_1 3_1 1_2]\end{matrix}, \quad \begin{matrix}[1_1 1_1 1_1 2_1]\\ [1_1 1_1 2_2 3_1]\\ [1_1 2_2 1_2 1_1]\\ [2_1 3_1 1_1 3_1]\end{matrix}, \ldots, \quad \begin{matrix}[1_1 1_1 1_1 2_1]\\ [1_1 3_1 2_2 1_2]\\ [1_1 2_2 1_1 3_1]\\ [2_1 1_2 3_1 1_1]\end{matrix}$$

Kada se fiksnom dijelu incidencijske matrice pridoda prvokreirana od tih struktura

$$\begin{matrix}[1_1 1_1 1_1 2_1]\\ [1_1 1_1 2_2 3_1]\\ [1_1 2_2 1_1 3_1]\\ [2_1 3_1 3_1 1_2]\end{matrix},$$

dobiva se incidencijska matrica

$$\left[\begin{array}{c|c|c|c|ccc|ccc|ccc|ccc}
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right].$$

Analogni postupak se provodi za preostalih 6 *dobivenih struktura, čime je završena konstrukcija dvoravnine* $(16, 6, 2)$ *na osnovi matrice taktičke dekompozicije s* 4 *fiksne točke.*

3.1.4 Smanjenje složenosti algoritma uvođenjem tehnike filtriranja

Osim ovakvog, matematičkog, pojednostavljivanja problema, doseg algoritma je značajno povećan uvođenjem tzv. filtriranja vektora (tehnika redukcije prostora rješenja uspješno uvedena u magistarskom radu [19]). U ovom slučaju, primjena te strategije znači generiranje svih različitih i-tih redaka ekspandiranih koeficijenata, $\forall i = 1, 2, ..., t_p - f$, i zatim "ostavljanje" samo onih koji se u λ točaka sijeku s prvim (fiksiranim) retkom ekspandiranih koeficijenata varijabilnog dijela matrice. Tako definirani vektori pamtit će se u matrici $CAND$, koja ima $(t_p - f)$ redaka. Broj redaka ekspandiranih koeficijenata (broj kombinacija ekspandiranih koeficijenata) za dani i, $i = 1, 2, ..., t_p - f$ pamtit će se u matrici $nrOfCand$, tj. bit će jednak $nrOfCand[i]$. Sukladno ranije iznesenom, $nrOfCand[1] = 1$. Sljedeći pseudokod prikazuje generiranje redaka ekspandiranih koeficijenata (bez fiksnog dijela; uvodi se oznaka R_i' za i-ti redak ekspandiranih koeficijenata bez fiksnog dijela) i njihovo zapisavanje u matricu $CAND$.

Procedure InitCAND()

$\underline{\text{int}}\ i, j, counter, R[x, y]$

// zapiši kandidate u $CAND$

$CAND[1,1] = STATE[1,1]\ \cup_+\ \ STATE[1,2]\ \cup_+, ..., \cup_+\ STATE[1, t_B - F]$

$\underline{\text{for}}\ i = 2\ \underline{\text{to}}\ t_p - f$

  $counter = 0$

  $\underline{\text{while}}\ \exists R'_i$

    $counter++$

    $CAND[i, counter] = R'_i$

  $nrOfCand[i] = counter$

//ostavi u $CAND[i]$ samo one kandidate čiji je presjek sa

//$CAND[1,1]$ jednak λ

$\underline{\text{for}}\ i = 2\ \underline{\text{to}}\ t_p - f$

  $counter = 0$

  $\underline{\text{for}}\ j = 1\ \underline{\text{to}}\ nrOfCand[i]$

    $\underline{\text{if}}\ (FIX_1 \cup_+ CAND[1,1]) \cap' (FIX_i \cup_+ CAND[i,j]) = \lambda\ \underline{\text{then}}$

      $counter++$

      $CAND[i, counter] = CAND[i, j]$

  $nrOfCand[i] = counter$

$\underline{\text{end}}$

Primjer 3.6 *Naredna tablica prikazuje jedan konkretan primjer matrice $CAND$, za slučaj matrice taktičke dekompozicije $M16F4$.*

$[1_1 1_1 1_1 2_1]$	$-$	$-$	$-$	$-$
$[1_1 1_1 2_2 1_3]$	$[1_1 1_2 2_2 1_1]$	$[1_1 1_2 2_3 1_3]$	$[1_1 1_3 2_1 1_3]$	$[1_1 1_3 2_2 1_2]$
$[1_1 2_1 1_3 1_3]$	$[1_1 2_2 1_1 1_3]$	$[1_1 2_2 1_2 1_1]$	$[1_1 2_2 1_3 1_2]$	$[1_1 2_3 1_2 1_3]$
$[2_1 1_1 1_3 1_3]$	$[2_1 1_2 1_3 1_1]$	$[2_1 1_3 1_1 1_3]$	$[2_1 1_3 1_2 1_1]$	$[2_1 1_3 1_3 1_2]$

Za pripadnu matricu $nrOfCand$ vrijedi:

$$nrOfCand = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Iscrpna pretraga sada se može podijeliti na onoliko dijelova koliko je elemenata u 2-om retku matrice $CAND$. Sa svakim od tih vektora filtriraju se retci od 3-eg do zadnjeg a nakon toga se kandidati koji preostanu iscrpno pretraže "backtracking" pristupom. Ti preostali kandidati zapisuju se u matricu $CAND2$, analogno zapisivanju kandidata u $CAND$, s očitom razlikom da se kandidati u $CAND2$ mijenjaju sa svakim sljedećim vektorom iz $CAND[2]$ dok kandidati pohranjeni u $CAND$ služe tijekom cijelog vremena rada algoritma.

Opisani postupak filtriranja precizno pokazuje sljedeći pseudokod; ulazni parametar potprograma je cijeli broj j koji predstavlja (tekuću) kombinaciju ekspandiranih koeficijenata iz $CAND[2]$.

Procedure Filtriraj(int j)
//u $CAND2$ prepiši elemente $CAND[i]$ koji se u λ točaka
//sijeku s tekućim (j-tim) $CAND[2]; i = 3, ..., t_p - f$
<u>int</u> $i, l, counter$
<u>for</u> $i = 3$ <u>to</u> $t_p - f$
    $counter = 0$
    <u>for</u> $l = 1$ <u>to</u> $nrOfCand[i]$
        <u>if</u> $(FIX_2 \cup_+ CAND[2, j]) \cap' (FIX_i \cup_+ CAND[i, l]) = \lambda$ <u>then</u>
            $counter++$
            $CAND2[i, counter] = CAND[i, l]$
    $nrOfCand2[i] = counter$
<u>end</u>

3.1.5 Pseudokod algoritma $Tact3$

Sva prethodna razmatranja mogu se sada sažeti u pseudokod algoritma za razvoj matrica taktičke dekompozicije, pri djelovanju automorfizma reda 3. Osim parametara traženog dizajna, ulazni parametri algoritma su matrica taktičke dekompozicije MTD, brojevi fiksnih točaka i blokova f i F, te ukupni broj staza na točkama i na blokovima t_p i t_B. Slijedi opis ranije navedenih matrica, koje služe kao globalne varijable u algoritmu $Tact3$.

i) Matrica INC dimenzija je $v \times b$ i u nju će se zapisati tekuća dobivena incidencijska matrica traženog dizajna.

ii) Matrica $STATE$ dimenzija je $(t_p - f) \times (t_B - F)$ i njeni su elementi skupovi. Vrijednosti elemenata ove matrice definiraju se u potprogramima *InitSTATE* i *FiksirajSTATE*. Potprogram *InitSTATE* je definiran relacijom 3.3 dok je potprogram *FiksirajSTATE* određen relacijama 3.4-3.5 kao i pseudokodom *FiksirajDodatnoSTATE*. Nakon izvršenja tih potprograma, ova se matrica više ne mijenja tijekom izvođenja programa; na osnovu njenih elemenata inicijalizira se matrica $CAND$.

iii) Matrica $CAND$ ima $(t_p - f)$ redaka i njeni su elementi uređene $(t_B -$

$F)-$torke koje predstavljaju retke ekspandiranih koeficijenata (radi praktičnosti, u zapisu se izostavljaju fiksni dijelovi). Spomenuto inicijaliziranje ove matrice izvodi se u potprogramu *InitCAND*. U istom se potprogramu izvodi i filtriranje elemenata u pojedinom retku s elementom $CAND[1,1]$. Nakon toga, ova matrica više ne mijenja vrijednosti svojih elemenata, već se iz nje odgovarajući elementi prepisuju u matricu $CAND2$.

iv) Matrica $CAND2$ ima elemente iste vrste kao i matrica $CAND$. U ovu se matricu zapisuju retci ekspandiranih koeficijenata koji se u λ točaka sijeku s tekućim retkom ekspandiranih koeficijenata iz 2-og retka matrice $CAND$ (u potprogramu *Filtriraj*). Jasno je da se i ovdje, radi praktičnosti, izostavljaju fiksni dijelovi - budući da se retci ekspandiranih koeficijenata prepisuju iz matrice $CAND$. Iscrpna pretraga se izvodi nad elementima matrice $CAND2$, u osnovnom dijelu algoritma $Tact3$.
Osnovna operacija reda 2 provodi se i radi filtriranja kandidata (u potprogramu $Filtriraj$), koji su zapisani u matrici $CAND$, i kod same iscrpne pretrage (u osnovnom dijelu algoritma) odabranih kandidata koji su zapisani u matrici $CAND2$. Slijedi pseudokod algoritma $Tact3$.

Algoritam Tact3$(MTD, t_p, f, t_B, F, \lambda)$
<u>global</u> $INC[x,y], STATE[x,y], CAND[x,y], nrOfCand[x],$
    $CAND2[x,y], nrOfCand2[x]$
<u>int</u> i, j, l, r, ii, jj
  $InitINC()$
  $InitSTATE()$
  $FiksirajSTATE()$
  $InitCAND()$
  $R_1 = FIX_1 \cup_+ (\bigcup_{+\, i=1}^{t_B-F} M_i, M_i \in CAND[1,1])$
    <u>for</u> $j = 1$ <u>to</u> $nrOfCand[2]$
      $Filtriraj(j)$
      $R_2 = FIX_2 \cup_+ (\bigcup_{+\, i=1}^{t_B-F} M_i, M_i \in CAND[2,j])$
      <u>while</u> $\exists\{(R_3, R_4, ..., R_{t_p-f}) \mid R_i \cap' R_l = \lambda, \ \forall i, l, \ i \neq l\}$
        $INC[f + 3(ii-1) + r, jj + F] = R_i i[r, jj];$
        $ii = 1, 2, ..., t_p - f, \ r = 1, 2, 3, \ jj = 1, 2, ..., t_B$
<u>end</u>

3.2 Metoda konstrukcije dizajna s trivijalnom grupom automorfizama

3.2.1 Dizajni s trivijalnom grupom automorfizama

Dizajni s trivijalnom grupom automorfizama tj. dizajni čiji je red grupe automorfizama $|Aut(\mathcal{D})| = 1$, strukture su bez ikakvih unutarnjih simetrija. Ne postoji ni jedna permutacija redaka i stupaca incidencijske matrice takvog dizajna koja bi matricu, odnosno dizajn, preslikala u sebe samog (osim identitete). Pretpostavlja se da je upravo ovakvih dizajna najviše (a rezultati dobiveni u ovom radu u skladu su s tom hipotezom).

Kada je riječ o vrlo malim parametrima dizajna ($v \leq 10$, primjerice), tada dizajne s trivijalnom grupom automorfizama treba potražiti među nesimetričnim dizajnima. Naime, simetrični 2-dizajni parametara tih veličina općenito su vrlo pravilni što se odražava u većim redovima grupa automorfizama. U skladu s tim načelnim pravilom su i rezultati analize koja je obuhvaćala 12 2-dizajna s $v \leq 10$. Dizajni s parametrima $(6, 3, 4)$, $(6, 3, 6)$, $(6, 3, 8)$, $(7, 3, 2)$, $(8, 4, 3)$ su neki od razmatranih slučajeva (Slika 3.1). Najmanji parametri za koje je u tom uzorku pronađen dizajn s $|Aut(\mathcal{D})| = 1$ su $(8, 4, 6)$ i $(10, 3, 2)$. U oba slučaja postoje i dizajni s redom grupe automorfizama $|Aut(\mathcal{D})| = 2$.

0010111110001011011000001011
1101011110100000110100011100
1111100101011000011111000000
0001010000001101010011101111
0011000001100101011001111110
1000001011111101101100100001
1110101000000111100011010101
0100110111110110000010110010

Slika 3.1: Matrica incidencije nesimetričnog jednostavnog dizajna 2-$(8, 4, 6)$ s trivijalnom grupom automorfizama

3.2.2 Izostavljanje djelovanja grupe

Dizajne s trivijalnom grupom automorfizama iznimno je teško konstruirati, o čemu svjedoči mali broj dosad pronađenih struktura. Kod tih dizajna vrlo je teško naći neki dodatni uvjet na strukturu, budući da ne sadrže nikakvih simetrija.

U ovom radu uvodi se i razrađuje ideja (M.O.Pavčević) konstrukcije dizajna s trivijalnom grupom automorfizama, na način da se "zaboravi" na djelovanje grupe. Naime, kako slijedi prema metodi taktičke dekompozicije, pretpostavljanjem djelovanja automorfizma prim reda p, pri konstrukciji se dizajni "sastavljaju" kombiniranjem cikličkih matrica reda p. Na taj način očekivano dobiveni dizajni bit će oni na koje pretpostavljeni automorfizam djeluje. Međutim, poznata matrica taktičke dekompozicije (dobivena pretpostavljanjem djelovanja automorfizma) u ovom se radu koristi i na način da se razvija u incidencijsku matricu ne samo pomoću cikličkih matrica već i svih ostalih matrica s odgovarajućim zbrojem jedinica u retcima i stupcima. Preciznije, prema ovoj ideji, ekspandirani koeficijent ρ_{ij} zamjenjuje se ne samo s cikličkim matricama reda p već sa svim matricama tog reda čiji je zbroj elemenata pojedinog stupca/retka jednak ρ_{ij}. Kako se sve konstrukcije u ovom radu izvode na pretpostavci djelovanja automorfizma reda 3, to će značiti pretraživanje kombinacija cikličkih i anticikličkih matrica reda 3, umjesto samo cikličkih. Takva metoda konstrukcije očigledno poopćuje prethodno opisani pristup (u kojem se u obzir uzimaju samo kombinacije bilo cikličkih bilo anticikličkih matrica): među dobivenim dizajnima bit će svi dizajni konstruirani na osnovi samo cikličkih matrica.

U nastavku će se dizajni konstruirani pomoću samo cikličkih matrica označavati kraticom "C", a dizajni konstruirani na osnovi cikličkih i anticikličkih oznakom "CAC".

Odmah je vidljivo da će za dane parametre t-(v, k, λ) prostor rješenja "CAC" konstrukcija biti daleko veći od prostora rješenja kod "C" konstrukcija (a posljedično i vrijeme potrebno za konstrukciju). Primjerice, kod dvoravnine $(16, 6, 2)$ nakon provedenog postupka fiksiranja veličina prostora rješenja u slučaju "C" je 19683 dok se u slučaju "CAC" radi o 10077696 kombinacija. Naredna Tablica 3.2 prikazuje veličinu prostora rješenja za nekoliko "CAC" konstrukcija, točnije za dizajne čija je veličina prostora rješenja u "C" slučaju vidljiva u Tablici 3.1.

Da bi prethodno opisani algoritam $Tact3$ bio u mogućnosti konstruirati i trivijalne dizajne (i očekivano ostale, čiji red grupe automorfizama nije višekratnik broja 3), potrebno ga je izmijeniti u dva detalja. Kao prvo, elementi matrice $STATE$ sada će sadržavati i anticikličke matrice reda 3. Točnije vrijedi

$$STATE[i,j] = \begin{cases} \{0_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 0 \\ \{1_1, 1_2, 1_3, 1_4, 1_5, 1_6\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 1 \\ \{2_1, 2_2, 2_3, 2_4, 2_5, 2_6\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 2 \\ \{3_1\}, & \text{ako } MTD[i+f, j+F] = 3 \end{cases} . \quad (3.6)$$

Druga razlika u odnosu na algoritam za "C" konstrukciju je u tome što se sada osnovna operacija reda 2 više ne sastoji od samo 3 osnovne operacije reda

Tablica 3.2: Usporedba veličine prostora rješenja kod CAC konstrukcija

Oznaka matrice	Dizajn	Sve kombinacije	Maksimalno fiksiranje
$M16F4$	2−(16,6,2)	$2,8E+12$	10077696
$M31F7$	2−(31,10,3)	$3,7E+43$	$4,8E+32$
$M31F4$	2−(31,10,3)	$1,0E+49$	$3,7E+36$
$M31F1$	2−(31,10,3)	$2,9E+54$	$4,8E+39$
$M36F9$	2−(36,15,6)	$1,0E+63$	$6,3E+49$
$M36F0$	2−(36,15,6)	$1,1E+112$	$8,3E+66$

1, već od njih 9, što dodatno otežava konstrukciju. U nastavku se opisuju konstrukcije potpuno klasificiranih dizajna i to za obje situacije: kad se koeficijenti ρ_{ij} zamjenjuju samo s cikličkim matricama i kad se kombiniraju cikličke i anticikličke matrice reda 3.

3.2.3 Odabir pretpostavljenog automorfizma

Redom pretpostavljenog automorfizma, na osnovi čijeg djelovanja nastaje taktička dekompozicija, jednoznačno je određen broj cikličkih matrica koje su kandidati za tvorbu dizajna. Točnije, ukoliko je taktička dekompozicija nastala djelovanjem automorfizma prim reda p, broj cikličkih matrica koje se pri konstrukciji pridružuju koeficijentu ρ_{ij} iznosi $Cik_{ij} = \binom{p}{\rho_{ij}}$.

Međutim, ukoliko se zaboravlja na djelovanje grupe, u drugom koraku konstrukcije dizajna metodom taktičke dekompozicije (kako je opisano u prethodnom poglavlju), tada je broj mogućih matrica Svi_{ij} za dani ρ_{ij} znatno veći. Sljedeća tablica uspoređuje broj matrica Cik_{ij} i Svi_{ij} za dani koeficijent ρ_{ij} u slučaju djelovanja automorfizma reda p. U slučaju kada je $p = 2$, ne može se izbjeći da automorfizam reda 2 djeluje na traženu strukturu, budući da su sve adekvatne postojeće matrice reda 2 cikličke. Dakle, najmanji slučaj kada se može zaboraviti na djelovanje grupe je slučaj kada je $p = 3$. U tom su slučaju, dakle, po 3 cikličke i anticikličke matrice za obje netrivijalne vrijednosti koeficijenta ρ_{ij}. Već za sljedeći prim broj 5, broj mogućnosti za pojedini ekspandirani koeficijent u "CAC" slučaju je značajno veći. Stoga, uzimajući u obzir računalnu složenost algoritma za dani p kao drugi kriterij, prirodan izbor pretpostavljenog automorfizma u ovom radu - kojem je primarni cilj konstrukcija dizajna s trivijalnom grupom automorfizama, je automorfizam reda 3.

Tablica 3.3: Usporedba broja matrica između dva tipa konstrukcije

p	ρ_{ij}	Cik_{ij}	Svi_{ij}
2	1	2	2
3	1	3	6
	2	3	6
5	1	5	120
	2	10	2040
	3	10	2040
	4	5	120
7	1	7	5040
	2	21	3110940
	3	35	68938800
	4	35	68938800
	5	21	3110940
	6	7	5040

3.3 Implementacija algoritma $Tact3$

Opisani algoritam $Tact3$ implementiran je pomoću programskog jezika C. Riječ je o konzolnom računalnom programu. U nastavku se opisuju glavne strukture podataka koje računalni program $Tact3$ koristi - i koje su ekvivalentne prethodno opisanim matricama koje se javljaju kao varijable u algoritmu $Tact3$. Nakon toga opisuje se i analizira rad osnovnog dijela programa.

3.3.1 Strukture podataka

Matrica $STATE$ implementirana je kao istoimeno 2-dimenzionalno polje čiji su elementi strukture deklarirane na način

```
struct StateOfCoef{
    int currPos;
    int firstExpCoef;
    int lastExpCoef;
}.
```

Dakle, umjesto pamćenja samih ekspandiranih koeficijenata, pamti se najveći, zatim najmanji indeks a varijabla $currPos$ pamti trenutni indeks (kod generiranja vektora koji su kandidati za tvorbu incidencijske matrice). Sljedeći primjer prikazuje vrijednosti elementa polja $STATE$ na početku rada programa za jednu konkretnu potencijalnu matricu taktičke dekompozicije.

Primjer 3.7 *Sljedeća shema prikazuje danu ulaznu datoteku ($M16F4.txt$) za program $Tact3$.*

2 16 6 2

8 8

1	1	1	1	3	3	3	3
1	1	1	1	3	3	3	3

1	1	1	0	3	0	0	0
1	1	0	1	0	3	0	0
1	0	1	1	0	0	3	0
0	1	1	1	0	0	0	3
1	0	0	0	1	1	1	2
0	1	0	0	1	1	2	1
0	0	1	0	1	2	1	1
0	0	0	1	2	1	1	1

Za danu ulaznu matricu, polje $STATE$ će na početku rada programa imati vrijednosti kakve pokazuje sljedeća tablica.

111	111	111	777
111	131	797	131
111	797	131	131
777	131	131	131

U primjeru je vidljivo da su u prvom retku i prvom stupcu polja $STATE$ (koje je formirano od varijabilnog dijela matrice taktičke dekompozicije) ekspandirani koeficijenti "fiksirani", tj. samo je jedan mogući koeficijent na tim pozicijama. Može se primijetiti da su ekspandirani koeficijenti u implementaciji označeni brojevima $0, 1, 2, ..., 13$ ($0 \leftarrow 0_1$, $1 \leftarrow 1_1, ..., 13 \leftarrow 3_1$).

Matrica $CAND$ je implementirana kao 2-dimenzionalno polje čiji su elementi cijeli brojevi. Budući da se radi o 2-dimenzionalnom polju, vektori se u retke zapisuju sljedno, što znači da je za zapis pojedinog vektora duljine $f_b - F$ potrebno isto toliko ($f_b - F$) elemenata dotičnog retka. Naredna shema prikazuje opći izgled polja $CAND$.

$vektor0$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$vektor0$	$vektor1$	...	$vektorN_1$	$-$	$-$
$vektor0$	$vektor1$	...			$vektorN_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$vektor0$	$vektor1$	...		$vektorN_{f_p-f-1}$	$-$

Kako je ranije objašnjeno, prvi redak polja sadrži samo jedan vektor (kombinaciju ekspandiranih koeficijenata), a preostali retci sadrže samo one vektore koji se s prvim sijeku u λ točaka (govori se, dakako, o presjeku kad se pridoda i fiksni dio). Jednodimenzionalno polje $nrOfCand$ pamti broj vektora u pojedinom retku polja $CAND$. Zapisivanje vektora u ovo polje odvija se u proceduri $GenerateCandidates$. Tom prilikom u retke od drugog nadalje spreme se samo oni kandidati koji se s vektorom iz prvog retka sijeku u λ točaka. Bilo bi konceptualno jednostavnije matricu $CAND$ implementirati kao 3-dimenzionalno polje, no takvo bi rješenje bilo sporije.

Ekvivalent polja $CAND2$ u izvornom kodu programa je 2-dimenzionalno polje $SPACE$. Kao što slijedi iz procedure $Filtriraj$, u polje $SPACE$ se zapisuju oni vektori koji se s tekućim vektorom iz drugog retka matrice $CAND$ sijeku u λ točaka. Kako se u polju $CAND$, gledajući od drugog retka nadalje, nalaze vektori koji se s vektorom iz prvog retka tog polja sijeku u λ točaka, to ujedno znači da se tako dobiveni kandidati u polju $SPACE$ sijeku u λ točaka i s vektorom iz prvog retka polja $CAND$ i s tekućim retkom iz drugog retka polja $CAND$. Stoga se u prvi i drugi redak polja $SPACE$ ništa ne upisuje. Ovaj postupak se provodi u proceduri $Filter1$. Važno je napomenuti da se u polje $SPACE$ ne zapisuju sami vektori već njihovi indeksi (pozicije) u polju $CAND$ budući da takvo rješenje čini program bržim.

3.3.2 Raščlamba rada programa

Sljedeći izvorni tekst prikazuje esencijalni dio programa $Tact3$ (Slika 3.2). Varijabla $nrOfLayers$ predstavlja broj redaka u varijabilnom dijelu matrice taktičke dekompozicije ($nrOfLayers = t_p - f$; analogno, vrijednost varijable $nrOfSegments$ jednaka je $t_B - F$). Jednodimenzionalno polje $Solution$ predstavlja traženu incidencijsku matricu. Točnije, u nekom koraku algoritma u tom je polju zapisano x, $x \leq (t_p - f)$ vektora koji se međusobno sijeku u λ točaka. Prvi element tog polja, $Solution[0]$, predstavlja fiksirani vektor iz prvog retka varijabilnog dijela matrice taktičke dekompozicije, kandidati za drugi element polja su vektori iz drugog retka polja $CAND$, kandidati za treći element su vektori iz trećeg retka polja $SPACE$, kandidati za četvrtu poziciju su vektori iz četvrtog retka polja $SPACE$ itd. Kada je $x = (t_p - f)$ incidencijska matrica je pronađena. Vektori u polju $Solution$ nisu zapisani izravno već se pamte indeksi (pozicije) vektora u polju $SPACE$.

Algoritam, dakle, sastavlja incidencijsku matricu tako da u sljedećem retku polja $SPACE$, $currLayer$, traži vektor (sljedeći po redu u retku $SPACE[currLayer]$) koji se u λ točaka siječe s prethodno odabranima (čije su pozicije zapisane u polju $Solution$). Ta se operacija odvija u funkciji $NextOkVector$. Ukoliko je u nekom koraku algoritma u polju $Solution$ zapisano $curLayer$ vektora, funkcija $NextOkVector$ traži sljedeći "dobar" vektor počevši od pozicije

$$Solution[currLayer] + 1$$

u retku $SPACE[currLayer]$. Vektor je odgovarajući ukoliko se u λ točaka siječe s trenutno odabranim vektorima (s tim da nije potrebno provjeravati za vektore zapisane u $Solution[0]$ i $Solution[2]$ budući da se svaki vektor u polju $SPACE$ s njima siječe u λ točaka). Ukoliko je vektor nađen nova se pozicija zapisuje u $Solution[currLayer]$ i vraća se vrijednost "true", inače se zapisuje vrijednost -1 i vraća vrijednost "false".

Ukoliko funkcija $NextOkVector$ vrati vrijednost "true", što je znak da je pronađen sljedeći odgovarajući vektor u retku $currLayer$, tekući redak postaje sljedeći redak; inače se vrijednost $currLayer$ umanjuje za 1. Vrijednost varijable $currLayer$ varira od one koja predstavlja startni, treći, redak do one koja predstavlja zadnji redak polja $SPACE$. Na početku rada programa vrijednost varijable $currLayer$ jednaka je broju 3. Kada se u trećem retku polja $SPACE$ pronađe odgovarajući vektor, u sljedećem koraku traži se odgovarajući vektor u 4-om retku polja $SPACE$, itd. Kada se dosegne zadnji redak, dizajn je pronađen. Kada se, naposljetku, u trećem retku više ne nađe odgovarajući vektor iscrpna pretraga je završena.

Vremenski najzahtjevnija operacija u programu $Tact3$ je računanje presjeka dvaju vektora (osnovna operacija reda 1). Da bi $Tact3$ mogao omogućiti i konstrukciju kod koje se dopuštaju samo cikličke podmatrice i konstrukciju kod koje se dopuštaju cikličke i anticikličke podmatrice, potrebno je računati svih 9 presjeka. Kako je ranije opisano, presjek dvaju vektora jednak je zbroju presjeka parova njihovih elemenata. Obzirom da postoji 14 takvih različitih parova, prirodno bi bilo njihove presjeke pamtiti u 3-dimenzionalnom polju, dimenzija $14 \times 14 \times 9$. U takvom polju $Cube$ redak $Cube[x][y]$ je 9-orka koja predstavlja presjek parova vektora x i y, gdje $x, y \in \{0, 1, ..., 13\}$. No, budući da se pokazalo da je pristup elementima 2-dimenzionalnog polja brži nego onima 3-dimenzinalnog polja, u ovu se svrhu koristi 9 dvodimenzionalnih polja. Osim u funkciji $NextOkVector$, operacija računanja presjeka izvodi se i u proceduri $Filter1$. Ta procedura filtrira vektore iz polja $CAND$ (od 3-eg retka nadalje) s tekućim vektorom iz retka $CAND[1]$ te ih zapisuje u polje $SPACE$.

Program $Tact3$ u svom radu koristi jednu inicijalizacijsku datoteku u kojoj se nalaze cikličke i anticikličke matrice reda 3 (*elemMat.txt*) te jednu ulaznu datoteku u kojoj se nalaze parametri traženog dizajna kao i njegove potencijalne matrice taktičke dekompozicije. Izlazni rezultat rada programa jesu datoteke imena *TactResult1.txt*, *TactResult2.txt*,... u kojima su, redom, pohranjene incidencijske matrice dobivene iz prve potencijalne matrice

```
void AlgorithmTact3()
int currLayer, startLayer, lastLayer, i, j;
bool success;

...iz izvornog teksta izostavljene su inicijlizacije i postupak filtriranja

 startLayer=3;
 lastLayer=nrOfLayers-1;

 //za svaki vektor iz drugog retka polja CAND
 for (i=0; i<nrOfCand[1]; i++)
    Solution[1]=i;
    Filter1(i);
       //za svaki vektor iz trećeg retka polja SPACE
       for (j=0; j<nrOfCand1[2]; j++)
          Solution[2]=j;
          currLayer=3;

          //iscrpna pretraga
          while (currLayer>=startLayer)
             if (currLayer==lastLayer)
                success=NextOkVector(currLayer);
                while (success)
                   nrOfSolution++;
                   WriteSolution();
                   success=NextOkVector(currLayer);
                currLayer--;

          while ((currLayer>=startLayer) && (currLayer<lastLayer))
             success=NextOkVector(currLayer);
             if (success) currLayer++; else currLayer--;
```

Slika 3.2: Izvorni tekst algoritma $Tact3$ u programskom jeziku C taktičke dekompozicije, druge potencijalne matrice taktičke dekompozicije, itd. Iz praktičnih razloga (štednje prostora u trajnoj memoriji računala, lakšeg prenošenja na druga računala) incidencijske matrice zapisane su pomoću ekspandiranih koeficijenata. To je ilustrirano sljedećim primjerom.

Primjer 3.8 *Neka je ulazna matrica taktičke dekompozicije za $Tact3$ ona iz Primjera 3.7. U "CAC" slučaju, $Tact3$ će konstruirati 7 incidencijskih matrica te će izlazna datoteka $TactResult1.txt$ izgledati kao što prikazuje naredna shema.*

$$\begin{array}{cccc}
1 & 1 & 1 & 7 \\
1 & 1 & 8 & 3 \\
1 & 8 & 1 & 3 \\
1 & 3 & 3 & 2 \\
 & & & \\
1 & 1 & 1 & 7 \\
1 & 1 & 8 & 3 \\
1 & 8 & 2 & 1 \\
7 & 3 & 1 & 3 \\
 & \vdots & & \\
1 & 1 & 1 & 7 \\
1 & 3 & 8 & 2 \\
1 & 8 & 1 & 3 \\
7 & 2 & 3 & 1
\end{array}$$

Primjer 3.5 također razmatra konstrukciju dvoravnine na osnovu ove iste matrice taktičke dekompozicije. Napomenimo da je ova reprezentacija rješenja ekvivalentna reprezentaciji koju prikazuje shema u Primjeru 3.5.

Za transformaciju ovako reprezentiranih incidencijskih matrica u binarne matrice dimenzija $v \times b$ razvijen je računalni program $ExpCoef2Des$.

3.4 Konstrukcije 2-dizajna s malim parametrima

Kako je dosad objašnjeno, dvije glavne etape pri konstrukciji dizajna metodom taktičke dekompozicije jesu konstrukcije potencijalnih matrica taktičke dekompozicije te razvoj tih matrica u incidencijske matrice dizajna. Međutim, nakon konstruiranja incidencijskih matrica, potrebno je još tim dobivenim strukturama ispitati izomorfnost. Zbog tog postupka, gledajući s aspekta vremenske zahtjevnosti, u ovom se radu izdvajaju tri vremenski najzahtjevnije etape pri konstrukciji i daljnjem baratanju s incidencijskim matricama:

i) konstrukcija matrica taktičke dekompozicije,

ii) indeksiranje tih matrica te

iii) izoliranje neizomorfnih matrica iz skupa dobivenih incidencijskih matrica.

Dok su prva i druga etapa teorijski objašnjene u dosadašnjem dijelu rada, u nastavku se opisuje praktično ostvarenje svih triju koraka.

Najprije se pomoću računalnog programa *Orbmat* konstruiraju matrice taktičke dekompozicije, za dane parametre t-(v, k, λ) dizajna. Osim parametara dizajna, ulazni podaci za *Orbmat* su broj staza na točkama t_p, broj staza na blokovima t_B, te dio fiksne strukture - fiksni retci. Primjerice, shema

```
2  16  6  2

6  6

1  3   3  3  3  3
1  3   3  3  3  3

0  3   3  0  0  0
?
```

predstavlja jednu ($OM16F1.txt$, Prilog A), od ukupno dvije datoteke s ulaznim podacima za dvoravninu $(16, 6, 2)$. U ovom radu fiksne strukture tražile su se ručno. Potrebno je odrediti sve različite fiksne strukture (točnije, samo dio kojeg čine retci). Osnovni kriterij pri sastavljanju fiksnih redaka je da se svaka dva retka (vektora) sijeku u λ točaka. Za svaku različitu f-torku fiksnih redaka potrebno je posebno pokrenuti program. Tako, za navedenu dvoravninu potrebno je pokrenuti *orbmat* $OM16F1.txt$ te zatim *orbmat* $OM16F4.txt$. (Iz praktičnih razloga, u ovom je radu razvijena inačica $Orbmat2$, koja omogućuje spremanje rezultantnih matrica u datoteku $ResultMTD.txt$.) Za ulaznu datoteku $filename.txt$ program $Orbmat2$ se pokreće na način

$$orbmat2 \;\; filename.txt.$$

Konstruirane matrice taktičke dekompozicije ulazni su podaci za računalni program $Tact3$, koji postupkom njihovog indeksiranja konstruira incidencijske matrice dizajna s parametrima t-(v, k, λ). Primjerice, iz prethodno opisane ulazne datoteke (za konstrukciju matrica taktičke dekompozicije dvoravnine sa 16 točaka) dobivaju se dvije matrice taktičke dekompozicije. Shema

2	16	6	2		
6	6				
1	3	3	3	3	3
1	3	3	3	3	3
0	3	3	0	0	0
1	2	0	1	1	1
1	0	2	1	1	1
0	1	1	2	2	0
0	1	1	2	0	2
0	1	1	0	2	2
0	3	3	0	0	0
1	1	1	2	1	0
1	1	1	0	1	2
0	2	0	1	2	1
0	1	1	2	0	2
0	0	2	1	2	1

prikazuje te matrice u ulaznoj datoteci ($M16F1.txt$, Prilog A) za $Tact3$. Program $Tact3$ pokreće se, u ovom slučaju na način:

$$tact3\ \ 0\ \ M16F1.txt$$

za "C" konstrukciju te

$$tact3\ \ 1\ \ M16F1.txt$$

za "CAC" konstrukcije.

Druga etapa konstruiranja dizajna (indeksiranje) završava izvođenjem programa $ExpCoef2Des$, koji incidencijske matrice zapisane pomoću ekspandiranih koeficijenata prevodi u standardni zapis (kako je opisano u prethodnom poglavlju). Radi dodatne provjere, svi rezultati programa $ExpCoef2Des$ provjereni su pomoćnim programom $CheckBIBD$. Računalni program $CheckBIBD$ provjerava da li su sve matrice u ulaznoj datoteci $filename.txt$ incidencijske matrice dizajna s parametrima 2-(v, k, λ). Program se iz komandne linije pokreće naredbom

$$checkbibd\ \ v\ \ k\ \ \lambda\ \ filename.txt.$$

Ukoliko se pak radi o 3-dizajnu, za provjeru se koristi program $Check3Des$, koji se pokreće na način

$$check3des\ \ v\ \ b\ \ k\ \ \lambda\ \ filename.txt.$$

Kada $Tact3$ završi s konstruiranjem incidencijskih matrica, dobiveni se skup matrica filtrira programom $Incfilter$ ([16][24]) s ciljem izoliranja svih međusobno neizomorfnih matrica. Incidencijske matrice koje se filtriraju trebaju biti spremljene u datoteku pod imenom *inc.txt* a neizomorfne među njima se spreme u datoteku $inc.fil$. Iako je istim programom moguće odrediti i redove grupa automorfizama, za tu je svrhu razvijena inačica $Incfilter2$, koja omogućuje spremanje redova grupa u datoteku *aut.txt*, što je korisno u slučajevima velikog broja ulaznih matrica (redoviti slučaj kod otvorenih pitanja). Program $Incfilter2$ pokreće se na način

$$incfilter2 - c,$$

za ispitivanje izomorfnosti matrica u ulaznoj datoteci *inc.txt* dok parametar "-a" omogućuje određivanje redova grupa ulaznih matrica.

Razvijena je i pomoćna aplikacija $CountAut$, koja utvrđuje frekvencije pojedinog reda grupe automorfizama navedenog u datoteci *aut.txt*. Za potrebe spajanja datoteka u kojima se nalaze incidencijske matrice parcijalnih pretraga u jednu datoteku - što je potrebno radi određivanja konačnog broja neizomorfnih dizajna, razvijena je pomoćna aplikacija $MergeFiles$. Naime, kod otvorenih pitanja, te su datoteke u pravilu toliko velike da njima nije moguće baratati pomoću poznatih i raširenih programa za obradu teksta. Više o pomoćnim programima može se pročitati u 7-om poglavlju rada.

Naredna shema predstavlja rezime prethodnog opisa triju glavnih etapa konstrukcije dizajna metodom taktičke dekompozicije, na primjeru ulazne datoteke $OM16F1.txt$.

$orbmat2\ \ OM16F1.txt$	$\rightarrow$	$tact3\ \ 0\ \ ResultMTD.txt \rightarrow$	$incfilter - c$
$ResultMTD.txt$		$TactResult1.txt$	$inc.fil$
		$TactResult2.txt$	
		$ExpCoef2Des\ \ ResultMTD.txt12$	
		$inc.txt$	

U nastavku se opisuju konstrukcije dizajna s parametrima 2-$(7,3,1)$, 2-$(9,3,1)$, 2-$(16,6,2)$ i 3-$(8,4,1)$. Neke od tih konstrukcija ("C" slučaj) provedene su i ručno, budući da se radi o najvećim parametrima, u pojedinoj klasi dizajna, za koje je to još uvijek moguće.

3.4.1 Konstrukcija konačne projektivne ravnine reda 2

Djelovanje automorfizma reda 3 na najmanju projektivnu ravninu, čiji su parametri $(7,3,1)$, daje jednu matricu taktičke dekompozicije, $M7F1$. Kao što Primjer 2.6 pokazuje, taj automorfizam kod ovog dizajna ima tri staze na skupu točaka te na skupu blokova, pri čemu su jedna točka i jedan blok fiksni.

$$M7F1 = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Za ovu matricu taktičke dekompozicije indeksiranje je moguće provesti i ručno, posebice ukoliko se primijene prethodno opisana fiksiranja. Tada samo na jednoj poziciji, $M7F1[3][3]$, ekspandirani koeficijenti nisu fiksirani. Stoga u slučaju "C" postoje 3 različite matrice koje su kandidati za incidencijsku matricu, a u slučaju "CAC" 6 je različitih kombinacija ekspandiranih koeficijenata. U oba slučaja dobiva se samo jedna incidencijska matrica, i kako je poznato, njezin red grupe automorfizama iznosi 168. Ti rezultati prikazani su i sljedećom Tablicom 3.4.

Tablica 3.4: Rezultati konstrukcije za 2-$(7,3,1)$

MTD	Konstrukcija	*numincmat*	*numdes*	$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$
$M7F1$	C	1	1	168
	CAC	1	1	168

3.4.2 Konstrukcija konačne afine ravnine reda 3

Za nesimetrični dizajn 2-$(9,3,1)$ postoje dvije matrice taktičke dekompozicije kod djelovanja automorfizma reda 3. Jedna od njih, $M9F0$, nema fiksnih točaka ni blokova dok druga, $M9F0F3$, nema fiksnih točaka a 3 su bloka stalna.

$$M9F0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad M9F0F3 = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Također i za ovaj dizajn, još uvijek bi bilo moguće ručno provesti indeksiranje. Primjerice, kod $M9F0$ u slučaju "C", vrijedi sljedeće razmatranje. Za prvi (fiksirani) redak ekspandiranih koeficijenata vrijedi $R_1[1] = [2_1, 1_1, 1_1, 0_1]$.

Nakon fiksiranja prvog stupca, u drugom retku ostanu sljedeća tri ekspandirana koeficijenta:

$$\begin{aligned} R_2[1] &= [1_1, 1_1, 0_1, 2_1], \\ R_2[2] &= [1_1, 1_2, 0_1, 2_1], \\ R_2[3] &= [1_1, 1_3, 0_1, 2_1], \end{aligned}$$

od kojih se jedino $R_2[2]$ u $\lambda = 1$ točaka sječe s $R_1[1]$. U trećem retku 9 je kandidata za tvorbu incidencijske matrice:

$$\begin{aligned} R_3[1] &= [0_1, 1_1, 2_1, 1_1], \\ R_3[2] &= [0_1, 1_1, 2_1, 1_2], \\ &\vdots \\ R_3[9] &= [0_1, 1_1, 2_1, 1_1]. \end{aligned}$$

U slučaju kad prostor rješenja čine samo cikličke matrice reda 3, kao i u slučaju kad se cikličke matrice kombiniraju s anticikličkima, dobivaju se dvije matrice taktičke dekompozicije. Sukladno poznatom rezultatu, do na izomorfizam dobiva se jedna incidencijska matrica čiji je red grupe automorfizama 432. Naredna Tablica 3.5 prikazuje rezultate algoritma $Tact3$ kod konstrukcije ovog dizajna.

Tablica 3.5: Rezultati konstrukcije afine ravnine s 9 točaka

MTD	Konstrukcija	*numincmat*	*numdes*	$\|Aut(\mathcal{D})\|$
$M9F0$	C	1	1	432
	CAC	1	1	432
$M9F0F3$	C	2	1	432
	CAC	2	1	432

3.4.3 Konstrukcija dvoravnine reda 4

Djelovanjem automorfizma reda 3 na dvoravninu sa 16 točaka, dobivaju se tri matrice taktičke dekompozicije. Kako je već spomenuto prilikom opisa upotrebe korištenih računalnih programa, jedna od tih matrica ima 4 fiksne točke te 4 fiksna bloka ($M16F4$), dok dvije matrice imaju po jednu fiksnu točku i blok $(M16F1_1, M16F1_2)$. Matrica $M16F4$ vidljiva je u Primjeru 3.1, dok su druge dvije matrice definirane kako slijedi.

$$M16F1_1 = \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \quad M16F1_2 = \left[\begin{array}{c|ccccc} 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

Nakon što su konstruirane matrice taktičke dekompozicije, provedeno je njihovo indeksiranje (u Primjeru 3.5 prikazan je postupak indeksiranja za 4 fiksne točke). U zadnjoj fazi konstrukcije filtrirane su dobivene incidencijske matrice, kako bi se izolirale samo one neizomorfne među njima.

Postoje ukupno 3 dvoravnine s parametrima $(16, 6, 2)$, i njihovi redovi grupa automorfizama jesu $384, 768, 11520$. I u slučaju konstrukcije sa samo cikličkim matricama i u slučaju kombiniranja cikličkih i anticikličkih matrica, dobivaju se sve tri postojeće dvoravnine reda 4. Glavna razlika između "C" i "CAC" konstrukcije je u tome što matrica $M16F4$ u "C" slučaju daje dvije dvoravnine $(|Aut(\mathcal{D})| \in \{384, 11520\})$, dok se u "CAC" slučaju dobivaju sve tri postojeće dvoravnine. Sumarne rezultate konstrukcije prikazuju Tablice 3.6 i 3.7.

Tablica 3.6: Rezultati konstrukcije za 2-$(16, 6, 2)$ C

MTD		$numincmat$	$numdes$	$\|Aut(\mathcal{D})\|$
$M16F4$	1	7	2	$384, 11520$
$M16F1$	1	6	1	11520
	2	2	1	768
svi C			3	$384, 768, 11520$

3.5 Implementacija algoritma za konstrukciju 3-dizajna

Osnovni dio algoritma $Tact3$, prikazan na Slici 3.2, može služiti ne samo za 2-dizajne već za bilo koju drugu vrijednost t. Jedino je pri tome važno da ulazna matrica taktičke dekompozicije ima minimalno potrebni broj redaka u nefiksnom dijelu, za dotični t. No, u nekim je drugim dijelovima program potrebno prilagoditi danom t.

Za slučaj $t = 3$, osnovna operacija reda 2 sastoji se od presjeka triju redaka ekspandiranih koeficijenata. Stoga je za zapis presjeka dane trojke ekspandiranih koeficijenata u tom slučaju potreban vektor duljine

$$\binom{9}{3} = 84,$$

odnosno u slučaju kad se radi o presjeku podmatrice dimenzije 1×3 i dvaju ekspandiranih koeficijenata, potreban je vektor duljine $\binom{7}{3} = 35$.

Daljnje razlike u odnosu na verziju programa $Tact3$ namijenjenu za 2-dizajne postoje kod procedura $GenerateCandidates$, $Filter1$ i $NextOkVector$. U proceduri $GenerateCandidates$ se na osnovu matrice taktičke dekompozicije zapisuju vektori (čiji su elementi ekspandirani koeficijenti) u polje $CAND$. Kod 3-dizajna, u prvi redak polja $CAND$ zapisuje se jedan ("fiksirani") vektor, jednako kao i kod 2-dizajna. Nadalje, u pojedini redak polja $CAND$ zapisuju se samo oni od mogućih vektora, koji zajedno sa svakim vektorom iz fiksnog dijela matrice taktičke dekompozicije te vektorom iz prvog retka matrice $CAND$ tvore odgovarajuću trojku vektora ekspandiranih koeficijenata (čijih se svih 35 kombinacija vektora siječe u λ točaka).

U algoritmu $Tact3$ procedura $Filter1$ (3.3) izvodi se onoliko puta koliko je vektora u drugom retku polja $CAND$. U slučaju $t = 3$ zadatak ove procedure je prepisati vektore iz polja $CAND$ (počevši od trećeg retka) u polje $SPACE$ na sljedeći način: iz pojedinog retka polja $CAND$ prepisuju se u istovjetni redak polja $SPACE$ oni vektori koji zajedno s vektorom iz prvog retka te tekućim vektorom iz drugog retka polja $CAND$ tvore "dobru" trojku vektora.

Općenito se može reći da se u polje $Solution$, koje je onolike duljine koliki je broj točaka traženog dizajna (v), zapisuje struktura vektora sa svojstvom da se svakih t vektora siječe u λ točaka. Funkcija $NextOkVector$ ima za zadatak pronaći u retku i, $i = 3, ..., v$, polja $SPACE$ vektor koji zajedno s vektorima zapisanim u polju $Solution$ tvori odgovarajuću strukturu. U slučaju 3-dizajna, to znači da funkcija $NextOkVector$ traži vektor na način da se isti siječe u λ

Tablica 3.7: Rezultati konstrukcije za 2-$(16, 6, 2)$ CAC

MTD		$numincmat$	$numdes$	$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$
$M16F4$	1	22	3	$384, 768, 11520$
$M16F1$	1	12	1	11520
	2	2	1	768
svi CAC			3	$384, 768, 11520$

točaka zajedno sa svakim parom vektora iz polja *Solution*.

Primjer 3.9 *Automorfizam reda* 3 *tvori jednu matricu taktičke dekompozicije,* M_{H2}*, na dizajnu* 3-$(8,4,1)$*, i isti fiksira dvije točke i dva bloka.*

$$M_{H2} = \left[\begin{array}{cc|cccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Za presjek drugog retka fiksne strukture, prvog retka varijabilnog dijela i vektora [1837] *drugog retka varijabilnog dijela vrijedi:*

$$M_{H2}[2] \cap' M_{H2}[3] \cap' [01|1837] =$$

$$[00000000000011110000000000000000001] +$$

$$[00100001000100000000000000000000000] +$$

$$[00000000000000000000000010000101000] +$$

$$[11011110111000000010100001000000000] +$$

$$[00000000000000001101011100111010110] =$$

$$[11111111111111111111111111111111111]$$

3.6 Konstrukcije t-dizajna s malim parametrima

3.6.1 Konstrukcija Hadamardovog 3-dizajna reda 9

Drugi po redu u seriji Hadamardovih 3-dizajna je dizajn s parametrima 3-$(12,6,2)$, koji ima 22 bloka i kod kojeg je svaka točka incidentna s 11 blokova. Svaka se trojka redaka incidencijske matrice tog dizajna siječe u dvije točke. U svrhu konstruiranja ovog dizajna, najprije su pomoću računalnog programa *Orbmat* konstruirane potencijalne matrice taktičke dekompozicije. Tim su testovima dobivene sljedeće dvije matrice.

$$MH3Fp0Fb4 = \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

```
void Filter1(int currVector)
int i,j,l, ll,counter;
bool vectOK;

for (i=2; i<nrOfLayers; i++)
    counter=0;
    for (j=0; j<nrOfCand[i]; j++)
        vectOK=true;

        for (l=0; l<84; l++) scor[l]=0;
        for (ll=0; ll<nrOfSegments; ll++)
        for (l=0; l<84; l++)
            scor[l]=scor[l]+ Cube3[ State[0][ll].currPos ]
            [ Cand[1][Solution[1]*nrOfSegments+ll] ]
            [ Cand[i][ j*nrOfSegments+ll ] ][l];
        FixInterVVVCalc(0,1,i);
        for (l=0; l<84; l++) scor[l]=scor[l]+FixInterVVV[l];

        for (l=0; l<84;l++)
            if (scor[l]!=lam) vectOK=false;

        if (vectOK)
            Space[i][counter]=j;
            counter++;

    nrOfCand1[i]=counter;
```

Slika 3.3: Izvorni tekst funkcije koja zapisuje kandidate u polje $SPACE$, kod konstrukcije 3-dizajna

$$MH3Fp3Fb4 = \left[\begin{array}{cccc|cccccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

Indeksiranje ovih matrica pomoću programa $Tact3$ pokazalo je da automorfizam reda 3 na dizajn 3-$(12, 6, 2)$ djeluje te pritom fiksira 3 točke i 4 bloka. Naime, razvoj prve navedene potencijalne matrice taktičke dekompozicije nije rezultirao incidencijskom matricom dizajna dok je druga matrica, $MH3Fp3Fb4$, rezultirala dvjema incidencijskim matricama.

Kod te ulazne matrice, za slučaj "C", 12 je vektora u drugom retku varijabilnog dijela koji zajedno s prvim vektorom iz fiksnog dijela i prvim vektorom iz varijabilnog dijela tvore odgovarajuću trojku. Jednako je toliko vektora za drugi te za treći vektor iz fiksnog dijela matrice $MH3Fp3Fb4$. Presjek tih triju skupova vektora je dvočlani skup sastavljen od vektora

[129378]

[129397]

koji će se stoga zapisati u drugi redak polja $CAND$. Za treći redak ove ulazne matrice također je jednak broj (4) odgovarajućih vektora za pojedini od tri vektora iz fiksnog dijela. Presjek ta tri skupa su vektori

[781912]

[781932]

koji će, dakle, biti zapisani u treći redak polja $CAND$. Od četiri moguće kombinacije, sljedeće dvije tvore incidencijsku matricu.

129387	138297
793812	781932

Točno se ove dvije incidencijske matrice dobivaju i u slučaju kada se koriste samo cikličke matrice ("C") i u slučaju kada se koriste cikličke i anticikličke ("CAC"). Računalnim programom $Incfilter$ ustanovljeno je da su te dvije rezultantne matrice izomorfne. Red grupe dobivenog dizajna 3-$(12, 6, 2)$ je 7920. Konačne rezultate dobivene pomoću računalnih programa *Orbmat*, $Tact3$ i $Incfilter$ prikazuje Tablica 3.8 (razultati su isti za "C" i "CAC" slučaj).

Tablica 3.8: Rezultati konstrukcije za 3-$(12, 6, 2)$

MTD		$numincmat$	$numdes$	$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$
$MH3Fp0Fb4$	1	2	1	7920
$MH3Pp3Fb4$	1	2	1	7920

3.6.2 Konstrukcija Hadamardovog 3-dizajna reda 12

Hadamardov 3-dizajn reda 12 je dizajn s parametrima 3-$(16, 8, 3)$. Ovaj dizajn tvori 16 točaka i 30 blokova, pri čemu je svaka točka incidentna s 15 blokova. Svaka se trojka redaka incidencijske matrice siječe u tri točke. Već iz tih podataka se vidi da je riječ o vrlo pravilnoj strukturi, a dobiveni rezultati pokazuju i veliki broj unutarnjih simetrija ovog dizajna.

Pomoću računalnog programa *Orbmat* dobiveno je ukupno 5 potencijalnih matrica taktičke dekompozicije. Kod dvije od njih, automorfizam reda 3 pretpostavljeno djeluje tako da fiksira jednu točku, a na preostale tri tako da fiksira 4 točke i 6 blokova. Slijedi po jedna matrica iz svakog od ta dva tipa matrica.

$$MH4Fp1Fb0 = \left[\begin{array}{cccccccccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

$$MH4Fp4Fb6 = \left[\begin{array}{cccccc|cccccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Pojedina od matrica s jednom fiksnom točkom daje 6 incidencijskih matrica u slučaju "C" te 12 matrica u slučaju "CAC". U oba slučaja dobivaju se dva dizajna, od kojih je jedan s velikim redom grupe automorfizama, 322560. Tri

Tablica 3.9: Rezultati konstrukcije za 3-$(16, 8, 3)$ C

MTD		$numincmat$	$niso$	$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$
$MH4Fp1Fb0$	1	6	1	322560
	2	6	1	9216
$MH4Fp4Fb6$	1	7	2	$322560, 1536$
	2	7	2	$9216, 2688$
	3	7	2	$9216, 2688$
svi C		33	5	$322560, 1536, 9216, 2688, 2688$

Tablica 3.10: Rezultati konstrukcije za 3-$(16, 8, 3)$ CAC

MTD		$numincmat$	$niso$	$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$
$MH4Fp1Fb0$	1	12	1	322560
	2	12	1	9216
$MH4Fp4Fb6$	1	22	3	$322560, 1536, 9216$
	2	22	4	$9216, 2688, 1536, 2688$
	3	22	4	$9216, 2688, 1536, 2688$
svi CAC		90	5	$322560, 1536, 9216, 2688, 2688$

matrice taktičke dekompozicije s tri fiksne točke i 6 fiksnih blokova razvojem daju po 7 incidencijskih matrica u "C" slučaju te 22 incidencijske matrice u "CAC" slučaju. U oba slučaja dobiva se 5 neizomorfnih dizajna, čiji su redovi grupa 1536, 2688, 9216, 322560. Ovi su rezultati prikazani u Tablicama 3.9 i 3.10.

Slijedi incidencijska matrica dizajna s najvećim redom grupe automorfizama, 322560, među konstruiranim dizajnima (Slika 3.4).

111000111111111111000000000000
100110111111000000111111000000
010101111000111000111000111000
001011111000000111000111111000
111000100100100100110110110110
111000010010010010011011011011
111000001001001001101101101101
100110100100011011001001110110
100110010010101101100100011011
100110001001110110010010101101
010101100011100011001110001110
010101010101010101100011100011
010101001110001110010101010101
001011100011011100110001001110
001011010101101010011100100011
001011001110110001101010010101

Slika 3.4: Dizajn 3-$(16, 8, 3)$ s 322560 automorfizama

Poglavlje 4

Računalne konstrukcije simetričnih dizajna

Simetrični dizajni su od posebnog interesa u teoriji dizajna zbog svoje visoke pravilnosti i povezanosti s drugim strukturama. Osim dvoravnine s 56 točaka (koja je klasificirana u radu [14]), takav dizajn najvećih parametara čiji su svi pojedini primjerci poznati je onaj s parametrima $(31, 10, 3)$. Potpuna klasifikacija za ove parametre provedena je 90-ih godina 20-og stoljeća, kada se ovaj dizajn intenzivno istraživao. Prva sljedeća otvorena pitanja klasifikacije su ona za dizajne s parametrima 2-$(36, 15, 6)$ i 2-$(41, 16, 6)$. Dizajn s parametrima 2-$(36, 15, 6)$ od dodatnog je interesa i zbog svoje bogate veze s drugim kombinatoričkim strukturama. Iako je više radova posvećeno ovom dizajnu ([5],[4],[8],[2]), među kojima su i neke parcijalne klasifikacije, pitanje potpune klasifikacije za ove parametre i dalje je otvoreno. Zbog svih navedenih činjenica, upravo su dizajnima 2-$(36, 15, 6)$ i 2-$(41, 16, 6)$ posvećeni posebni istraživački napori u ovome radu.

Za sve tri trojke parametara provedena je klasifikacija uz uvjet djelovanja automorfizma reda 3. Jednako tako, za sva tri dizajna rađena je konstrukcija koja izostavlja djelovanje grupa ("CAC" slučaj). Dobiveno je mnoštvo novih dizajna redova 9 i 10, među kojima je mnogo onih s trivijalnom grupom automorfizama. Najveću raznovrsnost unutarnjih simetrija među ova tri simetrična dizajna pokazuje $(36, 15, 6)$, za kojeg se javlja preko trideset različitih redova grupa (među ovdje konstruiranim strukturama). Svi ti rezultati sažeti su u dva teorema i dvije propozicije.

Za razliku od nesimetričnih dizajna, gdje je ispitivanje izomorfnosti bila glavna teškoća, ovdje je daleko najviše vremena bilo potrebno za indeksiranje. U tom smislu, po zahtjevnosti se izdvajaju dva testa: indeksiranje dviju visokosimetričnih matrica taktičke dekomozicije kod 2-$(36, 16, 5)$ i indeksiranje za 2-$(41, 16, 6)$ "CAC" u slučaju matrica s 5 fiksnih redaka i stupaca. Kako bi se algoritam za razvoj matrica taktičke dekompozcije učinio još efiksnijim, povećan je broj vektora u filteru uoči iscrpne pretrage (razvijena je inačica programa $Tact3$, $Tact3filt2$). U slučaju spomenutog indeksiranja kod parametara $(41, 16, 6)$ korišteno je preko 20 računala kako bi postupak završio u prihvatljivom vremenu (nekoliko mjeseci).

4.1 Konstrukcija simetričnog dizajna $(31, 10, 3)$

Kombinatorički dizajn s parametrima 2-$(31, 10, 3)$ je simetrični dizajn sa, dakle, 31-om točkom te jednako toliko blokova. Incidencijska matrica ovog dizajna je kvadratna binarna matrica reda 31, koja u svakom retku te u svakom stupcu ima 10 jedinica, a svaka se dva retka sijeku u 3 točke. Konstrukcija svih netrivijalnih dizajna ovih parametara napravljena je u radu [28], dok je potpuna klasifikacija provedena radom [27].

U ovom radu, u prvoj fazi konstrukcije pokazalo se da automorfizam reda 3 pri djelovanju na ovaj dizajn djeluje sa $F \in \{1, 4, 7\}$ fiksnih točaka odnosno blokova. U konstrukcijski najpovoljnijem slučaju, kada je 7 fiksnih točaka, retci fiksnog dijela matrice taktičke dekompozicije mogu se zadati na način

$$\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0
\end{array},$$

što je jedina kombinacija, bez smanjenja općenitosti, koja udovoljava uvjetu da se svaka dva retka sijeku u 3 točke. U slučaju 4 fiksne točke, dvije su mogućnosti za fiksne retke potencijalnih matrica taktičke dekompozicije:

$$\begin{array}{cccc|ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0
\end{array}.$$

Naposljetku, u slučaju jedne fiksne točke, očigledno je fiksna struktura sljedeća:

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
1 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.
\end{array}$$

Kada je računalni program *Orbmat* pokrenut s ovim strukturama kao ulaznim podacima, dobivena je jedna matrica taktičke dekompozicije sa 7 fiksnih točaka, 4 matrice s 4 fiksne točke i 8 matrica s jednom fiksnom točkom. Time je završena prva faza konstrukcije razmatranog dizajna.

4.1.1 Klasifikacija uz uvjet djelovanja automorfizma reda 3

S prvom verzijom algoritma za indeksiranje (koji ne fiksira prvi redak ni prvi stupac matrice $STATE$ i koji nije koristio filtriranje u pretkoraku iscrpne pretrage), konstruiranje dizajna na osnovi ovih matrica taktičke dekompozicije bilo je daleko izvan dosega. Tim se algoritmom konstruiralo jako puno izomorfnih incidencijskih matrica, tako da je problem bio ne samo sam doseg, već i pohranjivanje tolike količine podataka u trajnoj memoriji računala. Nakon usavršavanja početnog algoritma (što je rezultiralo algoritmom opisanim u 2-om poglavlju), vrijeme rada programa $Tact3$ za ovaj dizajn postalo je gotovo trenutno i za slučaj kada se dopušta pojavljivanje samo cikličkih podmatrica i za slučaj kada se dopuštaju cikličke i anticikličke podmatrice. Točnije, na računalu PC, Intel Pentium 4, CPU 2.4 GHz, 256 MB RAM, indeksiranje je bilo trenutno za cikličke matrice dok je za "CAC" slučaj programu trebala oko minuta vremena ($14s$ za $M31F7$, $20s$ za $M31F4$ te $39s$ za $M31F1$).

Rezultati za parcijalnu klasifikaciju, uz djelovanje automorfizma reda 3, prikazani su sljedećom Tablicom 4.1. Konstruirana su 42 dizajna, i to onih 42 od postojećih 107 na koje djeluje automorfizam reda 3. Vidljivo je da taj automorfizam kod tri dizajna fiksira 7 točaka te 7 blokova, kod 33 dizajna fiksira 4 točke (bloka) a kod 14 dizajna fiksirana je jedna točka odnosno blok. Redovi grupe koji se javljaju jesu: $3, 6, 9, 21, 42$ i 63.

4.1.2 Konstrukcije dizajna s trivijalnom grupom automorfizama

Naredna Tablica 4.2 prikazuje rezultate dobivene kada se kod indeksiranja koriste cikličke i anticikličke podmatrice ("CAC" slučaj). Razlika u odnosu na "C" konstrukciju je u 6 konstruiranih dizajna s trivijalnom grupom automorfizama. Kada se dobiveni rezultati usporede s poznatima (drugi stupac Tablice 4.3 prikazuje broj svih postojećih dizajna 2-$(31, 10, 3)$) vidljivo je da je od svih postojećih struktura u ovom radu konstruirano njih ukupno 48. Dakako, konstruirani su svi dizajni čiji su redovi grupa automorfizama višekratnici broja 3. Osim toga, konstruirano je 6 dizajna koje jedino identiteta preslikava u same sebe. Da bi lista svih postojećih dizajna ovih parametara bila potpuna,

Tablica 4.1: Rezultati konstrukcije za 2-$(31, 10, 3)$ C

MTD		$numincmat$	$niso$	$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$
$M31F7$	1	720	3	$9, 9, 63$
$M31F4$	1	144	9	$6 \times 3, 2 \times 9, 63$
	2	36	18	$16 \times 3, 2 \times 21$
	3	0		
	4	336	6	$4 \times 3, 2 \times 9$
svi F4			33	
$M31F1$	1	270	5	$4 \times 9, 63$
	2	0		
	3	8	3	$3, 6, 6$
	4	4	2	$6, 42$
	5	16	4	$3, 3, 9, 9$
	6	0		
	7	16	4	$3, 3, 9, 9$
	8	0		
svi F1			14	
svi C			42	

Tablica 4.2: Rezultati konstrukcije za 2-$(31, 10, 3)$ CAC

MTD		$numincmat$	$niso$	$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$
$M31F7$	1	1440	3	$9, 9, 63$
$M31F4$	1	360	9	$6 \times 3, 2 \times 9, 63$
	2	36	18	$16 \times 3, 2 \times 21$
	3	0		
	4	2400	10	$4 \times 1, 4 \times 3, 2 \times 9$
svi F4			37	
$M31F1$	1	5616	7	$2 \times 1, 4 \times 9, 63$
	2	0		
	3	8	3	$3, 6, 6$
	4	4	2	$6, 42$
	5	16	4	$3, 3, 9, 9$
	6	6	1	3
	7	16	4	$3, 3, 9, 9$
	8	6	1	3
svi F1			18	
svi CAC			48	

Tablica 4.3: Usporedba poznatih i dobivenih rezultata za 2-$(31, 10, 3)$

$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$	Broj dizajna		
	Svi	C	CAC
63	1	1	1
42	1	1	1
21	2	2	2
9	4	4	4
6	3	3	3
3	31	31	31
2	2	–	–
1	107	–	6
$\sum$	151	42	48

nedostaju jedino dva dizaja s redom grupe automorfizama 2 te 101 dizajn s trivijalnom grupom automorfizama. Najpravilniji dizajn ovih parametara je onaj sa 63 automorfizma; i samo je jedan primjerak takvog dizajna. Kod provedenih konstrukcija, sva tri tipa matrica taktičke dekompozicije rezultiraju incidencijskom matricom takvog dizajna. Dizajni s $\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert = 1$ konstruirani su na osnovi ulaznih matrica s četiri i sa jednom fiksnom točkom. Slika 4.1 prikazuje najpravilniji od ovih dizajna kao i jedan primjerak najnepravilnijeg dizajna 2-$(31, 10, 3)$.

$\lvert Aut(\mathcal{D}_1)\rvert = 63$	$\lvert Aut(\mathcal{D}_2)\rvert = 1$
1111111111000000000000000000000	1000111111111000000000000000000
1110000000110100100100100100000	0100111000000111111000000000000
1011000000011010010010010010000	0010000111000111000111000000000
1101000000010100100100100100100	0001000000011100011111100000000
0100110000000100010010011101000	1100000100100100100100110100000
0010011000000010001001101110000	1100000010010010010010011010000
0001101000000001100100110011000	1100000001001001001001101001000
0110000100000000100101011000011	1010100000100100010001001000110
0011000010000100100001011000011	1010010000010010001100100000011
0101000000100001001010010100010	1010001000000100110001001000010
0100010001001111110000000010010	1001100001000000101010000000110
0010001100100111010000000001001	1001010010000100001010000101100
0001100010010111001000000100100	1001001100000001010000100001101
0100001010010010000111000001010	0110100010010000100001000101001
0010100000100100100011100010000	0110010100001000010100000011100
0001010100100100000111000010100	0110001001100000000101000011001
0100100100010000011100100001000	0101100100010001000010100000110
0010010010001000111100000001100	0101010001100010000000101000010
0001001001100000111010000100010	0101001010001100000100001000011
0100001010101000000000010110101	0011100100001010001000011100000
0010100001110000000000001011110	0011010010100001100000101010000
0001010100011000000000100101011	0011001001010100010000110001000
0000100110101010100010101000000	0000110001000000100110011001010
0000010011110001010001110000000	0000011100000000010011101100001
0000001101011100001100011000000	0000101010000000001101110010100
1000110000100010001100010000011	0000100000101110000010100011001
1000011000010001100010001000101	0000010000011101000001010110010
1000101000000110001000110000011	0000001000110011000100001101100
1000000110000000101010000111001	0000000110100001011000010001011
1000000001100010000101010001100	0000000011001010110000100100110
1000000101000010100001010101100	0000000101010100101000001010101

Slika 4.1: Najpravilniji i primjerak najnepravilnijeg dizajna 2-$(31, 10, 3)$

4.2 Konstrukcije simetričnog dizajna $(36, 15, 6)$

Kombinatorički dizajn s parametrima 2-$(36, 15, 6)$ predstavlja simetrični dizajn najmanjih parametara za koje je pitanje potpune klasifikacije još uvijek otvoreno. Također, ovaj dizajn je od naročitog interesa zbog svoje bogate veze s drugim kombinatoričkim strukturama (ekvivalencija s regularnom Hadamardovom matricom reda 36, između ostalog [29]). Dosadašnja istraživanja donijela su više značajnih rezultata. U radu [8] opisana je struktura s vrlo velikom grupom automorfizama. Dosad najsveobuhvatniju parcijalnu klasifikaciju donosi rad [2], u kojem su konstruirani dizajni koji dopuštaju djelovanje automorfizama redova $2, 3, 5, 7, 11$ i 13. Prije tog rada, bilo je poznato 25634 neizomorfnih dizajna s parametrima 2-$(36, 15, 6)$ (prema [22]).

4.2.1 Klasifikacija uz uvjet djelovanja automorfizma reda 3

Sukladno poznatim rezultatima [18], ukoliko automorfizam reda 3 fiksira F točaka (i blokova) tada $F \in \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18\}$. Međutim, pokazalo se da jednadžbe 2.12-2.13 nemaju rješenja za $F > 9$, pa će se pri konstrukcijama obrađivati 4 moguća slučaja; kada je broj točaka 0, 3, 6 te 9.

Za konstrukciju kakva se primjenjuje u ovom radu, najlakši je slučaj kada je $F = 9$. Tada pretpostavljeni automorfizam formira 9 orbita duljine 1 i 9 orbita duljine 3. Do na izomorfizam dobivaju se dvije (potencijalne) matrice taktičke dekompozicije, koje zadovoljavaju sustav jednadžbi 2.12-2.13. Razvojem tih matrica dobiva se 909 neizomorfnih dizajna 2-$(36, 15, 6)$. Kao njihovi redovi grupe automorfizama javljaju se sljedeći brojevi: 3, 6, 9, 12, 18, 27, 36, 54, 72, 108, 162, 243, 324, 486, 648, 1944 i 3888.

Kada je $F = 6$ sustav 2.12-2.13 daje 14 neekvivalentnih rješenja. Iscrpnom pretragom svih 14 dobivenih matrica taktičke dekompozicije dobiveno je 2368 neizomorfnih dizajna s redovima grupa automorfizama 3, 6, 9, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 72, 81, 96, 108, 144, 162, 360, 432, 648, 1152 i 51840. Zadnji navedeni red grupe je bio očekivan budući da je to red grupe $PSp_4(3)$ ([8]).

U slučaju kada je $F = 3$, dobiveno je 334 matrica taktičke dekompozicije. Nakon konstruiranja incidencijskih matrica pomoću programa $Tact3$ te njihovog filtiranja pomoću programa $Incfiter$, dobiveno je 79662 neizomorfnih dizajna. Ovdje se kao kardinaliteti grupe automorfizama javljaju brojevi 3, 6, 9, 12, 18, 21, 24, 27, 36, 48, 54, 72, 81, 108, 144, 162, 216, 324, 360, 384, 432, 486, 648, 1152, 3888, 12096 i 51840. Drugi najveći red grupe pripada grupi automorfizama unitarne grupe $U(3, 3)$ i taj je dizajn konstruiran u radu [4].

Tehnički najsloženiji slučaj je onaj bez fiksnih točaka i blokova. Tada program $Orbmat$ daje 814 potencijalnih matrica taktičke dekompozicije reda 12.

Cijela konstrukcija u ovom slučaju zahtijevala je više od mjesec dana procesorskog vremena. Međutim, da bi $Tact3$ mogao završiti s radom u tom vremenu bila je nužna dodatna redukcija izomorfnosti u opisanom algoritmu kod dvije matrice taktičke dekompozicije. Naime, te dvije matrice same imaju veliku grupu automorfizama što je rezultiralo enormnim brojem dobivenih incidencijskih matrica - stvarajući probleme kako zbog vremena potrebnog za konstrukciju tako i zbog velikog zahtjeva za trajnom računalnom memorijom. Naposljetku je svih 814 matrica dalo 58720 dizajna. Njihovi redovi grupa automorfizama jesu: 3, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 36, 48, 54, 72, 81, 108, 144, 162, 216, 240, 243, 324, 360, 432, 486, 648, 1152, 1944, 3888 i 12096.

Kada su konstrukcije za sva 4 slučaja završene, svi dobiveni dizajni skupljeni su u jednu datoteku i ponovo je pomoću programa *Incfilter* ispitana izomorfnost, kako bi se utvrdio broj neizomorfnih dizajna 2-$(36, 15, 6)$ na koje djeluje automorfizam reda 3. Time je završena parcijalna klasifikacija, uz djelovanje automorfizma reda 3, te je dobiven rezultat kojeg iskazuje sljedeći teorem.

Teorem 4.1 *Postoji točno* 141061 *simetričnih dizajna s parametrima* $(36, 15, 6)$ *koji dopuštaju djelovanje automorfizma reda* 3.

Slijedi kompletna lista redova grupa i njihovih frekvencija za svih 141061 dizajna (Tablica 4.4).

4.2.2 Konstrukcije dizajna s trivijalnom grupom automorfizama

Nakon klasifikacije svih dizajna s automorfizmom reda 3, postavljen je cilj konstruiranja dizajna koji imaju trivijalnu grupu automorfizama. U tu svrhu, kako je ranije opisano, izostavilo se djelovanje grupe u drugom koraku konstrukcije (indeksiranju). Prilikom razvoja dane potencijalne matrice taktičke dekompozicije, dopustile su se kombinacije cikličkih i anticikličkih matrica reda 3. Kao što je bilo očekivano, programu $Tact3$ za ovaj je slučaj ("CAC") bilo potrebno daleko više vremena. Dok je u "C" slučaju drugi korak konstrukcije donio preko 58 milijuna incidencijskih matrica, u ovom ih je slučaju bilo značajno više. Ipak, glavna razlika u vremenu potrebnom za cijeli postupak konstrukcije i filtriranja bila je u postupku indeksiranja (a ne u postupku ispitivanja izomorfnosti). Vrijeme potrebno za filtriranje dobivenih incidencijskih matrica programom $Incfilter$, usporedivo je s onim u "C" slučaju. Sličan odnos vremena potrebnog za ta dva postupka pokazat će se i kod konstrukcije dizajna 2-$(41, 16, 6)$.

Tablica 4.4: Frekvencije redova grupa automorfizama za 2-$(36, 15, 6)$ C

$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$	F9	F6	F3	F0	svi
3	553	1734	78176	56270	136733
6	221	467	939	1437	3064
9	19	40	198	627	629
12	46	49	100	80	275
18	26	34	138	169	173
21	–	–	2	–	2
24	–	4	23	18	45
27	7	–	18	25	25
30	–	2	–	–	2
36	9	12	22	29	33
42	–	1	–	–	1
48	–	5	3	2	10
54	10	3	13	21	21
72	2	3	5	6	8
81	–	1	1	1	1
96	–	2	–	–	2
108	3	2	4	5	5
144	–	2	4	5	5
162	5	1	1	6	6
216	–	–	2	2	2
240	–	–	–	1	1
243	1	–	–	1	1
324	3	–	1	3	3
360	–	2	2	2	2
384	–	–	2	–	2
432	–	1	2	2	2
486	1	–	1	1	1
648	1	1	1	2	2
1152	–	1	1	1	1
1944	1	–	–	1	1
3888	1	–	1	1	1
12096	–	–	1	1	1
51840	–	1	1	1	1
$\sum$	909	2368	79662	58720	141061

Za svaku od tri tipa ($F = \{3, 6, 9\}$) ulaznih potencijalnih matrica taktičke dekompozicije dobiveno je mnoštvo dizajna s trivijalnom grupom automorfizama, a dobiveni su i drugi dizajni čiji redovi grupa nisu višekratnici broja 3. Kada je $F = 9$, osim onih redova grupa koji se dobivaju u "C" slučaju, konstruirani su i dizajni čiji su redovi grupa brojevi 1, 2, 4, 8, 16, 144, 216 i 432. U slučaju $F = 6$ dodatni redovi grupa automorfizama, u odnosu na istovjetni "C" slučaj, jesu 1, 2, 4, 8, 10, 16, 32 i 64. Nadalje, za $F = 3$ to su brojevi 1, 2, 4, 8, 16, 32 i 64. Broj dizajna s trivijalnom grupom autmorfizama za pojedini F prikazuje Tablica 4.5.

Tablica 4.6 prikazuje usporedbu dobivenog broja dizajna, do na izomorfizam, u slučaju "C" i slučaju "CAC". Sumarni rezultati konstrukcije dizajna 2-$(36, 15, 6)$ na osnovi cikličkih i anticikličkih podmatrica reda 3 iskazani su sljedećom propozicijom.

Propozicija 4.1 *Postoji najmanje* 675363 *dizajna s parametrima* 2-$(36, 15, 6)$*, od kojih* 513692 *sadrži samo trivijalnu grupu automorfizama. Pri tome vrijedi:*
(i) Postoji 8176 *simetričnih dizajna* $(36, 15, 6)$ *koji dopuštaju taktičku dekompoziciju s* 9 *podskupova kardinaliteta* 1 *i* 9 *podskupova kardinaliteta* 3*, na točkama i na blokovima.*
(ii) Postoji 10885 *simetričnih dizajna* $(36, 15, 6)$ *koji dopuštaju taktičku dekompoziciju sa* 6 *podskupova kardinaliteta* 1 *i* 10 *podskupova kardinaliteta* 3*, na točkama i na blokovima.*
(iii) Postoji 138149 *simetričnih dizajna* $(36, 15, 6)$ *koji dopuštaju taktičku dekompoziciju s* 3 *podskupa kardinaliteta* 1 *i* 11 *podskupova kardinaliteta* 3*, na točkama i na blokovima.*
(iv) Postoji barem 509836 *simetričnih dizajna* $(36, 15, 6)$ *koji dopuštaju taktičku dekompoziciju bez podskupova kardinaliteta* 1 *a s* 12 *podskupova kardinaliteta* 3*, na točkama i na blokovima.*

Kako bi se dodatno ilustrirale ovdje opisane konstrukcije, u nastavku se prikazuje matrica taktičke dekompozicije (Slika 4.3), sa 6 fiksnih točaka, iz koje je konstruiran dizajn s najvećom grupom automorfizama, reda 51840. Također se prikazuje dotični dizajn kao i jedan s trivijalnom grupom automorfizama (Slika 4.2).

Kostrukciju ovog tipa nije bilo moguće u potpunosti provesti za slučaj $F = 0$ budući da je tada računalna složenost problema izrazito velika. Kao ilustraciju navedimo da dvije spomenute matrice taktičke dekompozicije s velikim brojem unutarnjih preslikavanja i nakon redukcije istih u ovom su slučaju rezultirale vrlo velikim brojem incidencijskih matrica. Kod tih matrica, konstrukcija je bila zaustavljena nakon dobivenih nekoliko desetaka GB incidencijskih matrica (zapisanih pomoću ekspandiranih koeficijenata).

Tablica 4.5: Frekvencije redova grupa automorfizama za 2-$(36, 15, 6)$ CAC

$\|Aut(\mathcal{D})\|$	F9	F6	F3	F0	svi
1	6316	4523	55557	447832	513692
2	710	3560	2411	13500	19878
3	617	1762	78314	46649	127057
4	87	305	213	121	679
6	274	499	1023	931	2575
8	3	28	27	6	60
9	22	40	215	584	627
10	–	5	–	–	5
12	59	71	111	44	235
16	1	10	11	2	23
18	32	34	143	99	173
21	–	–	2	–	2
24	–	4	25	7	35
27	8	–	19	17	25
30	–	2	–	–	2
32	–	2	3	–	4
36	14	12	22	18	33
42	–	1	–	–	1
48	–	5	7	–	10
54	10	3	14	6	21
64	–	2	2	–	3
72	3	3	5	4	8
81	–	1	1	–	1
96	–	2	–	–	2
108	3	2	4	2	5
144	1	2	4	3	5
162	5	1	1	2	6
216	2	–	2	2	2
243	1	–	–	1	1
324	3	–	1	1	3
360	–	2	2	2	2
384	–	–	2	–	2
432	1	1	2	1	2
486	1	–	1	–	1
648	1	1	1	–	2
1152	–	1	1	1	1
1944	1	–	–	1	1
3888	1	–	1	–	1
12096	–	–	1	–	1
51840	–	1	1	–	1
$\sum$	8176	10885	138149	509836	665187

Tablica 4.6: Svi konstruirani dizajni 2-$(36, 15, 6)$

MTD	*niso* C	*niso* CAC
$M36F9$	909	8176
$M36F6$	2368	10885
$M36F3$	79662	138149
$M36F0$	58720	≥ 509836
svi	141061	≥ 665187

$|Aut(\mathcal{D}_1)| = 51840$

```
111000111111111111000000000000000000
111000111000000000111111111000000000
111000111000000000000000000111111111
000111111111000000111000000111000000
000111111000111000000111000000111000
000111111000000111000000111000000111
111111000100100100100100100100100100
111111000010010010010010010010010010
111111000001001001001001001001001001
100100100110110000001001110001001110
100100010011011000100100011100100011
100100001101101000010010101010010101
100010100001001110110110000001001110
100010010100100011011011000100100011
100010001010010101101101000010010101
100001100001001110001001110110110000
100001010100100011100100011011011000
100001001010010101010010101101101000
010100100110000110001110001001110001
010100010011000011100011100100011100
010100001101000101010101010010101010
010010100001110001110000110001110001
010010010100011100011000011100011100
010010001010101010101000101010101010
010001100001110001001110001110000110
010001010100011100100011100011000011
010001001010101010010101010101000101
001100100000110110110001001110001001
001100010000011011011100100011100100
001100001000101101101010010101010010
001010100110001001000110110110001001
001010010011100100000011011011100100
001010001101010010000101101101010010
001001100110001001110001001000110110
001001010011100100011100100000011011
001001001101010010101010010000101101
```

$|Aut(\mathcal{D}_2)| = 1$

```
111000111111111111000000000000000000
111000111000000000111111111000000000
111000111000000000000000000111111111
000111111111000000111000000111000000
000111111000111000000111000000111000
000111111000000111000000111000000111
111111000100100100100100100100100100
111111000010010010010010010010010010
111111000001001001001001001001001001
100100100110110000100010011001001101
100100010011011000010001101100100110
100100001101101000001100110010010011
100010100100001011011110000001100110
100010010010100101110101000010001011
100010001001010110101011000100010101
100001100001010101010100110101011000
100001010100001110100001011011110000
100001001010100011001010101110101000
010100100110000110001101001100011010
010100010011000011100110100001110001
010100001101000101010011010010101100
010010100001101010110000101010011100
010010010100110001011000011100110001
010010001010011100101000110001101010
010001100100011001100011100110000011
010001010001110100001110001011000110
010001001010101010010101010101000101
001100100000110110011001100011100001
001100010000011011101100010110001100
001100001000101101110010001101010010
001010100011001100000110011110100001
001010010101100010000011110101001010
001010001110010001000101101011010100
001001100011100001101001010000110110
001001010110001100011010100000011101
001001001101010010110100001000101011
```

Slika 4.2: Dvije incidencijske matrice dizajna 2-$(36, 15, 6)$

$$
\begin{array}{cccccccccccccccc}
1&1&1&0&0&0&3&3&3&3&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&3&0&0&0&3&3&3&0&0&0\\
1&1&1&0&0&0&3&0&0&0&0&0&0&3&3&3\\
0&0&0&1&1&1&3&3&0&0&3&0&0&3&0&0\\
0&0&0&1&1&1&3&0&3&0&0&3&0&0&3&0\\
0&0&0&1&1&1&3&0&0&3&0&0&3&0&0&3\\
1&1&1&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1\\
1&0&0&1&0&0&1&2&2&0&1&1&2&1&1&2\\
1&0&0&0&1&0&1&1&1&2&2&2&0&1&1&2\\
1&0&0&0&0&1&1&1&1&2&1&1&2&2&2&0\\
0&1&0&1&0&0&1&2&0&2&1&2&1&1&2&1\\
0&1&0&0&1&0&1&1&2&1&2&0&2&1&2&1\\
0&1&0&0&0&1&1&1&2&1&1&2&1&2&0&2\\
0&0&1&1&0&0&1&0&2&2&2&1&1&2&1&1\\
0&0&1&0&1&0&1&2&1&1&0&2&2&2&1&1\\
0&0&1&0&0&1&1&2&1&1&2&1&1&0&2&2
\end{array}
$$

Slika 4.3: MTD sa 6 fiksnih točaka

4.2.3 Konstrukcije simetričnog dizajna $(31, 15, 7)$ sa svrhom usporedbe rezultata

Za istaknuti je da se u radu [2] koji se također bavi parcijalnim klasifikacijama dizajna $(36, 15, 6)$ uz djelovanje odabranog automorfizma prim reda može zapaziti pogreška kod prebrojavanja onih dizajna s parametrima $(36, 15, 6)$ koji dopuštaju djelovanje automorfizma reda 3 koji fiksira 3 točke i bloka (Tablica 3 u [2]). U ovom radu dobiven je znatno veći broj neizomorfnih dizajna za ovaj konkretni slučaj, (kao što je prethodno precizno demonstrirano) što pokazuje da se u radu [2] radi o omaški, koja je ovime ispravljena. Međutim, budući da spomenuti rad donosi i parcijalnu klasifikaciju za parametre $(31, 15, 7)$ (Tablica 1 u [2]), u svrhu dodatne provjere i usporedbe korištenih metodologija, ovdje je također izvedena parcijalna klasifikacija za parametre $(31, 15, 7)$. U ovom slučaju rezultati su istovjetni, što dokazuje Tablica 4.7.

Iako se konstrukciji ovog dizajna pristupilo primarno u cilju provjere dvaju rezultata i metodologija, pokrenuta je i "CAC" konstrukcija za ovu trojku parametara kako bi se eventualno dobili neki novi dizajni s trivijalnom grupom. U potpunosti je provedena "CAC" konstrukcija za jedan od načina djelovanja automorfizma reda 3, kada isti fiksira jednu točku te blok. Ukupno je dobiveno 36041 neizomorfnih dizajna, od kojih 15194 dopušta samo trivijalnu grupu automorfizama. Osim toga je dobiveno 1035 dizajna s redom grupe au-

Tablica 4.7: Rezultati konstrukcije za 2-$(31, 15, 7)$ C

$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$	F7	F1	svi
3	166113	15257	181370
6	29025	141	29166
9	488	488	488
12	6033	201	6234
15	–	19	19
18	2	2	2
21	6	12	18
24	796	82	878
30	–	2	2
36	14	14	14
42	23	–	23
48	2200	38	2238
60	–	1	1
72	16	16	16
96	218	18	236
126	2	2	2
144	12	12	12
192	44	6	50
288	4	4	4
336	15	–	15
384	67	8	75
465	–	1	1
768	1	–	1
960	–	2	2
1152	8	8	8
1536	8	–	8
2688	1	–	1
4608	4	4	4
8064	4	4	4
9216	5	5	5
64512	2	2	2
9999360	1	1	1
$\sum$	205112	16350	220900

tomorfizama 2, nadalje 878 primjerka ovog dizajna s redom grupe 4 a dobivene su i druge strukture koje ne dopuštaju djelovanje automorfizma reda 3. Detaljnije se rezultati mogu vidjeti u Prilogu A. Napomenimo još, da vrlo velika grupa automorfizama koja se ovdje pojavljuje pripada projektivnom prostoru $PG(n,q)$, čija je grupa automorfizama $PGL(5,2)$ reda 9999360.

4.3 Konstrukcije simetričnog dizajna $(41, 16, 6)$

Incidencijska matrica simetričnog dizajna s parametrima $(41, 16, 6)$ je binarna matrica reda 41, koja u svakom retku te u svakom stupcu ima 16 jedinica, a svaka se dva retka sijeku u 6 točaka. Prije ovog rada bilo je poznato 115307 struktura s ovim parametrima [22].

U skladu s poznatim rezultatima o maksimalnom broju fiksnih točaka (blokova) [18], ukoliko automorfizam reda 3 fiksira F točaka i isto toliko blokova tada $F \in \{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$. Međutim, kada su za svaki od ovih brojeva fiksnih točaka pripremljene fiksne strukture i pokrenuta njihova obrada pomoću programa *Orbmat*, ustanovilo se da jednadžbe 2.12-2.13 imaju rješenje samo za dva moguća slučaja. To su slučajevi kada je $F = 5$ i $F = 11$.

U slučaju kada se pretpostavlja djelovanje automorfizma reda 3 koji fiksira 11 točaka te blokova, kao rješenje sustava 2.12-2.13 dobivena je jedna potencijalna matrica taktičke dekompozicije, $M41F11$ (Slika 4.4).

$$
\begin{matrix}
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&3&3&3&3&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&0&1&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&3&3&3&0&0&0\\
1&1&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&3&0&0&3&3&0\\
1&0&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&3&0&3&0&3\\
0&1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&3&0&3&3\\
0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&3&3&0&0&0&3&0&0&3&3\\
0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&3&0&3&0&0&0&3&3&3&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&3&0&0&3&3&0&0&3&0&3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&3&3&0&3&0&3&0&0&3\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&3&0&3&0&3&3&3&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&3&3&3&3&0&0&3&0\\
1&1&0&0&0&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&1&2\\
1&0&1&0&0&0&0&1&1&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&2&1\\
1&0&0&1&0&1&0&1&0&0&1&1&1&1&1&1&1&2&1&1&1\\
1&0&0&0&1&1&1&0&1&0&0&1&1&1&2&1&1&1&1&1&1\\
0&1&1&0&0&1&0&0&1&0&1&1&1&1&1&1&1&1&2&1&1\\
0&1&0&1&0&0&1&1&1&0&0&1&1&1&1&1&2&1&1&1&1\\
0&1&0&0&1&1&0&1&0&1&0&1&1&2&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&1&1&0&1&1&0&0&1&0&1&1&1&1&2&1&1&1&1&1\\
0&0&1&0&1&0&1&1&0&0&1&1&2&1&1&1&1&1&1&1&1\\
0&0&0&1&1&0&0&0&1&1&1&2&1&1&1&1&1&1&1&1&1
\end{matrix}
$$

Slika 4.4: MTD s 11 fiksnih točaka

Kada se pak pretpostavilo da automorfizam reda 3 fiksira 5 točaka i blokova, pomoću programa *Orbmat* dobiveno je ukupno 1834 matrica. Pri tome je bilo vremenski pogodnije kao ulazne podatke programa *Orbmat* zadati dvije fiksne strukture (zapisane u dvije različite ulazne datoteke) nego samo jednu. Naime, ako automorfizam reda 3 djeluje tako da fiksira 5 točaka i blokova tada postoje dvije mogućnosti za prva dva retka fiksne strukture:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Ulazna datoteka s prvom navedenom fiksnom strukturom rezultirala je s 254 potencijalne matrice taktičke dekompozicije, dok je na osnovu druge fiksne strukture dobiveno 1580 matrica.

4.3.1 Filtriranje prostora rješenja uoči iscrpne pretrage s dva vektora

Nakon završetka postupka dobivanja potencijalnih matrica taktičke dekompozicije, pristupilo se razvoju tih matrica u incidencijske matrice. Pokazalo se da je za razvoj pojedine matrice algoritmu $Tact3$ potrebno u prosjeku nekoliko sati procesorskog vremena. Iako su takvi rezultati bili prihvatljivi, tj. ovi su parametri bili u dosegu algoritama, pristupilo se daljnjem povećanju njegovog dosega. Sukladno korištenoj metodi filtriranja u pretkoraku iscrpne pretrage, sljedeća mogućnost povećanja dosega je stavljanje još jednog vektora u filter. Algoritam $Tact3$ već filtrira skup vektora koji je potrebno iscrpno pretražiti s tekućim vektorom iz drugog retka polja $CAND$, a sada se taj skup filtrira (uoči iscrpne pretrage) i s tekućim vektorom iz trećeg retka polja $SPACE$. U tu svrhu u osnovnom dijelu izvornog koda algoritma $Tact3$ potrebno je dodati još jednu petlju - u kojoj će se nalaziti taj drugi filter te kod za iscrpnu pretragu. Tako implementirana verzija algoritma $Tact3$ nazvana je $Tact3filt2$. Slika 4.5 prikazuje razliku između izvornog koda algoritma $Tact3$ i njegove inačice $Tact3filt2$. Analognim postupkom algoritmu se mogu dodavati daljnji filteri. Dakako, za dani problem potrebno je optimizati broj filtera, budući da se u jednu ruku s brojem filtera smanjuje prostor rješenja za iscrpnu pretragu a u drugu ruku povećava se broj osnovnih operacija kod samog filtriranja. Tablica 4.8 prikazuje usporedbu između algoritama $Tact3$ (koji koristi jedan vektor u filteru prije iscrpne pretrage), njegove inačice $Tact3filt2$ (kod koje je prostor rješenja filtriran sa dva vektora prije iscrpne pretrage) te inačice $Tact3filt3$ (tri vektora). U tablici su navedena relativna vremena potrebna za indeksiranje pojedine ulazne matrice. Za indeksiranje matrice $M41F5_1$ algoritmu

```
⋮
//za svaki vektor iz drugog retka polja CAND
for (i=0; i<nrOfCand[1]; i++) {
   Solution[1]=i;
   Filter1(i);

//za svaki vektor iz trećeg retka polja SPACE
for (j=0; j<nrOfCand1[2]; j++) {
   Solution[2]=j;
   Filter2(j);

//za svaki vektor iz četvrtog retka polja SPACE
for (m=0; m<nrOfCand2[3]; m++) {
   Solution[3]=m;
   currLayer=4;

   //iscrpna pretraga
   while (currLayer>=startLayer) {
   if (currLayer==lastLayer) {
      success=NextOkVector(currLayer);
      while (success) {
         nrOfSolution++;
         WriteSolution();
         success=NextOkVector(currLayer);
      }
      currLayer--;
   }

⋮
```

Slika 4.5: Razlika izvornog koda verzije $Tact3filt2$ u odnosu na $Tact3$

Tablica 4.8: Optimiranje broja vetkora u filteru

MTD	konstr.	filt 1	filt 2	filt 3
$M41F5_1$	C	1	0.31	0.46
$M41F5_2$	C	1	0.32	0.49
$M41F11$	C	1	0.31	0.33
$M36F9$	C	1	0.44	0.37
$M36F9$	CAC	1	0.41	0.40

$Tact3$ (oznaka "filt 1" u tablici) je trebalo 245 s, za razvoj matrice $M41F5_2$ 626 s, za matricu $M41F11$ trebalo je 595 s vremena, za "C" slučaj $M36F9$ 29 s a za "CAC" slučaj 2h14min32s. Mjerenje je provedeno na računalu PC, Intel Pentium 4, CPU 2.4 GHz, 256 MB RAM.

4.3.2 Klasifikacija uz uvjet djelovanja automorfizma reda 3

Kao što je prethodno navedeno, za slučaj $F = 11$ postoji jedna potencijalna matrica taktičke dekompozicije. Razvojem te matrice, što podrazumijeva kombiniranje cikličkih matrica reda 3, dobiva se 362880 incidencijskih matrica. Korištenjem programa $Incfilter$ među njima je ustanovljeno 3076 neizomorfnih matrica. Kao njihovi redovi grupa javljaju se brojevi 3, 6, 15 i 30.

Nadalje, iscrpnom pretragom svih 1834 matrica za slučaj $F = 5$ dobiveno je 1061768 incidencijskih matrica. U tom broju nalazi se 342508 neizomorfnih dizajna. Iako je ovdje dobiven puno veći broj dizajna nego za $F = 11$, raznovrsnost njihovih preslikavanja ovdje je manja; kao redovi grupa javljaju se brojevi 3, 6 i 9.

Nakon završetka obiju konstrukcija, dobivenih 345584 dizajna skupljeno je u jednu datoteku kako bi se ispitala njihova izomorfnost. Dobiveni broj neizomorfnih struktura predstavlja broj dizajna s parametrima 2-$(41, 16, 6)$ na koje djeluje automorfizam reda 3. Taj test je proveden programom $Incfilter$ a dobiveni rezultat iskazan je sljedećim teoremom.

Teorem 4.2 *Postoji točno* 345584 *simetričnih dizajna s parametrima* $(41, 16, 6)$ *koji dopuštaju djelovanje automorfizma reda* 3.

Prethodno opisani rezultati sumarno su prikazani u Tablici 4.9; vidljive su frekvencije grupa automorfizama za oba moguća slučaja (5 i 11 fiksnih točaka odnosno blokova) te za svih 345584 dizajna na koje djeluje automorfizam reda 3.

Tablica 4.9: Rezultati konstrukcije za 2-$(41, 16, 6)$ C

$\|Aut(\mathcal{D})\|$	F11	F5	svi
3	2976	342241	345217
6	94	225	319
9	–	42	42
15	4	–	4
30	2	–	2
$\sum$	3076	342508	345584

4.3.3 Konstrukcije dizajna s trivijalnom grupom automorfizama

Kada je završena parcijalna klasifikacija ovog dizajna, pristupilo se konstrukcijama kod kojih se izostavlja djelovanje grupe prilikom razvoja potencijalne matrice taktičke dekompozicije u incidencijsku matricu dizajna. Cilj takvog pristupa je dobivanje dizajna čiji redovi grupa nisu višekratnici broja 3, među kojima su i dizajni s trivijalnom grupom automorfizama.

Za slučaj $F = 11$ "CAC" konstrukcija je donijela ukupno 2782080 incidencijskih matrica, među kojima je njih 9808 neizomorfno. Dobiveni su, dakako, svi dizajni kao u dotičnom "C" slučaju te dodatnih 18 dizajna s redom grupe automorfizama jednakim 3 kao i 6714 dizajna s redom grupe automorfizama jednakim 1.

Međutim, za drugi mogući broj točaka i blokova, $F = 5$, "CAC" konstrukcija bila je daleko zahtjevnija. Kako je taj test bio jedan od najzahtjevnijih u čitavom ovom radu, postupak indeksiranja rađen je paralelno na 20-ak računala s Linux operativnim sustavom. Ulazne matrice taktičke kompozicije podijeljene su u prikladne skupine od kojih je svaka pojedina indeksirana na drugom računalu. Rezultati tih testova prikazani su Tablicom 4.10, gdje se oznaka "a" odnosi na prvih 254 matrica taktičke dekompozicije. Unatoč vremenskoj zahtjevnosti postupka razvoja matrica, broj dobivenih incidencijskih matrica bio je relativno malen tako da je vrijeme potrebno za ispitivanje izomorfnosti bilo praktički zanemarivo (nekoliko sekundi procerskog vremena za pojedinu skupinu matrica). Na koncu je ovim eksperimentom dobiveno 431276 incidencijskih matrica. Sumarni rezultat za cijelu "CAC" konstrukciju daje Tablica 4.11. Prethodno opisani rezultati sažeti su u sljedećoj propoziciji.

Tablica 4.10: Rezultati za 2-$(41, 16, 6)$ F5 CAC

MTD	$numincmat$	$niso$
a[1,50]	180660	9614
a[51,100]	109994	10919
a[101,150]	72972	11524
a[151,200]	198908	9995
a[201,254]	81758	10092
$[1, 100]$	62538	18316
$[101, 200]$	57368	15251
$[201, 400]$	444896	47713
$[401, 600]$	230524	68264
$[601, 800]$	443641	45323
$[801, 1000]$	250487	57711
$[1001, 1050]$	36948	9222
$[1051, 1100]$	30310	11572
$[1101, 1150]$	55610	11572
$[1151, 1200]$	48142	10297
$[1201, 1250]$	182302	12364
$[1251, 1300]$	52588	13474
$[1301, 1350]$	59706	15406
$[1351, 1400]$	65806	9706
$[1401, 1450]$	33104	7158
$[1451, 1500]$	22508	8842
$[1501, 1580]$	84234	18191
svi	2805004	431276

Tablica 4.11: Rezultati konstrukcije za 2-$(41, 16, 6)$ CAC

$\|Aut(\mathcal{D})\|$	F11	F5	svi
1	6714	88423	95119
2		345	345
3	2994	342241	345217
6	94	225	319
9	–	42	42
15	4		4
30	2		2
$\sum$	9808	431276	441048

$|Aut(\mathcal{D}_1)| = 30$

```
11110000000111111111111000000000000000000
11101000000111000000000111111111000000000
11011000000000111000000111000000111111000
10111000000000000111000000111000111000111
01111000000000000000111000000111000111111
00000100000111111000000000111000000111111
00000010000111000111000000000111111111000
00000001000111000000111111000000111000111
00000000100000111111000111000111000000111
00000000010000111000111000111111111000000
00000000001000000111111111111000000111000
11000010011100100100100100100100100100110
11000010011010010010010010010010010010011
11000010011001001001001001001001001001101
10100001110100010100010001001010001101010
10100001110010001010001100100001100110001
10100001110001100001100010010100010011100
10010101001100100001010010100011100001001
10010101001010010100001001010101010100100
10010101001001001010100100001110001010010
10001110100100001001011001100100010010010
10001110100010100100101100010010001001001
10001110100001010010110010001001100100100
01100100101100100010001010001100011100001
01100100101010010001100001100010101010100
01100100101001001100010100010001110001010
01010011100100001100001010011010100010100
01010011100010100010100001101001010001010
01010011100001010001010100110100001100001
01001101010100010101100100001001010010001
01001101010010001110010010100100001001100
01001101010001100011001001010010100100010
00110110010100100010010101010001001010100
00110110010010010001001110001100100001010
00110110010001001100100011100010010100001
00101011001100011010100001010100100001001
00101011001010101001010100001010010100100
00101011001001110100001010100001001010010
00011000111110001001100010010001001100010
00011000111011100100010001001100100010001
00011000111101010010001100100010010001100
```

$|Aut(\mathcal{D}_2)| = 1$

```
11110000000111111111111000000000000000000
11101000000111000000000111111111000000000
11011000000000111000000111000000111111000
10111000000000000111000000111000111000111
01111000000000000000111000000111000111111
00000100000111111000000000111000000111111
00000010000111000111000000000111111111000
00000001000111000000111111000000111000111
00000000100000111111000111000111000000111
00000000010000111000111000111111111000000
00000000001000000111111111111000000111000
11000010011100100100100100100100100100110
11000010011010010010010010010010010010011
11000010011001001001001001001001001001101
10100001110100100100010010001001001011010
10100001110010010010001001100100010101100
10100001110001001001100100010010100110001
10010101001100100010100001010110001001001
10010101001010010001010100001101100010100
10010101001001001100001010100011010100010
10001110100100010001101010100010001010100
10001110100010100100011001010001100100001
10001110100001001010110100001100010001010
01100100101100010100001100001010110001001
01100100101010001010100001100001101010010
01100100101001100001010010010100011100100
01010011100100010001100001011001010100010
01010011100010001100010100110010001001100
01010011100001100010001010101100100010001
01001101010100001101010001100100010010001
01001101010010100011001100001010001100010
01001101010001010110100010010001100001100
00110110010100001010010011001010100100100
00110110010010100001100110100001010001001
00110110010001010100001101010100001010010
00101011001100101010001100010001010010100
00101011001010011100100010001100001100001
00101011001001110001010001100010100001010
00011000111110001001001010010100100001010
00011000111011100100100001001010010010100
00011000111101010010010100100001001100001
```

Slika 4.6: Najpravilniji i prvi konstruirani dizajn sa samo trivijalnom grupom automorfizama

Propozicija 4.2 *Postoji najmanje* 441048 *dizajna s parametrima* 2-$(41, 16, 6)$, *od kojih* 95119 *sadrži samo trivijalnu grupu automorfizama. Pri tome vrijedi:*
(i) Postoji 9808 *simetričnih dizajna* $(41, 16, 6)$ *koji dopuštaju taktičku dekompoziciju sa* 11 *podskupova kardinaliteta* 1 *i* 10 *podskupova kardinaliteta* 3*, na točkama i na blokovima.*
(ii) Postoji 431276 *simetričnih dizajna* $(41, 16, 6)$ *koji dopuštaju taktičku dekompoziciju s* 5 *podskupova kardinaliteta* 1 *i* 12 *podskupova kardinaliteta* 3.

Slika 4.6 prikazuje leksikografski prvi konstruirani dizajn s trivijalnom grupom automorfizama iz matrice $M41F11$, te najpravilniji konstruirani dizajn.

Poglavlje 5

Računalne konstrukcije nesimetričnih 2-dizajna

U ovom poglavlju prezentiraju se rezultati konstrukcije 2-dizajna s parametrima $(13, 5, 5)$, $(16, 6, 5)$ i $(21, 6, 4)$. Do sada je poznat samo jedan primjerak dizajna s parametrima 2-$(21, 6, 4)$, dok je za parametre 2-$(13, 5, 5)$ i 2-$(16, 6, 5)$ poznata nekolicina struktura. U ovom israživanju, kao prvo se do novih dizajna nastojalo doći primjenom djelovanja grupe automorfizama reda 3 a zatim i "zaboravljanjem" na djelovanje grupe u drugoj etapi konstrukcije. Kombiniranje cikličkih i anticikličkih matrica dopušteno je tijekom postupka indeksiranja s ciljem ostvarenja jednog od glavnih ciljeva ovog rada - konstrukcije dizajna s trivijalnom grupom automorfizama.

U sva tri slučaja konstruirano je vrlo mnogo novih dizajna. Štoviše, konstruirano je preko milijun dizajna sa samo jednim, trivijalnim, automorfizmom. Konstruirani su svi primjerci dizajna 2-$(13, 5, 5)$ na koje djeluje automorfizam reda 3. Osim ove klasifikacije, također su dobiveni svi primjerci dizajna 2-$(16, 6, 5)$ na kojima automorfizam reda 3 fiksira 4 točke i 4 bloka. Svi ti rezultati sažeti su u jedan teorem i pet propozicija te objavljeni u radu [21]. No, iako je broj novih dizajna dobiven za ove trojke parametara brojiv u milijunima i stotinama milijuna, ostaje dojam da još mnogo dizajna ostaje neotkriveno.

5.1 Konstrukcija nesimetričnog dizajna s parametrima $(13, 5, 5)$

Nesimetrični dizajn s parametrima $(13, 5, 5)$ sastoji se od 13 točaka i 39 blokova. Svaka je točka ovog dizajna incidentna s 15 blokova a svaka se dva bloka sijeku u točno 5 točaka. Prema [3], poznato je 76 dizajna s parametrima 2-$(13, 5, 5)$. Osim navedenog rezultata, u radu [20] konstruirano je 20 ovih dizajna koji dopuštaju djelovanje samo trivijalne grupe automorfizama. Uoči ovog rada bilo je poznato i 10000 dizajna s ovim parametrima, koji su heurističkim pristupom konstruirani u disertaciji [16].

5.1.1 Klasifikacija uz uvjet djelovanja automorfizma reda 3

Prema poznatim teoremima o gornjoj ogradi broja fiksnih točaka odnosno blokova, ako automorfizam reda 3 ima f fiksnih točaka, tada u slučaju ovih parametara vrijedi $f \in \{1, 4\}$, dok za broj fiksnih blokova vrijedi $F \in \{0, 3, ...\}$. U ovom radu tvrdi se da dizajn 2-$(13, 5, 5)$ nema fiksnih blokova pri djelovanju automorfizma reda 3. Naime, tada bi morale postojati najmanje dvije fiksne točke, dakle $f \geq 4$. No, nije moguće konstruirati više od dvije fiksne točke, od kojih bi svaka bila incidentna s 15 blokova a svaki par incidentan s 5 blokova. Dakle, $F = 0$. Nadalje je jasno da postoji jedna fiksna točka (inače uvjet presjeka u $\lambda = 5$ ne bi mogao biti ispunjen). Ovim razmatranjem dokazana je sljedeća propozicija.

Propozicija 5.1 *Kada automorfizam reda* 3 *djeluje na kombinatorički dizajn s parametrima* 2-$(13, 5, 5)$ *tada fiksira jednu točku i nijedan blok.*

Iz ovih činjenica jasno slijedi da je fiksna točka incidentna sa svim blokovima iz 5 blokovnih orbita duljine 3. Bazirano na toj fiksnoj strukturi, dobivene su 342 potencijalne matrice taktičke dekompozicije koje zadovoljavaju sustav jednadžbi 2.12-2.13. Tijekom indeksiranja tih matrica, samo njih 43 se razvije u incidencijske matrice traženog dizajna (Tablica 5.1). Preciznije, kada je pokrenut postupak indeksiranja tih 342 ulaznih matrica, dobiveno je 4086378 incidencijskih matrica, među kojima se nalazi 1084129 neizomorfnih dizajna. Pomoću razvijenog računalnog programa *SelectSimple* ustanovljeno je da je većina, točnije 1021266, od tih neizomorfnih strukutura jednostavna. Naime, neke od matrica taktičke dekopozicije imaju jednake stupce, što može voditi do jednakih blokova (u drugoj fazi konstrukcije). Opisani rezultati postignuti ekstenzivnom upotrebom računala predstavljaju klasifikaciju dizajna 2-$(13, 5, 5)$ na koje djeluje automorfizam reda 3.

Teorem 5.1 *Postoji točno* 1084129 *nesimetričnih dizajna s parametrima* $(13, 5, 5)$ *koji dopuštaju djelovanje automorfizma reda* 3. *Od tog broja dizajna,* 1021266 *njih je jednostavno.*

U tom skupu od 1084129 dizajna pojavljuje se devet različitih redova grupe automorfizama, od najmanjeg reda 3 do najvećeg 3072. Pri tome je daleko najzastupljeniji red 3. Tablica 5.2 prikazuje kompletnu listu redova grupa automor-

Tablica 5.1: Rezultati konstrukcije za 2-$(13, 5, 5)$ C

MTD	$numincmat$	$niso$
[30,33]	425020	43894
[164,165],[197,200]	551899	162437
[201,204]	417338	116214
[226,236]	531182	135226
[288,292]	469320	72362
[293,297]	467192	164947
[298],[327,328]	436482	127619
[329,331]	392700	83304
[332,333]	395245	178126
[1,342]	4086378	1084129

fizama koji se pojavljuju kod konstruiranih dizajna, kao i njihove učestalosti.

Tablica 5.2: Frekvencije redova grupa automorfizama za 2-$(13, 5, 5)$ s djelovanjem automorfizma reda 3

$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$	$niso$
3	1021120
6	144
24	61857
39	1
48	9
192	990
384	3
1536	4
3072	1
$\sum$	1084129

5.1.2 Konstrukcije dizajna s trivijalnom grupom automorfizama

Druga serija testova imala je za cilj pronaći i neke druge dizajne osim onih na koje djeluje automorfizam reda 3. U tu svrhu, kao što je prethodno objašnjeno, u drugom koraku konstrukcije izostavilo se djelovanje grupe što znači da se tijekom indeksiranja dopustila zamjena koeficijenata ρ_{ij} ne samo cikličkim matricama reda 3 već također i anticikličkim matricama.

U prijašnjem slučaju ("C"), prostor rješenja je bio veličine 3^{13^3}, dok se je sada povećao na 6^{13^3}, obzirom da se sada svaki element varijabilnog dijela 5×13 matrice taktičke dekompozicije zamjenjuje s jednom od 6 cikličkih ili anticikličkih matrica umjesto jednom od 3 cikličke matrice. U takvim okolnostima iscrpnu pretragu više nije bilo svrsishodno provesti, budući da je procjena donesena na uzorku od prvih nekoliko matrica govorila da bi za indeksiranje svih 342 matrica trebalo oko 50 dana procesorskog vremena - što bi rezultiralo prevelikim brojem struktura da bi njihovo testiranje na izomorfnost završilo u prihvatljivom vremenu.

Stoga je "CAC" konstrukcija napravljena za samo jednu ulaznu matricu taktičke dekompozicije. Iz jedne odabrane matrice (koja je 30-a po redu konstruirana programom *Orbmat* a prva koja se može razviti u dizajn kod "C" konstrukcije), dobiveno je 226262 neizomorfnih dizajna. Od tog broja, 200737 dizajna je jednostavno. Dobiveno je mnoštvo dizajna s trivijalnom grupom automorfizama. Kompletna lista konstruiranih dizajna prikazana je u Tablici 5.3. Dodavanjem svih frekvencija koje nisu djeljive s 3 prethodnom klasifikacijskom rezultatu (Teorem 5.1), sumarni rezultat za dizajn 2-$(13, 5, 5)$ može se izreći sljedećom propozicijom.

Tablica 5.3: CAC rezultat za jednu ulaznu matricu

$\lvert Aut(\mathcal{D}) \rvert$	*niso*
1	191668
2	22914
3	9069
4	82
8	1799
16	6
24	722
192	2
$\sum$	226262

Propozicija 5.2 *Postoji najmanje* 1300598 2-*dizajna s parametrima* $(13, 5, 5)$.

Slika 5.1 prikazuje dva konstruirana dizajna, jedan s najvećom punom grupom automorfizama i drugi s trivijalnom grupom automorfizama. Također se na slici vide potencijalne matrice taktičke dekompozicije iz kojih su ti dizajni razvijeni (prvi redak tih matrica pripada fiksnoj točki).

5.2 Konstrukcija nesimetričnog dizajna s parametrima $(16, 6, 5)$

Kao što proizlazi iz relacija 2.1 i 2.2, nesimetrični dizajn s parametrima $(16, 6, 5)$ ima 40 blokova pri čemu je svaka točka incidentna s 15 blokova. Svaka dva bloka ovog t-dizajna imaju točno 5 zajedničkih točaka. I za ove parametre, u ovom je radu pretpostavljeno djelovanje automorfizma reda 3. Međutim, za razliku od svih prethodno istraženih (opisanih) dizajna, ovdje se radi o prvoj trojki parametara za koju nisu utvrđene sve moguće fiksne točke i blokovi budući da je puno načina na koje automorfizam dotičnog reda ovdje može djelovati. Stoga je u ovom radu odabran jedan slučaj, i to $f = F = 4$. Za fiksnu strukturu s 4 fiksne točke i bloka dobiva se 891 potencijalna matrica taktičke dekompozicije.

5.2.1 Ispitivanje izomorfnosti na bazi strukturalnih invarijanata

Jednako kao i kod prethodne trojke parametara, i kod ovog dizajna, prvi cilj istraživanja bila je parcijalna klasifikacija, u ovom konkretnom slučaju uz djelovanje automorfizma reda 3 koji fiksira četiri točke i četiri bloka. Oba koraka konstrukcije, kreiranje matrica taktičke dekompozicije i njihovo indeksiranje, završili su u prihvatljivom vremenu. Međutim glavnim se problemom ovdje pokazalo ispitivanje izomorfnosti dobivenih struktura. Kako bi se izomorfnost ispitala što brže, kod istraživanja ovih parametara primijenjena je metoda bazirana na usporedbi *strukturalnih invarijanata*.

Definicija 5.1 *Neka je $\mathcal{M}$ skup incidencijskih matrica kombinatoričkog dizajna $\mathcal{D}$ s parametrima t-(v, k, λ), i neka je n prirodni broj. Preslikavanje $\alpha : \mathcal{M} \to V_{1n}$ naziva se strukturalna invarijanta ako za svake dvije matrice M_1, $M_2 \in \mathcal{M}$ vrijedi $\alpha(M_1) \neq \alpha(M_2) \Rightarrow M_1 \not\cong M_2$.*

Primjerice, strukturalna invarijanta može biti red grupe automorfizama, budući da ako dva dizajna imaju različite redove grupa onda sigurno pripadaju različitim klasama izomorfnosti. Nadalje, statistika presjeka redaka ili stupaca incidencijske matrice također predstavlja strukturalnu invarijantu. U praksi je važno da se invarijanta pojedine matrice može što brze izračunati i da duljina dobivenog vektora bude što manja (kako bi usporedba bila što brža).

MTD_1	MTD_2
3333300000000	3333300000000
2210022211110	3110022111111
1111120022202	1003111221111
1111101121032	0221010112221
0012212201211	0110312111112

2-$(13, 5, 5)$ dizajn s $|Aut(\mathcal{D})| = 3072$

1111111111111110000000000000000000000000
1101101000000001101101101001001001000000
0110110100000000110110110100100100100000
1011010010000001011011010010010010010000
1001000101001000110000001100111010000110
0100100010100101010000000111011100000011
0010011000010011100000000101110011000101
1001000010010010000100100110100001110111
0100101001001000000010011010010001111101
0010010100100100001001001101000001111100
0000001001101100011101100000100110010001
0000000100110111000110110000011011001000
0000000011011010101011010001001100100100

2-$(13, 5, 5)$ dizajn s $|Aut(\mathcal{D})| = 1$

1111111111111110000000000000000000000000
1111001000000001101101001001001001001000
1110100100000000110110100100100100100100
1110010010000001011010010010010010010010
1000000001111001001001101100100100010010
0100000001110100100100110110010011001000
0010000000111001001001101101100100010010
0001101101000001000000010011100111010100
0000110110100000100001001000111011100010
0001011010010000010000100101011100111000
0001000100001111000110011000010100101010
0000100010001110101100100011001000010110
0000011000000111001101100010010001100110

Slika 5.1: Najpravilniji konstruirani i primjerak najjednostavnijeg dizajna

Lema 5.1 *Neka su dane incidencijske matrice $M_1, M_2, ..., M_n$ kombinatoričkog dizajna $\mathcal{D}$ i neka su $C_1, C_2, ..., C_n$ njima pridružene strukturalne invarijante. Neka su $S_1, S_2, ..., S_m$ disjunktni podskupovi skupa svih matrica, takvi da se u pojedinom podskupu nalaze matrice jednakih strukturalnih invarijanti. Tada ti skupovi predstavljaju klase međusobno neizomorfnih incidencijskih matrica.*

Na ovoj lemi temelji se algoritam za ispitivanje izomorfnosti: najprije se dani skup matrica razvrsta u disjunktne skupine (po kriteriju strukturalne invarijante) a zatim ispita izomorfnost svake skupine matrica zasebno (u ovom radu programom $Incfilter$). Pseudokod implementiranog algoritma $CharFilter$ prikazuje Slika 5.2. Glavne varijable u algoritmu jesu $nrOfDiffChar$, dvodimenzionalno polje $strChar$ te jednodimenzionalna polja $charOfMat$ i $nextMat$. Varijabla cjelobrojnog tipa $nrOfDiffChar$ predstavlja broj različitih strukturalnih invarijanti. U polje $strChar$ spremljene su trenutno pronađene invarijante, kako bi se moglo ustanoviti da li je tekuća invarijanta već pronađena u skupu ulaznih matrica. i-ti element polja $charOfMat$ predstavlja redni broj (u polju $strChar$) invarijante matrice M_i. Slično, i-ti element polja $nextMat$ pokazuje redni broj sljedeće iz niza matrice koja ima jednaku invarijantu kao i M_i. U svakom koraku glavne petlje (čiji je indeks $currMat$) algoritam najprije odredi strukturalnu invarijantu i spremi je u polje $currStrChar$. Nakon toga se provjeri da li se $currStrChar$ već nalazi u skupu pronađenih invarijanti $strChar$. Ukoliko to nije istina, tekuća se invarijanta dopiše u $strChar$ a varijabli $nrOfDiffChar$ se vrijednost poveća za 1. Ukoliko je pak takva invarijanta već pronađena, tada se za prethodnu matricu s takvom invarijantom zapamti redni broj tekuće matrice (redni broj prethodne matrice zapisan je u $prevMat[i-1]$). U oba slučaja (invarijanta je pronađena ili ne) elementu $charOfMat[currMat]$ se pridružuje redni broj invarijante u polju $strChar$.

Primjer rada algoritma za jedan konkretan skup ulaznih matrica i za jednu konkretnu strukturalnu invarijantu ilustriran je Slikom 5.3. Zadano je 9 matrica dizajna 2-$(13, 5, 5)$ kojima treba ispitati izomorfnost (datoteka "primjer1.txt" s tim matricama se može pronaći u Prilogu B, u arhivi "charFilter.zip"). Za strukturalnu invarijantu je odabrana statistika presjeka triju stupaca. Dakle, ispituje se $\binom{39}{3} = 9139$ presjeka trojki stupaca. U ovom slučaju za presjek, u oznaci q, vrijedi $q \in \{0, 1, ..., \lambda\}$. Ukoliko tekuća trojka stupaca ima q zajedničkih točaka tada se vrijednost elementa $currStrChar[q]$ poveća za 1. Slika 5.4 prikazuje ekstrakt iz procedure $StrCharCalc$ računalnog programa $CharFilter$, koja računa strukturalnu invarijantu tekuće incidencijske matrice. U skupu od danih 9 matrica, šest je različitih invarijanti; budući da prva i peta matrica imaju jednake invarijante, zatim druga i šesta te četvrta i sedma. Algoritam je to prepoznao i zabilježio u polju $charOfMat$ (parovi

Algorithm CharFilter$(M_1, M_2, ..., M_n, n, v, b)$

```
nrOfDiffChar = 0
∀currMat;  currMat = 1, ..., n
    izračunaj currStrChar[]
    alreadyFound = false; i = 0
    while (not(alreadyFound) and i < numOfDiffChar)
        if (currStrChar[] = strucChar[i][]) then
            alreadyFound = true
        i = i + 1

    if (alreadyFound) then
        charOfMat[currMat] = i − 1
        nextMat[prevMat[i − 1]] = currMat
        prevMat[i − 1] = currMat
    else
        strChar[nrOfDiffChar][] ← currChar[]
        charOfMat[currMat] = nrOfDiffChar
        prevMat[nrOfDiffChar] = currMat
        numOfDiffChar + +
end
```

Slika 5.2: Pseudokod algoritma *CharFilter*

$currMat$	$currStrChar$						$charOfMat$	$nextMat$
0	**3970**	**4456**	**681**	**31**	**1**	**0**	0	4
1	3979	4429	708	22	1	0	1	5
2	3976	4438	699	25	1	0	2	-1
3	3982	4420	717	19	1	0	3	6
4	**3970**	**4456**	**681**	**31**	**1**	**0**	0	-1
5	3979	4429	708	22	1	0	1	-1
6	3982	4420	717	19	1	0	3	-1
7	3988	4402	735	13	1	0	4	-1
8	3985	4411	726	16	1	0	5	-1

Slika 5.3: Ilustracija rada algoritma $CharFilter$

```
for (l=0; l<lam+1; l++) CurrStrChar[l]=0;
for (i=0; i<b-2; i++)
      for (j=i+1; j<b-1; j++)
            for (jj=j+1; jj<b; jj++){
            sum=0;
            for (l=0; l<v; l++) sum=sum+M[l][i]*M[l][j]*M[l][jj];
            CurrStrChar[sum]++;
      }
```

Slika 5.4: Izvorni tekst programa za izračun strukturalne invarijante

matrica s jednakim invarijantama imaju jednake vrijednosti pripadnih elemenata u tom polju; tj. $charOfMat[0] = charOfMat[4], ...$). Ekvivalentna informacija zabilježena je i u polju $nextMat$: vrijednost $nextMat[0] = 4$ znači da matrice pod rednim brojevima 0 i 4 imaju jednake invarijante. Nadalje, budući da je $nextMat[4] = -1$, to je matrica pod rednim brojem 4 zadnja u nizu matrica koje imaju invarijantu pod rednim brojem 0 (općenito, -1 je oznaka da je dotična matrica zadnja u nizu). U implementaciji $CharFilter$ nakon obrade ulazne datoteke - u kojoj su matrice koje treba ispitati, u jednoj dvostrukoj petlji "prolazi" se polje $nextMat$ kako bi se matrice razvrstale u izlazne datoteke (u ovom konkretnom slučaju bit će 6 datoteka).

5.2.2 Klasifikacija uz uvjet djelovanja automorfizma reda 3 koji fiksira 4 fiksne točke te 4 bloka

Kada je razvoj računalnog programa $CharFilter$ završen, njime je provedeno ispitivanje izomorfnosti konstruiranih incidencijskih matrica (radi se, dakle, o skupu svih incidencijskih matrica dizajna 2-$(16,6,5)$ na koje automorfizam reda 3 djeluje). Za strukturalnu invarijantu korištena je statistika presjeka stupaca incidencijske matrice. Prije pokretanja programa $CharFilter$, svaka od 891 datoteke s incidencijskim matricama filtrirana je pomoću programa $Incfilter$. Na taj način dobivene rezultantne datoteke bile su ulazne datoteke za filtriranje pomoću odabrane strukturalne invarijante. Nakon nešto više od tjedan dana vremena računalni program $ChafFilter$ je završio s radom, rasporedivši ulazne matrice u 95105 datoteka pri čemu matrice iz različitih datoteka pripadaju različitim klasama izomorfnosti. Nakon toga preostalo je ispitati izomorfnost među incidencijskim matricama svake pojedine skupine (datoteke). Naposljetku je dobiveno 203398868 neizomorfnih dizajna. Tijekom zadnjeg koraka ispitivanja izomorfnosti, radi lakšeg baratanja, 95105 dobivenih datoteka je razvrstano u skupine kako prikazuje Tablica 5.4. Program $Incfilter$ pokrenut je potrebni broj puta pomoću skripti (batch datoteke) za operativni sustav Windows. Ova parcijalna klasifikacija predstavlja jedan od najzahtjevnijih (tehnički i operativno) testova u ovom radu, uz spomenuta dva testa kod simetričnih dizajna.

Tablica 5.4: Detaljniji rezultati za 2-$(16,6,5)$ Fp4Fb4 C

Datoteka	*niso*
$[0, 10000]$	29877421
$[10001, 20000]$	49972314
$[20001, 30000]$	5590651
$[30001, 40000]$	2503949
$[40001, 50000]$	5779045
$[50001, 60000]$	27588732
$[60001, 70000]$	38667825
$[70001, 80000]$	26148044
$[80001, 95104]$	17270887
$\sum$	203398868

Kao redovi grupa automorfizama ustanovljeni su brojevi 3, 6, 9, 12, 18, 24, 72, 192, 384 i 768. Tablica 5.5 prikazuje učestalosti pojedinih redova grupa automorfizama za odabrani uzorak. Sljedeća propozicija iskazuje rezultat par-

Tablica 5.5: Rezultati konstrukcije za 2-$(16, 6, 5)$ C (MTD s 4 fiksne točke)

$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$	Frekvencija
3	21254100
6	37
12	2
24	3490
192	52

cijalne klasifikacije dizajna 2-$(16, 6, 5)$ uz djelovanje automorfizma reda 3.

Propozicija 5.3 *Postoji* 203398868 *nesimetričnih dizajna s parametrima* $(16, 6, 5)$ *koji dopuštaju djelovanje automorfizma reda* 3 *koji fiksira* 4 *točke i* 4 *bloka.*

5.2.3 Konstrukcije dizajna s trivijalnom grupom automorfizama

Kako bi se dobio dojam o odnosu broja dizajna s trivijalnom grupom automorfizama ("CAC" slučaj) i broja dizajna s ostalim redovima grupa ("C" slučaj), odabrana je jedna matrica taktičke dekompozicije za koju je pokrenuta "C" i "CAC" konstukcija. Konstrukcijom tipa "C" dobiveno je 225404 incidencijskih matrica od kojih su sve imale red grupe automofizama jednak 3. U "CAC" slučaju konstuirano je 51986104 incidencijskih matrica. Od tog broja, izomorfizam je ispitan za skup od prvih milijun matrica, pri čemu je izolirano ukupno 472971 neizomorfnih struktura od čega njih 430134 s trivijalnom grupom automorfizama. Tablica 5.6 prikazuje opisane usporedne rezultate "C" i "CAC" konstrukcije. Uzimajući u obzir da različiti redovi grupa automofizama podrazumijevaju neizomorfne dizajne, može se iskazati sljedeća tvrdnja.

Tablica 5.6: C i CAC konstrukcija za jednu MTD

Konstrukcija	*numincmat*	*niso*	$\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert$
C	450808	225404	3(225404)
CAC (djelomično)	51986104	$\geq$ 472971	1(430134),3(42837)

Propozicija 5.4 *Postoji najmanje* 203829002 2*-dizajna s parametrima* $(16, 6, 5)$.

Kako bi se stekao dojam o veličini incidencijske matrice te veličini grupa automorfizama koje djeluju na ovaj dizajn, dva konkretna dizajna (jedini konstruirani s redom grupe 768 i jedan od dizajna s trivijalnom grupom automorfizama) prikazana su na slici 5.5. Za naglasiti je da prethodna propozicija slijedi samo iz rezultata dobivenih na osnovu djelovanja automorfizma reda 3 na jedan konkretan način. Znajući da postoji 9467 potencijalnih matrica taktičke dekompozicije s jednom fiksnom točkom i jednim fiksnim blokom, može se samo pretpostaviti koliko je još neotkrivenih dizajna ovih parametara.

2-$(16,6,5)$ dizajn s $|Aut(\mathcal{D})| = 768$

1110111111111111000000000000000000000000
1101111000000000111111111000000000000000
1011111000000000000000000111111111000000
0111000111000000111000000111000000111000
1000000110100100110100100000110110100100
1000000011010010011010010000011011010010
1000000101001001101001001000101101001001
0100100100010010100010010110100100000111
0100010010001001010001001011010010000111
0100001001100100001100100101001001000111
0010100100010010000101101001011000101010
0010010010001001000110110100101000110001
0010001001100100000011011010110000011100
0001100000101101100010010001000011101010
0001010000110110010001001100000101110001
0001001000011011001100100010000110011100

2-$(16,6,5)$ dizajn s $|Aut(\mathcal{D})| = 1$

1110111111111111000000000000000000000000
1101111000000000111111111000000000000000
1011000111000000111000000111111000000000
0111000000111000000111000111000111000000
1000110000100100000100100110110100110100
1000011000010010000010010011011010011010
1000101000000100100000100110110100110100
0100100110100000100000110001001011100110
0100010011010000010000011100010101001101
0100001101001000000100010101010011001001
0010100001100010101011000000010100101011
0010010100001100011101000000000100101111
0010001010010001110110000000100010110101
0001000100001111100100110100010010001001
0001000001001011101000110101000110010001
0001000000110011100101001100110000101010

Slika 5.5: Najpravilniji i jedan od dizajna sa samo trivijalnom grupom automorfizama

5.3 Konstrukcija nesimetričnog dizajna s parametrima $(21, 6, 4)$

Automorfizam reda 3 može djelovati na nesimetrični dizajn $(21, 56, 16, 6, 4)$ na više načina. Obrzirom da je konstrukcija ovog dizajna znatno složenija nego kod prethodna dva nesimetrična dizajna, za obradu je odabran jedan konkretan slučaj djelovanja automorfizma. Pri tome se nastojalo odabrati djelovanje automorfizma sa što većim brojem fiksnih točaka i blokova, kako bi prostor rješenja pri konstrukciji bio što manji.

Program *Orbmat* pokrenut je za slučaj kada je $f = 6$ i $F = 8$, no ni za taj jedan slučaj nisu konstruirane sve potencijalne matrice taktičke dekompozicije već samo one s fiksnim strukturama

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
1&1&1&1&0&0&0&0&3&3&3&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&3&3&3&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&3&3&3&0&0&0&0\\
1&0&0&0&1&1&1&0&3&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0&0\\
1&0&0&0&1&1&1&0&0&3&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0\\
1&0&0&0&1&1&1&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0&0&3&0
\end{array}
$$

i

$$
\begin{array}{cccccccccccccccccccccccc}
1&1&1&1&0&0&0&0&3&3&3&3&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&3&3&3&3&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&3&3&3&0&0&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0&0&3&3&0&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0&3&0&3&0\\
1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0&0&3&0&0&3&3&0
\end{array}.
$$

U prvom slučaju dobiveno je 250 matrica a u drugom 68; ukupno, dakle, 318 matrica taktičke dekompozicije. Kako je unaprijed bilo jasno da neće biti moguće provesti parcijalnu klasifikaciju (niti kada bi na raspolaganju bile sve potencijalne matrice taktičke dekompozicije), osmišljena su tri eksperimenta kako bi se dobio uvid u broj i strukturu ovih nesimetričnih dizajna.

Zadatak prvog testa bio je analizirati jednu matricu taktičke dekompozicije. Algoritam *Tact3* uspješno je prvu od matrica razvio u incidencijske matrice dizajna, konstruiravši 241314960 struktura. Ovaj test je odmah potvrdio pretpostavke o težini iscrpne pretrage, budući da je tih, više od 241 milijun matrica, zauzelo 287 GB trajne memorije računala. Od tog broja dobivenih incidencijskih matrica, izomorfnost je ispitana za prvi milijun matrica. Računalni program *Incfilter* ustanovio je da je svih tih milijun matrica neizomorfno.

Štoviše, u cijelom tom skupu javlja se samo jedan red grupe automorfizama, red 3.

Drugi eksperiment je pokrenut s težnjom da se ispita koliko se dizajna dobiva, do na automorfizam, ako se iz svake od 318 matrica konstruira samo prvih 1000 incidencijskih matrica. Nakon što je tih 318000 matrica konstruirano (*Tact*3), ispitana je njihova izomorfnost (*Incfilter*). Ponovo, kao u prethodnom testu, sve matrice u tom skupu bile su neizomorfne i sve su imale red grupe automorfizama jednak 3. Iz prvog testa jasno slijedi da bi iscrpna pretraga te matrice za "CAC" slučaj bila prezahtjevna za trajnu memoriju računala. Stoga je uveden dodatni uvjet na konstrukciju - fiksiran je, uz vektor u prvom retku, još jedan vektor (u drugom retku varijabilnog dijela matrice taktičke dekompozicije). S ovim ograničenjem dobiveno je 5895429 incidencijskih matrica, od kojih je 978653 njih neizomorfno. Od tog broja neizomorfnih dizajna, 700745 struktura ima trivijalnu grupu automorfnizama a 277908 je dizajna čiji je red pune grupe automorfizama jednak 3. Tablica 5.7 uspoređuje rezultate dobivene u prvom i trećem eksperimentu. Za sve dobivene dizajne

Tablica 5.7: Usporedba rezultata za jednu MTD

Konstrukcija	*numincmat*	*niso*	$\|Aut(\mathcal{D})\|$
C	241314960	≥1000000	3(1000000)
CAC (djelomično)	5895429	978653	1(700745),3(277908)

ispitano je i da li su oni jednostavni. Pomoću programa *SelectSimple* ustavljeno je da je svih milijun struktura dobiveno u prvom testu, svih 318000 struktura iz drugog testa te svih 978653 neizomorfnih dizajna iz trećeg testa jednostavno, tj. da nemaju jednakih blokova. Slijedi propozicija koja iskazuje trenutni broj poznatih dizajna s parametrima 2-$(21, 6, 4)$.

Propozicija 5.5 *Postoji najmanje* 1700745 2-*dizajna s parametrima* $(21, 6, 4)$, *i svi su ti dizajni jednostavni.*

Za ilustraciju opisanih konstrukcija, na Slici 5.6 su prikazani dizajni jedinih redova grupa automorfizama koje se pojavljuju u dobivenim strukturama. Ostaje dojam da je konstruiran tek manji dio od svih dizajna s ovim parametrima i da vjerojatno 1 i 3 nisu jedini prisutni redovi grupa (već vjerojatno najzastupljeniji).

2-(21, 6, 4) dizajn s $|Aut(\mathcal{D})| = 3$

11110000111111111111000000000000000000000000000000000000
11110000000000000000111111111111000000000000000000000000
11110000000000000000000000000000111111111111000000000000
10000000111000000000111000000000111000000000111111000000
10000000000111000000000111000000000111000000111000111000
10000000000000111000000000111000000000111000000111111000
01001110100100100000010010010000001000000100000100100100
01001110010010010000001001001000001000000100000010010010
01001110001001001000000100100100100100000010000001001001
00101001100100100000001000000011001010001010000001001001
00101001010010010000000100000001000001010001010100100100
00101001001001001000100000000010000100001100001010010010
00010100100000010010000001000101000010100010110100000011
00010100010000001001000000100010000100001100101001000101
00010100001000000100100000011000000010100010110100000110
00000010000100010110110001000100001000101001010000010100
00000010000001000101101110000000000000110100001000001010
00000010000000110010110101000000000001101010000000100001
00000000110000100001100010010101100100000100000010010100
00000000101010000000101000010110110000000010000001001010
00000000100101000011000000010111100100001000000100100001

2-(21, 6, 4) dizajn s $|Aut(\mathcal{D})| = 1$

11110000111111111111000000000000000000000000000000000000
11110000000000000000111111111111000000000000000000000000
11110000000000000000000000000000111111111111000000000000
10000000111000000000111000000000111000000000111111000000
10000000000111000000000111000000000111000000111000111000
10000000000000111000000000111000000000111000000111111000
01001110100100100000010010010000001000000100000100100100
01001110010010010000001001001000001000000100000010010010
01001110001001001000000100100100100100000010000001001001
00101001100100100000001000000011001010001010000001001001
00101001010010010000000100000001000001010001010100100100
00101001001001001000100000000010000100001100001010010010
00010100100000010010000001000101000010100010110100000011
00010100010000001001000000100010000100001100101001000101
00010100001000000100100000011000000010100010110100000110
00000010000100010110110001000100001000101001010000010100
00000010000001000101101110000000000000110100001000001010
00000010000000110010110101000000000001101010000000100001
0000000011000010000110001000110011100100000010000001010100
0000000010100100001010000011101000111000000100000100001001
0000000010011000000110000010101010101001000010000010100010

Slika 5.6: Dizajni 2-(21, 6, 4) jedinih konstruiranih redova grupa automorfizama

Poglavlje 6

Računalne konstrukcije 3-dizajna

Dok su u prethodna dva poglavlja predstavljene konstrukcije novih 2-dizajna, simetričnih i nesimetričnih, ovo se poglavlje bavi konstrukcijama dizajna s parametrima oblika 3-(v, k, λ). Može se reći da je ovdje riječ o još pravilnijim strukturama, budući da se kod 3-dizajna svaka trojka redaka incidencijske matrice siječe u λ točaka. Očigledno, svaki t-dizajn, $t \geq 2$ je ujedno i 2-dizajn, kao što je već navedeno u poglavlju 2.1.

Teorem 6.1 *Svaki* t-(v, k, λ) *dizajn je ujedno i* s-(v, k, λ_s) *dizajn,* $0 \leq s \leq t$, *pri čemu je*

$$\lambda_s = \lambda \frac{(v-s)(v-s-1)...(v-t+1)}{(k-s)(k-s-1)...(k-t+1)}. \tag{6.1}$$

Primjerice, dizajn s parametrima 3-$(14, 4, 1)$ ujedno je i 2-dizajn sa $\lambda = 6$, sukladno prethodnom teoremu. Četiri takva neizomorfna 3-dizajna, sa velikom grupom automorfizama, konstruirana su u radu Mendelsohn-a i Hung-a iz 1972. [20].

Tablica 6.1 prikazuje neke beskonačne serije 3-dizajna; osim opće forme parametara, u tablici su vidljivi i parametri v, b, r, k i λ za prvih nekoliko redova dotičnog dizajna. Na tim se primjerima može zapaziti jedno istaknuto svojstvo 3-dizajna: broj blokova u pravilu je izrazito velik u odnosu na broj točaka. Jedna od istaknutih serija 3-dizajna jesu Hadamardovi 3-dizajni. Može se pokazati da ako postoji Hadamardova matrica reda $4n$, tada postoji 2-$(4n-1, 2n-1, n-1)$ dizajn, koji se pak može nadograditi do Hadamardovog 3-dizajna 3-$(4n, 2n, n-1)$ [22].

Već je u uvodnom dijelu rada kao primjer t-dizajna naveden Hadamardov 3-dizajn najmanjih parametara. Također je u drugom poglavlju rada opisana

Tablica 6.1: Neke beskonačne serije 3-dizajna

Parametri	$t-(v,b,r,k,\lambda)$
3-$(4n,2n,n-1)$	3-$(8,14,7,4,1)$
	3-$(12,22,11,6,2)$
	3-$(16,30,15,8,3)$
3-$(n,4,1)$,	$n\equiv 2,4(\text{mod}6)$
	3-$(14,91,26,4,1)$
	3-$(16,140,35,4,1)$
	3-$(20,285,57,4,1)$
3-$(q+1,4,2)$,	$q\equiv 1(\text{mod}3)$
	3-$(5,5,4,4,2)$
	3-$(8,28,14,4,2)$
3-$(q+1,4,3)$,	neparni $q\geq 5$
	3-$(6,15,10,4,3)$
	3-$(8,42,21,4,3)$
3-$(4n,4,2n-3)$,	$n\geq 2$
	3-$(8,14,7,4,1)$
	3-$(12,165,55,4,3)$
	3-$(16,700,175,4,3)$

Tablica 6.2: Broj konstruiranih Hadamardovih 3-dizajna

n	$t-(v,k,\lambda)$	*niso*
2	3-(8,4,1)	1
3	3-(12,6,2)	1
4	3-(16,8,3)	5
5	3-(20,10,4)	3
6	3-(24,12,5)	62
7	3-(28,14,6)	176

ručna konstrukcija za dizajn 3-$(12, 6, 2)$, kao i računalna konstrukcija dizajna 3-$(16, 8, 3)$. Slijedi opis računalnih konstrukcija još nekoliko Hadamardovih 3-dizajna izvedenih u ovom radu. Točnije, kao što je opisano u nastavku, ostvarene su parcijalne klasifikacije za parametre 3-$(20, 10, 4)$ i 3-$(28, 14, 6)$. Za parametre 3-$(24, 12, 5)$ dobivena su tri dizajna s trivijalnom grupom automorfizama. Sumarne rezultate za broj dobivenih dizajna prikazuje Tablica 6.2.

6.1 Konstrukcija Hadamardovog 3-dizajna reda 15

Četvrti dizajn u seriji Hadamardovih dizajna je onaj s parametrima 3-$(20, 10, 4)$. Taj dizajn tvori 38 blokova pri čemu je svaka točka incidentna s 19 blokova. Budući da je, dakle, $r = 19$ a $\lambda = 4$ red ovog dizajna je 15. Incidencijska matrica ovog dizajna je binarna 20×38 matrica čija se svaka tri retka sijeku u četiri točke. Kod ovog dizajna automorfizam reda 3 djeluje jedino na način da formira dvije fiksne točke i dva fiksna bloka. Ta je činjenica ustanovljena pomoću računalnog programa *Orbmat*, pri čemu je dobivena jedna matrica taktičke dekompozicije uz pretpostavku djelovanja automorfizma reda 3 koji fiksira dvije točke i dva bloka.

Kada je računalni program $Tact3$ pokrenut s tom matricom taktičke dekompozicije kao ulaznim parametrom, za "C" slučaj dobiveno je 11 incidencijskih matrica. Pomoću računalnog programa $Incfilter$ ustanovljeno je da su u tom skupu matrica 3 matrice međusobno neizomorfne. Dakle, za "C" slučaj konstruirana su 3 neizomorfna Hadamardova dizajna s parametrima 3-$(20, 10, 4)$. Redovi grupa automorfizama tih dizajna jesu 96,144 i 171.

Kada je analogni postupak konstrukcije proveden za "CAC" slučaj, tj. kada su tijekom indeksiranja uzimane u obzir kombinacije cikličkih i anticikličkih podmatrica reda 3, tada je dobiveno 26 incidencijskih matrica. Međutim, i u ovom slučaju dobivena su, do na izomorfizam 3 dizajna (dakle, ista 3 kao kod "C" konstrukcije). Tablica 6.3 prikazuje navedene rezultate.

Tablica 6.3: Rezultati konstrukcije za 3-$(20, 10, 4)$

Konstrukcija	$numincmat$	$numdes$	$\|Aut(\mathcal{D})\|$
C	11	3	$96, 144, 171$
CAC	26	3	$96, 144, 171$

6.2 Konstrukcija Hadamardovog 3-dizajna reda 18

Hadamardov dizajn s parametrima 3-$(24, 12, 5)$ ima 46 blokova, pri čemu je svaka od 24 točke incidentna s 23 bloka. Svaka se tri retka incidencijske matrice dimenzija 24×46 sijeku u 5 točaka.

Automorfizam reda 3 djeluje na ovaj dizajn na četiri različita načina, tako da fiksira:
- četiri bloka i nijednu točku,
- 10 blokova i nijednu točku,
- 3 točke i 10 blokova,
- te 6 točaka i 10 blokova.
U slučaju kada automorfizam reda 3 fiksira 4 bloka i niti jednu točku, dobivene su dvije matrice taktičke dekompozicije dok je u preostala tri slučaja dobivena po jedna matrica taktičke dekompozicije.

Već kod ovih parametara (kada su u pitanju konstrukcije Hadamardovih 3-dizajna) nije bilo moguće provesti indeksiranje svih dobivenih kandidata za matrice taktičke dekompozicije čak ni kod "C" konstrukcije. Naime, složenost problema, tj. broj kombinacija cikličkih odnosno anticikličkih matrica reda 3, koje je trebalo ispitati bio je prevelik da bi se indeksiranje završilo u praktičnom vremenu. Za ilustraciju procjene vremena potrebnog za indeksiranje onih matrica taktičke dekompozicije koje su bile presložene da bi se taj postupak mogao provesti, usporedimo broj "dobrih" vektora u prvom retku kod jedne indeksirane i jedne neindeksirane matrice. Indeksiranje matrice taktičke dekompozicije sa 6 fiksnih točaka i 10 fiksnih blokova, u "CAC" slučaju trajalo je oko jedan dan pomoću PC računala. Pri tome je broj dobrih kombinacija vektora u prvom retku bio 8028; dakle, nešto više od 8 tisuća "grana" koje treba iscrpno pretražiti. U slučaju, pak, "CAC" indeksiranja matrice taktičke dekompozicije koja ima 3 fiksne točke i 10 fiksnih blokova, broj "grana" iznosio je 156816.

Tablica 6.4 prikazuje dobivene rezultate (za "C" i "CAC" slučaj). Dakle, konstruirana su ukupno 62 dizajna razmatranih parametara. Redovi grupa automorfizama koji se javljaju kod dizajna dobivenih "C" konstrukcijom jesu 6, 12, 18, 24, 36, 48, 144, 240, 288, 1440 i 15840.

Nakon završetka parcijalne klasifikacije, one uz djelovanje automorfizma reda 3, pristupilo se drugom tipu konstrukcije, s ciljem mogućeg dobivanja dizajna s trivijalnom grupom automorfizama. Na ovaj je način indeksirana jedna matrica taktičke dekompozicije, i to ona kod koje automorfizam reda 3 fiksira šest točaka i deset blokova. Kao što prikazuje Tablica 6.4, pomoću računalnog programa $Tact3$ dobiveno je 3600 incidencijskih matrica. Testiranje izomorfnosti, koje je izvedeno računalnim programom $Incfilter$, pokazalo

Tablica 6.4: Rezultati konstrukcija za 3-$(24, 12, 5)$

MTD	Konstrukcija	$numincmat$	$numdes$
$Fp6Fb10$	C	360	24
$Fp3Fb10$	C	0	0
$Fp6Fb10$	CAC	3600	62

je da se među tim matricama nalaze 62 neizomorfna dizajna. U skladu s istraživačkim težnjama, pokazalo se da neki od tih dizajna imaju trivijalnu grupu automorfizama.

Kod ovog tipa konstrukcije, osim redova grupa automorfizama dobivenih kod "C" slučaja, javljaju se još i 1, 2, 4, 8, 16 i 32. Frekvencije pojavljivanja ovih redova, među ovdje konstruiranim dizajnima, prikazuje Tablica 6.5.

Tablica 6.5: Frekvencije redova grupa za 3-$(24, 12, 5)$, Fp6Fb10

$\|Aut(D)\|$	Frekvencija
1	3
2	10
4	11
6	6
8	5
12	6
16	5
18	2
24	1
32	4
36	2
48	2
144	1
240	1
288	1
1440	1
15840	1
$\sum$	62

3-(24, 12, 5) dizajn s $|Aut(\mathcal{D})| = 1$

111110000011111111111111111110000000000000000000
111110000011111100000000000000111111111111000000
111110000000000011111100000011111100000000111111
110001110011100011100011100011100011100011100011000
110001110011100000011100011100011100011111110000
110001110000001111110000001110001111110000000111
101101001010010010010011011010010011011011010110
101101001001001001001001101101001001101101101011
101101001000100100100110110100100110110110101101
100010111010011000101111000101110000110101010110
100010111001001110011010110010100101011000101011
100010111000110101010101101011001010001110010101
011010100110000100101001111010001001110110111010
011010100101010010000110101101000110111011001111
011010100100101001010011010100110011001101110101
010101010110010101011010100101100101001110011010
010101010101001100110111001011010010010100101101
010101010100111010001101110010101000111001010101
001001101111011001110100110010101110000101001010
001001101101110110111001000101111001010010000101
001001101110101111001110001011010100101000110001
000110011111000111000101010100111010101010101010
000110011101110001101010011010010101100111000101
000110011110101010110000101101001111010001110001

3-(24, 12, 5) dizajn s $|Aut(\mathcal{D})| = 2$

111110000011111111111111111110000000000000000000
111110000011111100000000000000111111111111000000
111110000000000011111100000011111100000000111111
110001110011100011100011100011100011100011100011000
110001110011100000011100011100011100011111110000
110001110000001111110000001110001111110000000111
101101001010010010010011011010010011011011010110
101101001001001001001001101101001001101101101011
101101001000100100100110110100100110110110101101
100010111010011000101111000101110000110101010110
100010111001001110011010110010100101011000101011
100010111000110101010101101011001010001110010101
011010100110001001000110111010000110101101111010
011010100101010000110001110100101011010111001111
011010100100100110001011001101010001111010110101
010101010110010101011010100101100101001110011010
010101010101001100110111001011010010010100101101
010101010100111010001101110010101000111001010101
001001101111010110101100101011001100110010001010
001001101101111011010110000101110110001001000101
001001101110101101111001010010111001000100110001
000110011111000111000101010100111010101010101010
000110011101110001101010011010010101100111000101
000110011110101010110000101101001111010001110001

Slika 6.1: Konstruirani dizajni 3-(24, 12, 5)

6.3 Konstrukcija Hadamardovog 3-dizajna reda 21

Hadamardov dizajn reda 21 je dizajn s parametrima 3-$(28, 54, 27, 14, 6)$. Dakle, incidencijska matrica ovog dizajna je dimenzija 28×54 te prikazuje s kojih je 27 blokova pojedina točka incidentna. Bilo koja 3 retka ove matrice imaju na 6 pozicija same jedinice. Kod ovog dizajna automorfizam reda 3 djeluje na tri različita načina:
- fiksira jednu točku i nijedan blok,
- zatim 4 točke i 6 blokova
- te 7 točaka i 12 blokova.
U prvom je slučaju, pomoću računalnog programa *Orbmat* dobiveno 5 matrica taktičke dekompozicije, u drugom su slučaju dobivene 3 matrice a u trećem jedna matrica taktičke dekompozicije. Bilo je moguće indeksirati sva tri tipa matrica za "C" slučaj. Pojedinačne rezultate za svaki od 3 tipa matrica taktičke dekompozicije prikazuje Tablica 6.6. Naposljetku su incidencijske matrice dobivene u svakom od "3" slučaja skupljene u jednu datoteku te im je ispitana izomorfnost pomoću računalnog programa $Incfilter$. Ukupno je dobiveno 176 neizomorfnih dizajna, čime je ostvarena parcijalna klasifikacija ovog dizajna uz djelovanje automorfizma reda 3. Redovi grupa koji se pojavljuju među tim dobivenim dizajnima jesu: 3, 6, 9, 12, 18, 27, 39, 156 i 1053. Pripadne frekvencije mogu se očitati u Tablici 6.7.

Tablica 6.6: Rezultati C konstrukcije za 3-$(28, 14, 6)$

MTD	*numincmat*	*numdes*
$Fp7Fb12$	840	23
$Fp4Fb6$	1663	140
$Fp1Fb0$	1260	22
svi	3763	176

Tablica 6.7: Rezultati C konstrukcije za 3-$(28, 14, 6)$

$\lvert Aut(D)\rvert$	Frekvencija
3	152
6	14
9	2
12	1
18	3
27	1
39	1
156	1
1053	1
$\sum$	176

3-$(28, 14, 6)$ dizajn s $\lvert Aut(\mathcal{D})\rvert = 3$

```
111000111111111111111111111111000000000000000000000000
100110111111111110000000000001111111111110000000000000
010101111111000000111111000000111111000000111111000000
001011111000111000111000111000111000111000111000111000
111000100110110000100100100110100110110110111100100110
111000001001101100001001001001101001101101111101001 0011
1110000001101101000001001001101001101101101111001001101
1101001100001001101100100011010011010110101001011110 10
11010001100001001101100110011010011010100101011011 1001
110100101000000110110110001001101001111010000101111 1100
101010100110000110011001110001011010101001100111100110
101010010011000011101100011100101001110100010111010011
101010001101000101110010101010110100011010001111001101
100110100100011001010111011100101001000011011010101110
100110010010101100001111101010110100000101101001110011
100110001001110010100111110001011010000110110100011101
011001110001010101000101101001011100100111001110011010
011001011100001110000110110100101010010111100011101001
011001101010100011000011011010110001001111010101110100
010101000110011011101010101001011100011100010010100111
010101000011101101110001110100101010101000100101 0111
010101000101110110011100011010110001110001100100001111
001011100001011110101011000110100111001100100010011110
001011010100101011110101000011010111100010010001101011
001011001010110101011110000101001111010001001100110101
000111110101100001001010110111000010011101011101001010
000111011110010100100001011111000001101110101110100001
000111101011001010010100101111000100110011110011010100
```

Slika 6.2: Konstruirani dizajn 3-$(28, 14, 6)$

Poglavlje 7

Razvijeni pomoćni računalni programi

Tijekom razvoja alogoritma za indeksiranje - središnjeg algoritma u ovome radu, ukazala se potreba i za razvojem nekoliko pomoćnih aplikacija. Razvijeni su sljedeći konzolni računalni programi:

CheckBIBD

Check3Des

MergeFiles

ExtractMat

SelectSimple

CompareMat

CountMatrices

CountAut.

Uglavnom je riječ o manjim aplikacijama sa stotinjak linija izvornog koda. Najprije slijedi opis namjene pojedinog programa a zatim detalji o implementacijskim rješenjima. Svi su programi implementirani tako da se mogu koristiti na operativnom sustavu Windows, dok za neke od njih postoji i Linux verzija.

7.1 Opis programa i način njihove upotrebe

Računalni program *CheckBIBD* provjerava da li je dana matrica incidencijska matrica dizajna. Program je napravljen kako bi postojala potpuna sigurnost da su konstruirane matrice uistinu incidencijske matrice danog dizajna. Riječ je o konceptualno jednostavnoj računalnoj aplikaciji, s malo linija izvornog koda. Za napomenuti je da ova aplikacija predstavlja poopćenje aplikacije *CheckSBIBD* iz rada [19]: dok *CheckSBIBD* služi samo za provjeru incidencijskih matrica simetričnih dizajna, *CheckBIBD* vrijedi i za nesimetrične dizajne. Analogna provjera za 3-dizajne može se napraviti aplikacijom *Check3Des*.

Računalne aplikacije *MergeFiles* i *ExtractMat* nastale su zbog nemogućnosti baratanja s kreiranim datotekama pomoću standardnih editora i tekstovnih preglednika. Naime, datoteke dobivene u ovom radu, u pravilu su vrlo velike (veličine su im tipično izražavane u GB), te je uređivanje ili spajanje više takvih datoteka u jednu bilo otežano ili neizvodljivo pomoću poznatih i raširenih računalnih programa za obradu teksta. Program se koristi na način da se u komandnu liniju upiše

$$mergefiles\ \ v\ \ b\ \ inpFile\ \ outFile$$

čime će se matrice iz datoteke $inpFile$ prepisati u datoteku $outFile$ (odnosno nadopisati, ukoliko datoteka takvog imena već postoji). Program *ExtractMat* se pokreće s parametrima

$$v\ \ b\ \ inpFile\ \ outFile\ \ startMat\ \ endMat$$

pri čemu se matrice t-dizajna s v točaka i b blokova koje se nalaze u datoteci $inpFile$, od matrice na poziciji $startMat$ zaključno s matricom $endMat$, prepišu u datoteku $outFile$.

Računalni program *SelectSimple* iz ulazne datoteke $inpFile$, koja sadrži incidencijske matrice danog dizajna, prepisuje sve one matrice koje su jednostavne, tj. nemaju podudarnih redaka (blokova), u izlaznu datoteku imena *SelectSimple.txt*. Program se pokreće na način

$$selectsimple\ \ v\ \ b\ \ inpFile$$

Razvijena je i inačica ovog programa $SelectSimpleBezSpremanja$, koja ispituje jednostavnost dizajna iz ulazne datoteke bez da jednostavne dizajne zapiše u izlaznu datoteku.

Program *CompareMat* ispituje da li u danoj datoteci postoje dvije jednake matrice, tj. postoje li ikoje dvije matrice $[A_{ij}]$, $[B_{ij}]$ za koje vrijedi $a_{ij} = b_{ij} \forall i, j$. Parametri za pokretanje ovog programa jesu

$$v\ \ b\ \ inpFile$$

Računalni program $CountMatrices$ služi za prebrojavanje matrica, koje su smještene u jednoj ili više datoteka. Program se pokreće iz komandne linije na način

$$countmatrices\ \ v\ \ b\ \ filename\ \ firstFileNo\ \ lastFileNo$$

pri čemu se podrazumijeva da se u ulaznim datotekama općeg imena $filenameX.txt$ ($firstFileNo \leq X \geq lastFileNo$) nalaze binarne $v \times b$ matrice. Postoji i inačica $CountMatricesFil$ koja se koristi kada je nastavak imena ulaznih datoteka ".fil".

Program *CountAut* ispisuje sve različite brojeve koji se nalaze u ulaznoj datoteci te njihove frekvencije pojavljivanja. Parametar za pokretanje ovog programa je ime ulazne datoteke a frekvencije se zapisuju u datoteku $autCounted.txt$.

Tablica 7.1 prikazuje primjere pokretanja ovih aplikacija.

Tablica 7.1: Vlastite pomoćne aplikacije

Aplikacija	Primjer pokretanja	Izlazna datoteka
CheckBIBD	*checkbibd* 36 15 6	-
Check3Des	*check*3*des* 14 4 1	-
MergeFiles	$mergefiles$ 31 10 3 $incM31F4.fil$ *inc.txt*	*inc.txt*
ExtractMat	*extractmat* 31 10 3 $incM31CAC.fil$ *druga.txt* 2 2	*druga.txt*
SelectSimple	*selectsimple* 13 5 5 $inc1.fil$	SimpleDes.txt
CompareMat	*comparemat* 36 15 6 $M36F0CAC.txt$	-
CountMatrices	*countmatrices* 16 40 *incres* 0 2976	-
CountAut	*countaut aut.txt*	autCounted.txt

Opisani programi uredno rade samo za ulazne binarne matrice (polje u kojem se pamti tekuća matrica je tipa bool). Programi su neovisni o tome da li su nule i jedinice u ulaznoj datoteci sa ili bez razmaka. Za svaki od ovih sedam računalnih programa u Prilogu C se nalazi:

- izvršna datoteka,
- datoteke izvornog teksta programa (.cpp),
- datoteke projekta, potrebne za prevođenje izvornog teksta programa,
- "ReadMe" datoteka.

7.2 Raščlamba implementacijskih rješenja

Implementacije svih opisanih pomoćnih aplikacija izvedene su u programskom jeziku C. Prototip za većinu navedenih programa je aplikacija *CheckBIBD* (izuzeci su *CountAut* i *CountMatrices*) pa će se u nastavku detaljnije opisati izvorni tekst te aplikacije. Globalne varijable u aplikaciji su parametri dizajna v, k, λ, b i r tipa podataka *integer* te dvodimenzionalno polje M tipa *bool* u kojem se pamti tekuća matrica. Funkcija $getDataFromFile$, čiji osnovni dio prikazuje Slika 7.1, služi za učitavanje tekuće matrice iz ulazne datoteke. I kod ostalih programa, za učitanje matrica iz ulazne datoteke, koristi se istoimena funkcija - malo izmijenjena u odnosu na onu kod aplikacije *CheckBIBD*. Kako je vidljivo na prethodnoj slici, kod programa *CheckBIBD*, nakon svake učitane matrice, poziva se funkcija *CheckSolution* koja provjerava da li je ta matrica incidencijska matrica dizajna danih parametara. Izvorni tekst te funkcije prikazuje Slika 7.2.

```
//read data
currsol=0;
do {
    //input current matrix
    for (i=0; i<v; i++)
        for (j=0; j<b; j++) {

        x=32;
        while ((ok==1) && ((x==32) || (x==10) || (x==9)))
            ok = fscanf(f,"%c",x);
        M[i][j]=(x=='1');
        //check if every input is 0 or 1
        if ((M[i][j]!=0) && (M[i][j]!=1)) {
            printf("Input matrix must be 0-1 matrix!\n");
            exit(1);}
        }

    //if input is ok, then check if matrix is inc.mat.
    if (ok==1) CheckSolution(currsol);
    currsol++;

}while (ok==1);
```

Slika 7.1: Izvorni tekst funkcije *getDataFromFile*

```
void CheckSolution(int cursol){
//global v, M[][], all_solutionsOK
    bool solOK;
    int i, ii, j, sum, counter1, counter2;

    solOK=true;
    //I count "1" in rows and columns
    for (i=0; i<v; i++){
        counter1=0;
        for (j=0; j<b; j++) {counter1+=M[i][j];}
        if (counter1!=r) solOK=false;
    }

    //II if (counter1!=k)...
    for (j=0; j<b; j++){
        counter2=0;
        for (i=0; i<v; i++) {counter2+=M[i][j];}
        if (counter2!=k) solOK=false;
    }

    //III check intersection
    for (i=0; i<v-1; i++)
        for (ii=i+1; ii<v; ii++) {
            sum=0;
            for (j=0; j<b; j++)
                sum=sum+M[i][j]*M[ii][j];
            if (sum!=lam) solOK=false;
        }

    printf("Matrix no %d", cursol+1);
    printf(": %d\n", solOK);
    if (!solOK) all_solutionsOK=false;
}
```

Slika 7.2: Izvorni tekst funkcije *CheckSolution*

Poglavlje 8

Zaključak

Kao jedan od glavnih zadataka, u ovome radu razvijen je efikasan algoritam za indeksiranje matrica taktičke dekompozicije, i to onih s particijama veličine 1 i 3, kakve nastanu pri djelovanju automorfizma reda 3. S tako razvijenim i implementiranim algoritmom pristupilo se rješavanju otvorenih pitanja klasifikacije t-dizajna. Drugi je značajni cilj ovog rada konstruirati dizajne s trivijalnom grupom automorfizma, kakvih je očekivano najviše a najmanje do sada poznatih. Oba ova zadatka predstavljaju iznimno zahtjevan kombinatorički i računalni problem. Naime, kod rješavanja klasifikacijskog pitanja za dane parametre kombinatoričkog dizajna, prostor rješenja enormno raste s brojem točaka dizajna. Stoga se prebrojavanju dizajna redovito pristupa nametanjem dodatnih uvjeta na strukturu, među kojima je pretpostavljanje djelovanja automorfizma često korišteno. Međutim, i uz takvu pomoć ostaje pitanje kako konstruirati dizajne s trivijalnom grupom automorfizama, budući da oni ne sadrže nikakve unutarnje simetrije.

Dvije glavne hipoteze u ovom radu su bile, kao prvo da će se doseg algoritma za indeksiranje značajno povećati uvažavanjem svih posebnosti strukutre t-dizajna te uvođenjem filtriranja u pretkoraku iscrpne pretrage; dok se druga hipoteza odnosila na način kojim bi se konstruirali t-dizajni s redom grupe automorfizama jednakim 1. Pretpostavka je bila da će se to ostvariti zaboravljanjem na djelovanje grupe, tj. na način da se umjesto samo cikličkih (ili anticikličkih) podmatrica reda 3, pretražuju cikličke i anticikličke podmatrice tijekom faze indeksiranja. Sukladno dobivenim rezultatima, obje se hipoteze mogu smatrati potvrđenima:
- sumarni učinak obiju metoda povećanja efikasnosti algoritma u rangu je smanjenja vremena rada algoritma oko milijun puta; za razmatrane parametre,
- u radu je konstruirano preko milijun dizajna s trivijalnom grupom automorfizama.

Prvi dizajn relativno velikih parametara čijoj se konstrukciji pristupilo bio je dizajn s parametrima $(31, 10, 3)$, za kojeg je pitanje potpune klasifikacije riješeno. Dobiveni rezultati u potpunosti su se slagali sa ranije poznatim vrijednostima. Od simetričnih dizajna, predmetom istraživanja bili su dizajn s parametrima $(36, 15, 6)$ te dizajn sa sljedećom trojkom parametara $(41, 16, 6)$, za koje su pitanja klasifikacije otvorena. Pri tome su ciljevi bili klasifikacija uz uvjet djelovanja automorfizma reda 3 te dobivanje struktura s trivijalnom grupom automorfizama. Simetrični dizajn $(36, 15, 6)$ u ovome je radu klasificiran uz uvjet djelovanja automorfizma reda 3: postoji ukupno 141061 ovih dizajna koji dopuštaju djelovanje ovog automorfizma. Konstrukcijama koje izostavljaju djelovanje grupe dobiveno je preko pola milijuna ovih dizajna sa samo trivijalnom grupom automorfizama. Tablica 8.1 sumarno prikazuje ovaj kao i ostale dobivene rezultate te ih uspoređuje s dosadašnjom donjom granicom broja poznatih dizajna. Automofizam reda 3 djeluje na simetrični dizajn

Tablica 8.1: Broj novih dizajna

t-(v, k, λ)	Do sada	Izvor	Ovaj rad
2-$(36, 15, 6)$	≥ 25634	Mathon, Rosa	≥ 675363
2-$(41, 16, 6)$	≥ 115307	Mathon, Rosa	≥ 441048
2-$(13, 5, 5)$	≥ 10000	dis.Krčadinac	≥ 1300598
2-$(16, 6, 5)$	≥ 25	Mathon, Rosa	≥ 203829002
2-$(21, 6, 4)$	≥ 1	Mathon, Rosa	≥ 1700746

s 41 točkom tako da fiksira bilo 11 bilo 5 točaka. U prvom slučaju dobiva se jedna matrica taktičke dekompozicije a u drugom njih 1580. Ovaj rad je pokazao da postoji točno 345584 simetričnih dizajna s parametrima $(41, 16, 6)$ koji dopuštaju djelovanje automorfizma reda 3. Za oba tipa matrica taktičke dekompozicije izvedena je "CAC" konstrukcija, kojom je dobiveno 95119 dizajna s trivijalnom grupom automorfizama.

Za razliku od simetričnih dizajna gdje je dugotrajnija bila faza indeksiranja od postupka izdvajanja međusobno neizomorfnih strukutra iz skupa svih dobivenih incidencijskih matrica, kod nesimetričnih dizajna daleko je zahtjevnije bilo ustanoviti koje su strukture međusobno neizomorfne (budući da su dobivene incidencijske matrice simetričnih dizajna relativno malobrojne u usporedbi s nesimetričnim dizajnima). Automorfizam reda 3 djeluje na nesimetrični dizajn s parametrima $(13, 5, 5)$ samo na jedan način: fiksiranjem jedne točke i nijednog bloka. Ostvarena parcijalna klasifikacija pokazala je da postoji ukupno 1084129 dizajna s parametrima $(13, 5, 5)$ koji dopuštaju djelovanje automorfizma reda 3. Najviše dizajna s trivijalnom grupom automorfizama konstruirano je za parametre 2-$(21, 6, 4)$. Pri konstrukcijama 3-dizajna, dizajn bez ikakvih unutarnjih simetrija dobiven je kod Hadamardovog dizajna reda 15, čiji su parametri 3-$(20, 10, 4)$.

Osim parcijalne klasifikacije - one uz uvjet djelovanja automorfizma reda 3 dobivenim dizajnima određen je red grupe automorfizama, a također se provjeravalo da li je dizajn jednostavan ili ne. U prilogu se nalaze incidencijske matrice konstuiranih dizajna, kao i računalni programi, zajedno sa datotekama izvornog teksta, razvijeni u ovom radu.

Poglavlje 9

Prilozi

9.1 Prilog A: Dobivene strukture

Ovaj prilog sadrži incidencijske matrice konstruiranih dizajna. Osim dobivenih incidencijskih matrica, za svaki od istraživanih parametara, u prilogu se može pronaći i datoteka s oblikom imena "Result-oznaka dizajna-.xls" koja sadrži kvantitativni opis dobivenih rezultata. Slijedi sadržaj mape "Prilog A Dobivene strukture", koja se nalazi na priloženom CD-u.

Mali parametri

2-$(7, 3, 1)$

2-$(9, 3, 1)$

2-$(16, 6, 2)$

3-$(12, 6, 2)$

3-$(16, 8, 3)$

Nesimetrični dizajni

2-$(13, 5, 5)$

2-$(16, 6, 5)$

2-$(21, 6, 4)$

Simetrični dizajni

2-$(31, 10, 3)$

2-$(36, 15, 6)$

2-$(41, 16, 6)$

2-$(31, 15, 7)$

t-dizajni

3-$(20, 10, 4)$

3-$(24, 12, 5)$

3-$(28, 14, 6)$

9.2 Prilog B: Razvijene aplikacije za razvoj matrica taktičke dekompozicije

U ovom prilogu nalazi se izvorni tekst kao i implementacije za operativni sustav Windows svih razvijenih verzija programa $Tact3$. Na isti način dokumentiran je program $ExpCoef2Des$. U prilogu se također može naći izvorni tekst programa $CharFilter$ te izvorni tekst za Linux verzije nekih programa. Slijedi sadržaj dotične mape na priloženom CD-u.

Tact3

- *Tact3.zip*
- *Tact3filt2.zip*
- *Tact3filt3.zip*
- *Tact3_3des.zip*

ExpCoef2Des.zip

CharFilter

- *CharStatistikaPoRecima.zip*
- *CharStatistikaPoStupcima.zip*

Za Linux

- *Tact3.c*
- *Tact3filt2.c*
- *CheckBIBD.c*

9.3 Prilog C: Razvijene pomoćne aplikacije

Ovaj prilog sadrži izvorni tekst i implementacije pomoćnih računalnih programa za operativni sustav Windows, koji su opisani u 6-om poglavlju. Slijedi sadržaj dotične mape na priloženom CD-u.

CheckBIBD.zip

Check3Des.zip

MergeFiles.zip

ExtractMat.zip

SelectSimple.zip

CompareMat.zip

CountMatrices.zip

CountAut.zip

CheckBIBDLinux.zip

9.4 Prilog D: Analize algoritama

Prilog se nalazi na priloženom CD-u. Slijede sadržaj CD-a te kratki opis pojedine sastavnice ovog priloga.

Poster Presjeci ekspandiranih koeficijenata
Datoteka sadrži cikličke i anticikličke matrice reda 3 kao i tablicu za izračunavanje presjeka cikličkih matrica - što je korisno kod ručnog određivanja presjeka između vektora.

Izračun b i r t-dizajna
U datoteci su implementirane relacije 2.1 i 2.2, tako da se za dane osnovne parametre dizajna (t, v, k, λ) izračunaju parametri b i r.

Izračun Gornje ograde broja fiksnih točaka
U datoteci su implementirane relacije iz teorema 2.3 i 2.4.

Optimiranje broja vektora u filteru
Mapa sadrži sve datoteke koje su potrebne za provedbu testova čiji su rezultati prikazani u Tablici 4.8.

Broj rho podmatrica
Jednostavna aplikacija za izračun broja matrica ρ_{ij} zadanog reda, bilo uz uvjet cikličnosti, bilo bez tog uvjeta.

Poglavlje 10

Sažetak

Algoritam konstrukcije t-dizajna zasnovan na razvijanju matrica taktičke dekompozicije

Kombinatorički dizajn je vrlo pravilna konačna struktura sastavljena od dvije vrste objekata, točaka i blokova. Prostor rješenja kombinatoričkih struktura izrazito raste s brojem točaka, te se redovito govori o kombinatoričkoj eksploziji. Budući da potpuna klasifikacija takvih struktura općenito nije moguća, konstrukciji se pristupa pretpostavljanjem dodatnih pravilnosti koje bi struktura mogla sadržavati, a koje se često formuliraju u obliku neke grupe automorfizama. S druge strane, od posebnog su pak interesa dizajni s trivijalnom grupom djelovanja automorfizama, kakvih je najviše, a vrlo malo poznatih, zbog otežane konstrukcije. Ovaj se rad bavi razvojem efikasnog algoritma za konstrukciju t-dizajna, zasnovan na razvijanju matrica taktičkih dekompozicija koje bi mogle nastati djelovanjem automorfizma prim reda, uz mogućnost da se u ovom koraku konstrukcije djelovanje grupe iskoristi ili zaboravi. Kod simetričnih dizajna ostvarene su parcijalne klasifikacije dizajna s parametrima $(36, 15, 6)$ i $(41, 16, 6)$, uz uvjet djelovanja automorfizma reda 3. Ista parcijalna klasifikacija izvedena je za nesimetrični dizajn s parametrima $(13, 5, 5)$. Konstruirano je mnoštvo novih nesimetričnih dizajna s trojkama parametara $(16, 6, 5)$ i $(21, 6, 4)$. Općenitost algoritma pokazana je na malim parametrima t-(v, k, λ), za $t > 2$. Broj novih dizajna konstruiranih u radu brojiv je u stotinama milijuna, pri čemu je dobiveno preko milijun dizajna s trivijalnom grupom automorfizama.

Poglavlje 11

Summary

t-design construciton algorithm based on expanding tactical decomposition matrices

A combinatorial design can be described as a very regular finite structure consisting of two kinds of objects, points and blocks. The solution space of a combinatorial structure grows enormously with the number of points, which is known as the combinatorial explosion. Since a complete classification of such a structure is generally not possible, a construction is attempted by assuming additional constraints, which the structure could contain and which are often formulated as some automorphism group action. Designs having the trivial order of automorphism groups are of special interest since most of designs are of such kind, but only few are known, because of the particularly complex construction. This work deals with development of efficient algorithms for t-designs construction, based on tactical decomposition which could be achieved from an action of a prim order automorphism, with the possibility to use or to forget the group action in this construction step. Among the symmetric designs, partial classification for parameters $(36, 15, 6)$ and $(41, 16, 6)$, assuming an action of an automorphism of order 3, was realized. The same partial classification was done for non-symmetric design with parameters $(13, 5, 5)$. Very many new non-symmetric designs were constructed for parameter triples $(16, 6, 5)$ and $(21, 6, 4)$. The generality of the algorithm was shown for small parameters t-(v, k, λ), $t > 2$. The number of new designs constructed here can be counted in hundreds of millions, and also over a million of designs having no non-trivial automorphisms was achieved.

Poglavlje 12

Ključne riječi

t-dizajn
incidencijska matrica
simetrični dizajn
grupa automorfizama
taktička dekompozicija
deterministički algoritam
iscrpna pretraga
složenost algoritma
prostor rješenja

Poglavlje 13

Key words

t-design
incidence matrix
symmetric design
automorphism group
tactical decomposition
deterministic algorithm
exhaustive search
algorithm complexity
solution space

Poglavlje 14

Životopis

Ivica Martinjak rođen je 19. prosinca 1969. godine u Svetom Ivanu Zelini, gdje i pohađa osnovnu školu. Nakon završenog srednjoškolskog obrazovanja, upisuje Prirodoslovno matematički fakultet u Zagrebu, na kojem 1995. godine diplomira fiziku na temi "Kinematika dvojnog zvjezdanog sustava V 367 Cygni". Poslijediplomski studij iz područja primijenjenog računarstva upisuje 2004. godine na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, gdje 2007. godine magistrira s temom "Konstrukcije dvoravnina pomoću kombinatoričkih algoritama".

Po završetku studija zapošljava se kao gimnazijski profesor fizike u Svetom Ivanu Zelini. Tijekom tog 11-godišnjeg perioda više puta bio je mentor učenicima na državnim i drugim natjecanjima. Nakon toga radi kao voditelj nastave te surađuje s Ministarstvom znanosti, obrazovanja i športa na provedbi nacionalnih ispita. Godine 2007. zapošljava se u tvrtki Ericsson Nikola Tesla d.d. kao softverski inženjer i time započinje karijeru u poslovnom sektoru. Istu nastavlja kao specijalist za tržišne rizike u Societe Generale - Splitskoj banci d.d. gdje i danas radi.

Aktivno se znanošću počinje baviti upisom poslijediplomskog studija a 2009. godine postaje suradnik na znanstvenom projektu Kombinatorički dizajni i konačne geometrije pri Ministarstvu znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske. Njegov znanstveni interes usmjeren je na analizu i razvoj kombinatoričkih algoritama te njihovu primjenu na otvorena pitanja diskretne matematike, posebice kombinatoričkih dizajna. Jednako aktivno bavi se heurističkim algoritmima a koristi i druge tehnike primijenjenog računarstva u matematičkom modeliranju. Objavio je više radova te bio aktivni sudionik nekoliko konferencija.

Poglavlje 15

Curriculum vitae

Ivica Martinjak was born on 19th December 1969 in Sveti Ivan Zelina, where he finished the elementary school. When he finished middle school, he enrolled in the Faculty of Science in Zagreb. In the year 1995, he graduated physics with thesis "Kinematics of Binary Star System V 367 Cygni". He enrolled postgraduate study in computer science in 2004, at the Faculty of Electrical Engineering and Computing at the University of Zagreb, where he took his master degree with theses "Biplane construction by means of combinatorial algorithms" in 2007.

After finishing his studies, he worked as a physics teacher at a high school in Sveti Ivan Zelina. During that 11-year period of his career, he was a mentor to students at national and other competitions on more occasions. After that, he was a school manager and cooperated with Ministry of science, education and sports on national exams implementation. In 2007. he got a software engineer position at Ericsson Nikola Tesla d.d. company and then his career in business sector has started. Nowadays he works at Societe Generale - Splitska banka d.d. as a market risk specialist.

He started to be active in science when enrolling postgraduate study and in 2009. he joined the scientific project Combinatorial design and finite geometries at Ministry of Science, Education and Sports of the Republic of Croatia. His scientific interest is focused on analysis and development of combinatorial algorithms, and their application to open questions of discrete mathematics, especially combinatorial designs. Besides, he is active in the field of heuristic algorithms and also uses other computer science techniques in mathematical modelling. Until now, he has published several papers and actively attended a few conferences.

Bibliografija

[1] W. O. Alltop, An infinite class of 5-designs, J. Combin. Theory A, 12 (1972), 390-395.

[2] I. Bouyukliev, V. Fack, J. Winne, 2-(31,15,7), 2-(35,17,8) and 2-(36,15,6) designs with automorphisms of odd prime order, and their related Hadamard matrices and codes, Designs, Codes and Cryptography, Vol. 51, 2, (2009), 105-122.

[3] C. J. Colbourn, J. H. Dinitz, The CRC Handbook of Combinatorial Designs New Results, http://www.emba.uvm.edu/ dinitz/newresults.html

[4] D. Crnković, Symmetric $(36, 15, 6)$ Design Having $U(3, 3)$ As An Automorphism Group, Glas. Mat. Ser. III Vol. 34(54) (1999), 1-3.

[5] D. Crnković, On Symmetric $(36, 15, 6)$ Designs, Glas. Mat. Ser. III Vol. 34(54) (1999), 105-108.

[6] V. Ćepulić, On symmetric block designs $(40, 13, 4)$ with automorphisms of order 5, Discrete Math. 128(1-3) (1994), 45-60.

[7] M. Golub, Genetski algoritam, skripta, prvi dio, http://www.zemris.fer.hr/ golub/ga/ga.html, Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2004.

[8] D. Held, J. Hrabe de Angelis, M.-O. Pavčević, $PSp_4(3)$ as a symmetric $(36, 15, 6)$ design, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 101 (1999), 95-98.

[9] K. Horvatić, Linearna algebra, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Matematički odjel, Zagreb, 1990.

[10] D. R. Hughes, F. C. Piper, Design theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[11] Y. J. Ionin and Tran van Trung, *Symmetric Designs*, in CRC Handbook of Combinatorial Designs Second Edition, C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (Editors), CRC Press, Boca Raton, FL, (2007), 110-124.

[12] Z. Janko and Tran van Trung, Construction of a new symmetric block design for (78,22,6) with the help of tactical decompositions, J. Combin Theory Ser.A 40 (1985), 451-455.

[13] P. Kaski, P. R. J. Östergård, Classification Algorithms for Codes and Designs, Springer, Berlin, 2006.

[14] P. Kaski, P. R. J. Östergård, There are exactly five biplanes with $k = 11$, Journal of Combinatorial Designs, Vol. 16, 2, (2007), 117-127.

[15] G. B. Khosrovshahi and R. Laue, *t-Designs with* $t \geq 3$, in CRC Handbook of Combinatorial Designs Second Edition, C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (Editors), CRC Press, Boca Raton, FL, (2007), 110-124.

[16] V. Krčadinac, Konstrukcija i klasifikacija konačnih struktura pomoću računala, doktorska disertacija, Sveučilište u Zagrebu, 2004.

[17] D. L. Kreher, D. R. Stinson, Combinatorial algorithms, CRC Press, New York, 1999.

[18] E. Lander, Symmetric Designs: An Algebraic Approach, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1983.

[19] I. Martinjak, Konstrukcije dvoravnina pomoću kombinatoričkih algoritama, magistarski rad, Sveučilište u Zagrebu, 2007.

[20] I. Martinjak, M. O. Pavčević, Modified Genetic Algorithm for BIBD Construction, ITI, Cavtat, (2009), 759-764.

[21] I. Martinjak, M. O. Pavčević, BIBD's for (13,5,5,), (16,6,5) and (21,6,4) Possessing Possibly an Automorphism of Order 3, International Conference on Computer and Applied Mathematics, WASET, Venecija, (2009), 885-887.

[22] R. Mathon, A. Rosa, 2-(v, k, λ) Designs of Small Order, in CRC Handbook of Combinatorial Designs Second Edition, C. J. Colbourn and J. H. Dinitz (Editors), CRC Press, Boca Raton, FL, (2007), 25-58.

[23] S. McConnell, Kod iznutra, Znak, Zagreb, 1994.

[24] B. D. McKay, nauty *user's guide (version 1.5)*, Technical Report TR-CS-90-02, Department of Computer Science, Australian National University, 1990.

[25] B. Motik, J. Šribar, Demistificirani C++, Element, Zagreb, 1997.

[26] M. O. Pavčević, Konstrukcija simetričnih blokovnih nacrta s automorfizmima reda pet, magistarski rad, Sveučilište u Zagrebu, 1995.

[27] E. Spence, A Complete Classification of Symmetric $(31, 10, 3)$ Designs, Designs, Codes and Cryptography, 2, (1992), 127-136.

[28] E. Spence, Symmetric $(31, 10, 3)$ Design With a Non-trivial Automorphism of Odd Order, Designs, Codes and Cryptography, 10, (1991), 51-64.

[29] D. R. Stinson, Combinatorial Designs: Construction and Analysis, Springer-Verlag, New York, 2004.

[30] V. D. Tonchev, Combinatorial Configurations Designs, Codes, Graphs, John Wiley and Sons, Inc., New York, USA, 1988.

[31] D. Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb, 2001.

[32] D. Žubrinić, Diskretna matematika, Element, Zagreb, 2001.