Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija

Blanuša, Danilo

Dr.sc. Maja Blanuša
Kneza Trpimira 40
10432 Lug Samoborski
OIB

Dozvoljavam Knjižnici Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu (OIB **57029260362)** da disertaciju mojeg oca, čiji sam pravni sljednik, prof. Danila Blanuše, „Jedna vrst integralnih teorema Besselovih funkcija", Tehnički fakultet u Zagrebu, 1942.g., prenese u digitalni oblik i javno objavi putem interneta.

U Lugu Samoborskom, 25. 07. 2010.

M. Blanuša

I n g .   D a n i l o   B l a n u š a :

JEDNA VRST INTEGRALNIH TEOREMA BESSELOVIH FUNKCIJA

U V O D

Polazna točka za istraživanja, sadržana u ovoj radnji, bio je poznat elektrotehnički problem: Na početak beskonačnog električnog voda priključi se u nekom momentu napon, koji je zadan kao funkcija vremena. Onda će se uzduž toga voda širiti elektromagnetički val, koji tehničar smatra odredjenim, ako su nadjene funkcije, koje daju napon i struju u ovisnosti od mjesta i vremena. Diferencijalna jednadžba, koja odredjuje tok vala, je poznata telegrafska jednadžba. Za rješavanje ovog problema mogu se upotrijebiti razne metode, tako na pr. t. zv. Riemannova metoda. Pri tom se u toku rješavanja mogu dobiti zanimljivi integralni teoremi Besselovih funkcija, koji su specijalni slučajevi mnogo općenitijih takvih teorema, kojima ćemo se baviti u ovoj radnji.

Da to pokažemo, moramo skicirati rješavanje spomenutog problema po Riemannovoj metodi.

Telegrafska jednadžbe glasi:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = RG\psi + (LG+RC)\frac{\partial\psi}{\partial t} + LC\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} . \tag{1}$$

Pri tom znači:

R .... ohmov otpor po jedinici dužine

L .... induktivitet po jedinici dužine

C .... kapacitet po jedinici dužine

G .... odvod (vodljivost medija) po jedinici dužine

toga električnog voda. Funkcija $\psi(x,t)$ može značiti ili napon ili struju. Smatrat ćemo, da znači napon, pa će granični uvjet glasiti:

$$\psi(0,t) = 0 \quad \text{za} \quad t < 0 \tag{2}$$

$$\psi(0,t) = g(t) \quad \text{za} \quad t \geq 0 \tag{3}$$

gdje je $g(t)$ neka zadana funkcija od $\underline{t}$, koja je definirana u intervalu $0 \leq t < \infty$ i u tom intervalu dva puta kontinuirano derivabilna. To dakle znači, da je napon na početku voda, t.j. za $x=0$ do časa $t=0$ jednak nuli, a od toga časa neka zadana funkcija vremena.

Početni uvjet će glasiti:

$$\psi(x,t) = 0 \quad \text{za} \quad t < 0 \; , \; x \geq 0 \tag{4}$$

To dakle znači, da je napon na cijelom vodu jednak nuli do časa $t=0$.

Da se problem računski što više pojednostavni, uvest ćemo nove konstante

$$\rho = \frac{LG+RC}{2LC} \tag{5}$$

$$\sigma = \left| \frac{RC-LG}{2LC} \right| \tag{6}$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{LC}} \tag{7}$$

čime jednadžba (1) dobiva oblik

$$v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = (\rho^2 - \sigma^2)\psi + 2\rho \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \, , \tag{8}$$

zatim uvedemo novu funkciju

$$u = \psi e^{\rho t} \tag{9}$$

i konačno provedemo transformaciju neovisnih varijabla

$$\xi = \cancel{\frac{1}{2} (\sigma t + \frac{\sigma}{v} x)} = \frac{\sigma}{2} (t + \frac{x}{v}) \tag{10}$$

$$\eta = \cancel{\frac{1}{2} (\sigma t - \frac{\sigma}{v} x)} = \frac{\sigma}{2} (t - \frac{x}{v}) \, . \tag{11}$$

Jednadžba (8) se onda pretvara u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} = u \, . \tag{12}$$

~~xxxxjetixxx(2)xx(3)xxxsadaxglasex~~

$$\cancel{u(\; , \;) = 0 \quad \text{za} \quad 0} \qquad \cancel{(13)}$$

$$\cancel{u(\; , \;) =}$$

Riješimo li (10),(11) po <u>x</u> i <u>t</u>, dobijemo

$$x = \frac{v}{\sigma}(\xi - \eta) \qquad (13)$$

$$t = \frac{1}{\sigma}(\xi + \eta) \qquad (14)$$

Pri tom pretpostavljamo $\sigma \neq 0$, dakle prema definiciji (6) $\sigma > 0$, dok isključujemo slučaj $\sigma = 0$, koji daje naročito pojednostavnjenje, naime t.zv. vod bez izobličenja.

Pretpostavka $x=0$ znači prema (13) $\xi = \eta$, a $t<0$ daje prema (14) $\xi + \eta = 2\xi < 0$, dakle $\xi < 0$, tako da (2) obzirom na (9) glasi:

$$u(\xi,\xi) = 0 \quad \text{za} \quad \xi < 0 \qquad (15)$$

dok (3) prelazi u

$$u(\xi,\xi) = e^{\rho\frac{2\xi}{\sigma}} g\left(\frac{2\xi}{\sigma}\right) = \varphi(\xi) \qquad \text{za} \quad \xi \geq 0 \qquad (16)$$

gdje sad $\varphi(\xi)$ možemo smatrati povoljno zadanom funkcijom, koja je očito takodjer u intervalu $0 \leq \xi < \infty$ dva puta kontinuirano derivabilna.

Uvjet (4) prelazi u

$$u(\xi,\eta) = 0 \quad \text{za} \quad \begin{matrix} \xi + \eta < 0 \\ \xi - \eta \geq 0 \end{matrix} \;. \qquad (17)$$

Doetsch je pokazao*), da rješenje ovog problema nije jednoznačno. Treba naime uočiti, da se kod hiperbolične diferencijalne jednadžbe, kaošto je (12), singulariteti na rubu područja varijabiliteta, za koje tražimo rješenje, nastavljaju u unutrašnjost uzduž karakteristike. Tako će se u našem slučaju

---

*) G. Doetsch, Elektrische Schwingungen in einem anfänglich strom- und spannungslosen Kabel unter dem Einfluss einer Randerregung. Festschrift der Technischen Hochschule Stuttgart, Springer 1929, str.56 - 78, naročito str. 75 - 78.

~~singularitet~~ diskontinuitet, što ga može imati $u(\xi,\xi)$ u točki $\xi=0$, nastaviti uzduž karakteristike $\eta=0$. Uzduž te karakteristike onda uopće ne postoji rješenje diferencijalne jednadžbe. Izvan te karakteristike može se prema Doetschu uobičajenom rješenju našeg probléma superponirati rješenje, koje fizikalno znači posljedicu udarnog pojava, koji se, grubo rečeno, sastoji u tome, da je na početku voda u času $t=0$ djelovao neizmjerno velik napon kroz neizmjerno kratko vrijeme.

Da izbjegnemo ovoj višeznačnosti rješenja, mi ćemo problem shvatiti kao granični slučaj problema, kod kojega nema singulariteta na rubu, pa stoga niti u unutrašnjosti. U tu svrhu ćemo diskontinuitet funkcije $u(\xi,\xi)$ premostiti vrlo strmim usponom, i to ovako:

Odaberemo $\varepsilon>0$ i odredimo koeficijente cijele racionalne funkcije 5. stepena

$$h(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 + a_5\xi^5 \tag{18}$$

tako, da bude

$$h(0) = h'(0) = h''(0) = h'(\varepsilon) = h''(\varepsilon) = 0 \tag{19}$$

$$h(\varepsilon) = 1 \quad . \tag{20}$$

Račun daje

$$a_0 = a_1 = a_2 = 0 \tag{21}$$

$$a_3 = \frac{10}{\varepsilon^3} \tag{22}$$

$$a_4 = -\frac{15}{\varepsilon^4} \tag{23}$$

$$a_5 = \frac{6}{\varepsilon^5} \tag{24}$$

dakle

$$h(\xi) = \frac{10}{\varepsilon^3}\xi^3 - \frac{15}{\varepsilon^4}\xi^4 + \frac{6}{\varepsilon^5}\xi^5 \tag{25}$$

i

$$h'(\xi) = \frac{30}{\varepsilon^3}\xi^2 - \frac{60}{\varepsilon^4}\xi^3 + \frac{30}{\varepsilon^5}\xi^4 = \frac{30\,\xi^2}{\varepsilon^3}\left(1 - \frac{\xi}{\varepsilon}\right)^2 \tag{26}$$

U

Iz (26) se vidi, da je prva derivacija te funkcije izmedju 0 i ε pozitivna, pa da prema tome funkcija od 0 do ε monotono raste. Vrijedi dakle zbog (19) i (20)

$$0 \leq h(\xi) \leq 1 \quad \text{za} \quad 0 \leq \xi \leq \varepsilon \tag{27}$$

Razmotrimo li sad funkciju

$$H(\xi) = h(\xi) \cdot \varphi(\xi) \tag{28}$$

to iz (19) i (20) slijedi, da je

$$H(0) = H'(0) = H''(0) = 0 \tag{29}$$

$$H(\varepsilon) = \varphi(\varepsilon) \tag{30}$$

$$H'(\varepsilon) = \varphi'(\varepsilon) \tag{31}$$

$$H''(\varepsilon) = \varphi''(\varepsilon) \tag{32}$$

Osim toga je zbog (27) za $0 \leq \xi \leq \varepsilon$

$$0 \leq H(\xi) \leq \varphi(\xi) \tag{33a}$$

ili

$$0 \geq H(\xi) \geq \cancel{H(\varepsilon)}\ \varphi(\xi) \tag{33b}$$

prema tome, da li je $\varphi(\xi) > 0$ ili $\varphi(\xi) < 0$.
Ako dakle izmedju 0 i ε nadomjestimo funkciju $\varphi(\xi)$ funkcijom $H(\xi)$, to smo postigli, da će obzirom na (29),(30),(31),(32) funkcija $u(\xi,\xi)$ biti svagdje dva puta kontinuirano derivabilna, a osim toga vrijedi (33a) odnosno (33b), tako da kod graničnog prijelaza $\varepsilon \to 0$ funkcija ostaje konačna, pa je isključeno, da bi u rješenju mogle biti involvirane posljedice udarnog pojava.

Činjenica, da je $u(\xi,\xi)$ dva puta kontinuirano derivabilna uvjetuje, da karakteristika $\eta = 0$ nije izuzeta iz područja varijabiliteta, u kojem rješenje postoji. ~~pa rješenje uzduž te karakteristike~~ Time otpada mogućnost višeznačnog rješenja, kako ga obrazlaže Doetsch.

Funkciju, kojoj konvergira rješenje, kada provedemo granični prijelaz $\varepsilon \to 0$, moći ćemo s pravom smatrati fizikalno ispravnim rješenjem.

Pretpostavimo dakle zasada, da je izmedju 0 i ε funkcija $\varphi(\xi)$ nadomještena funkcijom $H(\xi)$, definiranom prema (28). Ovako modificiranu funkciju $\varphi(\xi)$ označit ćemo sa $\bar{\varphi}(\xi)$.

Ako su tražena funkcija $u(\xi,\eta)$ i njezine prve derivacije zadane uzduž luka neke krivulje, koji svaka karakteristika siječe najviše jedamputa, to znamo, da je rješenje odredjeno u pravokutniku, što ga čine karakteristike, koje prolaze krajnjim točkama toga luka.

Iz (17) slijedi, da su u dotičnom području i prve derivacije od u jednake nuli, pa to mora vrijediti i na rubu, t.j. na pravcu $\xi+\eta=0$ za $\xi \geq 0$. Ovo potonje slijedi iz toga, što su svakako i funkcija i njezine prve derivacije u području $\xi-\eta \geq 0$ svagdje kontinuirane, budući da svagdje postoji rješenje od (12) i prema tome miješana druga derivacija.

Odaberemo li na pravcu $\xi+\eta=0$ točke $(0,0)$ i $(\xi_1,-\xi_1)$ za $\xi_1>0$, to će dakle funkcija $u(\xi,\eta)$ biti jednaka nuli u pravokutniku, koji čine karakteristike $\xi=0$, $\eta=0$, $\xi=\xi_1$, $\eta=-\xi_1$. Budući da ξ_1 možemo odabrati makar kako velik, to je jasno, da je funkcija u jednaka nuli za svako $\eta=0$, $\xi \geq 0$.

Uvjet (17) možemo dakle nadomjestiti uvjetom

$$u(\xi,\eta)=0 \quad \text{za} \quad \eta \leq 0, \quad \xi \geq 0 \tag{34}$$

dok smo u uvjetu (16) funkciju $\varphi(\xi)$ nadomjestili funkcijom $\bar{\varphi}(\xi)$.

Mogli bismo sada potražiti rješenje, pa onda izvršiti granični prijelaz $\varepsilon \to 0$. Ipak će biti ljepše, da već sada razmotrimo, kojim će uvjetima na rubu područja dano sa (16) i (34) biti podvrgnuta funkcija dobivena tim graničnim prijelazom.

Odaberemo u tu svrhu $\varepsilon_1 > 0$. Integriramo diferencijalnu jednadžbu (12) po η uzduž pravca $\xi = \xi_1$, gdje je $\xi_1 > 0$ i to od točke $A(\xi_1, -\eta_1)$, gdje je $\eta_1 > 0$, do točke $B(\xi_1, \varepsilon_1)$. Integracija lijeve strane jednadžbe (12) daje

$$\cancel{\int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 u(\;_1,\;)}{\;}}$$

$$\int_{-\eta_1}^{\varepsilon_1} \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta}\,d\eta = \left[\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]_{\substack{\xi=\xi_1\\ \eta=\varepsilon_1}} - \left[\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]_{\substack{\xi=\xi_1\\ \eta=-\eta_1}} \tag{35}$$

dok integracija desne strane od (12) daje obzirom na (34)

$$\int_{-\eta_1}^{\varepsilon_1} u\,d\eta = \int_{0}^{\varepsilon_1} u\,d\eta \tag{36}$$

Budući da je obzirom na (34) drugi član na desnoj strani od (35) jednak nuli, to dobijemo

$$\int_{0}^{\varepsilon_1} u\,d\eta = \left[\frac{\partial u}{\partial\xi}\right]_{\substack{\xi=\xi_1\\ \eta=\varepsilon_1}} \tag{37}$$

Integracija po ξ desne strane od (37) po pravcu $\eta = \varepsilon_1$ od točke $C(\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ do točke B daje:

$$\begin{aligned}\int_{\varepsilon_1}^{\xi_1} \frac{\partial u}{\partial\xi}\,d\xi &= u(\xi_1, \varepsilon_1) - u(\varepsilon_1, \varepsilon_1) = \\ &= u(\xi_1, \varepsilon_1) - \overline{\varphi}(\varepsilon_1)\end{aligned} \tag{38}$$

U

Ako je $\underline{U}$ maksimum od $|u|$ u području

$$\left.\begin{aligned} \xi &\geq \eta \\ \xi &\leq \xi_1 \\ 0 \leq \eta &\leq \varepsilon_1 \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

onda slijedi iz (37), da je

$$\left|\frac{\partial u}{\partial \xi}\right|_{\substack{\xi = \xi_1 \\ \eta = \varepsilon_1}} \leq \varepsilon_1 U \tag{40}$$

To će, razumije se, vrijediti i onda, ako ξ varira izmedju ε_1 i ξ_1, tako da iz (38) slijedi

$$\left|u(\xi_1, \varepsilon_1) - \overline{\varphi}(\varepsilon_1)\right| \leq \varepsilon_1(\xi_1 - \varepsilon_1) U \tag{41}$$

Provedemo li sad granični prijelaz $\varepsilon \to 0$, t.j. pretvorimo li strmi uspon u diskontinuitet, pri čemu funkcija $\overline{\varphi}$ prelazi opet u funkciju φ, i pretpostavimo, da pri tome U ostaje konačan, to (41) prelazi u

$$\left|u(\xi_1, \varepsilon_1) - \varphi(\varepsilon_1)\right| \leq \varepsilon_1(\xi_1 - \varepsilon_1) U \;. \tag{42}$$

Ako konačno i ε_1 konvergira prema nuli, vidimo, da će prema (42) biti

$$u(\xi, 0) = \varphi(0) \quad \text{za} \quad \xi \geq 0 \tag{43}$$

pa taj uvjet skupa s uvjetom (16) odredjuje rješenje problema u području

$$\left.\begin{aligned} \xi &\geq \eta \\ \eta &\geq 0 \end{aligned}\right\} \tag{44}$$

Uvjeti (16) i (43) služit će nam za odredjivanje rješenja našeg problema po Riemannovoj metodi. Jasno je, da će u tom rješenju biti sadržano i rješenje problema, kod kojega je diskontinuitet nadomješten strmim

U

usponom, ako ~~ja~~ funkcija φ već sama zadovoljava uvjete (29). Iz toga rješenja stoga ne će biti teško naknadno vidjeti, da je naša pretpostavka, da $\underline{U}$ kod graničnog prijelaza $\varepsilon \to 0$ ostaje konačan, bila opravdana.

Poslije ovih priprava prelazimo na rješavanje problema po Riemannovoj metodi.

Kako je poznato, Riemannova metoda osniva se na ovom stavku:

Neka je zadan normalni oblik hiperbolične diferencijalne jednažbe

$$L(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial\xi\,\partial\eta} + a\frac{\partial u}{\partial\xi} + b\frac{\partial u}{\partial\eta} + c\,u = 0 \tag{45}$$

gdje su a, b, c funkcije od ξ i η. Adjungirana jednadžba glasi:

$$M(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial\xi\,\partial\eta} - a\frac{\partial v}{\partial\xi} - b\frac{\partial v}{\partial\eta} + \left(c - \frac{\partial a}{\partial\xi} - \frac{\partial b}{\partial\eta}\right) v = 0 \tag{46}$$

Ako su u, v dvije funkcije od ξ i η, gdje $\underline{u}$ zadovoljava jednadžbu (45), a $\underline{v}$ jednadžbu (46) i ako znači

$$P = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial\eta} - u\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) + auv \tag{47}$$

$$Q = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\frac{\partial v}{\partial\xi}\right) + buv \tag{48}$$

onda vrijedi

$$\oint (P\,d\eta - Q\,d\xi) = 0 \tag{49}$$

gdje je integracija provedena uzduž zatvorene krivulje, koja može imati konačan broj uglova, a inače je kontinuirano derivabilna.

U našem slučaju je

$$a = b = 0 \tag{50}$$

$$c = -1 \tag{51}$$

pa jednadžbe (47), (48) prelaze u

$$P = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial\eta} - u\frac{\partial v}{\partial\eta}\right) \tag{52}$$

$$Q = \frac{1}{2}\left(v\frac{\partial u}{\partial\xi} - u\frac{\partial v}{\partial\xi}\right) \tag{53}$$

U

a (45) i (46) dobivaju isti oblik (12), t.j. jednadžba (12) je samoadjungirana.

Po Riemannu se propisuje za funkciju $\underline{v}$, da mora biti jednaka 1 u točki A, da mora vrijediti

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = bv \tag{54}$$

uzduž karakteristike, koja je paralelna s osi ξ i prolazi točkom $\underline{A}$, a

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = av \tag{55}$$

uzduž karakteristike, koja je paralelna s osi η i prolazi točkom A.

U našem slučaju vrijedi (50), tako da ti uvjeti glase

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = 0 \tag{54a}$$

odnosno

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad . \tag{55a}$$

Znamo, da su ti uvjeti, kao i uvjet (12), zadovoljeni Besselovom funkcijom nultoga reda

$$v = J_0(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\eta-\eta_1)}) \quad , \tag{56}$$

gdje su ξ_1, η_1 koordinate točke $\underline{A}$.

Kao zatvorenu krivulju, uzduž koje ćemo provesti integraciju (49), odabiremo četverokut s uglovima $A(\xi_1,\eta_1)$, $B(\eta_1,\eta_1)$, $C(0,0)$, $D(\xi_1,0)$. Pri tom su ξ_1, η_1 odabrani tako, da zadovoljavaju nejednadžbe

$$\xi_1 > \eta_1 > 0 \quad . \tag{57}$$

Uzduž stranice $\overline{AB}$ je η konstantan, pa prema tome otpada prvi član integranda u jednadžbi (49). Obzirom na (54a) dobijemo

$$\int_A^B = -\int_{\xi_1}^{\eta_1} Q\, d\xi = -\frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\eta_1} v\frac{\partial u}{\partial \xi}\, d\xi = -\frac{1}{2}(uv)_{\xi_1}^{\eta_1} =$$

$$= -\frac{1}{2}\Big[u(\eta_1,\eta_1) - u(\xi_1,\eta_1)\Big] = \frac{1}{2}\Big[u(\xi_1,\eta_1) - \varphi(\eta_1)\Big] \tag{58}$$

U

Dalje dobijemo uzduž $\overline{BC}$, gdje vrijedi $\eta = \xi$

$$\int_B^C = \int_{\eta_1}^{0} \left[P(\xi,\xi)\, d\xi - Q(\xi,\xi)\, d\xi \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\eta_1}^{0} \left\{ u(\xi,\xi) \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} - v(\xi,\xi) \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=\xi} \right\} d\xi \tag{59}$$

Uzduž $\overline{CD}$ je $\underline{u}$ konstantan i η konstantan. Otpada dakle prvi član integranda u (49), a drugi daje

$$\int_C^D = - \int_0^{\xi_1} Q\, d\xi = \frac{1}{2} \int_0^{\xi_1} u \frac{\partial v}{\partial \xi}\, d\xi = \frac{1}{2} (uv)_0^{\xi_1} =$$

$$= \frac{1}{2} \varphi(0) \left[1 - J_0(2i\sqrt{\xi_1 \eta_1}) \right] \tag{60}$$

Uzduž $\overline{DA}$ je ξ konstantan i vrijedi (55a), tako da dobijemo

$$\int_D^A = \int_0^{\eta_1} P\, d\eta = \frac{1}{2} \int_0^{\eta_1} v \frac{\partial u}{\partial \eta}\, d\eta = \frac{1}{2} (uv)_0^{\eta_1} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[u(\xi_1,\eta_1) - u(\xi_1,0) \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \left[u(\xi_1,\eta_1) - \varphi(0) \right] . \tag{61}$$

Zbrojimo li integrale (58),(59),(60),(61) i stavimo taj zbroj jednak nuli, dobijemo:

$$u(\xi_1,\eta_1) = \frac{1}{2}\left[\varphi(0)\, J_o(2i\sqrt{\xi_1\eta_1}) + \varphi(\eta_1)\right] +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^{\eta_1}\left\{ u(\xi,\xi)\left(\frac{\partial v}{\partial\xi} - \frac{\partial v}{\partial\eta}\right)_{\eta=\xi} - v(\xi,\xi)\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=\xi}\right\} d\xi \;. \tag{62}$$

Ovo bi bilo rješenje problema, da je poznata funkcija

$$f(\xi) = \left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right)_{\eta=\xi} \;. \tag{63}$$

Nameće nam se pomisao, da tu funkciju možemo odrediti, ako u (62) stavimo $\eta_1 = \xi_1$, jer onda lijeva strana jednadžbe postaje poznata. Osim toga prema (71) otpada prvi dio integranda, pa dobijemo:

$$\varphi(\xi_1) = \frac{1}{2}\left[\varphi(0)\, J_o(2i\xi_1) + \varphi(\xi_1)\right] - \frac{1}{2}\int_0^{\xi_1}\left[v(\xi,\xi)\right]_{\eta_1=\xi_1} f(\xi)\, d\xi \tag{64}$$

Ovo je integralna jednadžba, iz koje bismo morali odrediti nepoznatu funkciju $f(\xi)$, pa je onda uvrstiti u (62), da dobijemo rješenje.

Poznato je međutim, da se rješenje problema može dobiti i na kraći i lakši način. Rastavimo naime desnu stranu od (62) u dva dijela:

$$\Psi_1 = \frac{1}{2}\varphi(\eta_1) + \frac{1}{2}\int_0^{\eta_1}\varphi(\xi)\left(\frac{\partial v}{\partial\xi} - \frac{\partial v}{\partial\eta}\right)_{\eta=\xi} d\xi \tag{65}$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2}\varphi(0)\, J_o(2i\sqrt{\xi_1\eta_1}) - \frac{1}{2}\int_0^{\eta_1} v(\xi,\xi)\, f(\xi)\, d\xi \tag{66}$$

Nije teško pokazati, da Ψ_1 zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial^2\Psi_1}{\partial\xi_1\partial\eta_1} = \Psi_1 \tag{67}$$

U

Znajući, da je

$$\frac{dJ_o(x)}{dx} = - J_1(x) \tag{68}$$

dobivamo obzirom na (56)

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\eta - \eta_1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}} J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}) \tag{69}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\xi - \xi_1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}} J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}) \tag{70}$$

dakle

$$\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{\eta - \xi - \eta_1 + \xi_1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}} J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\eta - \eta_1)}) \tag{71}$$

i

$$\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta}\right)_{\eta=\xi} = \frac{\xi_1 - \eta_1}{\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)}} J_1(2\sqrt{(\xi_1 - \xi)(\xi - \eta_1)}) \tag{72}$$

Iz poznatih formula

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n) = -x^{-n}J_{n+1} \tag{73}$$

i

$$J_{n+1} = \frac{2n}{x} J_n - J_{n-1} \tag{74}$$

slijedi

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}J_n) = -x^{-n}\left(\frac{2n}{x}J_n - J_{n-1}\right) \tag{75}$$

ili za n=1

$$\frac{d}{dx}\,\frac{J_1}{x} = -\frac{2n}{x^2} J_1 + \frac{J_0}{x} \tag{76}$$

Pomoću ove formule lako se diferencira (72) po ξ_1 i dobije:

U

$$\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta = \xi} \right\} =$$

$$= \frac{1}{\xi_1 - \xi} \left\{ (\eta_1 - \xi) \frac{J_1\left(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}\right)}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}} + (\xi_1 - \eta_1)\, J_0\left(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}\right) \right\} \tag{77}$$

Diferenciramo li ovo po η_1 upotrijebivši formule (68) i (76), slijedi po kratkom računu

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi_1 \partial \eta_1} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta = \xi} \right\} = (\xi_1 - \eta_1) \frac{J_1\left(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}\right)}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}} \tag{78}$$

Iz razvoja u red potencija

$$J_1(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \left(\frac{x}{2}\right)^{2r+1}}{r!\,(r+1)!} \tag{79}$$

slijedi lako, da je

$$\left\{ \frac{J_1(x)}{x} \right\}_{x=0} = \frac{1}{2} \tag{80}$$

tako, da uvrštenje $\xi = \eta_1$ u (77) daje

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_1} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial v}{\partial \eta} \right)_{\eta = \xi} \right] \right\}_{\xi = \eta_1} = 1 \tag{81}$$

Ako dakle (65) diferenciramo po ξ_1, to prvi član otpada, dok u drugom treba diferencirati pod znakom integracije. Diferenciramo li zatim po η_1, to diferencijacija po gornjoj granici integrala zbog (81) daje $\frac{1}{2}\varphi(\eta_1)$, a diferencijacija pod znakom integracije daje obzirom na (78) i (72) opet stari integral izraza (65), tako da je zaista zadovoljena jednadžba (67).

Stavimo li $\xi_1 = \eta_1$, to (72) pokazuje, da je integrand u (65) jednak nuli, pa dobijemo

$$\psi_1(\xi_1,\xi_1) = \frac{1}{2}\,\varphi(\xi_1) \tag{82}$$

Ako pak stavimo $\eta_1=0$, daje (65)

$$\psi_1(\xi_1,0) = \frac{1}{2}\,\varphi(0) \tag{83}$$

Usporedimo li to s uvjetima (16) i (43) uvidjamo, obzirom na linearnost jednadžbe (67), da je ψ_1 polovica traženog rješenja. Označimo li varijable opet sa ξ,η dok za varijablu integracije pišemo $\underline{x}$, to dakle rješenje glasi

$$u(\xi,\eta) = \varphi(\eta) + \int_0^{\eta} \varphi(x)\,(\xi-\eta)\,\frac{J_1\left(2\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)}\right)}{\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)}}\,dx \tag{84}$$

Razumije se, da je ψ_2 druga polovica rješenja, tako da i (66) može poslužiti za rješenje problema, što će biti zgodno, ako je namjesto funkcije ~~φxxpaxnaxfunkcija~~ $\underline{\varphi}$ zadana funkcija $\underline{f}$.

Iz ovako nadjenog rješenja (84) možemo naknadno izračunati funkciju $f(\xi)$, definiranu jednadžbom (63), pa onda uvrstiti u jednadžbu (64). Očekivat ćemo, da će ta jednadžba biti identično zadovoljena. Obzirom na (56) ~~se~~ ta jednadžba ~~zbog $\eta_1=\xi_1$ pojednostavnjuje i~~ glasi:

$$\varphi(0)\cdot J_0(2i\xi_1) - \varphi(\xi_1) = \int_0^{\xi_1} f(\xi)\,J_0\left[2i(\xi_1-\xi)\right]d\xi \tag{85}$$

Da odredimo funkciju $f(\xi)$, diferenciramo (84) po ξ odnosno po η, služeći se pri tom formulom (73), koja za $n=1$ glasi:

$$\frac{d}{dx}\frac{J_1}{x} = -\frac{J_2}{x} \quad . \tag{86}$$

Dobivamo:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \int_0^\eta \varphi(x)\left\{\frac{J_1(2\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)})}{\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)}} - (\xi-\eta)\frac{J_2(2\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)})}{\xi-x}\right\}dx \tag{87}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \varphi'(\eta) + \int_0^\eta \varphi(x)\left\{-\frac{J_1(2\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)})}{\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)}} - (\xi-\eta)\frac{J_2(2\sqrt{(\xi-x)(x-\eta)})}{\eta-x}\right\}dx + $$
$$+(\xi-\eta)\varphi(\eta)\,, \tag{88}$$

dakle

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right)_{\eta=\xi} = f(\xi) = -\varphi'(\xi) + 2\int_0^\xi \varphi(x)\,\frac{J_1[2i(\xi-x)]}{i(\xi-x)}\,dx \tag{89}$$

Uvrštenje ovog izraza u (85) daje:

$$\varphi(0)\,J_o(2i\xi_1) - \varphi(\xi_1) = -\int_0^{\xi_1}\varphi'(\xi)\,J_o[2i(\xi_1-\xi)]\,d\xi \;+$$

$$+\,2\int_0^{\xi_1}\left\{\int_0^\xi \varphi(x)\,\frac{J_1[2i(\xi-x)]}{i(\xi-x)}\,dx\right\}J_o[2i(\xi_1-\xi)]\,d\xi \;=$$

$$= -\Big\{\varphi(\xi)\,J_o[2i(\xi_1-\xi)]\Big\}_0^{\xi_1} + 2i\int_0^{\xi_1}\varphi(\xi)\,J_1[2i(\xi_1-\xi)]\,d\xi \;+$$

$$+2\int_0^{\xi_1}\varphi(x)\left\{\int_x^{\xi_1}\frac{J_1[2i(\xi-x)]}{i(\xi-x)}\,J_o[2i(\xi_1-\xi)]\,d\xi\right\}dx \;=$$

U

$$= -\varphi(\xi_1) + \varphi(0)\, J_0(2i\xi_1) +$$

$$+ 2i \int_0^{\xi_1} \varphi(x) \left\{ J_1\left[2i(\xi_1 - x)\right] - \int_x^{\xi_1} \frac{J_1\left[2i(\xi - x)\right]}{(\xi - x)} J_0\left[2i(\xi_1 - \xi)\right] d\xi \right\} dx \tag{90}$$

Prva dva člana desne strane ove jednadžbe ukidaju se s članovima lijeve strane, pa budući da je $\varphi(x)$ povoljna funkcija, to slijedi

$$\int_x^{\xi_1} \frac{J_1\left[2i(\xi - x)\right]}{(\xi - x)} J_0\left[2i(\xi_1 - \xi)\right] d\xi = J_1\left[2i(\xi_1 - x)\right] . \tag{91}$$

Ova jednažba vrijedi zaista identično obzirom na varijablu ξ_1, ali to ipak nije trivijalan identitet, već je to poznat integralan teorem Besselovih funkcija.

Supstitucijom

$$\xi = -\frac{iy}{2} + x \tag{92}$$

$$\xi_1 = -\frac{it}{2} + x \tag{93}$$

jednadžba (91) prelazi u

$$\int_0^t \frac{J_1(y)}{y} J_0(t-y)\, dy = J_1(t) , \tag{94}$$

a to je specijalan slučaj poznatog Kapteynovog integrala*)

$$\int_0^t J_\mu(t-x)\, J_\nu(x) \frac{dx}{x} = \frac{1}{\nu} J_{\mu+\nu}(t) \tag{95}$$

gdje μ i ν mogu biti kompleksni brojevi, tako da je realni dio od μ veći od -1, a relani dio od ν veći od 0.

*) G.N. Watson, A treatise on the theory of Bessel functions, Cambridge 1922. str. 380. Autor nije imao uvida u ovo djelo, nego je taj citat našao u: Hermann Fischer, Die Laplace-Transformation in der Theorie der Besselfunktionen. Inauguraldissertation zur Erlangung der Doktorwürde der naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Albert-Ludwigs-Universität Freiburg i. Br. 1936. str. 9.

Sjetimo se sada, da smo našli, da je (65) polovica traženog rješenja. Jasno je, da je onda (66) druga polovica toga rješenja, pa da su dakle izrazi (65) i (66) medjusobno jednaki. Napišemo li to, uvrstivši u (66) izraz (89), dobijemo:

$$\varphi(\eta_1) + (\xi_1-\eta_1)\int_0^{\eta_1}\varphi(\xi)\,\frac{J_1\left(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}\right)}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}}\,d\xi =$$

$$= \varphi(0)\,J_0(2i\sqrt{\xi_1\eta_1}) + \int_0^{\eta_1}\varphi'(\xi)\,J_0\left(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}\right)d\xi -$$

$$- 2\int_0^{\eta_1}\left\{\int_0^{\xi}\varphi(x)\,\frac{J_1\left[2i(\xi-x)\right]}{i(\xi-x)}\,dx\right\}J_0\left(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}\right)d\xi =$$

$$= \varphi(0)\,J_0(2i\sqrt{\xi_1\eta_1}) + \varphi(\eta_1) - \varphi(0)\,J_0(2i\sqrt{\xi_1\eta_1}) +$$

$$+ \int_0^{\eta_1}\varphi(\xi)\,(\xi_1+\eta_1-2\xi)\,\frac{J_1\left(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}\right)}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}}\,d\xi -$$

$$- 2\int_0^{\eta_1}\varphi(x)\left\{\int_x^{\eta_1}\frac{J_1\left[2i(\xi-x)\right]}{i(\xi-x)}\,J_0\left(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}\right)d\xi\right\}dx \qquad (96)$$

ili

$$\int_0^{\eta_1}\varphi(x)\left\{(\eta_1-x)\,\frac{J_1\left(2\sqrt{(\xi_1-x)(x-\eta_1)}\right)}{\sqrt{(\xi_1-x)(x-\eta_1)}} - \int_x^{\eta_1}\frac{J_1\left[2i(\xi-x)\right]}{i(\xi-x)}\,J_0\left(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}\right)d\xi\right\}dx =$$

$$= 0 \qquad (97)$$

Budući da je $\varphi(x)$ povoljna funkcija, mora izraz u vitičastoj zagradi biti jednak nuli. Provedemo li još supstituciju

J

$$\xi = \frac{i(y-t)}{2} + x \tag{98}$$

$$\xi_1 = -\frac{i(t+a)}{2} + x \tag{99}$$

$$\eta_1 = -\frac{i(t-a)}{2} + x \tag{100}$$

to slijedi

$$\int_a^t \frac{J_1(t-y)}{t-y} J_o(\sqrt{y^2-a^2})\, dy = (t-a) \frac{J_1(\sqrt{t^2-a^2})}{\sqrt{t^2-a^2}} \tag{101}$$

Ovaj integralni teorem Besselovih funkcija izgleda da nije poznat. Za $a=0$ prelazi supstitucijom $y=t-x$ u poznati teorem (94).

Zamislimo sada, da je umjesto funkcije $\varphi(\xi)$ zadana funkcija $f(\xi)$ i vrijednost $\varphi(0)$. Time je na osnovu izraza (66) takodjer odredjeno rješenje problema, a funkcija $\varphi(\xi)$ može se odrediti prema (85). Izjednačimo li opet izraze (65) i (66), uvrstivši za $\varphi(\xi)$ izraz odredjen prema (85), dobijemo:

$$\varphi(0)\, J_o(2i\eta_1) - \int_0^{\eta_1} f(x)\, J_o\left[2i(\eta_1-x)\right] dx + (\xi_1-\eta_1)\int_0^{\eta_1} \varphi(0)\, J_o(2i\xi)\,\cdot$$

$$\cdot\frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}}\, d\xi - (\xi_1-\eta_1)\int_0^{\eta_1}\left\{\int_0^{\xi} f(x)\, J_o\left[2i(\xi-x)\right] dx\right\}\cdot$$

$$\cdot\frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}}\, d\xi = \varphi(0)\, J_o(2i\sqrt{\xi_1\eta_1}) - \int_0^{\eta_1} f(x)\, J_o(2\sqrt{(\xi_1-x)(x-\eta_1)})\,dx$$

(102)

ili, ako u dvostrukom integralu obrnemo slijed integracija i sredimo,

$$\varphi(0)\left\{J_0(2i\eta_1)-J_0(2i\sqrt{\xi_1\eta_1})+(\xi_1-\eta_1)\int_0^{\eta_1}J_0(2i\xi)\frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}}d\xi\right\}-$$

$$-\int_0^{\eta_1}f(x)\left\{J_0\left[2i(\eta_1-x)\right]-J_0(2\sqrt{(\xi_1-x)(x-\eta_1)})+\right.$$

$$\left.+(\xi_1-\eta_1)\int_x^{\eta_1}J_0\left[2i(\xi-x)\right]\frac{J_1(2\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)})}{\sqrt{(\xi_1-\xi)(\xi-\eta_1)}}d\xi\right\}dx \qquad (103)$$

Budući da se vrijednost $\varphi(0)$ i funkcija $f(\xi)$ mogu neovisno jedna od druge povoljno odabrati, to moraju oba izraza u vitičastim zagradama svaki za sebe biti jednakanuli. Prvi prelazi supstitucijom

$$\xi=\frac{i(y-t)}{2} \qquad (104)$$

$$\xi_1=-\frac{i(t+a)}{2} \qquad (105)$$

$$\eta_1=-\frac{i(t-a)}{2}\quad, \qquad (106)$$

a drugi supstitucijom (99),(98),(100) u oblik

$$\int_a^t J_0(t-y)\frac{J_1(\sqrt{y^2-a^2})}{\sqrt{y^2-a^2}}dy=\frac{1}{a}\left[J_0(t-a)-J_0(\sqrt{t^2-a^2})\right]\quad. \qquad (107)$$

I ovo je integralan teorem Besselovih funkcija, za koji smatramo, da je nov. Stavimo li $a=0$, to lijeva strana jednažbe (107) prelazi u lijevu stranu jednadžbe (94). Na desnoj strani od (107) dobijemo neodredjen oblik, koji možemo izračunati pomoću de l'Hôpitalovog pravila uz pomoć (68), pa vidimo, da izlazi desna strana od (94). I ovdje dakle $a=0$ daje poznati specijalni slučaj (94).

Za naše svrhe bit će zgodnije, da se ne služimo Besselovim funkcijama prve vrste J_n, kaošto smo to dosada činili, već funkcijama Λ_n, koje dobijemo, ako funkcije J_n podijelimo s prvim članom njihovog razvoja u red potencija. Te su dakle funkcije definirane ovako:*)

$$\Lambda_n(x) = n!\,\left(\frac{x}{2}\right)^{-n} J_n(x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{n!}{r!\,(n+r)!}\left(\frac{ix}{2}\right)^{2r} . \qquad (108)$$

Budući da ćemo odsada gotovo, isključivo upotrebljavati ove funkcije, to ćemo ih bez točnije napomene nazivati Besselovim funkcijama.

Pomoću tih funkcija nadjeni integralni teoremi (101) i (107) dobivaju oblik

$$\int_a^t \Lambda_1(t-y)\,\Lambda_0\left(\sqrt{y^2-a^2}\right) dy = (t-a)\,\Lambda_1\left(\sqrt{t^2-a^2}\right) \qquad (109)$$

i

$$\int_a^t \Lambda_0(t-y)\,\Lambda_1\left(\sqrt{y^2-a^2}\right) dy = \frac{2}{a}\left[\Lambda_0(t-a) - \Lambda_0\left(\sqrt{t^2-a^2}\right)\right] . \qquad (110)$$

Poznato je, da se integral oblika

$$K = \int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx \qquad (111)$$

zove kompozicija (njem. Faltung). Operaciju, kojom tvorimo iz funkcija $f(t)$ i $g(t)$ taj integral, zvat ćemo komponiranjem i označiti je zvjezdicom, dakle

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(t-x)\,g(x)\,dx \; . \qquad (112)$$

Osnovno je svojstvo te operacije, da je komutativna, što se odmah razabire

*) Prema Jahnke - Emde, Funktionentafeln, Teubner 1933, str. 194.

supstitucijom $x=t-y$. Lijeva strana od (109) može se smatrati takvom kompozicijom, ako stavimo

$$f(t) = \Lambda_1(t) \tag{113}$$

$$g(t) \begin{cases} = 0 & \text{za } 0 \leq t < a \\ = \Lambda_o(\sqrt{t^2-a^2}) & \text{za } t \geq a \end{cases} \tag{114}$$

a lijeva strana od (110) ima oblik kompozicije, ako stavimo

$$f(t) = \Lambda_o(t) \tag{115}$$

$$g(t) \begin{cases} = 0 & \text{za } 0 \leq t < a \\ = \Lambda_1(\sqrt{t^2-a^2}) & \text{za } t \geq a \end{cases} \tag{116}$$

Naša će zadaća biti, da istražimo općenitije kompozicije, gdje je stavljeno

$$f(t) \begin{cases} = 0 & \text{za } 0 \leq t < a \\ = t^r\Lambda_m(c\sqrt{t^2-a^2}) & \text{za } t \geq a \end{cases} \tag{117}$$

$$g(t) \begin{cases} = 0 & \text{za } 0 \leq t < b \\ = t^s\Lambda_n(c\sqrt{t^2-b^2}) & \text{za } t \geq b \end{cases} \tag{118}$$

Ta će dakle kompozicija glasiti

$$K^{r,s}_{m,n}(t) = \int_b^{t-a} (t-x)^r \Lambda_m(c\sqrt{(t-x)^2-a^2})\, x^s \Lambda_n(c\sqrt{x^2-b^2})\, dx \tag{119}$$

Posveopćenje se sastoji u tome, što su u obim Beßelovim funkcijama argumenti korijeni iz kvadratičnih izraza varijable, a nesamo u jednoj, dalje smo dodali kao faktor potenciju varijable. Pri tom su r,s,m,n cijeli pozitivni brojevi ili nula. Faktor c nije bitno posveopćenje, jer se može lako ukloniti supstitucijom $x=\frac{\bar{x}}{c}$, $t=\frac{\bar{t}}{c}$, $a=\frac{\bar{a}}{c}$, $b=\frac{\bar{b}}{c}$.

Ipak ćemo taj faktor ostaviti, jer će biti zanimljivo vidjeti, na koji način ulazi u razne formule.

Pokazat će se, da se te kompozicije daju dijelom izraziti pomoću Besselovih funkcija nultoga i prvoga reda, kaošto je to kod (109) i (110), a dijelom ćemo još morati uzeti u pomoć neke integrale preko takvih funkcija.

Poslije toga provest ćemo dalje posveopćenje, koje se sastoji u tome, da ćemo razmatrati kompozicije od povoljnog broja faktora poput (117) i (118). I ove će se kompozicije dati izraziti na sličan način.

Dokaz tako dobivenih integralnih teorema ne će biti osnovan na dosada iznesenim metodama, već će biti proveden pomoću Laplace-ove transformacije. Teoremi (109) i (110) bit će sadržani u tim rezultatima kao specijalni slučajevi i time još jednom na drugi način dokazani.

Nastojat ćemo, da ti integralni teoremi, a i druge relacije, koje ovise o općem indeksu n, budu dane nesamo rekurzionim jednadžbama, već i izravnim formulama, gdje je to ikako provedivo.

Za izvode i dokaze u vezi s tim integralnim teoremima trebat ćemo često pomoćne stavke, čiji dokaz bi prekidao nit razmatranja, pa su zato ti pomoćni stavci odijeljeni od glavnih razmatranja. Radnja se prema tome dijeli u tri dijela. U prvom dijelu dokazat ćemo razne stavke opće naravi, koji nemaju veze s Besselovim funkcijama. U drugom dijelu su skupljeni stavci o Besselovim funkcijama, koji su potrebni za glavna razmatranja o integralnim teoremima, obradjenim u trećem dijelu. Neki od stavaka, danih u drugom dijelu, a možda i neki iz prvog dijela, bit će matematički zanimljivi i bez obzira na njihovu primjenu u trećem dijelu.

- . -

I. DIO

R a z n i s t a v c i o p ć e n a r a v i.

1. Izračunavanje raznih suma.

A/ Razmatrajmo polinome dviju varijabla

$$Q(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,(2m+2k)!\;x^{m+k}\;y^{2k}}{(2k)!\;(m+k)!\;(n-k)!} \tag{120}$$

i

$$\overline{Q}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,(2m+2k+2)!\;x^{m+k+1}\;y^{2k+1}}{(2k+1)!\;(m+k+1)!\;(n-k)!}\;. \tag{121}$$

Integrirat ćemo (120) $\underline{2m}$ puta po $\underline{y}$ od $\underline{0}$ do $\underline{y}$ i diferenciramo zatim $\underline{m}$ puta po $\underline{x}$. Isto tako ćemo (121) integrirati $(2m+1)$ puta po $\underline{y}$ od $\underline{0}$ do $\underline{y}$ i zatim $(m+1)$ puta diferencirati po $\underline{x}$. Slijedi:

$$\frac{\partial^m}{\partial x^m}\Big(\int_0^y dy\Big)^{2m} Q(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,x^k\,y^{2m+2k}}{k!\;(n-k)!} = \frac{1}{n!}\,y^{2m}\,(1-xy^2)^n \tag{122}$$

$$\frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}}\Big(\int_0^y dy\Big)^{2m+1} \overline{Q}(x,y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k\,x^k\,y^{2m+2k+2}}{k!\;(n-k)!} = \frac{1}{n!}\,y^{2m+2}\,(1-xy^2)^n \tag{123}$$

Integriramo sad (122) $\underline{m}$ puta po $\underline{x}$ od $\underline{0}$ do $\underline{x}$ i diferenciramo po tom $\underline{2m}$ puta po $\underline{y}$, isto tako integriramo (123) $(m+1)$ puta po $\underline{x}$ od $\underline{0}$ do $\underline{x}$ i diferenciramo $(2m+1)$ puta po $\underline{y}$ i dobijemo

$$Q(x,y) = \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Big\{y^{2m}\Big(\int_0^x dx\Big)^m (1-xy^2)^n\Big\} \tag{124}$$

$$\overline{Q}(x,y) = \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^{2m+1}}{\partial y^{2m+1}}\Big\{y^{2m+2}\Big(\int_0^x dx\Big)^{m+1} (1-xy^2)^n\Big\}. \tag{125}$$

Postepeno izračunavanje višestrukih integrala daje:

$$\int_0^x dx(1-xy^2)^n = -\frac{(1-xy^2)^{n+1}}{(n+1)\ y^2} + \frac{1}{(n+1)\ y^2} \tag{126}$$

$$(\int_0^x dx)^2 (1-xy^2)^n = \frac{(1-xy^2)^{n+2}}{(n+1)(n+2)\ y^4} - \frac{1}{(n+1)(n+2)\ y^4} + \frac{x}{(n+1)\ y^2} \tag{127}$$

i t.d., dakle

$$(\int_0^x dx)^m (1-xy^2)^n = \frac{(-1)^m\ n!\ (1-xy^2)^{n+m}}{(n+m)!\ y^{2m}} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^{m+k}\ n!\ x^k}{(n+m-k)!\ k!\ y^{2m-2k}} \tag{128}$$

$$(\int_0^x dx)^{m+1} (1-xy^2)^n = \frac{(-1)^{m+1}\ n!\ (1-xy^2)^{n+m+1}}{(n+m+1)!\ y^{2m+2}} + \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{m+k+1}\ n!\ x^k}{(n+m-k+1)!\ k!\ y^{2m-2k+2}} . \tag{129}$$

Prema (124),(125) vrijedi dakle:

$$Q(x,y) = (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} \left\{ \frac{(1-xy^2)^{n+m}}{(n+m)!} + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k\ x^k\ y^{2k}}{(n+m-k)!\ k!} \right\} \tag{130}$$

$$\overline{Q}(x,y) = (-1)^{m+1} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial y^{2m+1}} \left\{ \frac{(1-xy^2)^{n+m+1}}{(n+m+1)!} + \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\ x^k\ y^{2k}}{(n+m-k+1)!\ k!} \right\} . \tag{131}$$

Budući da su sume u zagradama polinomi varijable y $(2m-2)$-toga odnosno $2m$-toga stepena, to otpadaju kod diferencijacije, pa ostaje

$$Q(x,y) = (-1)^m \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} \frac{(1-xy^2)^{n+m}}{(n+m)!} \tag{132}$$

$$\overline{Q}(x,y) = (-1)^{m+1} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial y^{2m+1}} \frac{(1-xy^2)^{n+m+1}}{(n+m+1)!} . \tag{133}$$

Stavimo li $x=1$, to možemo pisati:

$$Q(1,y) = \frac{(-1)^n}{(n+m)!} \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}} \left\{ (y+1)^{n+m}(y-1)^{n+m} \right\} = (-1)^n \, 2^{n+m} \frac{\partial^{m-n}}{\partial y^{m-n}} P_{n+m}(y) \tag{134}$$

$$\overline{Q}(1,y) = \frac{(-1)^n}{(n+m+1)!} \frac{\partial^{2m+1}}{\partial y^{2m+1}} \left\{ (y+1)^{n+m+1}(y-1)^{n+m+1} \right\} = (-1)^n \, 2^{n+m+1} \frac{\partial^{m-n}}{\partial y^{m-n}} P_{n+m+1}(y) \tag{135}$$

gdje je $P_n(y)$ n-ti Legendre-ov polinom.

Razvijmo sad te izraze po pravilu za višestruku diferencijaciju produkta i pretpostavimo $m \geq n$:

$$Q(1,y) = \frac{(-1)^n}{(n+m)!} \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} \frac{\partial^k (y+1)^{n+m}}{\partial y^k} \frac{\partial^{2m-k}(y-1)^{n+m}}{\partial y^{2m-k}} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n+m)!} \sum_{k=m-n}^{k=n+m} \binom{2m}{k} \frac{(n+m)! \; (y+1)^{n+m-k}}{(n+m-k)!} \frac{(n+m)! \; (y-1)^{n-m+k}}{(n-m+k)!} \tag{136}$$

$$\overline{Q}(1,y) = \frac{(-1)^n}{(n+m+1)!} \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \frac{\partial^k (y+1)^{n+m+1}}{\partial y^k} \frac{\partial^{2m-k+1}(y-1)^{n+m+1}}{\partial y^{2m-k+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^n}{(n+m+1)!} \sum_{k=m-n}^{k=n+m+1} \binom{2m+1}{k} \frac{(n+m+1)! \; (y+1)^{n+m-k+1}}{(n+m-k+1)!} \frac{(n+m+1)! \; (y-1)^{n-m+k}}{(n-m+k)!} . \tag{137}$$

Stavimo li $y=1$, preostaje od tih suma samo po jedan član:

$$Q(1,1) = \frac{(-1)^n}{(n+m)!} \binom{2m}{m-n} \frac{(n+m)! \; 2^{2n} \; (n+m)!}{(2n)!} = \frac{(-1)^n \; (2m)! \; (n+m)! \; 2^{2n} \; (n+m)!}{(n+m)! \; (m-n)! \; (n+m)! \; (2n)!} =$$

$$= \frac{(-1)^n \; 2^{2n} \; (2m)!}{(2n)! \; (m-n)!} \tag{138}$$

i slično

$$\overline{Q}(1,1) = \frac{(-1)^n \; 2^{2n+1} \; (2m+1)!}{(2n+1)! \; (m-n)!} . \tag{139}$$

Budući da izrazi u zagradi u (134) i (135) imaju za $y=1$ $(n+m)$-struku odnosno $(n+m+1)$-struku nultočku, to su $Q(1,y)$ i $\overline{Q}(1,y)$ za $n > m$ jednaki nuli. Stavimo li u (120) i (121) $x=y=1$ i usporedimo sa (138) i (139), dobijemo dakle :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2m+2k)!}{(2k)!\,(m+k)!\,(n-k)!} = \begin{cases} 0 & \text{za } n > m \quad (140) \\ \dfrac{(-1)^n\, 2^{2n}\,(2m)!}{(2n)!\,(m-n)!} & \text{za } n \leq m \quad (141) \end{cases}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k (2m+2k+2)!}{(2k+1)!\,(m+k+1)!\,(n-k)!} = \begin{cases} 0 & \text{za } n > m \quad (142) \\ \dfrac{(-1)^n\, 2^{2n+1}\,(2m+1)!}{(2n+1)!\,(m-n)!} & \text{za } n \leq m \quad (143) \end{cases}$$

B/ Razmatrajmo polinom

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\, x^{2n-k+1}}{2^{n-k}\,(2n-k+1)(n-k)!\,k!} \,. \tag{144}$$

Diferencijacija po $\underline{x}$ daje

$$Q'(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\, x^{2n-k}}{2^{n-k}\,(n-k)!\,k!} = \frac{1}{n!}\, x^n \left(1-\frac{x}{2}\right)^n \tag{145}$$

dakle

$$Q(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}\,(2n-k+1)(n-k)!\,k!} = \frac{1}{n!}\int_0^1 x^n \left(1-\frac{x}{2}\right)^n dx \,. \tag{146}$$

Supstitucijom $y = 2-x$ dobijemo

$$\int_0^1 x^n \left(1-\frac{x}{2}\right)^n dx = \int_1^2 y^n \left(1-\frac{y}{2}\right)^n dy \tag{147}$$

ili

$$\int_0^1 x^n \left(1-\frac{x}{2}\right)^n dx = \frac{1}{2}\int_0^2 x^n \left(1-\frac{x}{2}\right)^n dx \tag{148}$$

Parcijalna integracija daje:

$$\int_0^2 x^n \left(1-\frac{x}{2}\right)^n dx = \frac{n}{2(n+1)} \int_0^2 x^{n+1} \left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1} dx = \dots = \frac{(n!)^2}{2^n\,(2n)!} \int_0^2 x^{2n} dx =$$

$$= \frac{2^{n+1}\,(n!)^2}{(2n+1)!} \ . \tag{149}$$

Prema (146),(148) i (149) slijedi

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}\,(2n-k+1)\,(n-k)!\,k!} = \frac{2^n\,n!}{(2n+1)!} \ . \tag{150}$$

C/ Razmatrajmo razvoj

$$-\log\left[1-(2xy+y^2)\right] = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(2xy+y^2)^r}{r} \ . \tag{151}$$

Binomni poučak daje

$$(2xy+y^2)^r = \sum_{s=0}^{r} \binom{r}{s} (2x)^s\, y^{2r-s}. \tag{152}$$

Uvedemo li novi indeks sumacije

$$n = 2r-s \tag{153}$$

to dobijemo

$$(2xy+y^2)^r = \sum_{n=r}^{2r} \binom{r}{2r-n} (2x)^{2r-n}\, y^n \ . \tag{154}$$

Ovo ćemo uvrstiti u (151) i potražiti sve n-te potencije od <u>x</u>. Obzirom na (154) vrijedi

$$r \leq n \leq 2r \tag{155}$$

pa stoga samo oni članovi od (151) dolaze u obzir, za koje je

$$\frac{n}{2} \leq r \leq n \ , \tag{156}$$

tako da je koeficijenat c_n u razvoju

$$- \log\left[1 - (2xy+y^2)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y^n \tag{157}$$

dan sumom

$$c_n = \sum_r \frac{1}{r} \binom{r}{2r-n} (2x)^{2r-n} \tag{158}$$

gdje sumu treba protegnuti preko svih vrijednosti od $\underline{r}$, koje zadovoljavaju nejednadžbu (156). Uvedemo li novi indeks sumacije

$$k = n-r \tag{159}$$

to se (156) pretvara u

$$0 \leq k \leq \frac{n}{2} \tag{160}$$

i (158) glasi

$$c_n = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{n-k} \binom{n-k}{n-2k} (2x)^{n-2k} \quad . \tag{161}$$

Pri tom uglata zagrada kao gornja granica sume znači, kaošto je to uobičajeno, najveći cijeli broj, koji nije veći od broja u zagradi.

Iz

$$1 - (2xy+y^2) = \left[1 - y(x+\sqrt{x^2+1})\right]\left[1 - y(x-\sqrt{x^2+1})\right] \tag{162}$$

slijedi

$$- \log\left[1 - (2xy+y^2)\right] = - \log\left[1 - y(x+\sqrt{x^2+1})\right] - \log\left[1 - y(x-\sqrt{x^2+1})\right] . \tag{163}$$

Razvijemo li desnu stranu u red potencija, dobijemo

$$- \log\left[1 - (2xy+y^2)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left\{(x + \sqrt{x^2+1})^n + (x - \sqrt{x^2+1})^n\right\} y^n \quad . \tag{164}$$

Poredba sa (157) i (161) daje relaciju

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{n-k} \binom{n-k}{n-2k} (2x)^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-k-1)!\ (2x)^{n-2k}}{(n-2k)!\ k!} = \frac{1}{n} \left\{(x+\sqrt{x^2+1})^n + (x-\sqrt{x^2+1})^n\right\} . \tag{165}$$

Ova se relacija, istina, može dobiti i na drugi način. Stavimo li naime

$$x = \sinh\varphi \tag{166}$$

to je

$$\frac{1}{2}\left\{(x+\sqrt{x^2+1})^n + (x-\sqrt{x^2+1})^n\right\} = \begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\, n\varphi \tag{167}$$

prema tome, da li je $\underline{n}$ tak ili lih. Pod istim uvjetima je dalje

$$\begin{matrix}\cosh\\ \sinh\end{matrix}\, n\varphi = 2^{n-1}\left\{\sinh^n\varphi + \frac{n(n-1)}{2(2n-2)}\sinh^{n-2}\varphi + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4\ (2n-2)(2n-4)}\sinh^{n-4}\varphi + \dots\right\} \tag{168}$$

što je s obzirom na (166) identično sa (165), kako se lako vidi.*)

Funkcija

$$y = (x+\sqrt{x^2+1})^n + (x-\sqrt{x^2+1})^n \tag{169}$$

može se još lako razviti po potencijama od $\underline{x}$, ako se primijeti, da ta funkcija zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(x^2+1)\,y'' + xy' - n^2y = 0 \quad . \tag{170}$$

Zaista, ako se ta jednadžba opetovano diferencira, dobije se lako

$$(x^2+1)\,y^{(s+2)} + (2s+1)\,y^{(s+1)} + (s^2-n^2)\,y^{(s)} = 0 \tag{171}$$

ili za $x=0$

$$y^{(s+2)}(0) + (2s+1)\,y^{(s+1)}(0) + (s^2-n^2)\,y^{(s)}(0) = 0 \tag{172}$$

iz čega se mogu postepeno izračunati diferencijalni kvocijenti, potrebni za ~~Taylorov~~ Maclaurinov razvoj.**) Možemo obratno (172) upotrijebiti i za to, da potpunom indukcijom dokažemo ispravnost koeficijenata sume (165).

Ipak držimo, da je način, kako smo ga dali, i koji izvire iz logaritmičkog reda, matematički zanimljiv.

---

*) Ovakav izvod daju na pr. Whittaker - Watson, A course of modern analysis, Cambridge 1935., str. 375, u vezi s Neumannovim razvojem po Besselovim funkcijama. Ipak, razmatranja, koja daje na pr. Hobson, A treatise on plane trigonometry, Cambridge 1928., str. 104,105, za izvod formule (168) našeg teksta, nisu nimalo jednostavnija od naših.

**) Jordan, Cours d'analyse I, Paris 1909., str. 154.

D/ Nadomjestimo li u (165) $\underline{x}$ sa $\underline{ix}$, pomnožimo zatim sa x^{n-2m-2} i stavimo

$$x = \sqrt{y} \tag{173}$$

to dobijemo

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k\, 2^{n-2k}\, (n-k-1)!\, y^{n-m-k-1}}{(n-2k)!\, k!} =$$

$$= \frac{1}{n} (\sqrt{y})^{n-2m-2} \left\{ (\sqrt{y} + i\sqrt{1-y})^n + (\sqrt{y} - i\sqrt{1-y})^n \right\} \tag{174}$$

Integriramo li ovu jednadžbu po $\underline{y}$ $\underline{m}$ puta od $\underline{0}$ do $\underline{y}$ upotrijebivši poznatu formulu

$$\left(\int_0^y dy\right)^m f(y) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^y (y-\xi)^{m-1} f(\xi)\, d\xi \tag{175}$$

to slijedi

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k\, 2^{n-2k}\, (n-m-k-1)!\, y^{n-k-1}}{(n-2k)!\, k!} =$$

$$= \frac{1}{n} \left(\int_0^y dy\right)^m (\sqrt{y})^{n-2m-2} \left\{ (\sqrt{y} + i\sqrt{1-y})^n + (\sqrt{y} - i\sqrt{1-y})^n \right\} =$$

$$= \frac{1}{n} \frac{1}{(m-1)!} \int_0^y (y-\xi)^{m-1} (\sqrt{\xi})^{n-2m-2} \left\{ (\sqrt{\xi} + i\sqrt{1-\xi})^n + (\sqrt{\xi} - i\sqrt{1-\xi})^n \right\} d\xi\,. \tag{176}$$

Stavimo $y=1$ i uvedimo novu varijablu integracije

$$\xi = \cos^2 t\,. \tag{177}$$

Dobijemo lako

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k\, 2^{n-2k}\, (n-m-k-1)!}{(n-2k)!\, k!} = \frac{1}{n} \frac{4}{(m-1)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} t \cos^{n-2m-1} t \cos nt\, dt. \tag{178}$$

Pri tom je pretpostavljeno

$$1 \leq m \leq \frac{n-1}{2} \quad . \tag{179}$$

Treba sad izračunati integral na desnoj strani od (178). U tu ćemo svrhu izvesti ovu prijetvorbu:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1}t \cos^{n-r-1}t\, e^{\pm int}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1}t \cos^{n-r-1}t\, (\sin^2 t + \cos^2 t)\, e^{\pm int}\, dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r+1}t \cos^{n-r-1}t\, e^{\pm int}\, dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1}t \cos^{n-r+1}t\, e^{\pm int}\, dt =$$

$$= \left\{ - \frac{\cos^{n-r}t}{n-r} \sin^r t\, e^{\pm int} \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{r}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1}t \cos^{n-r+1}t\, e^{\pm int}\, dt \pm$$

$$\pm \frac{in}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r}t\, e^{\pm int} dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1}t \cos^{n-r+1}t\, e^{\pm int} dt =$$

$$= \frac{n}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1}t \cos^{n-r+1}t\, e^{\pm int} dt \pm \frac{in}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r}t\, e^{\pm int} dt =$$

$$= \frac{n}{n-r} \left\{ \pm \frac{e^{\pm int}}{in} \sin^{r-1}t \cos^{n-r+1}t \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} \mp \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2}t \cos^{n-r+2}t\, e^{\pm int} dt \pm$$

$$\pm \frac{n-r+1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r}t\, e^{\pm int} dt \pm \frac{in}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r t \cos^{n-r}t\, e^{\pm int} dt =$$

$$= \mp \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2}t \cos^{n-r+2}t \; e^{\pm int} dt \;\; \pm \;\; \frac{i(r-1)}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r}t \cos^{n-r}t \; e^{\pm int} dt \;\; =$$

$$= \mp \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2}t \cos^{n-r}t \; (1 - \sin^2 t) \; e^{\pm int} dt \;\; \pm$$

$$\pm \frac{i(r-1)}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r}t \cos^{n-r}t \; e^{\pm int} dt \;\; =$$

$$= \mp \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2}t \cos^{n-r}t \; e^{\pm int} dt \; \pm \; \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r}t \cos^{n-r}t \; e^{\pm int} dt \;\; \pm$$

$$\pm \frac{i(r-1)}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r}t \cos^{n-r}t \; e^{\pm int} dt \;\; =$$

$$= \mp \frac{r-1}{i(n-r)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2}t \cos^{n-r}t \; e^{\pm int} dt \tag{180}$$

ili, još jednom kratko napisano,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1}t \cos^{n-r-1}t \; e^{\pm int} dt \;\; = \;\; \pm \frac{i(r-1)}{n-r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-2}t \cos^{n-r}t \; e^{\pm int} dt \tag{180a}$$

Kod toga računa je pretpostavljeno, da je

$$2 \leq r \leq n-1 \tag{181}$$

Za $r=2$ (180a) glasi

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^{n-3} t\, e^{\pm int}\, dt = \pm \frac{i}{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t\, e^{\pm int}\, dt \,. \tag{182}$$

S druge strane možemo pisati

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos^{n-3} t\, e^{\pm int}\, dt = \left\{ - \frac{\cos^{n-2} t}{n-2}\, e^{\pm int} \right\}_0^{\frac{\pi}{2}} \pm \frac{in}{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t\, e^{\pm int}\, dt =$$

$$= \frac{1}{n-2} \pm \frac{in}{n-2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t\, e^{\pm int}\, dt \,. \tag{183}$$

Uvrstimo li to u (182), slijedi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-2} t\, e^{\pm int}\, dt = \pm \frac{i}{n-1} \,. \tag{184}$$

Ova jednadžba je obzirom na (181) izvedena pod pretpostavkom $n > 2$. Medjutim ona vrijedi i za $n=2$, jer u tom slučaju prelazi u

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\pm i2t}\, dt = \pm i \tag{185}$$

što je ispravno.

Polazeći od (184) dobivamo postepenom primjenom rekurzione jednadžbe (180a):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} t \cos^{n-r-1} t\, e^{\pm int}\, dt = (\pm i)^r \frac{(r-1)!\,(n-r-1)!}{(n-1)!} \,. \tag{186}$$

Ova jednadžba vrijedi pod pretpostavkom (181), pod kojom vrijedi i rekurziona jednadžba (180a). Medjutim, (186) vrijedi i za $r=1$, $n \geq 2$, jer u tom slučaju prelazi u (184), odnosno (185). Prema tome možemo za nju dopustiti

$$1 \leq r \leq n-1 \quad . \tag{187}$$

Odaberemo li u formuli (186) jedamput gornji, a jedamput dolnji predznak i zbrojimo dobivene formule, slijedi lako

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{r-1} t \cos^{n-r-1} t \cos nt \, dt = \cos \frac{r\pi}{2} \frac{(r-1)! \, (n-r-1)!}{(n-1)!} \tag{188}$$

Ako je r tak broj, dakle

$$r = 2m \tag{189}$$

to (187) prelazi u

$$1 \leq m \leq \frac{n-1}{2} \tag{190}$$

a (188) u

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m-1} t \cos^{n-2m-1} t \cos nt \, dt = (-1)^m \frac{(2m-1)! \, (n-2m-1)!}{(n-1)!} \; . \tag{191}$$

Time je odredjen integral u (178), pa dobijemo da uz uvjet (190) vrijedi:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k \, 2^{n-2k} \, (n-m-k-1)!}{(n-2k)! \, k!} = (-1)^m \frac{2 \, (2m)! \, (n-2m-1)!}{n! \, m!} \quad . \tag{192}$$

Nadomjestimo li u (164) i (165) $\underline{x}$ sa $\underline{ix}$ i $\underline{y}$ sa $\underline{iy}$, to dobijemo

$$- \log (1 + 2xy + y^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k (n-k-1)! (2x)^{n-2k}}{(n-2k)! \, k!} \right\} y^n \tag{193}$$

Diferenciramo li ovu jednadžbu $\underline{m}$ puta po $\underline{x}$, dobijemo

$$\frac{(-1)^m (m-1)! (2y)^m}{(1+2xy+y^2)^m} = \sum_{n=m}^{\infty} (-1)^n \left\{ \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{(-1)^k (n-k-1)! 2^m (2x)^{n-m-2k}}{(n-m-2k)! \, k!} \right\} y^n \tag{194}$$

Pri tom je u sumi po $\underline{n}$ prvih $m-1$ članova otpalo, jer razvoj lijeve strane u red potencija počinje sa y^m, a gornja granica sume po $\underline{k}$ odredjena je time, što zbog diferenciranja otpadaju potencije od $\underline{x}$ do uključivo $(m-1)$-toga stepena. Stavimo li $x=1$, to lijeva strana daje:

$$\frac{(-1)^m (m-1)! (2y)^m}{(1+y)^{2m}} = (-1)^m 2^m (m-1)! \sum_{r=0}^{\infty} \binom{-2m}{r} y^{r+m} =$$

$$= (-1)^m 2^m (m-1)! \sum_{n=m}^{\infty} \binom{-2m}{n-m} y^n = (-1)^m 2^m (m-1)! \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m} (n+m-1)!}{(2m-1)! \, (n-m)!} y^n =$$

$$= (-1)^m 2^{m+1} m! \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n-m} (n+m-1)!}{(2m)! \, (n-m)!} y^n \tag{195}$$

Poredba koeficijenata s desnom stranom od (194) uz $x=1$ daje

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{(-1)^k (n-k-1)! \, 2^{n-m-2k}}{(n-m-2k)! \, k!} = \frac{2 \, m! \, (n+m-1)!}{(2m)! \, (n-m)!} \tag{196}$$

gdje je naravno $n \geq m$. Nadomjestimo li $\underline{n}$ sa $n+m$, to ovaj uvjet prelazi u

$$n \geq 0 \tag{197}$$

i dobijemo

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k 2^{n-2k} (n+m-k-1)!}{(n-2k)! \, k!} = \frac{2 \, m! \, (n+2m-1)!}{(2m)! \, n!} \, . \tag{198}$$

Pri tom bi zbog lijeve strane od (194) trebalo pretpostaviti $m \geq 1$, no (198) vrijedi i za $m=0$, što slijedi iz (165) za $x=i$.

U tom slučaju (198) postaje identična sa (192) za $m=0$, tako da se uvjet (190) može proširiti na

$$0 \leq m \leq \frac{n-1}{2} \tag{199}$$

Uz taj uvjet dakle vrijedi jednadžba (192), koju opetujemo:

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k \, 2^{n-2k} \, (n-m-k-1)!}{(n-2k)! \, k!} = (-1)^m \, \frac{2 \, (2m)! \, (n-2m-1)!}{n! \, m!} \, . \tag{200}$$

Pokazat ćemo sad još, da se jednadžbe (198) i (200) daju sažeti u jednu, ako upotrijebimo gama-funkciju.

Znamo, da je

$$\Gamma(m)\,\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\,\Gamma(2m) \tag{201}$$

i da vrijedi

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \tag{202}$$

ako p nije cio broj, dakle za $p = m+\frac{1}{2}$

$$\Gamma(m+\tfrac{1}{2})\,\Gamma(-m+\tfrac{1}{2}) = \frac{\pi}{\sin \pi(m+\frac{1}{2})} \, . \tag{203}$$

Iz (201) i (203) dobijemo

$$\Gamma(m+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m-1}}\,\frac{\Gamma(2m)}{\Gamma(m)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2m}}\,\frac{\Gamma(2m+1)}{\Gamma(m+1)} \tag{204}$$

$$\Gamma(-m+\tfrac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}\;2^{2m-1}\,\Gamma(m)}{\sin \pi(m+\frac{1}{2}) \, . \; \Gamma(2m)} = \frac{\sqrt{\pi}\;2^{2m}\,\Gamma(m+1)}{\sin \pi(m+\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(2m+1)} \tag{205}$$

Na temelju toga mogu se formule (198) i (200) spojiti u formulu

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k \, 2^{n-2k} \, (n-m-k-1)!}{(n-2k)! \, k!} = \frac{(-1)^m \, 2^{2m+1}\,\Gamma(m+\frac{1}{2}) \, . \, (n-2m-1)!}{\sqrt{\pi} \; n!} \tag{206}$$

$$\text{za} \quad m \leq \frac{n-1}{2}$$

gdje sad m može poprimiti i negativne cijele vrijednosti.

E/ Razmatrajmo polinom

$$R(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2n-2k+q}}{2n-2k+q} \binom{n}{k} (-1)^k \; . \tag{207}$$

Pri tom je $\underline{n}$ realan nenegativan cio broj, dok $\underline{q}$ može biti koji bilo kompleksan broj, za koji su svi nazivnici sume (207) različiti od nule, t.j.

$$q \neq 0, -2, -4, \dots, -2n \; . \tag{208}$$

Diferencijacija polinoma (207) po $\underline{x}$ daje:

$$R'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{2n-2k+q} = x^{q-1} (x^2-1)^n \; . \tag{209}$$

Integriramo li to od $\underline{0}$ do $\underline{1}$, dobijemo:

$$R(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2n-2k+q} \binom{n}{k} = \int_0^1 x^{q-1} (x^2-1)^n dx =$$

$$= \left\{ \frac{x^q}{q} (x^2-1)^n \right\}_{x=0}^{x=1} - \frac{2n}{q} \int_0^1 x^{q+1} (x^2-1)^{n-1} dx = \dots$$

$$\dots = \frac{(-1)^n \, 2^n \, n!}{q \, (q+2)(q+4)\dots(q+2n-2)} \int_0^1 x^{q+2n-1} dx =$$

$$= \frac{(-1)^n \, 2^n \, n!}{q \, (q+2)(q+4)\dots(q+2n)} = \frac{1}{2} \, \frac{(-1)^n \, n!}{\frac{q}{2} \, \frac{q+2}{2} \, \frac{q+4}{2} \dots \frac{q+2n}{2}} \; . \tag{210}$$

Ako je $\underline{q}$ negativan tak broj, koji prema (208) mora biti apsolutno veći od $\underline{2n}$, možemo pisati

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2n-2k+q} \binom{n}{k} = \frac{1}{2} \, \frac{-\, n!}{(-\frac{q}{2})(-\frac{q+2}{2}) \dots (-\frac{q+2n}{2})} = - \frac{n! \, (-\frac{q}{2}-n-1)!}{2 \, (-\frac{q}{2})!} \tag{211}$$

Za sve ostale slučajeve vrijedi očito oblik

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2n-2k+q} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^n \, n! \, \Gamma(\frac{q}{2})}{2 \, \Gamma(\frac{q}{2}+n+1)} . \tag{212}$$

Ako je q pozitivan ~~tak~~ broj, ta se formule može pisati

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2n-2k+q} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^n \, n! \, (\frac{q}{2}-1)!}{2 \, (\frac{q}{2}+n)!} . \tag{213}$$

Ako je q pozitivan lih broj, dobijemo pomoću (204)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2n-2k+q} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^n \, 2^{2n+1} \, n! \, (q-1)! \, (\frac{q+1}{2}+n)!}{\frac{q-1}{2}! \, (q+1+2n)!} \tag{214}$$

što se naravno može izvesti izravno iz (210).

Neka je konačno q negativan lih broj, to iz (210) ili pomoću (205) iz (212) dobijemo oblik

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2n-2k+q} \binom{n}{k} = - \frac{2^{2n+1} \, (-\frac{q-1}{2})! \, [-(2n+q+1)]! \, n!}{[-(q-1)]! \, (-\frac{2n+q+1}{2})!} \tag{215}$$

ako je

$$-q > 2n , \tag{216}$$

a oblik

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2n-2k+q} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^{n+\frac{q-1}{2}} \, 2^{2n+1} \, (-\frac{q-1}{2})! \, (\frac{2n+q+1}{2})! \, n!}{[-(q-1)]! \, (2n+q+1)!} \tag{217}$$

ako je

$$-q < 2n . \tag{218}$$

F/ Razmatrajmo polinom

$$S(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n+q-k}}{n+q-k} (-1)^k \binom{n}{k} \tag{219}$$

gdje je q kompleksan broj, za koji su nazivnici sume (219) različiti od nule, t.j.

$$q \neq 0, -1, -2, \ldots, -n \quad . \tag{220}$$

Analogno kao prije dobivamo:

$$S'(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{n+q-k-1} = x^{q-1} (x-1)^n \tag{221}$$

$$S(1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n+q-k} \binom{n}{k} = \int_0^1 x^{q-1} (x-1)^n \, dx =$$

$$= \left\{ \frac{x^q}{q} (x-1)^n \right\}_{x=0}^{x=1} - \frac{n}{q} \int_0^1 x^q (x-1)^{n-1} \, dx = \ldots$$

$$\ldots = \frac{(-1)^n \, n!}{q(q+1)(q+2)\ldots(q+n-1)} \int_0^1 x^{q+n-1} \, dx =$$

$$= \frac{(-1)^n \, n!}{q(q+1)(q+2)\ldots(q+n)} \tag{222}$$

Ako je q pozitivan cio broj možemo pisati

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n+q-k} \binom{n}{k} = \frac{(-1)^n \, n! \, (q-1)!}{(q+n)!} = \frac{(-1)^n}{q \binom{q+n}{n}} \, . \tag{223}$$

Ako je $q < -n$ lako dobijemo

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n+q-k} \binom{n}{k} = - \frac{n! \, (-q-n-1)!}{(-q)!} = \frac{n!}{q \binom{-q-1}{n}} \, . \tag{224}$$

Ne bi bilo teško izvesti ~~ni~~ formule za slučaj pozitivnog ili negativnog polucijelog q .

2. Uvjeti, pod kojim se primjenom operacija $\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k=1,2,\dots,n)$ poništava m-ta potencija sume od $\underline{n}$ varijabla $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Razmatrajmo sumu od $\underline{n}$ varijabla $(n \geq 1)$

$$X = \sum_{k=\cancel{0}1}^{n} x_k \quad . \tag{225}$$

Uvest ćemo nove varijable y_k jednadžbama

$$x_k = \sqrt{2y_k} \qquad (k=1,2,\dots,n) \tag{226}$$

tako da vrijedi

$$\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial y_k} \qquad (k=1,2,\dots,n) \quad . \tag{227}$$

Prema polinomnom stavku je onda m-ta potencija sume (225) $(m \geq 0)$

$$X^m = (\sqrt{2})^m \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{y_k}\right)^m = \sum \frac{(\sqrt{2})^m\, m!}{k_1!\, k_2! \dots k_n!}\; y_1^{\frac{k_1}{2}}\, y_2^{\frac{k_2}{2}} \dots y_n^{\frac{k_n}{2}} \quad , \tag{228}$$

gdje se sumacija proteže preko svih varijacija $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ n-toga razreda s ponavljanjem, tvorenih iz nenegativnih cijelih brojeva, koji zadovoljavaju uvjet

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = m \quad . \tag{229}$$

Umjesto da pitamo, pod kojim uvjetima će se m-ta potencija sume (225) poništiti primjenom operacija $\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k=1,2,\dots,n)$, možemo sad istražiti, pod kojim uvjetima će se poništiti izraz (228) primjenom operacija $\frac{\partial}{\partial y_k}$ $(k=1,2,\dots,n)$.

Ustanovimo ponajprije, da se $y^{\frac{k}{2}}$ može samo onda opetovanim diferenciranjem po $\underline{y}$ poništiti, ako je eksponent cio broj, t.j. ako je $\underline{k}$ tak broj.

Pretpostavimo, da je $m < n$. Od indeksa $k_1, \dots, k_n$ može u svakom članu izraza (228) samo njih $\underline{m}$ biti od nule različito, jer bi inače njihova suma bila veća od $\underline{m}$, u protuslovlju sa (229). Nijedan član dakle ne ovisi od više nego $\underline{m}$ varijabla. Ako primijenimo na izraz (228) bilo kojih $\underline{m+1}$ različitih diferencijacija (227), svaki je član diferenciran po barem jednoj varijabli y_k, o kojoj uopće ne ovisi, tako da moraju svi članovi, dakle cijela suma, iščeznuti. Primijenimo li, naprotiv, samo $\underline{m}$ različitih diferencijacija (227), pa makar i po više puta, to je lako pokazati, da izraz (228) sigurno ne će iščeznuti. Budući da u sumi (228) nema dva člana, gdje bi sve potencije od y_k imale iste eksponente, a primjenom diferencijacije po nekom y_k se snižava stepen dotičnog y_k u svim članovima za isti broj jedinica,(ukoliko pri tom koji član ne otpada), to ni poslije diferencijacije nema dva člana s istim potencijama varijabla y_k. Suma može dakle samo onda iščeznuti, ako postignemo, da svi članovi pojedince iščeznu. Potražimo li onaj član, za koji su svi indeksi k_r, koji pripadaju varijablama y_r, po kojim diferenciramo, jednaki $\underline{1}$, to je jasno, da taj član ne može iščeznuti, jer nijedan od eksponenata dotičnih varijabla nije cio broj.

Prelazimo na slučaj $m \geq n$.

Neka je pri tom $\underline{m-n}$ tak broj. Onda sigurno ima članova, za koje su svi indeksi lihi, na pr.

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{n-1} = 1, \qquad s_n = m-n+1 \tag{230}$$

u suglasnosti sa (229), pri čemu je $\underline{m-n+1}$ lih broj, jer je $\underline{m-n}$ tak broj. Kad su svi indeksi lihi, onda nijedan eksponent nije cio broj, pa dotični član, pa stoga niti cijela suma ne mogu iščeznuti.

Neka je sad $\underline{m-n}$ lih broj. U tom slučaju ne može biti članova sa samim lihim indeksima. To bi naime značilo

$$k_r \equiv 1 \pmod 2 \quad \text{za} \quad r = 1,\dots,n. \tag{231}$$

Zbrojimo li te kongruencije, slijedi

$$\sum_{r=1}^{n} k_r = m \equiv n \pmod 2 \tag{232}$$

ili

$$m-n \equiv 0 \pmod 2 \tag{233}$$

u protuslovlju s pretpostavkom.

Ima dakle u svakom članu barem jedan y_r s takim k_r, pa se dotični član može poništiti $(\frac{k_r}{2}+1)$-strukom diferencijacijom po dotičnom y_r. Primijene li se sve diferencijacije, koje su potrebne za poništavanje pojedinih članova, na cijelu sumu, to će cijela suma iščeznuti. Pita se, koji je najmanji broj diferencijacija, kojima se to može postići.

Jasno je ponajprije, da treba diferencirati po svim y_r barem jedamputa. Ako naime ne bismo po nekom y_r diferencirali, mogli bismo pronaći član, u kojem bi dotični k_r bio tak, dok bi svi ostali indeksi bili lihi, pa se taj član ne bi mogao poništiti. Takovih članova ima, na pr. poput (230), gdje je sad $\underline{m-n+1}$ tak broj, jer je $\underline{m-n}$ lih broj. Za sve članove, koji ne sadržavaju sve y_r, dostatno je jednokratno diferenciranje po svakom y_r, jer se član sigurno poništava diferencijacijom po jednom y_r, koji ne sadržava. Razmatramo li dakle samo članove, koji sadržavaju sve y_r, to je najveći eksponent, koji neki stanoviti y_r u takvom članu može imati, jednak $\frac{m-n+1}{2}$, jer je onda dotični indeks $\underline{m-n+1}$, dok ostali indeksi moraju biti barem jednaki $\underline{1}$, a suma im mora biti $\underline{m}$. U takvom članu je taj eksponent $\frac{m-n+1}{2}$ ujedno i jedini, koji je cio, jer je $\underline{m-n+1}$ tak broj, dok su svi ostali eksponenti jednaki $\frac{1}{2}$. Taj se dakle član može poništiti samo $(\frac{m-n+1}{2}+1)$-strukom diferencijacijom po dotičnom y_r. Budući da taj zaključak vrijedi analogno za svaki y_r, to vidimo, da moramo po svakom y_r diferencirati $\frac{m-n+3}{2}$ puta. Dobijemo konačno

<u>STAVAK I.2.</u> Da se primjenom operacija (227) poništi m-ta potencija sume (225) potrebno je i dovoljno,

A/ ako je $m < n$, da se primijeni $\underline{m+1}$ različitih operacija (227), svaka jedamputa,

B/ ako je $m \geq n$, a $m-n$ lih broj, da se primijene sve operacije (227), i to svaka $\frac{m-n+3}{2}$ puta.

Ako je $m \geq n$, a $m-n$ tak broj, nemoguće je primjenom operacija (227) poništiti m-tu potenciju sume (225).

3. Formula za iteriranu operaciju $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}$.

Dokazat ćemo formulu

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^n f(x) = \frac{1}{x^{2n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\,(2n-k-1)!}{2^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!}\, x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) \qquad (n \geq 1). \quad (234)$$

Vidi se lako, da je formula ispravna za $n=1$. Pretpostavimo, da vrijedi za neki $\underline{n}$ i pokušajmo dokazati, da onda mora vrijediti i za $\underline{n+1}$. Izvršimo u tu svrhu na jednadžbu (234) operaciju $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}$. Budući da je

$$\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\, x^{k-2n} \frac{d^k}{dx^k} f(x) = -(2n-k)\, x^{k-2(n+1)} \frac{d^k}{dx^k} f(x) + x^{k+1-2(n+1)} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} f(x) \quad (236)$$

to dobijemo

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^{n+1} f(x) = \frac{1}{x^{2(n+1)}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1-k}\,(2n-k)!}{2^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!}\, x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\,(2n-k-1)!}{2^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!}\, x^{k+1} \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}} f(x) \right\} . \quad (237)$$

U ovoj jednadžbi uvedimo novi indeks sumacije za drugu sumu, stavivši

$$\bar{k} = k+1 , \quad (238)$$

pa naknadno mjesto $\bar{k}$ opet pišemo k, tako da (237) dobije oblik

$$(\frac{1}{x}\frac{d}{dx})^{n+1} f(x) = \frac{1}{x^{2(n+1)}} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n+1-k}\,(2n-k)!}{2^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!}\, x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{(-1)^{n-k-1}\,(2n-k)!}{2^{n+1-k}\,(n+1-k)!\,(k-2)!}\, x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) \right\} . \quad (239)$$

Zbrojimo li koeficijente istih potencija u tim sumama za $2 \leq k \leq n$, slijedi:

$$\frac{(-1)^{n+1-k}\,(2n-k)!}{2^{n-k}\,(n-k)!\,(k-1)!} + \frac{(-1)^{n-k-1}\,(2n-k)!}{2^{n+1-k}\,(n+1-k)!\,(k-2)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1-k}\,(2n-k)!}{2^{n+1-k}\,(n+1-k)!\,(k-1)!}\,\left[2(n+1-k) + k-1\right] =$$

$$= \frac{(-1)^{n+1-k}\,\left[2(n+1)-k-1\right]!}{2^{n+1-k}\,(n+1-k)!\,(k-1)!} \quad . \tag{240}$$

Ovaj koeficijenat je za $k=1$ identičan s dotičnim koeficijentom prve sume, a za $k=n+1$ s dotičnim koeficijentom druge sume, tako da možemo pisati

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x) = \frac{1}{x^{2(n+1)}} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1-k}\,\left[2(n+1)-k-1\right]!}{2^{n+1-k}\,(n+1-k)!\,(k-1)!}\, x^k \frac{d^k}{dx^k} f(x) \tag{241}$$

a to isto se dobije, ako se u (234) indeks $\underline{n}$ povisi za jednu jedinicu. Time je dokaz formule (234) potpunom indukcijom proveden.

Stavimo li

$$f'(x) = \varphi(x) \tag{242}$$

dakle

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n+1} f(x) = \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(\frac{1}{x}\,\varphi(x)\right) \tag{243}$$

i uvedemo u sumi (241) novi indeks sumacije

$$k_1 = k-1 \tag{244}$$

pišući naknadno opet $\underline{k}$ mjesto k_1 , dobijemo

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{n}\left(\frac{1}{x}\,\varphi(x)\right) = \frac{1}{x^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}\,(2n-k)!}{2^{n-k}\,(n-k)!\,k!}\, x^k \frac{d^k}{dx^k}\,\varphi(x) \tag{245}$$

za $n \geq 0$

4. Jedan granični prijelaz u vezi s iteriranom operacijom $\frac{1}{x}\frac{d}{dx}$.

Pomoću formule (234) dobijemo za cijele $n \geq 1$, $m \geq 0$

$$\frac{d^{2n+m-1}}{dx^{2n+m-1}}\left\{x^{2n+m-1}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\right\} = \frac{d^{2n+m-1}}{dx^{2n+m-1}}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(2n-k-1)!}{2^{n-k}(n-k)!(k-1)!}x^{k+m-1}\frac{d^k}{dx^k}f(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(2n-k-1)!}{2^{n-k}(n-k)!\,(k-1)!}\sum_{r=0}^{2n+m-1}\binom{2n+m-1}{r}\frac{d^r x^{k+m-1}}{dx^r}\frac{d^{2n+m-r+k-1}}{dx^{2n+m-r+k-1}}f(x) \tag{246}$$

Stavimo li $x=0$, ostaju samo članovi za koje je $r=k+m-1$, dakle

$$\frac{d^{k+m-1}}{dx^{k+m-1}}x^{k+m-1} = (k+m-1)! \tag{247}$$

pa prema tome

$$\lim_{x\to 0}\frac{d^{2n+m-1}}{dx^{2n+m-1}}\left\{x^{2n+m-1}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n f(x)\right\} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}(2n-k-1)!}{2^{n-k}(n-k)!\,(k-1)!}\frac{(2n+m-1)!(k+m-1)!}{(k+m-1)!(2n-k)!}\cdot f^{(2n)}(0) =$$

$$= f^{(2n)}(0).(2n+m-1)!\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}(n-k)!\,(k-1)!\,(2n-k)}. \tag{248}$$

Uvedemo li u zadnjoj sumi novi indeks sumacije

$$\bar{k} = k-1 \tag{249}$$

i uzmemo u obzir jednadžbu (150), slijedi:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{2^{n-k}(n-k)!\,(k-1)!\,(2n-k)} = \sum_{\bar{k}=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-1-\bar{k}}}{2^{n-\bar{k}+1}(n-1-\bar{k})!\,\bar{k}!\,[2(n-1)-\bar{k}+1]} =$$

$$= \frac{2^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)!} = \frac{2^n n!}{(2n)!}. \tag{250}$$

Prema (248) dakle vrijedi za $n \geqq 1$, $m \geqq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{d^{2n+m-1}}{dx^{2n+m-1}} \left\{ x^{2n+m-1} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n f(x) \right\} = (2n+m-1)!\, \frac{2^n\, n!}{(2n)!}\, f^{(2n)}(0) \tag{251}$$

Stavimo li $n = \bar{n}+1$ i uvedemo oznaku prema (242) i (243), pa naknadno opet pišemo $\underline{n}$ mjesto $\bar{n}$, to dobijemo za $n \geqq 0$, $m \geqq 0$

$$\lim_{x \to 0} \frac{d^{2n+m+1}}{dx^{2n+m+1}} \left\{ x^{2n+m+1} \left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n \left(\frac{1}{x}\varphi(x)\right) \right\} = (2n+m+1)!\, \frac{2^{n+1}\, (n+1)!}{(2n+2)!}\, \varphi^{(2n+1)}(0) =$$

$$= (2n+m+1)!\, \frac{2^n\, n!}{(2n+1)!}\, \varphi^{(2n+1)}(0) \tag{252}$$

5. Svojstva diferencijalnih operatora $\frac{1}{g_k(x_k)}\frac{\partial}{\partial x_k}$ i njima inverznih integralnih operatora.

Diferencijalne i integralne operatore, koje ćemo razmotriti, primjenjivat ćemo na funkcije od <u>n+1</u> varijabla $f(t;x_1,x_2,\dots,x_n)$, za koje pretpostavljamo, da su po tim varijablama dovoljan broj puta derivabilne.

Definiramo operatore $D_{g_k(x_k)}$ jednadžbom

$$D_{g_k(x_k)}f(t;x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{g_k(x_k)}\frac{\partial}{\partial x_k} f(t;x_1,\dots,x_n) \quad (k=1,2,\dots,n), \tag{253}$$

a operatore $S_{g_k(x_k)}$ jednadžbom

$$S_{g_k(x_k)}f(t;x_1,\dots,x_n) = \int\limits_{t-X+x_k}^{x_k} g_k(y)\, f(t;x_1,\dots,x_{k-1},y,x_{k+1},\dots,x_n)\, dy \quad (k=1,\dots,n) \tag{254}$$

gdje smo stavili

$$X = \sum_{k=1}^{n} x_k \quad , \tag{255}$$

a $g_k(x)$ su neke povoljno zadane ~~derivabilne~~ /dovoljan broj puta/ funkcije, koje su od nule različite u području varijabiliteta, u kojem operiramo.

Jasno je, da će simbolično množenje tih operatora, pod kojim se razumijeva postepeno izvršivanje dotičnih operacija, zadovoljavati asocijativni zakon. Dalje je očito, da operatori $D_{g_k(x_k)}$ medju sobom komutiraju. Pokazat ćemo, da i operatori $S_{g_k(x_k)}$ medju sobom komutiraju. Prema definiciji (254) slijedi

$$S_{g_k(x_k)}S_{g_l(x_l)}f(t;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \int\limits_{t-X+x_k}^{x_k} g_k(z)\left[\int\limits_{t-X+x_k+x_l-z}^{x_l} g_l(y)\, f(t;x_1,\dots,x_{k-1},z,x_{k+1},\dots,x_{l-1},y,x_{l+1},\dots,x_n)dy\right]dz$$

Donja granica nutarnjeg integrala bila bi prema (254) $t-X+x_l$, no budući da je x_k nadomješten sa <u>z</u>, to mjesto <u>X</u> moramo pisati $X-x_k+z$.

Analogno je

$$S_{g_l(x_l)}S_{g_k(x_k)}f(t;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \int\limits_{t-X+x_l}^{x_l} g_l(y)\left[\int\limits_{t-X+x_k+x_l-y}^{x_k} g_k(z)\; f(t;x_1,\dots,x_{k-1},z,x_{k+1},\dots,x_{l-1},y,x_{l+1},\dots,x_n)dz\right]dy. \quad (257)$$

Lako je vidjeti, da je područje dvostruke integracije (256) u koordinatnom sustavu (y,z) omedjeno trokutom s uglovima (x_l,x_k), $(t-X+x_l,x_k)$ i $(x_l,t-X+x_k)$. To isto područje integracije vrijedi i za (257), t.j. granice integrala u (257) su upravo one, koje bismo dobili izmjenom slijeda integracija u (256), Prema tome je zaista

$$S_{g_k(x_k)}S_{g_l(x_l)}f(t;x_1,\dots,x_n) = S_{g_l(x_l)}S_{g_k(x_k)}f(t;x_1,\dots,x_n) \quad (258)$$

ili simbolički

$$S_{g_k(x_k)}S_{g_l(x_l)} = S_{g_l(x_l)}S_{g_k(x_k)} . \quad (259)$$

Na temelju definicija (253) i (254) je očito, da vrijedi

$$D_{g_k(x_k)}S_{g_k(x_k)}f(t;x_1,\dots,x_n) = f(t;x_1,\dots,x_n) \quad (260)$$

ili simbolički

$$D_{g_k(x_k)}S_{g_k(x_k)} = I \quad (261)$$

ako $\underline{I}$ znači "jedinični" operator, koji reproducira funkciju.

Isti operatori, primijenjeni obratnim slijedom, daju

$$S_{g_k(x_k)}D_{g_k(x_k)}f(t;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \int\limits_{t-X+x_k}^{x_k} g_k(y)\;\frac{1}{g_k(y)}\frac{\partial}{\partial y}\,f(t;x_1,\dots,x_{k-1},y,x_{k+1},\dots,x_n)\,dy =$$

$$= f(t;x_1,\dots,x_n) - f(t;x_1,\dots,x_{k-1},t-X+x_k,x_{k+1},\dots,x_n). \quad (262)$$

Ako dakle hoćemo, da operatori $S_{g_k(x_k)}$ i $D_{g_k(x_k)}$ za jedan stanoviti $\underline{k}$ komutiraju, mora vrijediti

$$f(t;x_1,\dots,x_{k-1},t-X+x_k,x_{k+1},\dots,x_n) = 0 \qquad (263)$$

t.j. funkcija mora iščezavati, ako njezina varijabla x_k poprima vrijednost

$$t-X+x_k = t-(x_1+\dots+x_{k-1}+x_{k+1}+\dots+x_n) \qquad (264)$$

ili drugim riječima, ako je

$$x_k = t-(x_1+\dots+x_{k-1}+x_{k+1}+\dots+x_n) \qquad (265)$$

ili

$$t = X \ . \qquad (266)$$

Mora dakle biti

$$\Big\{ f(t;x_1,\dots,x_n) \Big\}_{t=X} = 0 \ . \qquad (267)$$

Ovaj je uvjet neovisan o tome, o kojem $\underline{k}$ se radi, tako da pod tim uvjetom komutira svaki operator $S_{g_k(x_k)}$ sa svojim pripadnim $D_{g_k(x_k)}$.

Jedan pogled na (254) dostaje, da se uvidi, da će taj uvjet primjerice ispunjavati svaka funkcija, koja je nastala primjenom nekog operatora $S_{g_k(x_k)}$ na funkciju, koja taj uvjet ne mora ispunjavati.

Neka je sad $k \neq 1$, onda dobijemo

$$D_{g_1(x_1)} S_{g_k(x_k)} f(t;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \frac{1}{g_1(x_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \int\limits_{t-X+x_k}^{x_k} g_k(y)\, f(t;x_1,\dots,x_{k-1},y,x_{k+1},\dots,x_n)\, dy =$$

$$= \frac{1}{g_1(x_1)} g_k(t-X+x_k)\, f(t;x_1,\dots,x_{k-1},t-X+x_k,x_{k+1},\dots,x_n) +$$

$$+ \frac{1}{g_1(x_1)} \int\limits_{t-X+x_k}^{x_k} g_k(y) \frac{\partial}{\partial x_1} f(t;x_1,\dots,x_{k-1},y,x_{k+1},\dots,x_n)\, dy =$$

$$= \frac{1}{g_1(x_1)} g_k(t-X+x_k)\, f(t;x_1,\ldots,x_{k-1},t-X+x_k,x_{k+1},\ldots,x_n) \;+$$

$$+ \; S_{g_k(x_k)} D_{g_1(x_1)} f(t;x_1,\ldots,x_n) \; . \tag{268}$$

Ako dakle hoćemo, da $D_{g_1(x_1)}$ i $S_{g_k(x_k)}$ komutiraju, mora vrijediti ili

$$g_k(t-X+x_k) = 0, \tag{269}$$

što bi značilo ograničenje područja varijabiliteta, ili opet mora vrijediti uvjet (267).

Razmotrimo li još i operator $\frac{\partial}{\partial t}$, to je po sebi razumljivo, da komutira s operatorima $D_{g_k(x_k)}$, dok za komutiranje s operatorima $S_{g_k(x_k)}$ sasvim analognom prijetvorbom kao (268) opet dobijemo uvjet (267). Možemo dakle izreći

STAVAK I.5. Od operatora $\frac{\partial}{\partial t}$, $D_{g_k(x_k)}$ $(k=1,\ldots,n)$ i $S_{g_k(x_k)}$ $(k=1,\ldots,n)$, definiranih prema (253) i (254), komutiraju bilo koja dva medjusobno, ako funkcija, na koju se primjenjuju, zadovoljava uvjet (267). Taj je uvjet napose zadovoljen, ako je funkcija $f(t;x_1,\ldots,x_n)$ nastala primjenom jednog operatora $S_{g_k(x_k)}$ na neku drugu funkciju $F(t;x_1,\ldots,x_n)$, koja ne mora zadovoljavati uvjet (267). Prema tome u nekom operatorskom produktu sigurno komutiraju bilo koja dva susjedna od svih spomenutih operatora, ako se tik do njih na desno nalazi jedan operator $S_{g_k(x_k)}$. U svakom slučaju komutiraju operatori $\frac{\partial}{\partial t}$, $D_{g_k(x_k)}$ $(k=1,\ldots,n)$ medjusobno i operatori $S_{g_k(x_k)}$ $(k=1,\ldots,n)$ medjusobno.

6. Posveopćenje formule za n-struku integraciju.

Tvrdimo, da vrijedi:

$$S^{m}_{g_k(x_k)} f(t;x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \int\limits_{t-X+x_k}^{x_k} \left[\int\limits_{y}^{x_k} g_k(z)\,dz \right]^{m-1} g_k(y)\ f(t;x_1,\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_n)\,dy$$

$$(k=1,\ldots,n) \qquad (270)$$

Jednadžba je očito ispravna za $m=1$, jer je onda identična sa(254). Pretpostavimo, da je ispravna za neki $\underline{m-1}$. Diferenciramo li desnu i lijevu stranu od (270) po x_k, vidimo lako, da dobijemo istu formulu, ali za $\underline{m-1}$, a tu smo pretpostavili kao ispravnu. Derivacije lijeve i desne strane od (270) su dakle jednake. Osim toga je (270) ispravna za specijalnu vrijednost varijable x_k i to za

$$x_k = t-X+x_k = t-(x_1+\ldots+x_{k-1}+x_{k+1}+\ldots+x_n) \ . \qquad (271)$$

Za tu vrijednost je naime desna strana od (270) jednaka nuli. Lijevu stranu možemo shvatiti kao rezultat operacije $S_{g_k(x_k)}$ izvršene na funkciju $S^{m-1}_{g_k(x_k)} f(t;x_1,\ldots,x_n)$, pa prema (254) za tu specijalnu vrijednost od x_k mora takodjer biti jednaka nuli. Time je dokaz formule (270) potpunom indukcijom proveden.

Ako je funkcija $g_k(x_k)$ identično jednaka jedan, to operator $S_{g_k(x_k)}$ znači običnu integraciju po x_k od $t-X+x_k$ do x_k, tako da formula (270) daje:

$$\left(\int\limits_{t-X+x_k}^{x_k} dx_k \right)^{m} f(t;x_1,\ldots,x_n) =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!} \int\limits_{t-X+x_k}^{x_k} (x_k-y)^{m-1}\ f(t;x_1,\ldots,x_{k-1},y,x_{k+1},\ldots,x_n)\,dy$$

$$(272)$$

što odgovara poznatoj formuli za n-struku integraciju

$$\left(\int_c^x dx \right)^m f(x) = \frac{1}{(m-1)!} \int_c^x (x-y)^{m-1} f(y)\, dy \tag{273}$$

Specijalizirajmo sad funkcije $f(t;x_1,\ldots,x_n)$ utoliko, da pretpostavimo, da te funkcije ovise samo o sumi varijabla $x_1,\ldots,x_n$, t.j. razmatrajmo funkcije $f(t,X)$. Jednadžba (270) onda glasi:

$$S^m_{g_k(x_k)} f(t,X) = \frac{1}{(m-1)!} \int_{t-X+x_k}^{x_k} \left[\int_y^{x_k} g_k(z)dz \right]^{m-1} g_k(y)\, f(t,X-x_k+y)dy$$
$$(k=1,\ldots,n) \; . \tag{274}$$

Uvedemo li nove varijable integracije

$$y = u + x_k \tag{275}$$

$$z = v + x_k \; , \tag{276}$$

to (274) možemo pisati u obliku

$$S^m_{g_k(x_k)} f(t,X) = \frac{(-1)^m}{(m-1)!} \int_0^{t-X} \left[\int_0^u g_k(v+x_k)dv \right]^{m-1} g_k(u+x_k)\, f(t,u+X)du \; . \tag{277}$$

Označimo

$$F_k(x) = \left[\int_0^x g_k(v+x_k)dv \right]^{m_k-1} g_k(x+x_k) \quad (k=1,\ldots,n) \tag{278}$$

i definirajmo funkciju $\Phi_s(x)$, nastalu s-strukim komponiranjem $(s \leq n)$ u smislu jednadžbe (112):

$$\Phi_s(x) = F_1(x)*F_2(x)*\ldots*F_s(x) \; . \tag{279}$$

Tvrdimo, da vrijedi

$$S^{m_s}_{g_s(x_s)} S^{m_{s-1}}_{g_{s-1}(x_{s-1})} \ldots S^{m_1}_{g_1(x_1)} f(t,X) = \left(\prod_{r=1}^s S^{m_r}_{g_r(x_r)} \right) f(t,X) =$$

$$= \frac{(-1)^{\sum_{r=1}^s m_r}}{\prod_{r=1}^s (m_r-1)!} \int_0^{t-X} \Phi_s(y)\, f(t,y+X)dy \; . \tag{280}$$

Ova je formula ispravna za $s=1$. U tom slučaju kompozicija (279) ima samo jedan faktor, tako da je

$$\Phi_1(x) = F_1(x) . \tag{281}$$

Pretpostavimo, da (280) vrijedi za neki $\underline{s}$ i izvršimo na obje strane operaciju $S^{m_{s+1}}_{g_{s+1}(x_{s+1})}$ upotrijebivši formulu (277) i oznaku (278):

$$\prod_{r=1}^{s+1} S^{m_r}_{g_r(x_r)} f(t,X) =$$

$$= \frac{(-1)^{\sum_{r=1}^{s+1} m_r}}{\prod_{r=1}^{s+1}(m_r-1)!} \int_0^{t-X} \left\{ F_{s+1}(u) \int_0^{t-X-u} \Phi_s(y)\, f(t,y+u+X)\,dy \right\} du . \tag{282}$$

Uvedimo mjesto varijable integracije $\underline{y}$ varijablu $\underline{z}$:

$$z = y + u . \tag{283}$$

Dobijemo

$$\left(\prod_{r=1}^{s+1} S^{m_r}_{g_r(x_r)}\right) f(t,X) = \frac{(-1)^{\sum_{r=1}^{s+1} m_r}}{\prod_{r=1}^{s+1}(m_r-1)!} \int_0^{t-X} \left\{ F_{s+1}(u) \int_u^{t-X} \Phi_s(z-u)\, f(t,z+X)\,dz \right\} du . \tag{284}$$

Područje dvostruke integracije je u ravnini (z,u) trokut s uglovima $(0,0)$, $(t-X,0)$, $(t-X,t-X)$. Izmjena slijeda integracija daje

$$\left(\prod_{r=1}^{s+1} S^{m_r}_{g_r(x_r)}\right) f(t,X) = \frac{(-1)^{\sum_{r=1}^{s+1} m_r}}{\prod_{r=1}^{s+1}(m_r-1)!} \int_0^{t-X} f(t,z+X) \left\{ \int_0^{z} F_{s+1}(u)\, \Phi_s(z-u)\,du \right\} dz \tag{285}$$

Budući da je

$$\int_0^z F_{s+1}(u)\, \Phi_s(z-u)du = F_{s+1}(z)*\Phi_s(z) = \Phi_{s+1}(z) , \qquad (286)$$

to je jednadžba (285) identična s formulom (280), ako u potonjoj nadomjestimo <u>s</u> sa <u>s+1</u>. Time je dokaz formule (280) potpunom indukcijom proveden.

Stavimo li u smislu (272)

$$f(t;x_1,\dots,x_n) = \left(\int_{t-X+x_k}^{x_k} dx_k\right)^{q+1} \varphi(t;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \frac{1}{q!} \int_{t-X+x_k}^{x_k} (x_k-y)^q\, \varphi(t;x_1,\dots,x_{k-1},y,x_{k+1},\dots,x_n)dy , \qquad (287)$$

to očito vrijedi

$$\frac{\partial^r}{\partial x_k^r} f(t;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \frac{1}{(q-r)!} \int_{t-X+x_k}^{x_k} (x_k-y)^{q-r}\, \varphi(t;x_1,\dots,x_{k-1},y,x_{k+1},\dots,x_n)dy$$

$$(r \leq q) \qquad (288)$$

i

$$\frac{\partial^{q+1}}{\partial x_k^{q+1}} f(t;x_1,\dots,x_n) = \varphi(t;x_1,\dots,x_n) . \qquad (289)$$

Prema (288) mora biti

$$\frac{\partial^r}{\partial x_k^r} f(t;x_1,\dots,x_{k-1},t-X+x_k,x_{k+1},\dots,x_n) = 0 \quad (r \leq q) \qquad (290)$$

ili

$$\left\{ \frac{\partial^r}{\partial x_k^r} f(t;x_1,\dots,x_n) \right\}_{t=X} = 0 \qquad (r \leq q) \qquad (290a)$$

Stavimo sad u formuli (270)

$$g_k(x_k) = x_k \tag{291}$$

i prema tome

$$\int_y^{x_k} g_k(z)dz = \int_y^{x_k} z\, dz = \frac{x_k^2 - y^2}{2} . \tag{292}$$

Uvrstimo (291), (292) i (287) u (270), pa provedemo $\underline{q+1}$ puta parcijalnu integraciju uzevši u obzir (290), to konačno dobijemo:

$$S_{x_k}^m f(t;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \frac{1}{m!\, 2^m} \int_{t-X+x_k}^{x_k} \left[\left(\int_{x_k}^{y} dy\right)^q (x_k^2 - y^2)^m \right] \frac{\partial^{q+1}}{\partial y^{q+1}} f(t;x_1,\dots,x_{k-1},y,x_{k+1},\dots,x_n)\, dy \tag{293}$$

ili u smislu (273) i (289)

$$S_{x_k}^m f(t;x_1,\dots,x_n) =$$

$$= \frac{1}{m!\,(q-1)!\, 2^m} \int_{t-X+x_k}^{x_k} \left[\int_{x_k}^{y} (y-z)^{q-1}(x_k^2-z^2)^m dz \right] \varphi(t;x_1,\dots,x_{k-1},y,x_{k+1},\dots,x_n)dy \tag{294}$$

Da izračunamo nutarnji integral, razvijemo oba faktora integranda po binomnom poučku:

$$\int_{x_k}^{y} (y-z)^{q-1}(x_k^2-z^2)^m dz =$$

$$\int_{x_k}^{y} \sum_{s=0}^{q-1} y^s\, z^{q-s-1}\, (-1)^{q-s-1} \binom{q-1}{s} \cdot \sum_{r=0}^{m} x_k^{2r}\, z^{2m-2r}\, (-1)^{m-r} \binom{m}{r}\, dz =$$

$$= \int_{x_k}^{y} \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m+q-r-s-1} \binom{m}{r}\binom{q-1}{s} x_k^{2r} z^{2m-2r+q-s-1} y^s \, dz =$$

$$= \left\{ \sum_{s=0}^{q-1} \sum_{r=0}^{m} (-1)^{m+q-r-s-1} \binom{m}{r}\binom{q-1}{s} \frac{1}{2m-2r+q-s} x_k^{2r} z^{2m-2r+q-s} y^s \right\}_{z=x_k}^{z=y} =$$

$$= \sum_{r=0}^{m} \left[(-1)^{m+q-r-1} \binom{m}{r} x_k^{2r} y^{2m-2r+q} \cdot \sum_{s=0}^{q-1} (-1)^s \frac{1}{2m-2r+q-s} \binom{q-1}{s} \right] -$$

$$- \sum_{s=0}^{q-1} \left[(-1)^{m+q-s-1} \binom{q-1}{s} x_k^{2m+q-s} y^s \cdot \sum_{r=0}^{m} (-1)^r \frac{1}{2m-2r+q-s} \binom{m}{r} \right]. \quad (295)$$

Pišemo li u (212) $\underline{q-s}$ mjesto $\underline{q}$, dobijemo, ako još $\underline{n}$ nadomjestimo sa $\underline{m}$:

$$\sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^r}{2m-2r+q-s} \binom{m}{r} = \frac{(-1)^m \, m! \, \Gamma(\frac{q-s}{2})}{2 \, \Gamma(\frac{q-s}{2} + m + 1)} . \quad (296)$$

U (223) nadomjestimo $\underline{q}$ sa $\underline{2m-2r+1}$, a $\underline{n}$ sa $\underline{q-1}$, pa dobijemo

$$\sum_{s=0}^{q-1} \frac{(-1)^s}{2m-2r+q-s} \binom{q-1}{s} = \frac{(-1)^{q-1} (q-1)! \, (2m-2r)!}{(2m-2r+q)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{q-1} \, q! \, (2m-2r)!}{q \, (2m-2r+q)!} = \frac{(-1)^{q-1}}{q \binom{2m-2r+q}{q}} \quad (297)$$

Uvrstimo li (296) i (297) u (295), dobijemo za nutarnji integral od (294) izraz:

$$\int_{x_k}^{y} (y-z)^{q-1} (x_k^2-z^2)^m \, dz = \sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^{m-r} \binom{m}{r}}{q \binom{2m-2r+q}{q}} x_k^{2r} y^{2m-2r+q} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{q-1} (-1)^{q-s} \frac{\binom{q-1}{s} \, m! \, \Gamma(\frac{q-s}{2})}{2 \, \Gamma(\frac{q-s}{2} + m+1)} x_k^{2m+q-s} y^s . \quad (298)$$

Uvedemo li u prvoj sumi novi indeks sumacije

$$s = m-r \tag{299}$$

i izmijenimo slijed suma, to dobijemo

$$\int_{x_k}^{y} (y-z)^{q-1} (x_k^2-z^2)^m \, dz =$$

$$= \sum_{s=0}^{q-1} \frac{(-1)^{q-s}\, m!\, \binom{q-1}{s}\, \Gamma(\frac{q-s}{2})}{2\, \Gamma(\frac{q-s}{2}+m+1)} x_k^{2m+q-s}\, y^s +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m} \frac{(-1)^s \binom{m}{s}}{q \binom{q+2s}{q}} x_k^{2m-2s}\, y^{q+2s} \quad . \tag{300}$$

Time je izraz poredan po potencijama od $\underline{y}$.

Izvest ćemo sad na temelju (280) još jednu formulu. U tu svrhu ponajprije primjećujemo, da se (280) može još nešto posveopćiti utoliko, što nije potrebno, da se razni operatori $S_{g_k(x_k)}$ odnose na razne varijable x_k, već se može i na istu varijablu x_k odnositi više raznih operatora s raznim eksponentima, na pr. $S^{m_{1,k}}_{g_{1,k}(x_k)}$, $S^{m_{2,k}}_{g_{2,k}(x_k)}$ i t.d. Dokaz tako posveopćene formule ostaje isti, pri čemu će sad za istu varijablu biti više funkcija $F_{1,k}(x)$, $F_{2,k}(x)$ i t.d., definirane prema (278), koje sve treba komponirati prema (279).

Razumijevamo pod $j(x_k)$ funkciju, koja je identično jednaka jedan, dakle

$$j(x_k) \equiv 1 \quad . \tag{301}$$

Prema (254) i (274) onda možemo pisati

$$S^{q+1}_{j(x_k)} \varphi(t,X) = \Big(\int_{t-X+x_k}^{x_k} dx_k \Big)^{q+1} \varphi(t,X) = \frac{1}{q!} \int_{t-X+x_k}^{x_k} (x_k-y)^q\, \varphi(t,X-x_k+y)\, dy \tag{302}$$

Uvedemo li u posljednjem integralu novu varijablu integracije

$$z = X - x_k + y, \tag{303}$$

dobijemo

$$S^{q+1}_{j(x_k)}\varphi(t,X) = \frac{1}{q!}\int_t^X (X-z)^q \,\varphi(t,z)\, dz . \tag{304}$$

Vidimo, da rezultat opet ovisi samo o sumi $\underline{X}$ varijabla $x_1,\ldots,x_n$, pa je svejedno, po kojoj varijabli x_k smo proveli n-struku integraciju. Možemo dakle pisati

$$f(t,X) = S^{q+1}_{j(x_k)}\varphi(t,X) = \frac{1}{q!}\int_t^X (X-z)^q \,\varphi(t,z)\, dz = \frac{(-1)^{q+1}}{q!}\int_X^t (z-X)^q \varphi(t,z)\,dz \tag{305}$$

Izvršimo li na ovu funkciju operacije jednadžbe (280), dobijemo

$$\left(\prod_{r=1}^{s} S^{m_r}_{g_r(x_r)}\right) f(t,X) = \left(\prod_{r=1}^{s} S^{m_r}_{g_r(x_r)}\right) \cdot S^{q+1}_{j(x_k)}\varphi(t,X) =$$

$$= \frac{(-1)^{q+1+\sum_{r=1}^{s} m_r}}{q!\prod_{r=1}^{s}(m_r-1)!}\int_0^{t-X} \Phi(y)\, \varphi(t,y+X)\, dy \tag{306}$$

gdje je

$$\Phi(x) = F_1(x) * \ldots * F_s(x) * H(x) , \tag{307}$$

a $H(x)$ je obzirom na (301) i (278) definiran sa

$$H(x) = \left[\int_0^x j(v+x_k)\,dv\right]^q j(x+x_k) = x^q . \tag{308}$$

Pretpostavimo još, da je

$$g_r(x_r) = x_r \qquad (r=1,\ldots,s) \tag{309}$$

i stavimo

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_s = 0 . \tag{310}$$

Moglo bi se posumnjati, da li je limes izraza (306), kad varijable (310) konvergiraju prema nuli, jednak vrijednosti, koja se dobije, ako se u gornjoj granici integrala u (306) i pod znakom integracije te varijable stave jednake nuli, i da li je svejedno, kojim slijedom te varijable konvergiraju prema nuli. Ako medjutim uočimo, da se te varijable iz funkcije $\varphi(t,y+X)$, za koju smo pretpostavili samo integrabilnost, daju ukloniti supstitucijom

$$y+X = z \quad , \tag{311}$$

koja daje

$$\int_0^{t-X} \Phi(y)\, \varphi(t,y+X)\, dy = \int_X^t \Phi(z-X)\, \varphi(t,z)\, dz \tag{312}$$

i ako uzmemo u obzir, da je prema (301), (309), (278) i (307) $\Phi(z-X)$ cijela racionalna funkcija varijabla (310), to je jasno, da integrand u (312) ne može imati takvih singulariteta, koji bi stavili u pitanje naš postupak.

Umjesto da varijable (310) stavimo jednake nuli u gotovoj funkciji $\Phi(y)$ u (306), možemo to, s istih razloga, učiniti već u funkcijama $F_1(x),\ldots,F_s(x)$ i $H(x)$, iz kojih je $\Phi(x)$ komponiran, a u tim samim funkcijama to možemo učiniti već u integrandu prije izvršene integracije. Dobijemo tako

$$\left[F_k(x)\right]_{x_1=\ldots=x_s=0} = \left[\int_0^x v\, dv\right]^{m_k-1} x = \frac{x^{2m_k-1}}{2^{m_k-1}} \tag{313}$$

$$(k = 1,\ldots,s)$$

dok $H(x)$ ostaje nepromijenjen, jer ne ovisi ni o kojoj od varijabla (310):

$$\left[H(x)\right]_{x_1=\ldots=x_s=0} = x^q \quad . \tag{314}$$

Vidimo, da bismo isto takve funkcije $F_k(x)$ i $H(x)$ dobili, da smo umjesto operacije $S_{x_1}^{m_1}\ldots S_{x_s}^{m_s} S_{j(x)}^{q+1}$ izvršili operaciju

$$\frac{1}{2^{m_1+\dots+m_s-s}} \; S_{j(x_k)}^{2m_1} \dots S_{j(x_k)}^{2m_s} \; S_{j(x_k)}^{q+1} \quad . \tag{315}$$

Medjutim, ova operacija bi doduše dala ispravne $F_k(x)$ i $H(x)$, ali bi u smislu jednadžbe (280) dala pred integralom faktor

$$\frac{(-1)^{2m_1+\dots+2m_s+q+1}}{q! \prod_{r=1}^{s}(2m_r-1)!} = \frac{(-1)^{q+1}}{q! \prod_{r=1}^{s}(2m_r-1)!} \tag{316}$$

umjesto faktora pred integralom u (306). Da to korigiramo, moramo dakle umjesto operacije (315) izvršiti operaciju

$$\frac{(-1)^{\sum_{r=1}^{s} m_r} \prod_{r=1}^{s}(2m_r-1)!}{2^{m_1+\dots+m_s-s} \prod_{r=1}^{s}(m_r-1)!} \; S_{j(x_k)}^{2m_1} \dots S_{j(x_k)}^{2m_s} \; S_{j(x_k)}^{q+1} \quad . \tag{317}$$

Osim toga treba i u $\underline{X}$ staviti varijable (310) jednake nuli, t.j. ako označimo

$$(X)_{x_1=\dots=x_s=0} = X_o = x_{s+1}+\dots+x_n \quad , \tag{318}$$

treba nadomjestiti $\underline{X}$ sa $\underline{X_o}$. Izvršimo li dakle operaciju (317) na funkciju $\varphi(t,X_o)$, dobili smo željeni rezultat. No budući da je

$$S_{j(x_k)}^{2m_1} \dots S_{j(x_k)}^{2m_s} \; S_{j(x_k)}^{q+1} = S_{j(x_k)}^{2m_1+\dots+2m_s+q+1} \quad , \tag{319}$$

a prema (280) bit će

$$S_{j(x_k)}^{2m_1+\dots+2m_s+q+1} \varphi(t,X_o) = \frac{(-1)^{2m_1+\dots+2m_s+q+1}}{(2m_1+\dots+2m_s+q)!} \int_0^{t-X_o} \Phi(y)\, \varphi(t,y+X_o)\, dy =$$

$$= \frac{(-1)^{q+1}}{(2m_1+\dots+2m_s+q)!} \int_{X_0}^{t} \overline{\Phi}(z-X_0)\ \varphi(t,z)\ dz \quad , \tag{320}$$

gdje je prema (279),(278), (301)

$$\overline{\Phi}(x) = \overline{H}(x) = x^{2m_1+\dots+2m_s+q} \quad , \tag{321}$$

to dobijemo konačno obzirom na (305),(306), (309) i (310):

$$\left\{\left(\prod_{r=1}^{s} S_{x_r}^{m_r}\right)\int_{X}^{t}(z-X)^q\ \varphi(t,z)\ dz\right\}_{x_1=\dots=x_s=0} =$$

$$= \frac{q!}{(2m_1+\dots+2m_s+q)!}\left(\prod_{r=1}^{s}\frac{(-1)^{m_r}\ (2m_r-1)!}{2^{m_r-1}\ (m_r-1)!}\right)\int_{X_0}^{t}(z-X_0)^{2m_1+\dots+2m_s+q}\varphi(t,z)dz \tag{322}$$

Na temelju jednadžbe (204) može se ovo pisati i u obliku

$$\left\{\left(\prod_{r=1}^{s} S_{x_r}^{m_r}\right)\int_{X}^{t}(z-X)^q\ \varphi(t,z)dz\right\}_{x_1=\dots=x_s=0} =$$

$$= \frac{q!}{(2m_1+\dots+2m_s+q)!}\left(\prod_{r=1}^{s}\frac{(-1)^{m_r}\ 2^{m_r}\Gamma(m_r+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\right)\int_{X_0}^{t}(z-X_0)^{2m_1+\dots+2m_s+q}\varphi(t,z)dz \ . \tag{322a}$$

Ovaj oblik ima prednost, da su za $\underline{m_r}$ dopuštene nesamo cijele pozitivne vrijednosti kao u (322), već i vrijednost nula, kako se lako razabire pomoću relacije $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

7. Odredjivanje limesa sume pomoću primjene de l'Hopitalovog pravila na pojedine članove, koji pojedince ne moraju imati limes.

Dokazujemo

STAVAK I.7. Neka je

$$F(x) = f_1(x)+\dots+f_n(x) \tag{323}$$

i neka su $F(x)$, $(x-a)^m f_1(x),\dots,(x-a)^m f_n(x)$ funkcije, koje su u nekoj točki $x=a$ i njezinoj okolini kontinuirano derivabilne do m-toga reda, dok funkcije $f_1(x),\dots,f_n(x)$ to u točki $x=a$ ne moraju biti. Onda vrijedi:

$$\lim_{x\to a} F(x) = F(a) = \frac{1}{m!}\left\{\frac{d^m}{dx^m}\left[(x-a)^m f_1(x)\right]\right\}_{x=a} + \dots + \frac{1}{m!}\left\{\frac{d^m}{dx^m}\left[(x-a)^m f_n(x)\right]\right\}_{x=a} \tag{324}$$

Pomnožimo i razdijelimo jednadžbu (323) sa $(x-a)^m$:

$$\frac{(x-a)^m F(x)}{(x-a)^m} = \frac{(x-a)^m f_1(x)}{(x-a)^m} + \dots + \frac{(x-a)^m f_n(x)}{(x-a)^m} . \tag{325}$$

Lijeva strana ima za $x=a$ neodredjeni oblik $\frac{0}{0}$, pa je prema de l'Hopitalovom pravilu

$$\lim_{x\to a}\frac{(x-a)^m F(x)}{(x-a)^m} = F(a) = \frac{\left\{\frac{d^m}{dx^m}\left[(x-a)^m F(x)\right]\right\}_{x=a}}{\left[\frac{d^m}{dx^m}(x-a)^m\right]_{x=a}} =$$

$$= \frac{\left\{\frac{d^m}{dx^m}\left[(x-a)^m F(x)\right]\right\}_{x=a}}{m!} . \tag{326}$$

No budući da je

$$\frac{d^m}{dx^m}\left[(x-a)^m F(x)\right] = \frac{d^m}{dx^m}\left[(x-a)^m f_1(x)\right] + \dots + \frac{d^m}{dx^m}\left[(x-a)^m f_n(x)\right] \tag{327}$$

i budući da prema pretpostavkama svaki član desne strane od (327) ima limes za $x \to a$, to je time jednadžba (324) dokazana.

Vidimo, da se na pojedine članove desne strane od (325) može primijeniti de l'Hopitalovo pravilo, kao da se radi o neodredjenim oblicima $\frac{0}{0}$, premda brojnici ne moraju biti jednaki nuli i premda same funkcije $f_1(x),\dots,f_n(x)$ ne moraju imati konačan limes za $x \to a$.

Stavak vrijedi i za funkcije kompleksne varijable z. U tom slučaju će se naravno raditi o analitičnim funkcijama, tako da funkcije $f_1(z),\dots,$ $f_n(z)$ mogu u točki $z=a$ imati polove do najviše m-toga reda.

Kao primjer uzmimo identitet

$$cx + d = \frac{(2c-2)x^3 + 3}{x^2} + \frac{2x^3 + 2dx^2 - 2x - 3}{x^2} + \frac{2cx^2 - 4dx + 3}{x} - \frac{3cx^2 - 3dx + 1}{x} \tag{328}$$

gdje smo dakle stavili

$$F(x) = cx + d \tag{329}$$

$$f_1(x) = \frac{(2c-2)x^3 + 3}{x^2} \tag{330}$$

$$f_2(x) = \frac{2x^3+2dx^2-2x-3}{x^2} \tag{331}$$

$$f_3(x) = \frac{2cx^2-4dx+3}{x} \tag{332}$$

$$f_4(x) = -\frac{3cx^2-3dx+1}{x} \quad . \tag{333}$$

Odredimo limes za $x \to a=0$. Lijeva strana daje

$$\lim_{x \to a} (cx+d) = d \quad . \tag{334}$$

Primijenimo dokazani stavak na desnu stranu. Imamo $n=4$, $a=0$, $m=2$,

$$x^2 f_1(x) = (2c-2)x^3 + 3 \tag{335}$$

$$x^2 f_2(x) = 2x^3+2dx^2-2x-3 \tag{336}$$

$$x^2 f_3(x) = 2cx^3-4dx^2+3x \tag{337}$$

$$x^2 f_4(x) = -3cx^3+3dx^2-x \tag{338}$$

i prema (324)

$$\lim_{x \to a} (cx+d) = \frac{\left[6(2c-2)x\right]_{x=0}}{2!} + \frac{\left[12x+4d\right]_{x=0}}{2!} + \frac{\left[12cx-8d\right]_{x=0}}{2!} +$$

$$+ \frac{\left[-18cx+6d\right]_{x=0}}{2!} = 0 + 2d - 4d + 3d = d \qquad (339)$$

u skladu sa (334).

II. D I O

Razne relacije izmedju Besselovih funkcija

1. Nekoliko temeljnih relacija izmedju Besselovih funkcija.

Ponavljamo definiciju (108) funkcija $\Lambda_n(z)$ proširujući je na slučaj, gdje n ne mora biti cio pozitivan broj:

$$\Lambda_n(z) = \Gamma(n+1)\left(\frac{z}{2}\right)^{-n} J_n(z) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+1)}{r!\;\Gamma(n+r+1)}\left(\frac{iz}{2}\right)^{2r} . \tag{340}$$

Iz poznatih relacija*)

$$J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z) - J_{n-1}(z) \tag{341}$$

$$\frac{d}{dz}\left\{z^{-n}J_n(z)\right\} = -z^{-n}J_{n+1}(z) \tag{342}$$

lako je uz pomoć (340) izvesti nekoliko relacija za funkcije $\Lambda_n(z)$:

$$\Lambda_{n+1}(cz) = \frac{4n(n+1)}{c^2z^2}\left[\Lambda_n(cz) - \Lambda_{n-1}(cz)\right] \tag{343}$$

$$\Lambda_{n+1}(c\sqrt{f(z)}\,) = \frac{4n(n+1)}{c^2 f(z)}\left[\Lambda_n(c\sqrt{f(z)}\,) - \Lambda_{n-1}(c\sqrt{f(z)}\,)\right] \tag{344}$$

$$\frac{d}{dz}\Lambda_n(cz) = -\frac{c^2 z}{2(n+1)}\Lambda_{n+1}(cz) \tag{345}$$

$$\frac{d}{dz}\Lambda_n(c\sqrt{f(z)}\,) = -\frac{c^2}{4(n+1)}\frac{df(z)}{dz}\Lambda_{n+1}(c\sqrt{f(z)}\,) . \tag{346}$$

---

*) Gray, Mathews and Macrobert, A treatise on Bessel functions, Macmillan and Co., London 1931, str.16.

Iz (345) i (343) slijedi:

$$\frac{d}{dz}\Lambda_n(cz) = -\frac{2n}{z}\left[\Lambda_n(cz) - \Lambda_{n-1}(cz)\right] \tag{347}$$

$$\frac{d}{dz}\Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) = -\frac{n\,f'(z)}{f(z)}\left[\Lambda_n(c\sqrt{f(z)}) - \Lambda_{n-1}(c\sqrt{f(z)})\right] . \tag{348}$$

2. Opća relacija izmedju triju Besselovih funkcija, čiji se indeksi razlikuju za cijele brojeve. *)

Neka su zasad a, b, c tri cijela broja, koja zadovoljavaju uvjet

$$a > b > c \geq 0 \quad . \tag{349}$$

Tvrdimo, da onda vrijedi relacija

$$A_{b,c}\, J_a(z) - A_{a,c}\, J_b(z) + A_{a,b}\, J_c(z) = 0 \tag{350}$$

gdje znači

$$A_{b,c} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{b-c-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w\,(b-c-w-1)!\,(b-w-1)!}{(\frac{z}{2})^{b-c-2w-1}\; w!\,(b-c-2w-1)!\,(c+w)!} \tag{351}$$

$$A_{a,c} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{a-c-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w\,(a-c-w-1)!\,(a-w-1)!}{(\frac{z}{2})^{a-c-2w-1}\; w!\,(a-c-2w-1)!\,(c+w)!} \tag{352}$$

$$A_{a,b} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{a-b-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w\,(a-b-w-1)!\,(a-w-1)!}{(\frac{z}{2})^{a-b-2w-1}\; w!\,(a-b-2w-1)!\,(b+w)!} \quad . \tag{353}$$

Indeksi koeficijenata ~~od~~ $\underline{A}$ ukazuju na to, da je koeficijent svake Besselove funkcije u (350) ovisan samo o indeksima ostalih dviju Besselovih funkcija. Izrazi u uglatim zagradama, kao gornje granice suma, uvijek znače najveći cijeli broj, koji nije veći od broja u zagradi.

Da formula (350) dobije više simetrije, uzet ćemo sada, da su a, b, c tri različita pozitivna cijela broja, od kojih jedan smije biti jednak nuli, ali koji ne moraju biti poredani po veličini prema (349). Stavimo dalje

$$p = |b-c| \;, \qquad q = |c-a| \;, \qquad r = |a-b| \quad . \tag{354}$$

---

*) Usporedi: Dodatak 1 i 2 na kraju radnje.

Onda vrijedi:

$$M_{b,c}\,J_a(z)\ +\ M_{c,a}\,J_b(z)\ +\ M_{a,b}\,J_c(z)\ =\ 0 \tag{355}$$

gdje je

$$M_{b,c} = \operatorname{sgn}(b-c)\sum_{w=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w\,(p-w-1)!\,\left(\frac{b+c+p}{2}-w-1\right)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{p-2w-1}\,w!\,(p-2w-1)!\,\left(\frac{b+c-p}{2}+w\right)!} \tag{356}$$

$$M_{c,a} = \operatorname{sgn}(c-a)\sum_{w=0}^{\left[\frac{q-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w\,(q-w-1)!\,\left(\frac{c+a+q}{2}-w-1\right)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{q-2w-1}\,w!\,(q-2w-1)!\,\left(\frac{c+a-q}{2}+w\right)!} \tag{357}$$

$$M_{a,b} = \operatorname{sgn}(a-b)\sum_{w=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w\,(r-w-1)!\,\left(\frac{a+b+r}{2}-w-1\right)!}{\left(\frac{z}{2}\right)^{r-2w-1}\,w!\,(r-2w-1)!\,\left(\frac{a+b-r}{2}+w\right)!}\ . \tag{358}$$

Ako vrijedi uvjet (349), to je jednadžba (355) identična sa (350). No budući da je jednadžba (355) s vrijednostima (356), (357),(358) invarijantna obzirom na povoljne (nesamo ciklične) zamjene izmedju a, b, c, o čemu je lako uvjeriti se, to ona mora vrijediti općenito, t.j. bez obzira na uvjet (349), ako je ispravna jednažba (350).

Da skiciramo dokaz jednadžbe (350) polazimo od rekurzione jednadžbe Besselovih funkcija (341), koju pišemo u obliku

$$J_{b+1}(z) - \frac{b}{\frac{z}{2}}\,J_b(z) + J_{b-1}(z)\ =\ 0\ . \tag{359}$$

Lako se vidi, da je (359) specijalan slučaj od (350), t.j. da vrijedi

$$A_{b,b-1}\,J_{b+1}(z) - A_{b+1,b-1}\,J_b(z)\ +\ A_{b+1,b}\,J_{b-1}(z)\ =\ 0\ . \tag{360}$$

Dalje se na temelju (359) lako izračuna, da vrijede jednadžbe

$$J_{b+2}(z) - \left[\frac{b(b+1)}{(\frac{z}{2})^2} - 1\right] J_b(z) + \frac{b+1}{\frac{z}{2}} J_{b-1}(z) = 0 \qquad (361)$$

$$\frac{b-1}{\frac{z}{2}} J_{b+1}(z) - \left[\frac{b(b-1)}{(\frac{z}{2})^2} - 1\right] J_b(z) + J_{b-2}(z) = 0 \qquad (362)$$

$$\frac{b-1}{\frac{z}{2}} J_{b+2}(z) - \left[\frac{(b+1)b(b-1)}{(\frac{z}{2})^3} - \frac{2b}{\frac{z}{2}}\right] J_b(z) + \frac{b+1}{\frac{z}{2}} J_{b-2}(z) = 0\,. \qquad (363)$$

I te su jednadžbe specijalni slučajevi od (350), t.j. vrijedi:

$$A_{b,b-1}\, J_{b+2}(z) - A_{b+2,b-1}\, J_b(z) + A_{b+2,b}\, J_{b-1}(z) = 0 \qquad (364)$$

$$A_{b,b-2}\, J_{b+1}(z) - A_{b+1,b-2}\, J_b(z) + A_{b+1,b}\, J_{b-2}(z) = 0 \qquad (365)$$

$$A_{b,b-2}\, J_{b+2}(z) - A_{b+2,b-2}\, J_b(z) + A_{b+2,b}\, J_{b-2}(z) = 0\,. \qquad (366)$$

Na temelju jednačaba (360),(364),(365),(366) provest ćemo dokaz relacije (350) potpunom indukcijom.

Pretpostavimo, da za neki $s \geq 1$ vrijede jednadžbe

$$A_{b,b-1}\, J_{b+s}(z) - A_{b+s,b-1}\, J_b(z) + A_{b+s,b}\, J_{b-1}(z) = 0 \qquad (367)$$

$$A_{b,b-1}\, J_{b+s+1}(z) - A_{b+s+1,b-1}\, J_b(z) + A_{b+s+1,b}\, J_{b-1}(z) = 0\,. \qquad (368)$$

Za $s=1$ su te jednadžbe identične sa (360), (364) i prema tome ispravne. Dokažemo li, da iz njih slijedi

$$A_{b,b-1}\, J_{b+s+2}(z) - A_{b+s+2,b-1}\, J_b(z) + A_{b+s+2,b-1}\, J_{b-1}(z) = 0, \qquad (369)$$

to smo time dokazali potpunom indukcijom, da vrijedi (367) za svako $s \geq 1$.

Iz (360) slijedi

$$J_{b+s+2}(z) - \frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} J_{b+s+1}(z) + J_{b+s}(z) = 0 . \qquad (370)$$

Eliminacija veličine $J_{b+s}(z)$ i $J_{b+s+1}(z)$ iz (367),(368), (370) daje

$$A_{b,b-1} J_{b+s+2}(z) - (\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} A_{b+s+1,b-1} - A_{b+s,b-1}) J_b(z) +$$

$$+ (\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} A_{b+s+1,b} - A_{b+s,b}) J_{b-1}(z) = 0 . \qquad (371)$$

Na temelju (351) daje jednostavan račun, da vrijedi

$$\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} A_{b+s+1,b-1} - A_{b+s,b-1} = A_{b+s+2,b-1} . \qquad (372)$$

Kod provedbe ove verifikacije treba na to paziti, da izraz u uglatoj zagradi (gornja granica sume) može biti cio ili polucio.

Ako u (372) pišemo <u>b+1</u> umjesto <u>b</u> i <u>s-1</u> umjesto <u>s</u>, dobijemo

$$\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} A_{b+s+1,b} - A_{b+s,b} = A_{b+s+2,b-1} . \qquad (373)$$

Uvrstimo li (372) i (373) u (371), dobijemo (369), pa smo time dokazali, da (367) vrijedi za svaki $s \geq 1$.

Pretpostavimo dalje, da za neki $s \geq 1$ vrijede jednadžbe

$$A_{b,b-2} J_{b+s}(z) - A_{b+s,b-2} J_b(z) + A_{b+s,b} J_{b-2}(z) = 0 \qquad (374)$$

$$A_{b,b-2} J_{b+s+1}(z) - A_{b+s+1,b-2} J_b(z) + A_{b+s+1,b} J_{b-2}(z) = 0 . \qquad (375)$$

Za $s=1$ ove su jednadžbe identične sa (365),(366) i prema tome ispravne. Moramo opet pokazati, da se može provesti povišenje od <u>s</u>.

Eliminiramo iz (374),(375),(370) veličine $J_{b+s}(z)$ i $J_{b+s+1}(z)$ i dobijemo

$$A_{b,b-2}\, J_{b+s+2}(z) - \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} A_{b+s+1,b-2} - A_{b+s,b-2}\right) J_b(z) +$$

$$+ \left(\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} A_{b+s+1,b} - A_{b+s,b}\right) J_{b-2}(z) = 0 \quad . \tag{376}$$

Ako u (372) pišemo $\underline{b-1}$ umjesto $\underline{b}$ i $\underline{s+1}$ umjesto $\underline{s}$, slijedi

$$\frac{b+s+1}{\frac{z}{2}} A_{b+s+1,b-2} - A_{b+s,b-2} = A_{b+s+2,b-2} \quad . \tag{377}$$

Uvrstimo (377) i (373) u (376) i dobijemo

$$A_{b,b-2}\, J_{b+s+2}(z) - A_{b+s+2,b-2}\, J_b(z) + A_{b+s+2,b}\, J_{b-2}(z) = 0 \; . \tag{378}$$

Povišenje od $\underline{s}$ je time provedeno, pa je time dokazano, da jednadžba (374) vrijedi za svaki $s \geq 1$.

Pretpostavimo sad, da za $1 \leq t \leq b-2$ vrijede jednadžbe

$$A_{b,b-t}\, J_{b+s}(z) - A_{b+s,b-t}\, J_b(z) + A_{b+s,b}\, J_{b-t}(z) = 0 \tag{379}$$

$$A_{b,b-t-1}\, J_{b+s}(z) - A_{b+s,b-t-1}\, J_b(z) + A_{b+s,b}\, J_{b-t-1}(z) = 0 \; . \tag{380}$$

Za $t=1$ te su jednadžbe identične sa (367) i (374), koje smo već dokazali. Treba pokazati, da je moguće povišenje od $\underline{t}$.

Iz (360) slijedi

$$J_{b-t}(z) - \frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} J_{b-t-1}(z) + J_{b-t-2}(z) = 0 \tag{381}$$

Eliminacija veličina $J_{b-t}(z)$ i $J_{b-t-1}(z)$ iz (379),(380),(381) daje

$$\left(\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} A_{b,b-t-1} - A_{b,b-t}\right) J_{b+s}(z) -$$

$$- \left(\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} A_{b+s,b-t-1} - A_{b+s,b-t}\right) J_b(z) + A_{b+s,b}\, J_{b-t-2}(z) = 0 \; . \tag{382}$$

Analogno kao kod (372) može se na temelju (351) računom provjeriti, da vrijedi

$$\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} A_{b,b-t-1} - A_{b,b-t} = A_{b,b-t-2} \quad . \tag{383}$$

Dalje, ako pišemo <u>b+s</u> mjesto <u>b</u> i <u>t+s</u> mjesto <u>t</u>, slijedi

$$\frac{b-t-1}{\frac{z}{2}} A_{b+s,b-t-1} - A_{b+s,b-t} = A_{b+s,b-t-2} \quad . \tag{384}$$

Uvrstimo li (383) i (384) u (382), dobijemo

$$A_{b,b-t-2}\, J_{b+s}(z) - A_{b+s,b-t-2}\, J_b(z) + A_{b+s,b}\, J_{b-t-2}(z) = 0 \ . \tag{385}$$

Time je povišenje od <u>t</u> provedeno, pa je time dokazano, da jednadžba (379) vrijedi za svaki <u>t</u>, za koji je $1 \leq t \leq b-2$. Medjutim, i jednadžba (385) vrijedi uz taj uvjet, t.j. ona vrijedi na pr. za $t = b-3$ i $t = b-2$, a ti su slučajevi identični s jednadžbom (379) za $t = b-1$, odnosno $t = b$, tako da (379) vrijedi za $1 \leq t \leq b$.

Budući da je (379) samo drukčije napisana jednadžba (350), to je time dokaz proveden.

Jednadžbe (350) i (355) vrijede i onda, ako su a,b,c tri kompleksna broja, koja zadovoljavaju uvjet, da su njihove razlike realni cijeli brojevi, i da nijedan od ta tri broja nije realan negativan broj. Formule (356),(357),(358) će onda glasiti:

$$M_{b,c} = \operatorname{sgn}(b-c) \sum_{w=0}^{\left[\frac{p-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w\,(p-w-1)!\ \Gamma\left(\frac{b+c+p}{2} - w\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{p-2w-1}\ w!\ (p-2w-1)!\ \Gamma\left(\frac{b+c-p}{2} + w+1\right)} \tag{386}$$

$$M_{c,a} = \operatorname{sgn}(c-a) \sum_{w=0}^{\left[\frac{q-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w\,(q-w-1)!\ \Gamma\left(\frac{c+a+q}{2} - w\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{q-2w-1}\ w!\ (q-2w-1)!\ \Gamma\left(\frac{c+a-q}{2} + w+1\right)} \tag{387}$$

$$M_{a,b} = \operatorname{sgn}(a-b) \sum_{w=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w \, (r-w-1)! \; \Gamma\left(\frac{a+b+r}{2} - w\right)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{r-2w-1} \, w! \, (r-2w-1)! \; \Gamma\left(\frac{a+b-r}{2} + w+1\right)} \, . \qquad (388)$$

Ako hoćemo oblik relacije prema (350), treba biti ispunjen analogon uvjeta (349). Ako su α, β, γ realni dijelovi brojeva a, b, c, onda taj analogon glasi

$$\alpha > \beta > \gamma \qquad (389)$$

Formule (351),(352),(353) za taj slučaj glase:

$$A_{b,c} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{b-c-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w \, (b-c-w-1)! \; \Gamma(b-w)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{b-c-2w-1} \, w! \, (b-c-2w-1)! \; \Gamma(c+w+1)} \qquad (390)$$

$$A_{a,c} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{a-c-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w \, (a-c-w-1)! \; \Gamma(a-w)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{a-b-2w-1} \, w! \, (a-b-2w-1)! \; \Gamma(b+w+1)} \qquad (391)$$

$$A_{a,b} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{a-b-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w \, (a-b-w-1)! \; \Gamma(a-w)}{\left(\frac{z}{2}\right)^{a-b-2w-1} \, w! \, (a-b-2w-1)! \; \Gamma(b+w+1)} \, . \qquad (392)$$

Dokaz se opet vodi na temelju rekurzione jednadžbe (360), koja vrijedi i za kompleksne indekse Besselovih funkcija. Kod verifikacije jednačaba (372) i (383) služit ćemo se, po potrebi, karakterističnim svojstvom gama-funkcije

$$\Gamma(z+1) = z\,\Gamma(z) \, . \qquad (393)$$

Vrijedi još spomenuti, da su kvocijenti od dvije gama-funkcije u jednadžbama (386),(387),(388),(390),(391),(392) cijeli realni ?? brojevi, što lako slijedi pomoću (393) iz pretpostavke, da su razlike brojeva a, b, c cijeli brojevi.

Pribilježimo sad najvažniji specijalni slučaj jednadžbe (350), a to je $a = n$, $b = 1$, $c = 0$:

$$J_n(z) = J_1(z) \sum_{w=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w \left[(n-w-1)!\right]^2}{(\frac{z}{2})^{n-2w-1} (w!)^2 (n-2w-1)!} -$$

$$- J_o(z) \sum_{w=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(-1)^w (n-w-2)! \, (n-w-1)!}{(\frac{z}{2})^{n-2w-2} w! \, (w+1)! \, (n-2w-2)!} . \tag{394}$$

Ova formula dopušta zanimljivu primjenu (koja nema veze s našim kasnijim razlaganjima) na izračunavanje jedne specijalne kontinuante:

Pišimo u rekurzionoj jednadžbi (341) za Besselove funkcije $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} K_{n-1}$ mjesto $J_n(z)$ i $\frac{1}{x}$ mjesto $\frac{z}{2}$, to ova prelazi u

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} K_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} nx \, K_{n-1} - (-1)^{\frac{(n-2)(n-3)}{2}} K_{n-2} \tag{395}$$

ili

$$K_n = (-1)^{n-1} nx \, K_{n-1} + K_{n-2} \tag{396}$$

Formula (394) daje, ako još $\underline{n}$ nadomjestimo sa $\underline{n+1}$,

$$K_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left\{ K_o \sum_{w=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^w \left[(n-w)!\right]^2 x^{n-2w}}{(w!)^2 (n-2w)!} + \right.$$

$$\left. + K_{-1} \sum_{w=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (n-w-1)! \, (n-w)! \, x^{n-2w-1}}{w! \, (w+1)! \, (n-2w-1)!} \right\} . \tag{397}$$

Stavimo sad

$$K_{-1} = 0, \quad K_o = 1 , \tag{398}$$

to se na temelju (396) može K_n za $n \geq 1$ izraziti na poznati način kao n-redna determinanta:

$$K_n = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & -2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 3x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -4x & \dots & 0 \\ & & \dots\dots & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & (-1)^{n-1}nx \end{vmatrix} . \qquad (399)$$

Uvrstimo li (398) u (397), dobijemo

$$K_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{w=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^w \left[(n-w)!\right]^2 x^{n-2w}}{(w!)^2 (n-2w)!} . \qquad (400)$$

Time je dakle kontinuanta (399) razvijena po potencijama od <u>x</u>. *)

Moramo još spomenuti jedan važni specijalni slučaj jednadžbe (350), za koji su već poznate formule. Stavimo jedamput

$$a = k + \frac{1}{2}, \quad b = \frac{1}{2}, \quad c = -\frac{1}{2} \qquad (401)$$

a drugi put

$$a = \frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{2}, \quad c = -(k + \frac{1}{2}) \qquad (402)$$

i sjetimo se poznatih formula

$$J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z \qquad (403)$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z \qquad (404)$$

$$\Gamma(k + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2k}} \frac{(2k)!}{k!} \quad \text{(vidi (204))} \qquad (405)$$

$$\Gamma(-k + \frac{1}{2}) = (-1)^k \sqrt{\pi}\, 2^{2k} \cdot \frac{k!}{(2k)!} \quad \text{(vidi (205).} \qquad (406)$$

Dobijemo na temelju (390),(391),(392) ove dvije formule:

---

*) Ova kontinuanta potpada pod definiciju kontinuante, kako se nalazi u <u>Kowalewski</u>, Determinantentheorie, Leipzig 1909, str. 152. Nešto je šira definicija kontinuante u <u>Perron</u>, Kettenbrüche, Leipzig u. Berlin 1929, str. 11, (15). Na temelju jednačaba (21), str.12. Perronove knjige, koje odgovaraju našoj rekurzionoj jednadžbi (359), i pomoću (23) str. 14. i (36), str. 18. rečene knjige nije teško vidjeti, da su i naši izrazi (351),(352),(353) kontinuante, i da bi se na pr. mjesto našeg $A_{a,b}$ prema Perronovim oznakama moglo pisati

$$A_{a-b-2,b} = K\begin{pmatrix} -1, & -1, \dots, -1 \\ \frac{2(b+1)}{z}, & \frac{2(b+2)}{z}, \dots, \frac{2(a-1)}{z} \end{pmatrix} .$$

Naš izraz (353) daje dakle razvoj te kontinuante po potencijama od <u>z</u>.

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin z \sum_{w=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^w (2k-2w)!}{(2z)^{k-2w} (k-2w)! (2w)!} - \right.$$

$$\left. - \cos z \sum_{w=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (2k-2w-1)!}{(2z)^{k-2w-1} (k-2w-1)! (2w+1)!} \right\} \quad (407)$$

$$J_{-(k+\frac{1}{2})}(z) = (-1)^k \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos z \sum_{w=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^w (2k-2w)!}{(2z)^{k-2w} (k-2w)! (2w)!} + \right.$$

$$\left. + \sin z \sum_{w=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (2k-2w-1)!}{(2z)^{k-2w-1} (k-2w-1)! (2w+1)!} \right\} \quad (408)$$

gdje je k pozitivan cio broj.

Stavimo li

$$n = \pm (k+ \frac{1}{2}) \quad (409)$$

to možemo ove dvije formule sažeti u jednu:

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin \left[z - \frac{\pi}{4} (2n-2k-1) \right] \sum_{w=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^w (2k-2w)!}{(2z)^{k-2w} (k-2w)! (2w)!} - \right.$$

$$\left. - \cos \left[z - \frac{\pi}{4} (2n-2k-1) \right] \sum_{w=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w (2k-2w-1)!}{(2z)^{k-2w-1} (k-2w-1)! (2w+1)!} \right\}. \quad (410)$$

Poznat je jedan drugi oblik ove formule:*)

$$J_n(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos (z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) U_n(z) + \sin (z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) V_n(z) \right\} \quad (411)$$

gdje je

---

*) Gray, Mathews and Macrobert, l.c. str. 18.

$$U_n(z) = 1 + \sum_{w=1} \frac{(-1)^w (4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\ldots\left[4n^2-(4w-1)^2\right]}{(2w)!\; 2^{6w}\; z^{2w}} \tag{412}$$

$$V_n(z) = \sum_{w=1} \frac{(-1)^w (4n^2-1^2)(4n^2-3^2)\ldots\left[4n^2-(4w-3)^2\right]}{(2w-1)!\; 2^{6w-3}\; z^{2w-1}} \tag{413}$$

gdje indeks sumacije ide dotle, dok se u brojnicima članova suma ne pojave faktori, koji su jednaki nuli.

Nije teško produkte u tim formulama izraziti pomoću faktorijela i dokazati, da je to samo drugi oblik formule (410).

Poznat je još jedan oblik, koji je bliži našim formulama (407),(408):*)

$$J_{k+\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \sin\left(z-\frac{\pi k}{2}\right) \sum_{v=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^v (k+2v)!}{(2v)!\,(k-2v)!\,(2z)^{2v}} + \right.$$

$$\left. + \cos\left(z-\frac{\pi k}{2}\right) \sum_{v=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^v (k+2v+1)!}{(2v+1)!\,(k-2v-1)!\,(2z)^{2v+1}} \right\} \tag{414}$$

$$J_{-(k+\frac{1}{2})}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \left\{ \cos\left(z+\frac{\pi k}{2}\right) \sum_{v=0}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{(-1)^v (k+2v)!}{(2v)!\,(k-2v)!\,(2z)^{2v}} - \right.$$

$$\left. - \sin\left(z+\frac{\pi k}{2}\right) \sum_{v=0}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{(-1)^v (k+2v+1)!}{(2v+1)!\,(k-2v-1)!\,(2z)^{2v+1}} \right\} \tag{415}$$

Da se pokaže istovjetnost s našim formulama (407), (408) treba sumaciju provesti obratnim slijedom, t.j. tako, da eksponent od <u>z</u> <u>pada, kad indeks sumacije</u> raste.

*) <u>R.O. Kuzmin</u>, Besselevi funkcii, Glavnaja redakcija obščetehničeskoi literaturi, Leningrad - Moskva, 1935. str. 59.

3. Izrazi za m-te derivacije funkcija $\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2})$ i $\Lambda_n[c(t-z)]$.

Prema (345) i (346) vrijedi:

$$\frac{\partial}{\partial z}\Lambda_n[c(t-z)] = \frac{c^2(t-z)}{2(n+1)}\Lambda_{n+1}[c(t-z)] \tag{416}$$

i

$$\frac{\partial}{\partial z}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = \frac{c^2 z}{2(n+1)}\Lambda_{n+1}(c\sqrt{t^2-z^2}) \,. \tag{417}$$

Diferenciramo li (416) m puta, dobijemo očito članove oblika $a(t-z)^p\Lambda_{n+q}[c(t-z)]$, ako kod diferenciranja Λ-funkcije derivaciju uvijek izrazimo prema (416). Ako smo do jednog od tih članova došli time, da smo u bilo kojem slijedu diferencirali po potenciji od $t-z$ svega w puta, a po Λ-funkciji svega $m-w$ puta, i ako uočimo, da diferenciranje po potenciji od $t-z$ snižava njezin eksponent za jednu jedinicu, a diferenciranje Λ-funkcije povisuje za jednu jedinicu eksponent potencije i red Λ-funkcije, to je jasno, da dotični član ima oblik $(-1)^w a_w(t-z)^{m-2w}\Lambda_{n+m-w}[c(t-z)]$. Dobivamo dakle

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}\Lambda_n[c(t-z)] = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}(-1)^w a_w(t-z)^{m-2w}\Lambda_{n+m-w}[c(t-z)] \,. \tag{418}$$

Gornja granica sume je odredjena time, da eksponent potencije od $t-z$ ne može postati negativan. Sasvim analogno razmatranje može se provesti na temelju (417), pa se dolazi do jednadžbe

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_w z^{m-2w}\Lambda_{n+m-w}(c\sqrt{t^2-z^2}) \tag{419}$$

gdje su a_w isti koeficijenti kao u (418). Da te koeficijente odredimo, provest ćemo ovo razmatranje:

Razvijemo $\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2})$ prema (340) po $c\sqrt{t^2-z^2}$ u red potencija i nadomjestimo potencije od t^2-z^2 njihovim binomnim razvojima:

$$\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n!\sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-1)^w(\frac{c}{2})^{2w}\sum\limits_{v=0}^{w}(-1)^v\binom{w}{v}t^{2w-2v}z^{2v}}{w!\,(n+w)!} \tag{420}$$

ili

$$\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n!\sum_{w=0}^{\infty}\sum_{v=0}^{w}\frac{(-1)^{w+v}\,(\frac{c}{2})^{2w}\,t^{2w-2v}\,z^{2v}}{v!\,(w-v)!\,(n+w)!}\ . \tag{421}$$

Razlikujemo slučajeve takog i lihog m ~~i~~ stavljamo u prvom slučaju

$$m = 2r \tag{422}$$

a u drugom slučaju

$$m = 2r+1\ . \tag{423}$$

Diferenciramo li (421) m puta, dobijemo prema (422) odnosno (423)

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n!\sum_{w=r}^{\infty}\sum_{v=r}^{w}\frac{(-1)^{w+v}(\frac{c}{2})^{2w}(2v)!\ t^{2w-2v}z^{2v-2r}}{(2v-2r)!\ v!\ (w-v)!\ (n+w)!} \tag{424}$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n!\sum_{w=r+1}^{\infty}\sum_{v=r+1}^{w}\frac{(-1)^{w+v}(\frac{c}{2})^{2w}(2v)!\,t^{2w-2v}z^{2v-2r-1}}{(2v-2r-1)!\ v!\ (w-v)!\ (n+w)!} \tag{425}$$

Uvedemo li sad nove indekse sumacije

$$\bar{v} = v-r-1 \tag{426}$$

$$\bar{w} = w-r-1\ , \tag{427}$$

to dobijemo:

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}}\,\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n!\left(\frac{c}{2}\right)^{2r}\sum_{\overline{w}=0}^{\infty}\;\sum_{\overline{v}=0}^{\overline{w}}\frac{(-1)^{\overline{w}+\overline{v}}\left(\frac{c}{2}\right)^{2\overline{w}}(2\overline{v}+2r)!\,t^{2\overline{w}-2\overline{v}}z^{2\overline{v}}}{(2\overline{v})!\,(\overline{v}+r)!\,(\overline{w}-\overline{v})!\,(n+r+\overline{w})!} \tag{428}$$ 239

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}}\,\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n!\left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1}\sum_{\overline{w}=0}^{\infty}\;\sum_{\overline{v}=0}^{\overline{w}}\frac{(-1)^{\overline{w}+\overline{v}}\left(\frac{c}{2}\right)^{2\overline{w}+1}(2\overline{v}+2r+2)!\,t^{2\overline{w}-2\overline{v}}z^{2\overline{v}+1}}{(2\overline{v}+1)!(\overline{v}+r+1)!\,(\overline{w}-\overline{v})!\,(n+r+\overline{w}+1)!} \tag{429}$$ 240

Stavimo $z=t$:

$$\left\{\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}}\,\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2})\right\}_{z=t} = n!\left(\frac{c}{2}\right)^{2r}\sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-1)^{w}\left(\frac{c}{2}\right)^{2w}A_w t^{2w}}{(n+r+w)!}, \tag{430}$$ 241

gdje je

$$A_w = \sum_{v=0}^{w}\frac{(-1)^v\,(2v+2r)!}{(2v)!\,(v+r)!\,(w-v)!} \tag{431}$$ 242

$$\left\{\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}}\,\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2})\right\}_{z=t} = n!\left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1}\sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-1)^{w}\left(\frac{c}{2}\right)^{2w+1}B_w t^{2w+1}}{(n+r+w+1)!}, \tag{432}$$ 243

gdje je

$$B_w = \sum_{v=0}^{w}\frac{(-1)^v\,(2v+2r+2)!}{(2v+1)!\,(v+r+1)!\,(w-v)!}\;. \tag{433}$$ 244

Prema (140),(141),(142),(143) vrijedi:

$$A_w = \begin{cases} 0 & \text{za } w > r \qquad (434) \\ \dfrac{(-1)^w\,2^{2w}\,(2r)!}{(2w)!\,(r-w)!} & \text{za } w \leq r \qquad (435) \end{cases}$$ 245

$$B_w = \begin{cases} 0 & \text{za } w > r \qquad (436) \\ \dfrac{(-1)^w\,2^{2w+1}\,(2r+1)!}{(2w+1)!\,(r-w)!} & \text{za } w \leq r \qquad (437) \end{cases}$$ 246

Uvrštenje u (430) i (432) daje

$$\left\{\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2})\right\}_{z=t} = n!\ (\tfrac{c}{2})^{2r}\ (2r)! \sum_{w=0}^{r} \frac{c^{2w}\ t^{2w}}{(2w)!\ (r-w)!\ (n+r+w)!} \tag{438}$$

$$\left\{\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2})\right\}_{z=t} = n!\ (\tfrac{c}{2})^{2r+1}\ (2r+1)! \sum_{w=0}^{r} \frac{c^{2w+1}\ t^{2w+1}}{(2w+1)!\ (r-w)!\ (n+r+w+1)!} \tag{439}$$

Uvedemo li novi indeks sumacije i to

$$\overline{w} = r-w \tag{450}$$

to možemo obje formule sažeti u jednu upotrijebivši (422),(423):

$$\left\{\frac{\partial^{m}}{\partial z^{m}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2})\right\}_{z=t} = n!\ (\tfrac{c}{2})^{m}\ m! \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{c^{m-2w}\ t^{m-2w}}{(m-2w)!\ w!\ (n+m-w)!}\ . \tag{451}$$

Stavimo li u (419) z=t i uočimo, da je prema (340)

$$\Lambda_n(0) = 1\ , \tag{452}$$

to slijedi

$$\left\{\frac{\partial^{m}}{\partial z^{m}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2})\right\}_{z=t} = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} a_w\ t^{m-2w}\ . \tag{453}$$

Poredba od (451) i (453) daje tražene koficijente a_w:

$$a_w = \frac{n!\ m!\ c^{2m-2w}}{2^m\ w!\ (m-2w)!\ (m+n-w)!}\ . \tag{454}$$

Uvrstimo li to u (418) i (419), dobijemo konačno:

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}\Lambda_n\left[c(t-z)\right] = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^w\, n!\, m!\, c^{2m-2w}\,(t-z)^{m-2w}\,\Lambda_{n+m-w}\left[c(t-z)\right]}{2^m\, w!\,(m-2w)!\,(n+m-w)!}$$

(455) 254

$$\frac{\partial^m}{\partial z^m}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{n!\, m!\, c^{2m-2w}\, z^{m-2w}\,\Lambda_{n+m-w}(c\sqrt{t^2-z^2})}{2^m\, w!\,(m-2w)!\,(n+m-w)!} \quad . \qquad (456)$$ 255

Stavimo li u (456)

$$z = i\,\bar{t}\,, \qquad t = i\,\bar{z} \qquad (457)$$ 256

i naknadno ~~opet~~ ispustimo poprečne crte nad z i t, dobijemo:

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = \sum_{w=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{m-w}\, n!\, m!\, c^{2m-2w}\, t^{m-2w}\,\Lambda_{n+m-w}(c\sqrt{t^2-z^2})}{2^m\, w!\,(m-2w)!\,(n+m-w)!} \; .$$

(458) 257

Zanimljive su još dvije relacije, koje istina kasnije ne ćemo trebati: Budući da se u (428) i (429) radi o apsulutno konvergentnim redovima, to možemo članove poredati kako hoćemo. Uvedimo dakle novi indeks sumacije ~~mjesto w~~:

$$\bar{w} = w+v \, , \qquad (459)$$ 258

Slijedi:

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n!\left(\frac{c}{2}\right)^{2r}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v}(2v+2r)!\, z^{2v}}{(2v)!\,(v+r)!}\sum_{\bar{w}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\bar{w}}\left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}} t^{2\bar{w}}}{\bar{w}!\,(n+r+v+\bar{w})!}$$

(460) 259

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n!\left(\frac{c}{2}\right)^{2r+1}\sum_{v=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{c}{2}\right)^{2v+1}(2v+2r+2)!\, z^{2v+1}}{(2v+1)!\,(v+r+1)!}\sum_{\bar{w}=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\bar{w}}\left(\frac{c}{2}\right)^{2\bar{w}} t^{2\bar{w}}}{\bar{w}!\,(n+r+v+\bar{w}+1)!}$$

(461) 260

ili obzirom na (340):

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial z^{2r}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n!\,(\tfrac{c}{2})^{2r} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\frac{c}{2})^{2v}\,(2v+2r)!\,z^{2v}}{(2v)!\,(v+r)!\,(n+r+v)!} \Lambda_{n+r+v}(ct) \tag{462}$$

461

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial z^{2r+1}} \Lambda_n(c\sqrt{t^2-z^2}) = n!\,(\tfrac{c}{2})^{2r+1} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(\frac{c}{2})^{2v+1}(2v+2r+2)!\,z^{2v+1}}{(2v+1)!(v+r+1)!(n+r+v+1)!} \Lambda_{n+r+v+1}(ct) \tag{463}$$

462

Ove formule su razvoji po potencijama od $\underline{z}$, [illegible]

[illegible][93] [illegible]

[93] [illegible]

4. Redukcija integrala $\int\limits_X^t x^n \Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx$.

Ako u (343) stavimo $n=1$, $z=\sqrt{t^2-x^2}$ i jednadžbu pomnožimo sa x^n, dobijemo

$$x^n \Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2}) =$$

$$= x^n \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2}) + \frac{c^2x^{n+2}}{8}\Lambda_2(c\sqrt{t^2-x^2}) - \frac{c^2t^2x^n}{8}\Lambda_2(c\sqrt{t^2-x^2}) \qquad (464)$$ 263

Dalje slijedi iz (346)

$$x\Lambda_{n+1}(c\sqrt{t^2-x^2}) = \frac{2(n+1)}{c^2}\frac{d}{dx}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) \qquad (465)$$ 264

i prema tome parcijalnom integracijom

$$\int\limits_X^t x^n \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2})dx =$$

$$= \frac{2t^{n-1}}{c^2} - \frac{2X^{n-1}}{c^2}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{2(n-1)}{c^2}\int\limits_X^t x^{n-2}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx \qquad (466)$$ 265

$$\int\limits_X^t x^{n+2}\Lambda_2(c\sqrt{t^2-x^2})dx =$$

$$= \frac{4t^{n+1}}{c^2} - \frac{4X^{n+1}}{c^2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{4(n+1)}{c^2}\int\limits_X^t x^n\Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2})dx =$$

$$= \frac{4t^{n+1}}{c^2} - \frac{4X^{n+1}}{c^2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{8(n+1)t^{n-1}}{c^4} + \frac{8(n+1)X^{n-1}}{c^4}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-X^2}) +$$

$$+ \frac{8(n+1)(n-1)}{c^4}\int\limits_X^t x^{n-2}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx \qquad (467)$$ 266

$$\int_X^t x^n \Lambda_2(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx = \frac{4t^{n-1}}{c^2} - \frac{4X^{n-1}}{c^2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{8(n-1)t^{n-3}}{c^4} +$$

$$+ \frac{8(n-1)X^{n-3}}{c^4}\Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}) + \frac{8(n-1)(n-3)}{c^4}\int_X^t x^{n-4}\Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx \;. \tag{468}$$ 267

Pri tom za $n \geq 4$ vrijede sve tri jednadžbe (466),(467),(468). Za $n=3$ otpada u jednadžbi (468) zadnji član, dok ostale dvije vrijede nepromijenjeno, za $n=2$ jednadžba (466) vrijedi nepromijenjeno, isto tako (467), dok umjesto (468) dolazi

$$\int_X^t x^2 \Lambda_2(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx =$$

$$= \frac{4t}{c^2} - \frac{4X}{c^2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{4}{c^2}\int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx \tag{469}$$ 268

Za $n=1$ u (466) otpada zadnji član, isto tako u (467), dok u (468) otpadaju zadnja tri člana.

Integriramo li (464) po $\underline{x}$ od $\underline{X}$ do $\underline{t}$ i nadomjestimo integrale na desnoj strani pomoću (466),(467),(468), odnosno (469), dobijemo za $n=1$:

$$\int_X^t x\,\Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx = \frac{t^2-X^2}{2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) \;, \tag{470}$$ 269

za
Za $n=2$:

$$\int_X^t x^2\Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx = \frac{1}{c^2}\int_X^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx + \frac{t^2}{2}\int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx +$$

$$+ \frac{X(t^2-X^2)}{2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) + \frac{X}{c^2}\Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{t}{c^2} \;, \tag{471}$$ 270

Za $n=3$, uzevši još u obzir (470):

$$\int_X^t x^3 \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})dx = \frac{4}{c^2}\int_X^t x\,\Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})dx - \frac{2(t^2-X^2)}{c^2}\Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}) +$$

$$+\frac{X^2(t^2-X^2)}{2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) = \left(\frac{2}{c^2}+\frac{X^2}{2}\right)(t^2-X^2)\,\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{2(t^2-X^2)}{c^2}\Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}) \tag{472}$$

Za $n \geq 4$:

$$\int_X^t x^n \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})dx = \frac{(n-1)^2}{c^2}\int_X^t x^{n-2}\Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})dx -$$

$$-\frac{(n-1)(n-3)t^2}{c^2}\int_X^t x^{n-4}\Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})dx - \frac{(n-1)X^{n-3}(t^2-X^2)}{c^2}\Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}) +$$

$$+\frac{X^{n-1}(t^2-X^2)}{2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2})\,. \tag{473}$$

Razmotrimo sad nešto općenitije slijed veličina $Q_0, Q_1, Q_2, \ldots$, od kojih su prve četiri, t.j. Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, zadane, dok su ostale odredjene jednadžbom rekurzije ~~rekurzionom jednadžbom~~

$$Q_n = \frac{(n-1)^2}{c^2}Q_{n-2} - \frac{(n-1)(n-3)t^2}{c^2}Q_{n-4} + (n-1)X^{n-3}R + X^{n-3}T \tag{474}$$

gdje su R i T zadane veličine. Jasno je, da Q_1 i Q_3 odredjuju sve Q_n s lihim n, dok Q_0 i Q_2 odredjuju sve Q_n s takim n. Stavimo li za lihi n

$$n = 2m+1\,, \tag{475}$$

to (474) dobije oblik

$$Q_{2m+1} = \frac{4m^2}{c^2}Q_{2m-1} - \frac{4m(m-1)t^2}{c^2}Q_{2m-3} + 2mX^{2m-2}R + X^{2m-2}T\,. \tag{476}$$

Za taki $\underline{n}$ stavimo

$$n = 2m \tag{477}$$ 276

i dobijemo mjesto (474) 273

$$Q_{2m} = \frac{(2m-1)^2}{c^2} Q_{2m-2} - \frac{(2m-1)(2m-3)t^2}{c^2} Q_{2m-4} + (2m-1)X^{2m-3}R + X^{2m-3}T . \tag{478}$$ 277

Prema rečenom (474) 273 vrijedi za $n \geqq 4$, tako da (476) 275 i (478) 277 vrijede za $m \geqq 2$.

Tvrdimo, da za $m \geqq 2$ vrijede ove direktne formule:

$$\begin{aligned} Q_{2m+1} = {} & Q_1 \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s \, 2^{2m-2s} \, m! \, (m-s-1)! \, (m-s+1)! \, t^{2s}}{(m-2s)! \, (s-1)! \, (s+1)! \, c^{2m-2s}} + \\ & + Q_3 \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s \, 2^{2m-2s-2} \, m! \, (m-s-1)! \, (m-s)! \, t^{2s}}{(m-2s-1)! \, s! \, (s+1)! \, c^{2m-2s-2}} + \\ & + \sum_{\substack{r,s \\ r \geqq 2 \\ s \geqq 0}}^{r+2s \leqq m} \left(R + \frac{T}{2r}\right) \frac{(-1)^s \, 2^{2m-2r-2s+1} \, m! \, (m-r-s)! \, (m-s)! \, X^{2r-2} \, t^{2s}}{(m-r-2s)! \, (r-1)! \, s! \, (r+s)! \, c^{2m-2r-2s}} \end{aligned} \tag{479}$$ 278

$$\begin{aligned} Q_{2m} = {} & Q_0 \sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{s \, (-1)^s \, (2m)! \, (2m-2s+1)! \, t^{2s}}{(m-s) \, 2^{2m-2s} \, m! \, (m-2s)! \, (2s+1)! \, c^{2m-2s}} + \\ & + Q_2 \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s \, (2m)! \, (2m-2s-1)! \, t^{2s}}{2^{2m-2s-1} \, m! \, (m-2s-1)! \, (2s+1)! \, c^{2m-2s-2}} + \\ & + \sum_{\substack{r,s \\ r \geqq 2 \\ s \geqq 0}}^{r+2s \leqq m} \left(R + \frac{T}{2r-1}\right) \frac{(-1)^s \, (m-r-s)! \, (2m)! \, (r-1)! \, (2m-2s)! \, (r+s)! \, X^{2r-3} \, t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1} \, (m-r-2s)! \, m! \, (2r-2)! \, (m-s)! \, (2r+2s)! \, s! \, c^{2m-2r-2s}} \end{aligned} \tag{480}$$ 279

Stavimo li u tim formulama $m = 2$, to je lako vidjeti, da se za taj slučaj podudaraju s formulama (476), (478), t.j. glase:

$$Q_5 = \frac{16}{c^2} Q_3 - \frac{8t^2}{c^2} Q_1 + 4X^2R + X^2T \qquad (481)$$

$$Q_4 = \frac{9}{c^2} Q_2 - \frac{3t^2}{c^2} Q_o + 3XR + XT \qquad (482)$$

Dalje za $m = 3$ formule (476) i (478) uz primjenu od (481) i (482) daju:

$$Q_7 = Q_3\left(\frac{576}{c^4} - \frac{24t^2}{c^2}\right) - \frac{288t^2}{c^4} Q_1 + R\left(\frac{144X^2}{c^2} + 6X^4\right) + T\left(\frac{36X^2}{c^2} + X^4\right) \qquad (483)$$

$$Q_6 = Q_2\left(\frac{225}{c^4} - \frac{15t^2}{c^2}\right) - \frac{75t^2}{c^4} Q_o + R\left(\frac{75X}{c^2} + 5X^3\right) + T\left(\frac{25X}{c^2} + X^3\right) \qquad (484)$$

Lako je vidjeti, da i (479) i (480) za $m=3$ daju te iste izraze. Formule (479),(480) su dakle ispravne za $m=2$ i $m=3$. Treba još dokazati, da za $m \geq 4$ zadovoljavaju ~~rekurzione~~ jednadžbe (476),(478). Provest ćemo taj dokaz za (479).

Uvrstimo izraz (479) u (476) i uzmimo najprije u obzir članove s Q_1. Dobijemo

$$\sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s \, 2^{2m-2s} \, m! \, (m-s-1)! \, (m-s+1)! \, t^{2s}}{(m-2s)! \, (s-1)! \, (s+1)! \, c^{2m-2s}} =$$

$$= \frac{4m^2}{c^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2}(m-1)!(m-s-2)!(m-s)!t^{2s}}{(m-2s-1)!(s-1)!(s+1)!c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ \frac{2m(2m-2)}{c^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s \, 2^{2m-2s-2} \, (m-2)! \, (m-s-2)!(m-s)! \, t^{2s}}{(m-2s)! \, (s-2)! \, s! \, c^{2m-2s-2}} \qquad (485)$$

pri čemu smo u zadnjoj sumi stavili $s=\bar{s}-1$ i naknadno ispustili poprečnu crtu nad $\underline{s}$. Time je postignuto, da eksponent od $\underline{t}$ u općem članu svih triju suma bude isti. Pretpostavimo sad

$$2 \leq s \leq \frac{m-1}{2} \tag{486}$$ 285

i svedimo opće članove suma na zajednički nazivnik $(m-2s)!(s-1)!(s+1)!c^{2m-2s}$. Brojnici onda daju

$$(-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-1)!(m-s+1)!t^{2s} = 4m^2(m-2s)(-1)^s 2^{2m-2s-2}(m-1)!(m-s-2)!\cdot$$
$$\cdot(m-s)!t^{2s} + 2m(2m-2)(-1)^s(s-1)(s+1)2^{2m-2s-2}(m-2)!(m-s-2)!(m-s)!t^{2s} . \tag{487}$$ 286

Podijelimo li s $(-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-2)!(m-s)!t^{2s}$, dobijemo

$$(m-s-1)(m-s+1) = m(m-2s) + (s-1)(s+1) \tag{488}$$ 287

što je ispravno. Za $s=1$ posljednja suma ne pridonosi ništa, a ostale dvije daju

$$-\frac{2^{2m-2}m!(m-2)!m!t^2}{(m-2)!0!2!c^{2m-2}} = -\frac{4m^2 2^{2m-4}(m-1)!(m-3)!(m-1)!t^2}{(m-3)!0!2!c^{2m-2}} \tag{489}$$ 288

što je ispravno. Za slučaj takog $\underline{m}$ može biti $s=\frac{m}{2}=p$, pa u tom slučaju prva suma desno u (485) ne pridonosi ništa, a druge dvije daju

$$\frac{(-1)^p 2^{2p}(2p)!(p-1)!(p+1)!t^{2p}}{0!(p-1)!(p+1)!c^{2p}} = \frac{4p(4p-2)(-1)^p 2^{2p-2}(2p-2)!(p-2)!p!t^{2p}}{0!(p-2)!p!c^{2p}} \tag{490}$$ 289

što je ispravno. Jednadžba (485) dakle vrijedi.

Uzmimo sad u obzir članove s Q_3 :

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} m!(m-s-1)!(m-s)!t^{2s}}{(m-2s-1)!s!(s+1)!c^{2m-2s-2}} +$$
$$+ \frac{4m^2}{c^2}\sum_{s=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-4}(m-1)!(m-s-2)!(m-s-1)!t^{2s}}{(m-2s-2)!s!(s+1)!c^{2m-2s-4}} +$$
$$+ \frac{2m(2m-2)}{c^2}\sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s-4}(m-2)!(m-s-2)!(m-s-1)!t^{2s}}{(m-2s-1)!(s-1)!s!c^{2m-2s-4}} . \tag{491}$$ 290

I ovdje smo u zadnjoj sumi stavili $s = \bar{s}-1$ i umjesto $\bar{s}$ opet pisali $\underline{s}$. Neka je

$$1 \leq s \leq \frac{m-2}{2} . \qquad (492) \quad 291$$

Svedemo opće članove na nazivnik $(m-2s-1)!s!(s+1)!c^{2m-2s-2}$.

Brojnici daju

$$(-1)^s 2^{2m-2s-2} m!(m-s-1)!(m-s)!t^{2s} = (m-2s-1)4m^2(-1)^s 2^{2m-2s-4}(m-1)!(m-s-2)! \cdot (m-s-1)!t^{2s} + 2m(2m-2)s(s+1)(-1)^s 2^{2m-2s-4}(m-2)!(m-s-2)!(m-s-1)!t^{2s}. \qquad (493) \quad 292$$

Razdijelimo sa $(-1)^s 2^{2m-2s-2} m!(m-s-2)!(m-s-1)!t^{2s}$, pa dobijemo

$$(m-s-1)(m-s) = (m-2s-1)m + s(s+1) \qquad (494) \quad 293$$

što je ispravno. Za $s=0$ dobijemo

$$\frac{2^{2m-2} m!(m-1)!m!}{(m-1)!0!1!c^{2m-2}} = \frac{4m^2 2^{2m-4}(m-1)!(m-2)!(m-1)!}{(m-2)!0!1!c^{2m-2}} \qquad (495) \quad 294$$

što je ispravno. Za slučaj lihog $\underline{m}$ može biti $s = \frac{m-1}{2} = p$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^p 2^{2p}(2p+1)!p!(p+1)!t^{2p}}{0!p!(p+1)!c^{2p}} = \frac{2(2p+1)4p(-1)^p 2^{2p-2}(2p-1)!(p-1)!p!t^{2p}}{0!(p-1)!p!c^{2p}} \qquad (496) \quad 295$$

što je ispravno. Jednadžba (491) 290 dakle vrijedi.

Uzmimo dalje u obzir članove sa $\underline{R}$:

$$\sum_{\substack{r,s \\ r\geq 2 \\ s\geq 0}}^{r+2s\leq m} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m!(m-r-s)!(m-s)!X^{2r-2}t^{2s}}{(m-r-2s)!(r-1)!s!(r+s)!c^{2m-2s}} =$$

$$= \frac{4m^2}{c^2} \sum_{\substack{r,s \\ r\geq 2 \\ s\geq 0}}^{r+2s\leq m-1} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1}(m-1)!(m-r-s-1)!(m-s-1)!X^{2r-2}t^{2s}}{(m-r-2s-1)!(r-1)!s!(r+s)!c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ \frac{4m(m-1)}{c^2} \sum_{\substack{r,s \\ r\geq 2 \\ s\geq 1}}^{r+2s\leq m} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1}(m-2)!(m-r-s-1)!(m-s-1)!X^{2r-2}t^{2s}}{(m-r-2s)!(r-1)!(s-1)!(r+s-1)!c^{2m-2s-2}} + 2mX^{2m-2}$$

$$(497) \quad 296$$

gdje je u zadnjoj sumi opet stavljeno $s = \bar{s}-1$ i zatim mjesto $\bar{s}$ pisano $\underline{s}$. Neka je

$$2 \leq r \leq m-3 \qquad (498)\ 297$$

$$1 \leq s \leq \frac{m-r-1}{2} \qquad (499)\ 298$$

dakle

$$r+2s \leq m-1 \ . \qquad (500)\ 299$$

Svedemo opće članove suma u (497) 296 na zajednički nazivnik $(m-r-2s)!(r-1)!s!(r+s)!c^{2m-2s}$. Brojnici daju:

$$(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m!(m-r-s)!(m-s)!X^{2r-2}t^{2s} =$$
$$4m^2(m-r-2s)(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1}(m-1)!(m-r-s-1)!(m-s-1)!X^{2r-2}t^{2s} +$$
$$+ 4m(m-1)s(r+s)(-1)^s 2^{2m-2r-2s-1}(m-2)!(m-r-s-1)!(m-s-1)!X^{2r-2}t^{2s} \ .$$

(501) 300

Dioba sa $(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1} m!(m-r-s-1)!(m-s-1)!X^{2r-2}t^{2s}$ daje

$$(m-r-s)(m-s) = m(m-r-2s) + s(r+s) \qquad (502)\ 301$$

što je ispravno. Neka je dalje

$$2 \leq r \leq m-1 \qquad (503)\ 302$$

$$s = 0 \ . \qquad (504)\ 303$$

Dobijemo

$$\frac{2^{2m-2r+1}m!(m-r)!m!}{(m-r)!(r-1)!0!r!} = \frac{4m^2 2^{2m-2r-1}(m-1)!(m-r-1)!(m-1)!}{(m-r-1)!(r-1)!0!r!} \qquad (505)\ 304$$

što je ispravno. Ako je

$$r+2s = m, \qquad r = m-2s \qquad (506)\ 305$$

$$r \geq 2, \qquad s \geq 1 \ , \qquad (507)\ 306$$

slijedi

$$\frac{(-1)^s 2^{2s+1}m!s!(m-s)!}{0!(m-2s-1)!s!(m-s)!} = \frac{4m(m-1)(-1)^s 2^{2s-1}(m-2)!(s-1)!(m-s-1)!}{0!(m-2s-1)!(s-1)!(m-s-1)!}$$

(508) 307

što je ispravno. Neka je konačno

$$r = m, \quad s = 0 \qquad (509)\ 308$$

to imamo

$$\frac{2\ m!\ 0!\ m!\,X^{2m-2}}{0!(m-1)!0!m!} = 2m\,X^{2m-2} \qquad (510)\ 309$$

što je ispravno. Formula (497) 296 dakle vrijedi.

Članovi s $\underline{T}$ daju istu jednadžbu (497), samo što su opći članovi suma podijeljeni sa $\underline{2r}$, a zadnji član desne strane jednadžbe podijeljena je sa $\underline{2m}$. Očito i tu račun potvrdjuje ispravnost. Time je konačno dokazana formula (479).

Postupak za dokaz formule (480) sasvim je analogan.

Uvrstimo (480) u (478) i uzmemo u obzir članove s Q_o:

$$\sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s\ s\ (2m)!(2m-2s+1)!t^{2s}}{(m-s)2^{2m-2s}m!(m-2s)!(2s+1)!c^{2m-2s}} =$$

$$= \frac{(2m-1)^2}{c^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s\ s\ (2m-2)!(2m-2s-1)!t^{2s}}{(m-s-1)2^{2m-2s-2}(m-1)!(m-2s-1)!(2s+1)!c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ \frac{(2m-1)(2m-3)}{c^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s(s-1)(2m-4)!(2m-2s-1)!t^{2s}}{(m-s-1)2^{2m-2s-2}(m-2)!(m-2s)!(2s-1)!c^{2m-2s-2}} . \quad (511) \quad 310$$

Pretpostavimo (486) i svedimo opće članove na nazivnik $(m-s)(m-s-1)2^{2m-2s}m!(m-2s)!(2s+1)!c^{2m-2s}$. Brojnici daju

$$(m-s-1)(-1)^s s(2m)!(2m-2s+1)!t^{2s} = (2m-1)^2(m-s)2^2m(m-2s)(-1)^s s\ .$$
$$.(2m-2)!(2m-2s-1)!t^{2s} + (2m-1)(2m-3)(m-s)2^2m(m-1)2s(2s+1)(-1)^s\ .$$
$$.(s-1)(2m-4)!(2m-2s-1)!t^{2s}\ . \quad (512) \quad 311$$

Dioba sa $(-1)^s s(2m)!(2m-2s)!t^{2s}$ daje

$$(m-s-1)(2m-2s+1) = (m-2s)(2m-1) + (s-1)(2s+1) \quad (513) \quad 312$$

što je ispravno. Za $s = 1$ slijedi iz (511)

$$- \frac{1.(2m)!(2m-1)!t^2}{(m-1)2^{2m-2}m!(m-2)!3!c^{2m-2}} = - \frac{(2m-1)^2 1(2m-2)!(2m-3)!t^2}{(m-2)2^{2m-4}(m-1)!(m-3)!3!c^{2m-2}}$$

$$(514) \quad 313$$

što je ispravno. Za slučaj takog $\underline{m}$ može biti $s = \frac{m}{2} = p$, i dobijemo

$$\frac{(-1)^p p(4p)!(2p+1)!t^{2p}}{p2^{2p}(2p)!0!(2p+1)!c^{2p}} = \frac{(4p-1)(4p-3)(-1)^p(p-1)(4p-4)!(2p-1)!t^{2p}}{(p-1)2^{2p-2}(2p-2)!0!(2p-1)!c^{2p}} \qquad (515) \quad 314$$

što je ispravno. Jednadžba (511) 310 dakle vrijedi.

Članovi s Q_2 daju:

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m)!(2m-2s-1)!t^{2s}}{2^{2m-2s-1}m!(m-2s-1)!(2s+1)!c^{2m-2s-2}} =$$

$$= \frac{(2m-1)^2}{c^2} \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-2}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m-2)!(2m-2s-3)!t^{2s}}{2^{2m-2s-3}(m-1)!(m-2s-2)!(2s+1)!c^{2m-2s-4}} +$$

$$+ \frac{(2m-1)(2m-3)}{c^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m-4)!(2m-2s-3)!t^{2s}}{2^{2m-2s-3}(m-2)!(m-2s-1)!(2s-1)!c^{2m-2s-4}} . \qquad (516) \quad 315$$

Pretpostavimo (492) 291 i svedimo opće članove na nazivnik $2^{2m-2s-1}m!(m-2s-1)!(2s+1)!c^{2m-2s-2}$. Brojnici daju

$$(-1)^s(2m)!(2m-2s-1)!t^{2s} = (2m-1)^2 2^2 m(m-2s-1)(-1)^s(2m-2)!(2m-2s-3)!t^{2s} +$$
$$+ (2m-1)(2m-3)2^2 m(m-1)2s(2s+1)(-1)^s(2m-4)!(2m-2s-3)!t^{2s}. \qquad (517) \quad 316$$

Dioba sa $(-1)^s(2m)!(2m-2s-3)!$ daje

$$(2m-2s-2)(2m-2s-1) = 2(m-2s-1)(2m-1) + 2s(2s+1) \qquad (518) \quad 317$$

što je ispravno. Za $s = 0$ slijedi iz (516) 315

$$\frac{(2m)!(2m-1)!}{2^{2m-1}m!(m-1)!1!c^{2m-2}} = \frac{(2m-1)^2(2m-2)!(2m-3)!}{2^{2m-3}(m-1)!(m-2)!1!c^{2m-2}} \qquad (519) \quad 318$$

što je ispravno. Za slučaj lihog $\underline{m}$ može biti $s = \frac{m-1}{2} = p$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^p(4p+2)!(2p+1)!t^{2p}}{2^{2p+1}(2p+1)!0!(2p+1)!c^{2p}} = \frac{(4p+1)(4p-1)(-1)^p(4p-2)!(2p-1)!t^{2p}}{2^{2p-1}(2p-1)!0!(2p-1)!c^{2p}} \qquad (520) \quad 319$$

što je ispravno. Jednadžba (516) 315 dakle vrijedi.

Članovi sa R daju:

$$\sum_{\substack{r,s\\ r\geq 2\\ s\geq 0}}^{r+2s\leq m} \frac{(-1)^s(m-r-s)!(2m)!(r-1)!(2m-2s)!(r+s)!X^{2r-3}t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1}(m-r-2s)!m!(2r-2)!(m-s)!(2r+2s)!s!c^{2m-2r-2s}} =$$

$$= \frac{(2m-1)^2}{c^2}\sum_{\substack{r,s\\ r\geq 2\\ s\geq 0}}^{r+2s\leq m-1} \frac{(-1)^s(m-r-s-1)!(2m-2)!(r-1)!(2m-2s-2)!(r+s)!X^{2r-3}t^{2s}}{2^{2m-2r-2s-1}(m-r-2s-1)!(m-1)!(2r-2)!(m-s-1)!(2r+2s)!s!c^{2m-2r-2s-2}} +$$

$$+ \frac{(2m-1)(2m-3)}{c^2}\sum_{\substack{r,s\\ r\geq 2\\ s\geq 1}}^{r+2s\leq m} \frac{(-1)^s(m-r-s-1)!(2m-4)!(r-1)!(2m-2s-2)!(r+s-1)!X^{2r-3}t^{2s}}{2^{2m-2r-2s-1}(m-r-2s)!(m-2)!(2r-2)!(m-s-1)!(2r+2s-2)!(s-1)!c^{2m-2r-2s-2}} +$$

$$+ \quad (2m-1)X^{2m-3} \qquad (521)$$ 320

Neka vrijedi (498),(499),(500), i svedimo opće članove na nazivnik
$(-1)^s 2^{2m-2r-2s+1}(m-r-2s)!m!(2r-2)!(m-s)!(2r+2s)!s!c^{2m-2r-2s}$.

Brojnici daju

$$(-1)^s(m-r-s)!(2m)!(r-1)!(2m-2s)!(r+s)!X^{2r-3}t^{2s} =$$

$$= (2m-1)^2 2^2(m-r-2s)m(m-s)(-1)^s(m-r-s-1)!(2m-2)!(r-1)!(2m-2s-2)!(r+s)!\cdot$$
$$\cdot X^{2r-3}t^{2s} + (2m-1)(2m-3)2^2 m(m-1)(m-s)(2r+2s)(2r+2s-1)s(-1)^s(m-r-s-1)!\cdot$$
$$\cdot(2m-4)!(r-1)!(2m-2s-2)!(r+s-1)!X^{2r-3}t^{2s} \qquad (522)$$ 321

Dioba sa $(-1)^s(m-r-s-1)!(2m)!(r-1)!(2m-2s-2)!(r+s)!X^{2r-3}t^{2s}$ daje

$$(m-r-s)(2m-2s)(2m-2s-1) = (2m-1)2(m-r-2s)(m-s) + 2(m-s)(2r+2s-1)s \qquad (523)$$ 322

što je ispravno. Pretpostavimo dalje (503),(504), to dobijemo

$$\frac{(m-r)!(2m)!(r-1)!(2m)!r!X^{2r-3}}{2^{2m-2r+1}(m-r)!m!(2r-2)!m!(2r)!0!c^{2m-2r}} =$$

$$= \frac{(2m-1)^2(m-r-1)!(2m-2)!(r-1)!(2m-2)!r!X^{2r-3}}{2^{2m-2r-1}(m-r-1)!(m-1)!(2r-2)!(m-1)!(2r)!0!c^{2m-2r}} \qquad (524)$$ 323

što je ispravno. Ako vrijedi (506),(507), slijedi

$$\frac{(-1)^s s!(2m)!(m-2s-1)!(2m-2s)!(m-s)!X^{2m-4s-3}t^{2s}}{2^{2s+1}0!m!(2m-4s-2)!(m-s)!(2m-2s)!s!c^{2s}} =$$

$$= \frac{(2m-1)(2m-3)(-1)^s(s-1)!(2m-4)!(m-2s-1)!(2m-2s-2)!(m-s-1)!X^{2r-3}t^{2s}}{2^{2s-1}0!(m-2)!(2m-4s-2)!(m-s-1)!(2m-2s-2)!(s-1)!c^{2s}}$$

(525) 324

308

što je ispravno. Pretpostavimo li konačno (509), to imamo

$$\frac{0!(2m)!(m-1)!(2m)!m!X^{2m-3}}{2\ 0!m!(2m-2)!m!(2m)!0!} = (2m-1)X^{2m-3} \qquad (526)$$ 325

320

što je ispravno. Formula (521) dakle vrijedi.

jednadžbu 320

Članovi s $\underline{T}$ daju istu ~~jednadžbu~~ (521), samo što su opći članovi suma podijeljeni s $\underline{2r-1}$, a zadnji član desne strane jednadžbe podijeljen sa $\underline{2m-1}$. Očito i ovdje račun potvrdjuje ispravnost.

279

Time je konačno i formula (480) dokazana.

Stavimo sad

$$Q_n = \int_X^t x^n \Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \qquad (527)$$ 326

$$R = -\frac{t^2-X^2}{c^2}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-X^2}) \qquad (528)$$ 327

$$T = X^2\frac{t^2-X^2}{2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) \qquad (529)$$ 328

326 267 270 271

i prema (527),(470),(471),(472)

$$Q_o = \int_X^t \Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx \qquad (530)$$ 329

$$Q_1 = \frac{t^2-X^2}{2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) \qquad (531)$$ 330

$$Q_2 = \frac{1}{c^2}\int_X^t \Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx + \frac{t^2}{2}\int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2})dx +$$

$$+ \frac{X(t^2-X^2)}{2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) + \frac{X}{c^2}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{t}{c^2} \qquad (532)$$ 331

$$Q_3 = \left(\frac{2}{c^2} + \frac{X^2}{2}\right)(t^2-X^2)\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{2(t^2-X^2)}{c^2}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-X^2})$$

(533) 332

Uvrstimo li (527),(528),(529) u (474), dobijemo prvotnu rekurzionu jednadžbu (473), pa prema tome uvrštenje izraza (527) do (533) u formule (479),(480) mora dati direktne formule za redukciju integrala $\int\limits_X^t x^n \Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx$.

Uvrstimo spomenute izraze najprije u (479). Tvrdimo, da se dobivena formula može dovesti u oblik

$$\int\limits_X^t x^{2m+1}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx =$$

$$= \frac{t^2-X^2}{2}\left\{\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2})\sum_{\substack{r,s\\ r\geq 0\\ s\geq 0}}^{r+2s\leq m}\frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m!(m-r-s)!(m-s)!X^{2r}t^{2s}}{(m-r-2s)!r!s!(r+s)!c^{2m-2r-2s}} - \right.$$

$$\left. - \Lambda_o(c\sqrt{t^2-X^2})\sum_{\substack{r,s\\ r\geq 0\\ s\geq 0}}^{r+2s\leq m-1}\frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m!(m-r-s-1)!(m-s)!X^{2r}t^{2s}}{(m-r-2s-1)!r!s!(r+s+1)!c^{2m-2r-2s}}\right\}$$

$$\text{za} \quad m \geq 1 \tag{534}$$ 333

Uvrštenje naime daje ponajprije oblik

$$\int\limits_X^t x^{2m+1}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx =$$

$$= \frac{t^2-X^2}{2}\left\{\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2})\sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]}\frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-1)!(m-s+1)!t^{2s}}{(m-2s)!(s-1)!(s+1)!c^{2m-2s}} + \right.$$

$$+ \Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2})\sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-1)!(m-s)!t^{2s}}{(m-2s-1)!s!(s+1)!c^{2m-2s}} +$$

$$+ \Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2})\sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]}\frac{(-1)^s 2^{2m-2s-2} m!(m-s-1)!(m-s)!X^2t^{2s}}{(m-2s-1)!s!(s+1)!c^{2m-2s-2}} -$$

$$- \Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}) \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-1)!(m-s)!t^{2s}}{(m-2s-1)!s!(s+1)!c^{2m-2s}} -$$

$$- \Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}) \sum_{\substack{r,s \\ r\geq 1 \\ s\geq 0}}^{r+2s\leq m-1} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m!(m-r-s-1)!(m-s)!X^{2r}t^{2s}}{(m-r-2s-1)!r!s!(r+s+1)!c^{2m-2r-2s}} +$$

$$+ \Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) \sum_{\substack{r,s \\ r\geq 2 \\ s\geq 0}}^{r+2s\leq m} \frac{(-1)^s 2^{2m-2r-2s} m!(m-r-s)!(m-s)!X^{2r}t^{2s}}{(m-r-2s)!r!s!(r+s)!c^{2m-2r-2s}} \Bigg\} \qquad (535) \quad 334$$

pri čemu smo u predzadnjoj sumi stavili $r = \bar{r}+1$ i naknadno pisali opet $\underline{r}$ mjesto $\bar{r}$, te zasad pretpostavili $m \geq 2$.

Zbrojimo li prvu i drugu sumu izraza (535), to nije teško dokazati, da vrijedi:

$$\sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-1)!(m-s+1)!t^{2s}}{(m-2s)!(s-1)!(s+1)!c^{2m-2s}} + \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-1)!(m-s)!t^{2s}}{(m-2s-1)!s!(s+1)!c^{2m-2s}} =$$

$$= \sum_{s=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2m-2s} m![(m-s)!]^2 t^{2s}}{(m-2s)!(s!)^2 c^{2m-2s}} \qquad (536) \quad 335$$

Ako je naime

$$1 \leq s \leq \frac{m-1}{2} \qquad (537) \quad 336$$

i ako svedemo opće članove suma u (536) na zajednički nazivnik $(m-2s)!s!(s+1)!c^{2m-2s}$, to brojnici daju

$$s(-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-1)!(m-s+1)!t^{2s} +$$

$$+ (m-2s)(-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-1)!(m-s)!t^{2s} =$$

$$= (s+1)(-1)^s 2^{2m-2s} m!\left[(m-s)!\right]^2 t^{2s}. \qquad (538) \quad 337$$

Dioba sa $(-1)^s 2^{2m-2s} m!(m-s-1)!(m-s)!$ daje

$$(m-s+1)s + m-2s = (m-s)(s+1) \qquad (539) \quad 338$$

što je ispravno. Ako je $s=0$, dobijemo

$$\frac{2^{2m}m!(m-1)!m!}{(m-1)!0!1!c^{2m}} = \frac{2^{2m}m!(m!)^2}{m!(0!)^2c^{2m}} \qquad (540)$$ 339

što je ispravno. Za slučaj da je $\underline{m}$ tak broj, možemo još staviti $s = \frac{m}{2} = p$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^p 2^{2p}(2p)!(p-1)!(p+1)!t^{2p}}{0!(p-1)!(p+1)!c^{2p}} = \frac{(-1)^p 2^{2p}(2p)!(p!)^2t^{2p}}{0!(p!)^2c^{2p}} \qquad (541)$$ 340

što je ispravno. Jednadžba (536) dakle vrijedi.

Sad možemo usporediti (534) sa (535). Članovi prve sume u (534), za koje je $r \geq 2$, daju zadnju sumu u (535). Članovi prve sume u (534), za koje je $r=1$, daju treću sumu u (535). Članovi prve sume u (534), za koje je $r=0$, daju zbroj prve i druge sume u (535) u obliku (536). Članovi druge sume u (534), za koje je $r \geq 1$, daju predzadnju sumu u (535). Članovi druge sume u (534), za koje je $r=0$, daju četvrtu sumu u (535). Time je formula (534) dokazana. Ona vrijedi za $m \geq 2$, kao formula (479), iz koje je proizašla, a i za $m=1$, kako pokazuje poredba sa (472).

Uvrstimo li (528),(529),(530),(532) u (480), to se dobiveni izraz može dovesti u oblik

$$\int_X^t x^{2m}\Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx =$$

$$= \int_X^t \Lambda_0(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx \sum_{s=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m)!(2m-2s)!t^{2s}}{2^{2m-2s}m!(m-2s)!(2s)!c^{2m-2s}} +$$

$$+ \int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m)!(2m-2s-1)!t^{2s+2}}{2^{2m-2s}m!(m-2s-1)!(2s+1)!c^{2m-2s-2}} +$$

$$+ X\Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2}) \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s(2m)!(2m-2s-1)!t^{2s}}{2^{2m-2s-1}m!(m-2s-1)!(2s+1)!c^{2m-2s}} +$$

$$+ \ (t^2-X^2)\,\Lambda_0(c\sqrt{t^2-X^2})\ \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{r,s\\ r\geq 2\\ s\geq 0}}^{r+2s\leq m} \frac{(-1)^{s+1}(m-r-s)!(2m)!(r-1)!(2m-2s)!(r+s)!X^{2r-3}t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1}(m-r-2s)!m!(2r-2)!(m-s)!(2r+2s)!s!c^{2m-2r-2s+2}} \ +$$

$$+ \ (t^2-X^2)\,\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2})\ \cdot$$

$$\cdot \sum_{\substack{r,s\\ r\geq 1\\ s\geq 0}}^{r+2s\leq m} \frac{(-1)^{s}(m-r-s)!(2m)!r!(2m-2s)!(r+s)!X^{2r-1}t^{2s}}{2^{2m-2r-2s+1}(m-r-2s)!m!(2r)!(m-s)!(2r+2s)!s!c^{2m-2r-2s}} \ +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1}(2m)!(2m-2s-1)!t^{2s+1}}{2^{2m-2s-1}m!(m-2s-1)!(2s+1)!c^{2m-2s}} \qquad \text{za} \quad m \geq 2 \qquad (542)$$

Da se to uvidi, zbrojimo najprije izraze, koje daju Q_o i prvi član izraza (532) za Q_2 :

$$\sum_{s=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{s(-1)^{s}(2m)!(2m-2s+1)!t^{2s}}{(m-s)2^{2m-2s}m!(m-2s)!(2s+1)!c^{2m-2s}} \ +$$

$$+ \ \frac{1}{c^2}\sum_{s=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s}(2m)!(2m-2s-1)!t^{2s}}{2^{2m-2s}m!(m-2s)!(2s)!c^{2m-2s}} \ =$$

$$= \sum_{s=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{(-1)^{s}(2m)!(2m-2s)!t^{2s}}{2^{2m-2s}m!(m-2s)!(2s)!c^{2m-2s}} \ . \qquad (543)$$

U svrhu dokaza ove relacije pretpostavimo (537) i sredimo opće članove suma u (543) na nazivnik $(m-s)2^{2m-2s}m!(m-2s)!(2s+1)!c^{2m-2s}$. Brojnici daju:

$$s(-1)^s(2m)!(2m-2s+1)!t^{2s} \quad + \quad (m-s)2(m-2s)(-1)^s(2m)!(2m-2s-1)!t^{2s} =$$

$$= \quad (m-s)(2s+1)(-1)^s(2m)!(2m-2s)!t^{2s} \quad . \tag{544}$$ 343

dioba sa $(-1)^s(2m)!(2m-2s)!t^{2s}$ daje

$$s(2m-2s+1) \quad + \quad (m-2s) \quad = \quad (m-s)(2s+1) \tag{545}$$ 344

što je ispravno. Ako je $s=0$, dobijemo

$$\frac{(2m)!(2m-1)!}{2^{2m-1}m!(m-1)!1!c^{2m}} \quad = \quad \frac{(2m)!(2m)!}{2^{2m}\ m!\ m!\ 0!\ c^{2m}} \tag{546}$$ 345

što je ispravno. U slučaju, da je $\underline{m}$ tak broj, može biti $s = \frac{m}{2} = p$, što daje

$$\frac{p(-1)^p(4p)!(2p+1)!t^{2p}}{p2^{2p}(2p)!0!(2p+1)!c^{2p}} \quad = \quad \frac{(-1)^p(4p)!(2p)!t^{2p}}{2^{2p}(2p)!0!(2p)!c^{2p}} \tag{547}$$ 346

što je ispravno. Jednadžba (543) dakle vrijedi.

Izrazi, koji potječu od Q_0 i od prvog člana izraza za Q_2, daju prema tome prvu sumu u (542). Drugi član izraza za Q_2 daje drugu sumu u (542). Treći član izraza za Q_2 daje članove pete sume u (542), za koje je $r=1$. Četvrti član izraza za Q_2 daje treću sumu u (542). Peti član izraza za Q_2 daje šestu (zadnju) sumu u (542). Suma, koja je pomnožena sa R, odgovara četvrtoj sumi u (542), a suma pomnožena sa T odgovara članovima pete sume u (542), za koje je $r \geq 2$. Formula (542) je time dokazana i vrijedi za $m \geq 2$, kao formula (480), iz koje je proizašla.

k

5. Redukcija integrala $\int\limits_X^t \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx$.

Za kraću oznaku stavimo

$$P_n = \int\limits_X^t \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{548}$$ 347

Uvrstimo li u (344) 7 t^2-x^2 mjesto $f(z)$, snizimo n za jednu jedinicu, pomnožimo jednadžbu sa t^2-x^2 i integriramo od X do t, to slijedi

$$t^2P_n - \int\limits_X^t x^2\Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx = \frac{4n(n-1)}{c^2}P_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{c^2}P_{n-2} \ . \tag{549}$$ 348

Parcijalna integracija na temelju (346) 9 daje:

$$\int\limits_X^t x^2\Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx = \left\{\frac{2n}{c^2}\,x\,\Lambda_{n-1}(c\sqrt{t^2-x^2})\right\}_{x=X}^{x=t} - \frac{2n}{c^2}P_{n-1} =$$

$$= \frac{2nt}{c^2} - \frac{2nX}{c^2}\Lambda_{n-1}(c\sqrt{t^2-X^2}) - \frac{2n}{c^2}P_{n-1} \ . \tag{550}$$ 349

Uvrstimo li to u 348 (549), ~~slijedi rekurziona~~ izlazi jednadžba rekurzije

$$P_n = \frac{2n(2n-3)}{c^2t^2}P_{n-1} - \frac{4n(n-1)}{c^2t^2}P_{n-2} - X\frac{2n}{c^2t^2}\Lambda_{n-1}(c\sqrt{t^2-X^2}) + 2t\frac{n}{c^2t^2} \ . \tag{551}$$ 350

S Pomoću nje dobije se lako

$$P_2 = \frac{4}{c^2t^2}P_1 - \frac{8}{c^2t^2}P_o - X\frac{4}{c^2t^2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) + 2t\frac{2}{c^2t^2} \tag{552}$$ 351

$$P_3 = \left(\frac{72}{c^4t^4} - \frac{24}{c^2t^2}\right)P_1 - \frac{144}{c^4t^4}P_o - X\frac{6}{c^2t^2}\Lambda_2(c\sqrt{t^2-X^2}) -$$

$$- X\frac{72}{c^4t^4}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-X^2}) + 2t\left(\frac{36}{c^4t^4} + \frac{3}{c^2t^2}\right) \ . \tag{553}$$ 352

Tvrdimo, da je za $n \geq 2$ općenito

$$P_n = A_n P_1 + B_n P_o + X \sum_{r=1}^{n-1} C_{n,r} \Lambda_r(c\sqrt{t^2-X^2}) + 2tD_n \tag{554}$$

ili

$$\int_X^t \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx = A_n \int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-x^2})dx + B_n \int_X^t \Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx +$$

$$+ X \sum_{r=1}^{n-1} C_{n,r} \Lambda_r(c\sqrt{t^2-X^2}) + 2tD_n \tag{555}$$

gdje znači:

$$A_n = \sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s-2} n!(2n-2s)!}{(n-2s+1)!(2s-2)!(ct)^{2n-2s}} \tag{556}$$

$$B_n = \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s} n!(2n-2s-1)!}{(n-2s)!(2s-1)!(ct)^{2n-2s}} \tag{557}$$

$$C_{n,r} = \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s+1} n!(n-r-s-1)!(2n-2s-2)!(r+s)!}{r!s!(n-r-2s-1)!(n-s-1)!(2r+2s)!(ct)^{2n-2r-2s}} \tag{558}$$

$$D_n = \sum_{s=1}^{n-1} \frac{n!(2n-2s-2)!}{s!(n-s-1)!(ct)^{2n-2s}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1} 2^{2s} n!(2n-2s-2)!}{(2s)!(n-2s-1)!(ct)^{2n-2s}} . \tag{559}$$

U zadnjem izrazu otpada za $n = 2$ druga suma.

U svrhu dokaza treba se najprije uvjeriti, da te formule za $n=2$ i $n=3$ daju izraze (552), (553). Dalje ih treba uvrstiti u ~~rekurzionu~~ jednadžbu (551). Uzmimo najprije u obzir članove s P_1, t.j. članove, koji potječu od izraza (556):

$$\sum_{s=1}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1}2^{2s-2}n!(2n-2s)!}{(n-2s+1)!(2s-2)!(ct)^{2n-2s}} =$$

$$= \frac{2n(2n-3)}{c^2t^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1}2^{2s-2}(n-1)!(2n-2s-2)!}{(n-2s)!(2s-2)!(ct)^{2n-2s-2}} -$$

$$- \frac{4n(n-1)}{c^2t^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s}\; 2^{2s-4}(n-2)!(2n-2s-2)!}{(n-2s+1)!(2s-4)!(ct)^{2n-2s-2}} , \qquad (560)$$ 359

pri čemu smo u zadnjoj sumi stavili $s=\bar{s}-1$ i naknadno pisali opet $\underline{s}$ mjesto $\bar{s}$. Pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n}{2} \qquad (561)$$ 360

i svedimo opće članove na zajednički nazivnik $(n-2s+1)!(2s-2)!(ct)^{2n-2s}$. Brojnici onda daju

$$(-1)^{s+1}2^{2s-2}n!(2n-2s)! = 2n(2n-3)(n-2s+1)(-1)^{s+1}2^{2s-2}(n-1)!(2n-2s-2)! -$$

$$- 4n(n-1)(2s-2)(2s-3)(-1)^{s}2^{2s-4}(n-2)!(2n-2s-2)! . \qquad (562)$$ 361

Dioba sa $(-1)^{s+1}2^{2s-2}n!(2n-2s-2)!$ daje

$$(2n-2s)(2n-2s-1) = 2(2n-3)(n-2s+1) + (2s-2)(2s-3) , \qquad (563)$$ 362

što je ispravno. Za $s=1$ dobijemo

$$\frac{n!(2n-2)!}{(n-1)!0!(ct)^{2n-2}} = \frac{2n(2n-3)(n-1)!(2n-4)!}{(n-2)!0!(ct)^{2n-2}} , \qquad (564)$$ 363

što je ispravno. Ako je $\underline{n}$ lih broj, može biti $s = \frac{n+1}{2} = p$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^{p+1}2^{2p-2}(2p-1)!(2p-2)!}{0!(2p-2)!(ct)^{2p-2}} = \frac{4(2p-1)(2p-2)(-1)^{p+1}2^{2p-4}(2p-3)!(2p-4)!}{0!(2p-4)!(ct)^{2p-2}} , \qquad (565)$$ 364

što je ispravno.

Analogno uzmimo sad u obzir članove s P_o, t.j. koji potječu od izraza (557): 356

$$\sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s} n!(2n-2s-1)!}{(n-2s)!(2s-1)!(ct)^{2n-2s}} =$$

$$= \frac{2n(2n-3)}{c^2t^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^s 2^{2s}(n-1)!(2n-2s-3)!}{(n-2s-1)!(2s-1)!(ct)^{2n-2s-2}} -$$

$$- \frac{4n(n-1)}{c^2t^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{s-1} 2^{2s-2}(n-2)!(2n-2s-3)!}{(n-2s)!(2s-3)!(ct)^{2n-2s-2}} \; . \qquad (566)$$ 365

Pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n-1}{2} \qquad (567)$$ 366

i svedimo na zajednički nazivnik $(n-2s)!(2s-1)!(ct)^{2n-2s}$.

Brojnici daju

$$(-1)^s 2^{2s} n!(2n-2s-1)! = 2n(2n-3)(n-2s)(-1)^s 2^{2s}(n-1)!(2n-2s-3)! -$$

$$- 4n(n-1)(2s-1)(2s-2)(-1)^{s-1} 2^{2s-2}(n-2)!(2n-2s-3)! \; . \qquad (568)$$ 367

Dioba sa $(-1)^s 2^{2s} n!(2n-2s-3)!$ daje

$$(2n-2s-1)(2n-2s-2) = 2(2n-3)(n-2s) + (2s-1)(2s-2) \qquad (569)$$ 368

što je ispravno. Za $s=1$ slijedi

$$- \frac{2^2 n!(2n-3)!}{(n-2)!1!(ct)^{2n-2}} = - \frac{2n(2n-3)2^2(n-1)!(2n-5)!}{(n-3)!1!(ct)^{2n-2}} \qquad (570)$$ 369

što je ispravno. Ako je $\underline{n}$ tak broj, može biti $s = \frac{n}{2} = p$, pa slijedi

$$\frac{(-1)^p 2^{2p}(2p)!(2p-1)!}{0!(2p-1)!(ct)^{2p}} = - \frac{8p(2p-1)(-1)^{p-1} 2^{2p-2}(2p-2)!(2p-3)!}{0!(2p-3)!(ct)^{2p}} \qquad (571)$$ 370

što je ispravno.

Uzmimo sad u obzir članove, koji potječu od (558) za jedan stanoviti $\underline{r}$. Pretpostavimo ponajprije

$$1 \leq r \leq n-3 . \tag{572}$$ 371

Dobijemo

$$\sum_{s=0}^{\left[\frac{n-r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1}2^{2s+1}n!(n-r-s-1)!(2n-2s-2)!(r+s)!}{r!s!(n-r-2s-1)!(n-s-1)!(2r+2s)!(ct)^{2n-2r-2s}} =$$

$$= \frac{2n(2n-3)}{c^2t^2} \sum_{s=0}^{\left[\frac{n-r-2}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1}2^{2s+1}(n-1)!(n-r-s-2)!(2n-2s-4)!(r+s)!}{r!s!(n-r-2s-2)!(n-s-2)!(2r+2s)!(ct)^{2n-2r-2s-2}} -$$

$$- \frac{4n(n-1)}{c^2t^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-r-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s}2^{2s-1}(n-2)!(n-r-s-2)!(2n-2s-4)!(r+s-1)!}{r!(s-1)!(n-r-2s-1)!(n-s-2)!(2r+2s-2)!(ct)^{2n-2r-2s-2}} \tag{573}$$ 372

Neka je

$$1 \leq s \leq \frac{n-r-2}{2} \tag{574}$$ 373

i svedimo opće članove na nazivnik

$$r!s!(n-r-2s-1)!(n-s-1)!(2r+2s)!(ct)^{2n-2r-2s}.$$

Brojnici daju

$$(-1)^{s+1}2^{2s+1}n!(n-r-s-1)!(2n-2s-2)!(r+s)! =$$

$$= 2n(2n-3)(n-r-2s-1)(n-s-1)(-1)^{s+1}2^{2s+1}(n-1)!(n-r-s-2)!(2n-2s-4)!(r+s)! -$$

$$- 4n(n-1)s(n-s-1)(2r+2s)(2r+2s-1)(-1)^{s}2^{2s-1}(n-2)!(n-r-s-2)!(2n-2s-4)!(r+s-1)! \tag{575}$$ 374

Dioba sa $(-1)^{s+1}2^{2s+2}(n-s-1)n!(n-r-s-2)!(2n-2s-4)!(r+s)!$ daje

$$(n-r-s-1)(2n-2s-3) = (2n-3)(n-r-2s-1) + s(2r+2s-1) , \tag{576}$$ 375

što je ispravno. Za $s=0$ dobijemo

$$-\frac{2n!(n-r-1)!(2n-2)!r!}{r!0!(n-r-1)!(n-1)!(2r)!(ct)^{2n-2r}} = -\frac{2n(2n-3)2(n-1)!(n-r-2)!(2n-4)!r!}{r!0!(n-r-2)!(n-2)!(2r)!(ct)^{2n-2r}}, \tag{577}$$ 376

što je ispravno. Ako je $n-r-1$ tak broj, može biti $s = \frac{n-r-1}{2} = p$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^{p+1}2^{2p+1}(2p+r+1)!p!(2p+2r)!(r+p)!}{r!p!0!(p+r)!(2r+2p)!(ct)^{2p+2}} =$$

$$= \frac{4(2p+r+1)(2p+r)(-1)^{2p+1}2^{2p-1}(2p+r-1)!(p-1)!(2p+2r-2)!(r+p-1)!}{r!(p-1)!0!(p+r-1)!(2r+2p-2)!(ct)^{2p+2}}, \tag{578}$$ 377

što je ispravno.

Ako je

$$r = n-2, \tag{579}$$ 378

otpada zadnja suma, a u ostalim je moguća samo vrijednost $s=0$, pa dobijemo

$$-\frac{2n!1!(2n-2)!(n-2)!}{(n-2)!0!1!(n-1)!(2n-4)!(ct)^4} = -\frac{2n(2n-3)2(n-1)!0!(2n-4)!(n-2)!}{(n-2)!0!0!(n-2)!(2n-4)!(ct)^4}, \tag{580}$$ 379

što je ispravno.

Ako je

$$r = n-1 \tag{581}$$ 380

dobijemo samo sumu na lijevoj strani sa $s = 0$, ali prema ~~rekuzionoj~~ rekurzivnoj jednadžbi (551) 350 pridolazi još na desnoj strani sumand $-\frac{2n}{c^2t^2}$, dakle

$$-\frac{2n!0!(2n-2)!(n-1)!}{(n-1)!0!0!(n-1)!(2n-2)!(ct)^2} = -\frac{2n}{c^2t^2}, \tag{582}$$ 381

što je ispravno. Time su članovi, koji potječu od (558) 357 uzeti u obzir. Svi ostali članovi, koji dakle potječu od (559) 358, daju:

$$\sum_{s=1}^{n-1} \frac{n!(2n-2s-2)!}{s!(n-s-1)!(ct)^{2n-2s}} + \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1}2^{2s}n!(2n-2s-2)!}{(2s)!(n-2s-1)!(ct)^{2n-2s}} =$$

$$= \frac{2n(2n-3)}{c^2t^2} \sum_{s=1}^{n-2} \frac{(n-1)!(2n-2s-4)!}{s!(n-s-2)!(ct)^{2n-2s-2}} +$$

$$+ \frac{2n(2n-3)}{c^2t^2} \sum_{s=1}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(-1)^{s+1}2^{2s}(n-1)!(2n-2s-4)!}{(2s)!(n-2s-2)!(ct)^{2n-2s-2}} -$$

$$- \frac{4n(n-1)}{c^2t^2} \sum_{s=2}^{n-2} \frac{(n-2)!(2n-2s-4)!}{(s-1)!(n-s-2)!(ct)^{2n-2s-2}} -$$

$$- \frac{4n(n-1)}{c^2t^2} \sum_{s=2}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{s}2^{2s-2}(n-2)!(2n-2s-4)!}{(2s-2)!(n-2s-1)!(ct)^{2n-2s-2}} + \frac{n}{c^2t^2}$$

$$(n = 4,5,6,\ldots) \quad . \tag{583}$$ 352

Zadnja suma otpada za $n=4$.

Za

$$s = 1 \tag{584}$$ 353

dobijemo

$$\frac{n!(2n-4)!}{1!(n-2)!(ct)^{2n-2}} + \frac{2^2n!(2n-4)!}{2!(n-3)!(ct)^{2n-2}} =$$

$$= \frac{2n(2n-3)(n-1)!(2n-6)!}{1!(n-3)!(ct)^{2n-2}} + \frac{2n(2n-3)2^2(n-1)!(2n-6)!}{2^2(n-4)!(ct)^{2n-2}} \quad . \tag{585}$$ 354

Svedimo na nazivnik $2(n-2)!(ct)^{2n-2}$. Brojnici daju

$$2n!(2n-4)! + (n-2)2^2n!(2n-4)! = 2(n-2)2n(2n-3)(n-1)!(2n-6)! +$$
$$+ (n-2)(n-3)2n(2n-3)2^2(n-1)!(2n-6)! \quad . \tag{586}$$ 355

Dioba sa $2n!(2n-4)(2n-6)!$ daje

$$(2n-5) + 2(n-2)(2n-5) = (2n-3) + 2(n-3)(2n-3) \tag{587}$$ 356

što je ispravno.

Za

$$s \geq 2 \tag{588}$$

uzmimo najprije u obzir samo prvu sumu lijevo i prvu i treću sumu desno u ~~jednadžbi~~ (583). Zajednički nazivnik će biti $s!(n-s-1)!(ct)^{2n-2s}$, a pretpostavlja se

$$2 \leq s \leq n-2 \tag{589}$$

Brojnici daju

$$n!(2n-2s-2)! = 2n(2n-3)(n-s-1)(n-1)!(2n-2s-4)! -$$
$$- 4n(n-1)s(n-s-1)(n-2)!(2n-2s-4)! \; . \tag{590}$$

Dioba sa $n!(2n-2s-2)(2n-2s-4)!$ daje

$$n-2s-3 = (2n-3) - 2s \; , \tag{591}$$

što je ispravno. Za $s = n-1$ treba uzeti u obzir i zadnji član u (583):

$$\frac{n!0!}{(n-1)!0!(ct)^2} = \frac{n}{c^2t^2} \; . \tag{592}$$

I ovo je ispravno.

Uzmimo sad u obzir drugu sumu lijevo i drugu i četvrtu sumu desno u (583) i pretpostavimo

$$2 \leq s \leq \frac{n-2}{2} \; . \tag{593}$$

Zajednički nazivnik je $(2s)!(n-2s-1)!(ct)^{2n-2s}$, a brojnici daju

$$(-1)^{s+1}2^{2s}n!(2n-2s-2)! = 2n(2n-3)(n-2s-1)(-1)^{s+1}2^{2s}(n-1)!(2n-2s-4)! -$$
$$- 4n(n-1)2s(2s-1)(-1)^{s}2^{2s-2}(n-2)!(2n-2s-4)! \; . \tag{594}$$

Dioba sa $(-1)^{s+1}2^{2s+1}n!(2n-2s-4)!$ daje

$$(n-s-1)(2n-2s-3) = (2n-3)(n-2s-1) + s(2s-1) \; , \tag{595}$$

što je ispravno. Za slučaj, da je $\underline{n-1}$ tak broj, može biti $s = \frac{n-1}{2} = p$, pa druga suma lijevo i četvrta suma desno u (583) daju

$$\frac{(-1)^{p+1}2^{2p}(2p+1)!(2p)!}{(2p)!0!(ct)^{2p+2}} = - \frac{4(2p+1)2p(-1)^{p}2^{2p-2}(2p-1)!(2p-2)!}{(2p-2)!0!(ct)^{2p+2}} \; , \tag{596}$$

što je ispravno. Time je cijeli dokaz proveden.

6. Redukcija integrala $\int_X^t x^m \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx$.

Izvršimo li na temelju (346) parcijalnu integraciju

$$\int_X^t x^m \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx = \frac{2n}{c^2}\left\{t^{m-1} - X^{m-1}\Lambda_{n-1}(c\sqrt{t^2-X^2})\right\} -$$

$$- \frac{2n(m-1)}{c^2}\int_X^t x^{m-2}\Lambda_{n-1}(c\sqrt{t^2-x^2})dx \qquad (597)$$

dovoljan broj puta, dolazimo bez poteškoća do ovih formula:

a/ za $m=2r$ i $r \leq n$:

$$\int_X^t x^{2r}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{r} \frac{(-1)^{s+1} n!(2r)!(r-s)!}{c^{2s}(n-s)!r!(2r-2s+1)!}\left\{t^{2r-2s+1} - X^{2r-2s+1}\Lambda_{n-s}(c\sqrt{t^2-X^2})\right\} +$$

$$+ (-1)^r \frac{n!(2r)!}{c^{2r}(n-r)!r!}\int_X^t \Lambda_{n-r}(c\sqrt{t^2-x^2})dx \quad . \qquad (598)$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti pomoću (555).

b/ za $m = 2r$ i $r > n$:

$$\int_X^t x^{2r}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{s+1} n!(2r)!(r-s)!}{c^{2s}(n-s)!r!(2r-2s+1)!}\left\{t^{2r-2s+1} - X^{2r-2s+1}\Lambda_{n-s}(c\sqrt{t^2-X^2})\right\} +$$

$$+ (-1)^n \frac{n!(2r)!(r-n)!}{c^{2n}r!(2r-2n)!}\int_X^t x^{2r-2n}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx \quad . \qquad (599)$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti pomoću (542).

c/ za $m = 2r+1$ i $r < n$:

$$\int_X^t x^{2r+1}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{r+1} \frac{(-1)^{s+1}2^{2s-1}n!r!}{c^{2s}(n-s)!(r-s+1)!}\left\{t^{2r-2s+2}- X^{2r-2s+2}\Lambda_{n-s}(c\sqrt{t^2-X^2})\right\} \quad (600)$$

d/ za $m = 2r+1$ i $r \geq n$:

$$\int_X^t x^{2r+1}\Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2})dx =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} \frac{(-1)^{s+1}2^{2s-1}n!r!}{c^{2s}(n-s)!(r-s+1)!}\left\{t^{2r-2s+2}- X^{2r-2s+2}\Lambda_{n-s}(c\sqrt{t^2-X^2})\right\} +$$

$$+ (-1)^n \frac{2^{2n}n!r!}{c^{2n}(r-n)!}\int_X^t x^{2r-2n+1}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx . \quad (601)$$

Integral na desnoj strani može se dalje izraziti pomoću (534).

7. Derivacije po $\underline{t}$ integrala $\int_X^t x^n \Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx.$

Služeći se kraticom (548) tvrdimo, da vrijedi

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} P_o = f_n(t)\, P_o + g_n(t)\, P_1 + \ldots \qquad (n = 0,1,2,\ldots) \tag{602}$$

gdje je za $r = 0,1,2,\ldots$

$$f_{2r}(t) = (-1)^r\, c^{2r} \tag{603}$$

$$g_{2r}(t) = 0 \tag{604}$$

$$f_{2r+1}(t) = 0 \tag{605}$$

$$g_{2r+1}(t) = \frac{(-1)^{r+1}\, c^{2r+2}\, t}{2}\,, \tag{606}$$

a točkice na desnoj strani od (602) znače članove, koji ne sadržavaju integrala. Jednadžba (602) je očito ispravna za $n=0$, što odgovara $r=0$ u (603),(604). Pretpostavimo, da je ispravna za neki $\underline{n}$ i diferenciramo jednadžbu po $\underline{t}$. Pomoću (346) dobijemo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{f_n(t)\, P_o + g_n(t)\, P_1 + \ldots\right\} =$$

$$= f_n'(t)\, P_o + f_n(t) - \frac{c^2 t}{2}\, f_n(t)\, P_1 + g_n'(t)\, P_1 + g_n(t) - \frac{c^2 t}{4}\, g_n(t)\, P_2 + \\ + \ldots \tag{607}$$

Uvrstimo li (552), slijedi

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{f_n(t)\, P_o + g_n(t)\, P_1 + \ldots\right\} =$$

$$= \left[f_n'(t) + \frac{2}{t}\, g_n(t)\right] P_o + \left[g_n'(t) - \frac{c^2 t}{2}\, f_n(t) - \frac{1}{t}\, g_n(t)\right] P_1 + \ldots \tag{608}$$

Prema tome funkcije $f_n(t)$, $g_n(t)$ zadovoljavaju rekurzione jednadžbe

$$f_{n+1}(t) = f_n'(t) + \frac{2}{t}\, g_n(t) \qquad (609)$$

$$g_{n+1}(t) = g_n'(t) - \frac{c^2 t}{2}\, f_n(t) - \frac{1}{t}\, g_n(t) \; . \qquad (610)$$

Lako je uvjeriti se, da izrazi (603),(604),(605),(606) zadovoljavaju ove ~~rekurzione~~ rekurzivne jednadžbe, čime je dokaz proveden.

Tvrdimo dalje, da vrijedi:

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\,(tP_1) \;=\; \varphi_n(t)\, P_o + \psi_n(t)\, P_1 + \dots \qquad (n=0,1,2,\dots) \qquad (611)$$

gdje je za $r=0,1,2,\dots$

$$\varphi_{2r}(t) = 0 \qquad (612)$$

$$\psi_{2r}(t) = (-1)^r\, c^{2r}\, t \qquad (613)$$

$$\varphi_{2r+1}(t) = (-1)^r\, 2\, c^{2r} \qquad (614)$$

$$\psi_{2r+1}(t) = 0. \qquad (615)$$

Iz (605),(606) slijedi za $r=0$

$$\frac{\partial}{\partial t}\, P_o \;=\; -\frac{c^2}{2}\, tP_1 + \dots \qquad (616)$$

dakle

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n}\,(tP_1) = -\frac{2}{c^2}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}}\, P_o + \dots = -\frac{2}{c^2}\left[f_{n+1}(t)\, P_o + g_{n+1}(t)\, P_1\right] + \dots \qquad (617)$$

ili

$$\varphi_n(t) = -\frac{2}{c^2}\, f_{n+1}(t) \qquad (618)$$

$$\psi_n(t) = -\frac{2}{c^2}\, g_{n+1}(t) \qquad (619)$$

čime je dokaz proveden.

Ograničimo li se na članove najviših potencija od $\underline{t}$, koji su pomnoženi sa P_o ili P_1, to dobijemo na temelju (542),(602) i (611):

$$\underline{\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}}\int_X^t x^{4n}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx} = \frac{(-1)^n(4n)!}{2^{2n}c^{2n}(2n)!}\Big\{t^{2n}\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}}P_o +$$

$$+ 4nr\, t^{2n-1}\frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}}P_o - \frac{n(2n+1)}{2}t^{2n-1}\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}}(tP_1) -$$

$$- nr(2n+1)(2n-1)t^{2n-2}\frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}}(tP_1)\Big\} + \ldots = \frac{(-1)^n(4n)!}{2^{2n}c^{2n}(2n)!}\Big\{(-1)^r c^{2r}t^{2n}P_o +$$

$$+ (-1)^r\, 2nr\, c^{2r}t^{2n}P_1 - (-1)^r\frac{n(2n+1)}{2}c^{2r}t^{2n}P_1 -$$

$$- (-1)^{r-1}2nr(2n+1)(2n-1)c^{2r-2}t^{2n-2}P_o\Big\} + \ldots =$$

$$\underline{= \frac{(-1)^{n+r}(4n)!}{2^{2n}c^{2n-2r}(2n)!}\Big\{t^{2n}P_o + \frac{n(4r-2n-1)}{2}t^{2n}P_1\Big\} + \ldots} \qquad (620)$$

$$\underline{\frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}}\int_X^t x^{4n}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx} = \frac{(-1)^n(4n)!}{2^{2n}c^{2n}(2n)!}\Big\{t^{2n}\frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}}P_o +$$

$$+ 2n(2r+1)t^{2n-1}\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}}P_o - \frac{n(2n+1)}{2}t^{2n-1}\frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}}(tP_1) -$$

$$- \frac{n(2r+1)(2n+1)(2n-1)}{2}t^{2n-2}\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}}(tP_1)\Big\} =$$

$$= \frac{(-1)^n(4n)!}{2^{2n}c^{2n}(2n)!}\Big\{(-1)^{r+1}\frac{1}{2}c^{2r+2}t^{2n+1}P_1 + (-1)^r 2n(2r+1)c^{2r}t^{2n-1}P_o +$$

$$+ (-1)^{r+1}n(2n+1)c^{2r}t^{2n-1}P_o + (-1)^{r+1}\frac{n(2r+1)(2n+1)(2n-1)}{2}c^{2r}t^{2n-1}P_1\Big\} + \ldots =$$

$$\underline{= \frac{(-1)^{n+r}(4n)!}{2^{2n}c^{2n-2r}(2n)!}\Big\{n(4r-2n+1)t^{2n-1}P_o - \frac{c^2}{2}t^{2n+1}P_1\Big\} + \ldots} \qquad (621)$$

$$\frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} \int_X^t x^{4n+2} \Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx = \frac{(-1)^n\ (4n+2)!}{2^{2n+2}c^{2n+2}(2n+1)!} \Big\{ 2(n+1)(2n+1)t^{2n} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_o +$$

$$+ 8nr(n+1)(2n+1)t^{2n-1} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} P_o + c^2 t^{2n+1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) +$$

$$+ 2r(2n+1)c^2 t^{2n} \frac{\partial^{2r-1}}{\partial t^{2r-1}} (tP_1) \Big\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^n\ (4n+2)!}{2^{2n+2}c^{2n+2}(2n+1)!} \Big\{ (-1)^r\ 2(n+1)(2n+1)c^{2r}t^{2n}\ P_o +$$

$$+ (-1)^r\ 4nr(n+1)(2n+1)c^{2r}t^{2n}\ P_1 + (-1)^r c^{2r+2} t^{2n+2}\ P_1 +$$

$$+ (-1)^{r-1}\ 4r(2n+1)c^{2r}t^{2n}\ P_o \Big\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^{n+r}\ (4n+2)!}{2^{2n+2}c^{2n-2r+2}(2n+1)!} \Big\{ 2(2n+1)(n-2r+1)t^{2n}\ P_o + c^2 t^{2n+2}\ P_1 \Big\} + \dots \tag{622}$$

$$\frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} \int_X^t x^{4n+2} \Lambda_o(c\sqrt{t^2-x^2})dx = \frac{(-1)^n\ (4n+2)!}{2^{2n+2}c^{2n+2}(2n+1)!} \Big\{ 2(n+1)(2n+1)t^{2n} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} P_o +$$

$$+ 4n(n+1)(2n+1)(2r+1)t^{2n-1} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} P_o + c^2 t^{2n+1} \frac{\partial^{2r+1}}{\partial t^{2r+1}} (tP_1) +$$

$$+ (2n+1)(2r+1)c^2 t^{2n} \frac{\partial^{2r}}{\partial t^{2r}} (tP_1) \Big\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^n\ (4n+2)!}{2^{2n+2}c^{2n+2}(2n+1)!} \Big\{ (-1)^{r+1}(n+1)(2n+1)c^{2r+2}t^{2n+1}\ P_1 +$$

$$+ (-1)^r\ 4n(n+1)(2n+1)(2r+1)c^{2r}t^{2n-1}\ P_o + (-1)^r\ 2c^{2r+2}t^{2n+1}\ P_o +$$

$$+ (-1)^r(2n+1)(2r+1)c^{2r+2}t^{2n+1}\ P_1 \Big\} + \dots =$$

$$= \frac{(-1)^{n+r}\ (4n+2)!}{2^{2n+2}c^{2n-2r}(2n+1)!} \Big\{ 2\ t^{2n+1}\ P_o + (2n+1)(2r-n)t^{2n+1}\ P_1 \Big\} + \dots \tag{623}$$

III. DIO

Integralni teoremi Besselovih funkcija.

1. Jedna temeljna Laplaceova transformacija.

U Laplaceovoj transformaciji

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st}F(t)dt \qquad (624) \quad 1$$

zvat ćemo $F(t)$ prvotnom funkcijom ~~(njem. "Objektfunktion")~~, a $f(s)$ izvedenom funkcijom ~~(njem. "Resultatfunktion")~~.

Doetsch daje u svojoj knjizi o Laplaceovoj transformaciji*) na stranama 401 do 403 tablicu prvotnih funkcija s pripadnim izvedenim funkcijama. Pod brojem 38 te tablice dane su funkcije

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad 0 \leq t \leq \alpha \\ J_0(k\sqrt{t^2-\alpha^2}) & \text{za} \quad t > \alpha \end{cases} \qquad (625) \quad 2$$

$$f(s) = \frac{e^{-\alpha\sqrt{s^2+k^2}}}{\sqrt{s^2+k^2}} \qquad (626) \quad 3$$

s naznakom $\alpha \geq 0$, $\underline{k}$ ~~povoljan,~~ apscisa konvergencije $\beta = 0$. To dakle znači, da je Laplaceov integral (624) s funkcijom (625) konvergentan za $Re(s) > 0$, a divergentan za $Re(s) < 0$. Ovo je medjutim ispravno samo onda, ako je $\underline{k}$ realan broj, što u Doetschovoj tablici nije naznačeno, a nije naznačeno ni na str. 373 spomenute

*) G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplacetransformation, Springer, Berlin 1937.

knjige, gdje je ta transformacija napisana ovako:*)

$$\int_{\alpha}^{\infty} e^{-\sigma\tau} J_0(k\sqrt{\tau^2-\alpha^2})d\tau = \frac{e^{-\alpha\sqrt{\sigma^2+k^2}}}{\sqrt{\sigma^2+k^2}} \qquad (\alpha \geq 0, \sigma > 0, \underline{k} \text{ ~~povoljan~~ po volji}) \qquad (627)$$

Ova je formula utoliko specijalnija, što se traži $\sigma > 0$, dakle σ realan, dok naznaka za apscisu kongergencije $\beta = 0$ u tablici dopušta kompleksan $\underline{s}$ (koje odgovara varijabli σ), za koje je $Re(s) > 0$.

---

*) Kao izvor se tamo navodi G.N. Watson, A treatise on the theory of Bessel funkctions, Cambridge 1922, str. 416, formula (4), u kojoj da treba supstituirati $t^2-y^2 = \tau^2$, $a = \sigma$, $b = k$, $y^2 = -\alpha^2$. ~~Autor nije imao uvida u tu knjigu.~~

Možemo još ukazati na R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Teubner, Leipzig und Berlin 1937, str. 110, formula (18), koja glasi

$$\frac{e^{ikR}}{R} = \int_0^{\infty} J_0(\lambda r)\, e^{-\sqrt{\lambda^2-k^2}|z|} \frac{\lambda d\lambda}{\sqrt{\lambda^2-k^2}} \qquad (627a)$$

gdje je $R = \sqrt{r^2+z^2}$. Naznačeno je, da $\sqrt{\lambda^2-k^2}$ mora imati takav predznak, da bude $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \frac{1}{\lambda}\sqrt{\lambda^2-k^2} = +1$. Citirano je A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 28, 665, 1909. Nedostaje diskusija dopustivih vrijednosti od $\underline{k}$. Očito je, da se integral ne mijenja, ako $\underline{k}$ nadomjestimo sa $\underline{-k}$, dok se lijeva strana ~~jednadžbe~~ relacije mijenja. Može se pokazati, da imaginarni dio od $\underline{k}$ mora biti veći od nule. Ako je $\underline{k}$ čisto imaginarno i taj imaginarni dio pozitivan, stavimo $k = i\alpha$, čime je $\alpha > 0$, dalje stavimo $|z| = \sigma$, $r = c$, $\lambda = +\sqrt{\tau^2-\alpha^2}$, $R = \sqrt{r^2+z^2} = \sqrt{c^2+z^2}$, pa dobijemo (627), gdje samo piše $\underline{c}$ mjesto $\underline{k}$. Ako $\underline{k}$ nije čisto

Uvjet, da k treba da bude realan, ne da se ni iz čega naslutiti, jer se u toj tablici za konstante u raznim funkcijama dopuštaju kompleksne vrijednosti, što je vidljivo iz funkcija pod brojevima 4 do 9, gdje su apscise konvergencije ovisne o realnim, odnosno imaginarnim dijelovima dotičnih konstanta.

Obzirom na to, da je jednadžba (627) temelj naših daljih razmatranja, to ćemo provesti točnu diskusiju konvergencije toga Laplaceovog integrala za slučaj kompleksnog k, premda nam ne će svi ti rezultati biti potrebni.

---

imaginaran, dobijemo istu formulu, ali s kompleksnim α, a krivulja integracije polazi od α i teži prema $+\infty$. Formula (627) je i za taj slučaj ispravna, što se neposredno uvidja analitičkim produživanjem.

Formula (627a) dana je i u Frank - Mises, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Vieweg, Braunschweig 1935, II. sv. str. 924, formula (11). Ni ovdje nisu diskutirane dopustive vrijednosti od k, samo je na strani 923 kod formule (9a) primjedba, da k mora biti odabran tako, da integrala $\int_0^\infty e^{i(k+\lambda\cos\beta)\rho}\, d\rho$ iščezava za $\rho = \infty$, što se postizava shodnim predznakom od k, odnosno za realan k time, da se λ odabere kompleksan. Očito je, da se to slaže s našom primjedbom, da imaginarni dio od k mora biti pozitivan. Kompleksan λ za formulu (627a) nema smisla, jer je to realna varijabla integracije.

Dalje se nalaze u I. sv. istog djela (1930) str. 825. formule (32),(31), koje glase:

$$K v \int_0^\infty e^{-p\alpha - \rho\left(\alpha + \frac{x}{v}\right)} J_0\left(i\rho\sqrt{\alpha^2+2\alpha\frac{x}{v}}\right) d\alpha = \frac{1}{p.H(x,p)} \quad (627b)$$

Napišimo integral u (627) s našim kasnijim oznakama:

$$L = \int_x^\infty e^{-st} J_o(c\sqrt{t^2-x^2})dt \qquad (x \geq 0) \tag{628}$$

i stavimo općenito

$$s = s_1 + is_2 \tag{629}$$

$$c = c_1 + ic_2 \quad . \tag{630}$$

Budući da je prema (340)

$$J_o(z) = J_o(-z) \tag{631}$$

to možemo promjenom predznaka od c uvijek postići, da bude

$$c_2 > 0 \tag{632}$$

ili

$$c_1 > 0, \quad c_2 = 0 \quad . \tag{633}$$

Konvergencija integrala (628) na dolnjoj granici nije u pitanju,

sa

$$\frac{1}{H(x,p)} = K\,v \frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\rho}{p}}} \; e^{-\frac{xp}{v}\left[\sqrt{1+\frac{2\rho}{p}}\; - 1\right]} \quad . \tag{627c}$$

Na citiranom mjestu je u eksponentu eksponencijalne funkcije pod integralom pomutnjom ispušten sumand $-p\alpha$. [I ovdje je citirano A. Sommerfeld, Über die Ausbreitung der Wellen in der drahtlosen Telegraphie, Ann. d. Phys. 28 (1909), str. 665 ff., naročito str. 683.] Stavimo li u (627b),(627c) $\rho = -ik$, $p = \sigma + ik$, $\frac{x}{v} = \beta$, $\alpha = \tau - \beta$, dobijemo opet formulu (627), u kojoj samo piše β mjesto α.

jer je tamo prema (340) integrand kontinuiran. Radi se dakle o konvergenciji obzirom na gornju granicu. Poslužit ćemo se asimptotičkim razvojem*)

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{(\nu,2m)}{(2z)^{2m}} + O(|z|^{-2M})\right] -\right.$$

$$\left. - \sin\left(z-\frac{\nu}{2}\pi-\frac{\pi}{4}\right)\left[\sum_{m=0}^{M-1}(-1)^m\frac{[\nu,(2m+1)]}{(2z)^{2m+1}} + O(|z|^{-2M-1})\right]\right\} \qquad (634)$$

gdje znači

$$(\nu,m) = \frac{(4\nu^2-1^2)(4\nu^2-3^2)\ldots[4\nu^2-(2m-1)^2]}{2^{2m}\,m!}\,, \quad (\nu,0) = 1 \qquad (635)$$

a pretpostavlja se

$$-\pi < \arg z < \pi \,. \qquad (636)$$

Ovaj potonji uvjet bit će za nas ispunjen obzirom na (633) i obzirom na to, da je $\sqrt{t^2-x^2} \geq 0$.

Stavimo li u (634)

$$\nu = 0, \quad M = 1\,, \qquad (637)$$

to dobijemo

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\left[1+O(|z|^{-2})\right] - \sin\left(z-\frac{\pi}{4}\right)\left[-\frac{1}{8z}+O(|z|^{-3})\right]\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\frac{e^{i(z-\frac{\pi}{4})}+e^{-i(z-\frac{\pi}{4})}}{2}\left[1+O(|z|^{-2})\right] -\right.$$

$$\left. - \frac{e^{i(z-\frac{\pi}{4})}-e^{-i(z-\frac{\pi}{4})}}{2}\left[-\frac{1}{8z}+O(|z|^{-3})\right]\right\} =$$

---

*) R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Teubner, Leipzig und Berlin 1937, str. 47.

$$= \sqrt{\frac{1}{2\pi z}}\left\{e^{i(z-\frac{\pi}{4})}\left[1+O(|z|^{-1})\right] + e^{-i(z-\frac{\pi}{4})}\left[1+O(|z|^{-1})\right]\right\} . \qquad (638)$$

Uvrstimo li sad

$$z = c\sqrt{t^2-x^2} = (c_1+ic_2)t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} \qquad (639)$$

i uočimo, da zbog

$$\lim_{t\to\infty}\frac{c\sqrt{t^2-x^2}}{t} = c \qquad (640)$$

iz egzistencije konačnog $\limsup\limits_{t\to\infty}\left[\left|c\sqrt{t^2-x^2}\right| f(t)\right]$ očito slijedi i egzistencija konačnog $\limsup\limits_{t\to\infty}\left[t\, f(t)\right]$, t.j. da mjesto

$O(\left|c\sqrt{t^2-x^2}\right|^{-1})$ možemo pisati $O(t^{-1})$, to dobijemo

$$J_o(c\sqrt{t^2-x^2}) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi z}}\sqrt{\frac{1}{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}}\left\{e^{ic_1t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}\, e^{-c_2t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}\left[1+O(t^{-1})\right]\right\} +$$

$$+ \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}}\sqrt{\frac{1}{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}}\left\{e^{-ic_1t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}\, e^{c_2t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}\left[1+O(t^{-1})\right]\right\} , \qquad (641)$$

tako da za integrand od (628) vrijedi asimptotički razvoj

$$e^{-st}J_o(c\sqrt{t^2-x^2}) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}}\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}}\left\{e^{i(c_1-s_2)t}\, e^{ic_1t(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1)}\right. \cdot$$

$$\left. \cdot\, e^{-(c_2+s_1)t}\, e^{-c_2t(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1)}\left[1+O(t^{-1})\right]\right\} +$$

$$+ \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}}\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}}\left\{e^{-i(c_1+s_2)t}\, e^{-ic_1t(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1)}\right. \cdot$$

$$\cdot\ e^{(c_2-s_1)t}\ e^{c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\ -1\right)}\left[1+O(t^{-1})\right]\Bigg\}\ . \qquad (643) \quad 19$$

Zbog

$$\lim_{t\to\infty} t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\ -1\right) = 0 \qquad (644) \quad 20$$

vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} e^{ic_1 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\ -1\right)} = \lim_{t\to\infty} e^{-ic_1 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\ -1\right)} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} e^{-c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\ -1\right)} = \lim_{t\to\infty} e^{c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\ -1\right)} = 1 \qquad (645) \quad 21$$

Dalje je očito

$$\left|e^{i(c_1-s_2)t}\right| = \left|e^{-i(c_1+s_2)t}\right| = 1 \qquad (646) \quad 22$$

i

$$\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} = O(t^{-\frac{1}{2}})\ . \qquad (647) \quad 23$$

Pretpostavimo li sad

$$s_1 > c_2 \qquad (648) \quad 24$$

to se vidi obzirom na (632), da eksponenti eksponencijalnih funkcija $e^{-(c_2+s_1)t}$ i $e^{(c_2-s_1)t}$ postaju negativni i da integral mora biti apsolutno konvergentan.

Pretpostavimo dalje

$$s_1 = c_2 > 0 \qquad (649) \quad 25$$

$$s_2 = -c_1 \qquad (650) \quad 26$$

to se vidi, da funkcija $e^{-(c_2+s_1)t}$ i sad ima negativan eksponent i da će stoga prvi sumand izraza na desnoj strani od (643) dati apsolutno konvergentan integral. Drugi sumand tog izraza će glasiti

$$S_2 =$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} \left\{ e^{-ic_1 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\,-1\right)} \, e^{c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\,-1\right)} \left[1 + O(t^{-1})\right] \right\} \tag{651}$$

Obzirom na (645) i (647) dat će član $O(t^{-1})$ u uglatoj zagradi apsolutno konvergentan integral.

Prema (645) možemo staviti

$$e^{-ic_1 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\,-1\right)} \, e^{c_2 t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}\,-1\right)} = 1 + \delta_1 + i\delta_2 \tag{652}$$

gdje je

$$\lim_{t\to\infty} \delta_1 = 0 \tag{653}$$

$$\lim_{t\to\infty} \delta_2 = 0 \tag{654}$$

t.j. za povoljno maleni zadani ε može se naći $\underline{T}$ tako, da za

$$t > T \tag{655}$$

vrijedi

$$|\delta_1| < \varepsilon \tag{656}$$

i prema tome

$$1 + \delta_1 > 1 - \varepsilon \quad . \tag{657}$$

Budući da je osim toga

$$\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}} > \frac{1}{\sqrt{t}} \tag{658}$$

to je

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}}\, e^{-ic_1t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)}\, e^{c_2t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}}}(1+\delta_1) > \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{t}} \qquad \text{za} \quad t > T \tag{659}$$

i prema tome taj dio daje divergentan integral. Integral (628) je dakle pod pretpostavkom (649),(650) divergentan, tako da je po poznatim stavcima*) apscisa konvergencije, a ujedno i apscisa apsolutne konvergencije

$$\beta = c_2 \;. \tag{660}$$

U točki $s_1 = c_2 > 0$, $s_2 = -c_1$ pravca konvergencije $s_1 = c_2 > 0$ divergira dakle integral (628). Preostaje još istražiti,da li je taj integral konvergentan u ostalim točkama pravca konvergencije. (Svakako on u tim točkama ne može biti apsolutno konvergentan, jer pravac apsolutne konvergencije pripada ili sav, ili ne pripada nikako području apsolutne konvergencije**)). Konačno još treba posebno diskutirati slučaj $c_2 = 0$.

Pretpostavimo dakle ponajprije

$$s_2 = c_2 > 0 \tag{661}$$

$$s_2 \neq -c_1 \;. \tag{662}$$

---

*) Doetsch, l.c. 3. pogl. § 2. str. 13 itd.

**) Doetsch, l.c. str. 15.

Prvi sumand izraza na desnoj strani od (643) dat će zbog (660) apsolutno konvergentan integral, isto tako dio drugog sumanda, koji je pomnožen sa $O(t^{-1})$. Preostaje još izraz

$$R = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}} \frac{1}{\sqrt{t}\sqrt[4]{1-\frac{x^2}{t^2}}} e^{-i(c_1+s_2)t} e^{(c_2-ic_1)t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)} . \qquad (663)$$

Red potencija

$$y = t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right) = -t\left(\frac{x^2}{2t^2}+\frac{x^4}{8t^4}+\frac{x^6}{16t^6}+\frac{3x^8}{128t^8}+\ldots\right) =$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2t}+\frac{x^4}{8t^3}+\ldots\right) \qquad (664)$$

možemo uvrstiti u razvoj

$$e^{(c_2-ic_1)y} = 1+\frac{(c_2-ic_1)y}{1!}+\frac{(c_2-ic_1)^2y^2}{2!}+\ldots , \qquad (665)$$

što je dozvoljeno, jer je za dovoljno veliki $\underline{t}$ red (664) apsolutno konvergentan i suma apsolutnih vrijednosti njegovih članova manja od radija konvergencije reda (665)*). (Taj radij konvergencije je neizmjerno velik). Dobijemo dakle

$$e^{(c_2-ic_1)t\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}}-1\right)} = 1-(c_2-ic_1)\left(\frac{x^2}{2t}+\frac{x^4}{8t^3}+\ldots\right)+$$

$$+\frac{1}{2!}(c_2-ic_1)^2\left(\frac{x^2}{2t}+\frac{x^4}{8t^3}+\ldots\right)^2-\frac{1}{3!}(c_2-ic_1)^3\cdot\left(\frac{x^2}{2t}+\frac{x^4}{8t^3}+\ldots\right)^3+\ldots =$$

---

*) Usporedi na pr. K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, Springer, Berlin 1922, str. 173.

$$= 1 - (c_2 - ic_1)\frac{x^2}{2t} + (c_2 - ic_1)^2\frac{x^4}{8t^2} - (c_2 - ic_1)\left[1 + \frac{1}{6}(c_2 - ic_1)^2 x^2\right]\frac{x^4}{8t^3} + \dots \tag{666}$$

Dalje vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1 - \frac{x^2}{t^2}}} = 1 + \frac{x^2}{4t^2} + \frac{5x^4}{32t^4} + \frac{15x^6}{128t^6} + \dots \tag{667}$$

Produkt apsolutno konvergentnih redova (666) i (667) daje

$$R = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-i(c_1+s_2)t}\left\{1 - (c_2 - ic_1)\frac{x^2}{2t} + \left[(c_2 - ic_1)^2\frac{x^2}{3} + 1\right]\frac{x^2}{4t^2} - \dots\right\} =$$

$$= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi c}}\,\frac{e^{-i(c_1+s_2)t}}{\sqrt{t}}\left[1 + O(t^{-1})\right] \quad . \tag{668}$$

Dio toga izraza, koji je pomnožen sa $O(t^{-1})$ daje očito apsolutno konvergentan integral, a ostali dio za $c_1 + s_2 \neq 0$ [vidi (662)] uvjetno konvergentan integral, što je lako dokazati*). Prema tome je pod uvjetima (661),(662) integral (628) uvjetno konvergentan.

Pretpostavimo konačno

$$s_1 = c_2 = 0 \tag{669}$$

$$c_1 > 0 \quad . \tag{670}$$

Za

$$s_2 = -c_1 \tag{671}$$

daje drugi član od (643) divergentan integral, što smo već prije

*) Taj integral je dobro poznat. Zna se daje

$$\int_0^\infty \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\,(1+i).$$

Usporedi C. Jordan, Cours d'analyse de l'école polytechnique, Gauthier-Villard, Paris 1913, II. sv. str. 201.

dokazali (neovisno od toga, da li vrijedi (661) ili (669)). Prvi član će dati uvjetno konvergentan integral, (a ne apsolutno konvergentan, kao pod pretpostavkom (661)), što slijedi na analogan način, kaošto je bio upotrijebljen, da se izvede (668). Integral (628) je dakle pod pretpostavkom (669),(670),(671) divergentan.

Za

$$s_2 = c_1 \tag{672}$$

uz (669),(670) dat će prvi član od (643) divergentan integral, a drugi član uvjetno konvergentan, dakle je integral (628) divergentan. Ako ne vrijedi ni (671) ni (672), dat će oba člana od (643) uvjetno konvergentne integrale, tako da je integral (628) konvergentan. Vidi se dakle, da je za $c_2 = 0$ na pravcu konvergencije $s_1 = 0$ integral (628) divergentan u dvije točke, $s_2 = -c_1$ i $s_2 = c_1$.

Slučaj

$$c_1 = c_2 = 0 \tag{673}$$

je trivijalan, jer je onda Besselova funkcija u integralu (628) identično jednaka jedan.

Oslobodimo li se pretpostavke (632), odnosno (633), to možemo dobivene rezultate izraziti ovako:

<u>STAVAK III.1.</u>

Stavimo li

$$c = c_1 + ic_2 \tag{674}$$

to je apscisa konvergencije integrala

$$L = \int_x^\infty e^{-st} J_o(c\sqrt{t^2-x^2})dt \tag{675}$$

dana sa

$$\beta = |c_2| . \tag{676}$$

Ako je

$$c_2 \neq 0 \tag{677}$$

to je integral na pravcu konvergencije svagdje uvjetno konvergentan, osim u točki $(|c_2|, -c_1 \operatorname{sgn} c_2)$, gdje je divergentan.

Ako je

$$c_2 = 0, \quad c_1 \neq 0 , \tag{678}$$

integral je na pravcu konvergencije svagdje uvjetno konvergentan, osim u točkama $(0, c_1)$, $(0, -c_1)$, gdje je divergentan.

Slučaj

$$c_1 = c_2 = 0 \tag{679}$$

je trivijalan i integral je u tom slučaju na cijelom pravcu konvergencije divergentan.

Potpunosti radi primjećujemo, da je analogno kod Laplaceovih transformacija, koje odgovaraju funkcijama pod brojem 34 i 35 Doetschove tablice, i koje glase

$$\int_0^\infty e^{-st} \frac{J_\nu(at)}{t} dt = \frac{(\sqrt{s^2+a^2} - s)^\nu}{\nu a^\nu} \qquad (\mathrm{Re}(\nu) > 0) \tag{680}$$

i

$$\int_0^\infty e^{-st}\, t^\nu J_\nu(at) dt = \frac{(2a)^\nu \, \Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}\,(s^2+a^2)^{\nu + \frac{1}{2}}} \qquad (\mathrm{Re}(\nu) > -\tfrac{1}{2}) \tag{681}$$

apscisa konvergencije dana apsolutnom vrijednošću imaginarnog dijela konstante <u>a</u>, i samo je onda jednaka nuli, kaošto je tamo naznačeno, ako je ta konstanta realna.

2. Kompozicija dviju ili više Besselovih funkcija nultoga reda.

Jednadžba (627), napisana s oznakama prema (628), glasi:

$$\int_x^\infty e^{-st} J_0(c\sqrt{t^2-x^2})dt = \frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{\sqrt{s^2+c^2}} \quad (x \geqq 0,\ Re(s) > |Im(c)|,\ c \text{ povoljan}) \qquad (682)$$

gdje smo uzeli još u obzir stavak III.1.-

Integriramo li ovu jednadžbu po $\underline{x}$ od $\underline{x}$ do ∞, izmijenivši na lijevoj strani slijed integracija, što je očito dopušteno, to dobijemo:

$$\int_x^\infty\left[\int_x^\infty e^{-st} J_0(c\sqrt{t^2-x^2})dt\right]dx = \underline{\underline{\int_x^\infty\left[e^{-st}\int_x^t J_0(c\sqrt{t^2-x^2})dx\right]dt}} =$$

$$= \int_x^\infty \frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{\sqrt{s^2+c^2}}dx = \underline{\underline{\frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{s^2+c^2}}} . \qquad (683)$$

Prema tome u Laplaceovoj transformaciji (624) odgovara prvotnoj funkciji

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x \\ \int_x^t J_0(c\sqrt{t^2-x^2})dx & \text{za } t > x \end{cases} \qquad (684)$$

izvedena funkcija

$$f(s) = \frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{s^2+c^2} . \qquad (685)$$

Prema poznatim stavcima*) operaciji komponiranja u području prvotnih

---

*) Doetsch, ~~l.c.~~ str. 161. stavak IV b.

funkcija odgovara operacija množenja u području izvedenih funkcija.

Neka su $x_1 \geqq 0$ i $x_2 \geqq 0$ dva realna parametra i neka je

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x_1 \\ J_o(c\sqrt{t^2-x_1^2}) & \text{za } t > x_1 \end{cases} \tag{686}$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leqq t \leqq x_2 \\ J_o(c\sqrt{t^2-x_2^2}) & \text{za } t > x_2 \end{cases} \tag{687}$$

Tvorimo u smislu (112) kompoziciju

$$K^{o,o}_{o,o}(t;x_1,x_2) = \int_o^t F_1(y)\, F_2(t-y)dy =$$

$$= \int_{x_1}^{t-x_2} J_o(c\sqrt{y^2-x_1^2})\, J_o(c\sqrt{(t-y)^2-x_2^2})dy \qquad (t > x_1+x_2) \quad . \tag{688}$$

Prvotnim funkcijama (686), (687) odgovaraju prema (625), (626) izvedene funkcije

$$f_1(s) = \frac{e^{-x_1\sqrt{s^2+c^2}}}{\sqrt{s^2+c^2}} \tag{689}$$

$$f_2(s) = \frac{e^{-x_2\sqrt{s^2+c^2}}}{\sqrt{s^2+c^2}} \tag{690}$$

dok kompoziciji $K^{o,o}_{o,o}(t;x_1,x_2)$ kao prvotnoj funkciji odgovara njihov produkt

$$f_1(s)\, f_2(s) = \frac{e^{-(x_1+x_2)\sqrt{s^2+c^2}}}{s^2+c^2} \tag{691}$$

kao izvedena funkcija. S druge strane prema (684), (685) izvedenoj funkciji (691) odgovara kao prvotna funkcija integral

$$I = \int_{x_1+x_2}^{t} J_o(c\sqrt{t^2-y^2})dy \quad . \tag{692}$$

Budući da je k zadanoj izvedenoj funkciji prvotna funkcija jednoznačno odredjena*), to mora kompozicija (688) biti identična s integralom (692), t.j. dobijemo integralan teorem Besselovih funkcija, u kojem ćemo prema (340) pisati Λ_o mjesto J_o :

$$K^{o,o}_{o,o}(t;x_1,x_2) = \int_{x_1}^{t-x_2} \Lambda_o(c\sqrt{y^2-x_1^2})\,\Lambda_o(c\sqrt{(t-y)^2-x_2^2})\,dy =$$

$$= \int_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \quad . \qquad (693)$$

Analitičkim produživanjem lako je uvidjeti, da ova relacija vrijedi i onda, kad nije ispunjena pretpostavka, da su x_1, x_2 i t realni brojevi s uvjetom $t > x_1+x_2$, pa to mogu biti tri povoljna kompleksna broja, a krivulja integracije bilo koja krivulja, koja se može rektificirati,(na pr. po odsječcima glatka krivulja), a spaja točke, koje su dane dolnjim i gornjim granicama integrala. Drugi korijeni, koji se pojavljuju u argumentima funkcija, samo su prividni, jer je Λ_o taka funkcija, kako proizlazi iz (340). Integrali u (693) su stoga očito cijele analitičke funkcije.

Istina je, da se u tom posveopćenju prvi integral u (693) više ne može smatrati kompozicijom u strogom smislu jednadžbe (112). Ipak ćemo pridržati taj izraz i u ovom slučaju.

Provede li se postupak integriranja po x od x do ∞, koji je od (682) doveo do (683), r puta, to se dolazi do relacije

$$\int_x^\infty \left[e^{-st}\left(\int_x^t dx\right)^r J_o(c\sqrt{t^2-x^2})\,dx\right]dt = \frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{(\sqrt{s^2+c^2})^{r+1}} \quad . \qquad (694)$$

*) Ako zahtijevamo, da bude kontinuirana. Vidi Doetsch, ~~l.c.~~ str 34.

Uzevši još u obzir (273), možemo dakle reći, da prvotnoj funkciji

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad 0 \leq t \leq x \\ \dfrac{1}{(r-1)!}\displaystyle\int_x^t (y-x)^{r-1} J_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy & \text{za} \quad t > x \end{cases} \tag{695}$$

odgovara izvedena funkcija

$$f(s) = \frac{e^{-x\sqrt{s^2+c^2}}}{\left(\sqrt{s^2+c^2}\right)^{r+1}} \; . \tag{696}$$

Neka su dalje $x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; \ldots \; , \; x_r \geq 0$ realni parametri. Onda prvotnim funkcijama

$$F_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad 0 \leq t \leq x_k \\ J_0\left(c\sqrt{t^2-x_k^2}\right) & \text{za} \quad t > x_k \end{cases} \qquad (k=1,\ldots,r) \tag{697}$$

odgovaraju izvedene funkcije

$$f_k(s) = \frac{e^{-x_k\sqrt{s^2+c^2}}}{\sqrt{s^2+c^2}} \qquad (k=1,\ldots,r) \; . \tag{698}$$

Kompozicija funkcija (697) glasi:

$$K^{0,\ldots,0}_{0,\ldots,0}(t;x_1,\ldots,x_r) = F_1(t) * F_2(t) * \ldots * F_r(t) =$$

$$= \int_0^t dy_1 F_1(t-y_1) \int_0^{y_1} dy_2 F_2(y_1-y_2) \ldots \int_0^{y_{r-3}} dy_{r-2} F_{r-2}(y_{r-3}-y_{r-2}) \int_0^{y_{r-2}} dy_{r-1} \cdot$$

$$\cdot F_{r-1}(y_{r-2}-y_{r-1}) \, F_r(y_{r-1}) \; . \tag{699}$$

Uvrstimo li funkcije (697), to se lako vidi, da će odbacivanje onih dijelova integrala, za koje su integrandi jednaki nuli, značiti, da se pojedine varijable integracije kreću u ovim granicama:

$$x_r \leq y_{r-1} \leq y_{r-2}-x_{r-1} \qquad (700)$$

$$x_r+x_{r-1} \leq y_{r-2} \leq y_{r-3}-x_{r-2} \qquad (701)$$

$$x_r+x_{r-1}+x_{r-2} \leq y_{r-3} \leq y_{r-4}-x_{r-3} \qquad (702)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_r+x_{r-1}+\ldots+x_3 \leq y_2 \leq y_1-x_2 \qquad (703)$$

$$x_r+x_{r-1}+\ldots+x_2 \leq y_1 \leq t-x_1 \; . \qquad (704)$$

Dobijemo dakle, zamijenivši J_o sa Λ_o :

$$K^{o,\ldots,o}_{o,\ldots,o}(t;x_1,\ldots,x_r) =$$

$$= \int\limits_{\sum_{k=2}^{r} x_k}^{t-x_1} dy_1 \Lambda_o(c\sqrt{(t-y_1)^2-x_1^2}) \int\limits_{\sum_{k=3}^{r} x_k}^{y_1-x_2} dy_2 \Lambda_o(c\sqrt{(y_1-y_2)^2-x_2^2})\ldots$$

$$\ldots \int\limits_{x_r+x_{r-1}}^{y_{r-3}-x_{r-2}} dy_{r-2} \Lambda_o(c\sqrt{(y_{r-3}-y_{r-2})^2-x_{r-2}^2}) \int\limits_{x_r}^{y_{r-2}-x_{r-1}} dy_{r-1} \Lambda_o(c\sqrt{(y_{r-2}-y_{r-1})^2-x_{r-1}^2})$$

$$\cdot \Lambda_o(c\sqrt{y_{r-1}^2-x_r^2}) \qquad (705)$$

gdje je u smislu (704)

$$t > \sum_{k=1}^{r} x_k \; . \qquad (706)$$

Ovoj kompoziciji odgovara kao izvedena funkcija produkt funkcija (698) :

$$f_1(s)\, f_2(s) \ldots f_r(s) = \frac{e^{-(x_1+x_2+\ldots+x_r)\sqrt{s^2+c^2}}}{(\sqrt{s^2+c^2})^r} \; . \qquad (707)$$

Stavimo li još

$$X = \sum_{k=1}^{r} x_k \tag{708}$$

to možemo dakle prema (695) i (696) zaključiti, da je

$$K^{0,\dots,0}_{0,\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r) = \frac{1}{(r-2)!}\int_X^t (y-X)^{r-2}\Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \tag{709}$$

pod pretpostavkom, da je $t > X$. Razumijevamo li pod $K^{0,\dots,0}_{0,\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r)$ izraz (705) i onda, ako su $t,x_1,x_2,\dots,x_r$ povoljni kompleksni brojevi, koji dakle više ne zadovoljavaju uvjet $t > X$, to se opet analitičkim produživanjem uvidja, da (709) vrijedi i u tom slučaju.

3. Rekurzione jednadžbe za kompoziciju dviju Besselovih funkcija višega reda.

Za ovo, što slijedi, pretpostavlja se prema potrebi, da su parametri $x_1, x_2, \ldots$ od nule različiti. Slučajevi, kod kojih iščezavanje jednog ili više tih parametara dovodi do poteškoća, raspravit će se na kasnijem mjestu.

Razmatrajmo kompoziciju

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) =$$

$$= \int_{x_1}^{t-x_2} y^{m_1} \Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2-x_1^2})\,(t-y)^{m_2} \Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-y)^2-x_2^2})\,dy\,, \qquad (710)$$

pri čemu su m_1, m_2, n_1, n_2 nenegativni cijeli brojevi, t, x_1, x_2 povoljni kompleksni brojevi, a krivulja integracije bilo koja krivulja, koja se može rektificirati, a spaja točke $\underline{x_1}$ i $\underline{t-x_2}$.

Za slučaj, da su t, x_1, x_2 nenegativni realni brojevi i $t > x_1+x_2$, možemo (710) shvatiti kao kompoziciju funkcija

$$F_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_1 \\ t^{m_1}\Lambda_{n_1}(c\sqrt{t^2-x_1^2}) & \text{za } t > x_1 \end{cases} \qquad (711)$$

$$F_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_2 \\ t^{m_2}\Lambda_{n_2}(c\sqrt{t^2-x_2^2}) & \text{za } t > x_2 \end{cases} \qquad (712)$$

U tom slučaju komutativni zakon za operaciju komponiranja daje

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) = K_{n_2,n_1}^{m_2,m_1}(t;x_2,x_1)\,. \qquad (713)$$

Analitičkim produživanjem slijedi, da (713) vrijedi i za povoljne kompleksne vrijednosti od t, x_1, x_2, a slijedi to i izravno iz (710) supstitucijom $z=t-y$.

Diferenciramo li (710) po x_1 i uzmemo u obzir (346), to dobijemo

$$\frac{\partial}{\partial x_1} K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) =$$

$$= -x_1^{m_1}(t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2}\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right) + \frac{c^2 x_1}{2(n_1+1)} K_{n_1+1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) \tag{714}$$

ili

$$K_{n_1+1,n_2}^{m_1,\ m_2}(t;x_1,x_2) =$$

$$= \frac{2(n_1+1)}{c^2 x_1} \left\{ \frac{\partial K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_1^{m_1}(t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2}\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right) \right\} \tag{715}$$

i analogno

$$K_{n_1,n_2+1}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) =$$

$$= \frac{2(n_2+1)}{c^2 x_2} \left\{ \frac{\partial K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2} + x_2^{m_2}(t-x_2)^{m_1} \Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right) \right\} . \tag{716}$$

U (715) i (716) se pretpostavlja $x_1 \neq 0$ odnosno $x_2 \neq 0$. Ove jednadžbe daju mogućnost postepenog povisivanja donjih indeksa kompozicije.

Diferenciramo li (710) po $\underline{t}$, slijedi obzirom na (346):

$$\frac{\partial K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2)}{\partial t} = (t-x_2)^{m_1} x_2^{m_2} \Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right) + m_2 K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2-1}(t;x_1,x_2) -$$

$$- \frac{c^2}{2(n_2+1)} K_{n_1,n_2+1}^{m_1,m_2+1}(t;x_1,x_2) \tag{717}$$

ili

$$K^{m_1,m_2+1}_{n_1,n_2+1}(t;x_1,x_2) =$$

$$= \frac{2(n_2+1)}{c^2}\left\{(t-x_2)^{m_1}x_2^{m_2}\Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right) + m_2K^{m_1,m_2-1}_{n_1,n_2}(t;x_1,x_2) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,x_2)}{\partial t}\right\} \tag{718}$$ 90

i analogno obzirom na (713)

$$K^{m_1+1,m_2}_{n_1+1,n_2}(t;x_1,x_2) = \frac{2(n_1+1)}{c^2}\left\{(t-x_1)^{m_2}x_1^{m_1}\Lambda_{n_2}\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right) + \right.$$

$$\left. + m_1 K^{m_1-1,m_2}_{n_1,\ n_2}(t;x_1,x_2) - \frac{\partial K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,x_2)}{\partial t}\right\}. \tag{719}$$ 91

Uvrstimo li u (718) za $K^{m_1,m_2+1}_{n_1,n_2+1}$ izraz, koji daje (716), dobijemo:

$$\frac{\partial K^{m_1,m_2+1}_{n_1,n_2}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2} = x_2\left\{m_2\,K^{m_1,m_2-1}_{n_1,n_2}(t;x_1,x_2) - \frac{\partial K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,x_2)}{\partial t}\right\}. \tag{720}$$ 92

Integriramo li po x_2 i odredimo dolnju granicu integrala tako, da integral iščezava za $t = x_1+x_2$, kao u (710), to slijedi:

$$K^{m_1,m_2+1}_{n_1,n_2}(t;x_1,x_2) =$$

$$= \int\limits_{t-x_1}^{x_2} y\left\{m_2\,K^{m_1,m_2-1}_{n_1,n_2}(t;x_1,y) - \frac{\partial K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,y)}{\partial t}\right\}dy \tag{721}$$ 93

i analogno

$$K_{n_1,\ n_2}^{m_1+1,m_2}(t;x_1,x_2) =$$

$$= \int_{t-x_2}^{x_1} y \left\{ m_1\, K_{n_1,\ n_2}^{m_1-1,m_2}(t;y,x_2) - \frac{\partial K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;y,x_2)}{\partial t} \right\} dy\ . \qquad (722)$$

Zadnje dvije jednadžbe dopuštaju postepeno povisivanje gornjih indeksa kompozicije. Jednadžbe vrijede i za $m_2=0$, odnosno $m_1=0$, kada otpada prvi član u vitičastoj zagradi u integrandu. To se razabire, ako se cijeli izvod provede pod tom pretpostavkom.

Dajemo još neke rekurzione jednadžbe, koje mogu prema potrebi korisno poslužiti. Prema (344) vrijedi:

$$(y^2-x_1^2)\,\Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2-x_1^2}) = \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2}\left\{\Lambda_{n_1-1}(c\sqrt{y^2-x_1^2}) - \Lambda_{n_1-2}(c\sqrt{y^2-x_1^2})\right\}. \qquad (723)$$

Pomnožimo li ovu jednadžbu sa $y^{m_1}(t-y)^{m_2}\Lambda_{n_2}(c\sqrt{(t-y)^2-x_2^2})$ i integriramo po $\underline{y}$ od $\underline{x_1}$ do $\underline{t-x_2}$, dobijemo

$$K_{n_1,\ n_2}^{m_1+2,m_2} = x_1^2\, K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2} + \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2}\,(K_{n_1-1,n_2}^{m_1,\ m_2} - K_{n_1-2,n_2}^{m_1,\ m_2}) \qquad (724)$$

i analogno

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2+2} = x_2^2\, K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2} + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2}\,(K_{n_1,n_2-1}^{m_1,m_2} - K_{n_1,n_2-2}^{m_1,m_2})\ . \qquad (725)$$

Ako u (720) povisimo $\underline{m_2}$ za jednu jedinicu i uvrstimo izraz (725), slijedi:

$$\frac{\partial K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2+1}(t;x_1,x_2)}{\partial t} = (m_2+1)\, K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) - \frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{x_2\, K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2}\, K_{n_1,n_2-1}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) - K_{n_1,n_2-2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2)\right\} \qquad (726)$$

Integracija po $\underline{t}$ daje, ako dolnju granicu odredimo tako, da integral iščezava za $t=x_1+x_2$,

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2+1}(t;x_1,x_2) =$$

$$= \int\limits_{x_1+x_2}^{t} \left\{ (m_2+1)\, K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2) - \frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\left\{ x_2\, K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4n_2(n_2-1)}{c^2}\left[K_{n_1,n_2-1}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2) - K_{n_1,n_2-2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2)\right]\right\}\right\} dy \qquad (727)$$

i analogno

$$K_{n_1,\ n_2}^{m_1+1,m_2}(t;x_1,x_2) =$$

$$= \int\limits_{x_1+x_2}^{t} \left\{ (m_1+1)\, K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2) - \frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{ x_1\, K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(y;x_1,x_2) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4n_1(n_1-1)}{c^2}\left[K_{n_1-1,n_2}^{m_1,\ m_2}(y;x_1,x_2) - K_{n_1-2,n_2}^{m_1,\ m_2}(y;x_1,x_2)\right]\right\}\right\} dy. \qquad (728)$$

4. Izravne formule za kompoziciju dviju Besselovih funkcija višega reda.

Opetovanom primjenom rekurzione jednadžbe (715) dobije se lako

$$K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) = \frac{2^{n_1} n_1!}{c^{2n_1}} \left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1} K_{o,\,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{2^{n_1-k} n_1!}{c^{2(n_1-k)} k!} \left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1-k-1} \left[x_1^{m_1-1}(t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2}\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)\right] \tag{729}$$

i dalje

$$K_{o,\,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) = \frac{2^{n_2} n_2!}{c^{2n_2}} \left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2} K_{o,\,o}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) +$$

$$+\sum_{k=0}^{n_2-1} \frac{2^{n_2-k} n_2!}{c^{2(n_2-k)} k!} \left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2-k-1} \left[x_2^{n_2-1}(t-x_2)^{m_1} \Lambda_{o}\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right)\right] . \tag{730}$$

Uvrstimo li (730) u (729) i uzmemo u obzir, da je prema (346)

$$\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\Lambda_r\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right) = \frac{c^2}{2(r+1)}\Lambda_{r+1}\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right) , \tag{731}$$

dakle

$$\left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1}\Lambda_o\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right) = \frac{c^{2n_1}}{2^{n_1} n_1!}\Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right) , \tag{732}$$

to slijedi

$$K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,x_2) = \frac{2^{n_1+n_2} n_1! n_2!}{c^{2(n_1+n_2)}} \left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1}\left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2} K^{m_1,m_2}_{o,\ o}(t;x_1,x_2) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_1-1} \frac{2^{n_1-k} n_1!}{c^{2(n_1-k)} k!} \left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1-k-1} \left[x_1^{m_1-1}(t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2}\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_2-1} \frac{2^{n_2-k} n_2!}{c^{2(n_2-k)} k!} \left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2-k-1} \left[x_2^{m_2-1}(t-x_2)^{m_1} \Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right)\right] .$$

(733) 105

Pri tome pretpostavljamo $n_1 > 0$ i $n_2 > 0$. Ako je primjerice $n_1=0$, $n_2 > 0$, otpada prva suma na desnoj strani od (733), t.j. vraćamo se na (730). Slučaj $n_1=n_2=0$ je trivijalan.

Time je $K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}$ izražen pomoću $K^{m_1,m_2}_{o,\ o}$. Treba još izraziti $K^{m_1,m_2}_{o,\ o}$ pomoću $K^{o,o}_{o,o}$, koji je dan formulom (693). To ćemo provesti za općenitiji slučaj kompozicije povoljnog broja Besselovih funkcija u točki III 6, i onda specijalizacijom izvesti formulu, koju ovdje trebamo. (Vidi formulu (757)).

Zabilježimo još nešto općenitiju formulu, kojom se svodi $K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}$ na $K^{m_1,m_2}_{p,\ q}$, gdje je $p < n_1$, $q < n_2$. Ta formula se dobije analognim načinom kao (733) i glasi:

$$K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,x_2) =$$

$$= \frac{2^{n_1+n_2-p-q} n_1! n_2!}{c^{2(n_1+n_2-p-q)} p! q!} \left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1-p}\left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2-q} K^{m_1,m_2}_{p,\ q}(t;x_1,x_2) +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_1-p-1} \frac{2^{n_1-p-k} n_1!}{c^{2(n_1-p-k)} (p+k)!} \left(\frac{1}{x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{n_1-p-k-1} \left[x_1^{m_1-1}(t-x_1)^{m_2} \Lambda_{n_2}\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right)\right] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n_2-q-1} \frac{2^{n_2-q-k} n_2!}{c^{2(n_2-q-k)} (q+k)!} \left(\frac{1}{x_2}\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{n_2-q-k-1} \left[x_2^{m_2-1}(t-x_2)^{m_1} \Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right)\right] .$$

(734) 106

5. Rekurzione jednadžbe za kompoziciju povoljnog broja Besselovih funkcija višega reda.

Kao posveopćenje od (710) definiramo u analogiji sa (705) kompoziciju

$$K^{m_1,\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_r}(t;x_1,\dots,x_r) =$$

$$= \int\limits_{\sum_{k=2}^{r} x_k}^{t-x_1} dy_1 (t-y_1)^{m_1} \Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{(t-y_1)^2-x_1^2}\right) \int\limits_{\sum_{k=3}^{r} x_k}^{y_1-x_2} dy_2 (y_1-y_2)^{m_2} \Lambda_{n_2}\left(c\sqrt{(y_1-y_2)^2-x_2^2}\right)\dots$$

$$\dots \int\limits_{x_r+x_{r-1}}^{y_{r-3}-x_{r-2}} dy_{r-2} (y_{r-3}-y_{r-2})^{m_{r-2}} \Lambda_{n_{r-2}}\left(c\sqrt{(y_{r-3}-y_{r-2})^2-x_{r-2}^2}\right)\cdot$$

$$\cdot \int\limits_{x_r}^{y_{r-2}-x_{r-1}} dy_{r-1} \Lambda_{n_{r-1}}\left(c\sqrt{(y_{r-2}-y_{r-1})^2-x_{r-1}^2}\right) \Lambda_{n_r}\left(c\sqrt{y_{r-1}^2-x_r^2}\right), \qquad (735)$$

koja se za realne vrijednosti od $t, x_1, \dots, x_r$ i $t > X$ (vidi (708)) može smatrati kompozicijom funkcija

$$F_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad 0 \leq t \leq x_k \\ t^{m_k} \Lambda_{n_k}\left(c\sqrt{t^2-x_k^2}\right) & \text{za} \quad t > x_k \end{cases} \qquad (k=1,\dots,r)$$

(736)

dok ćemo mi dopuštati i povoljne kompleksne vrijednosti od $t, x_1, \dots, x_r$.

Diferenciramo li (735) po x_1, dobijemo očito:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} K_{n_1,\dots,n_r}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) = - x_1^{m_1} K_{n_2,\dots,n_r}^{m_2,\dots,m_r}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) +$$

$$+ \frac{c^2 x_1}{2(n_1+1)} K_{n_1+1,n_2,\dots,n_r}^{m_1,\ m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) \tag{737}$$ 109

Zbog komutativnog zakona za operaciju komponiranja vrijedi analogna formula za bilo koji x_k, t.j.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} K_{n_1,\dots,n_r}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) =$$

$$= - x_k^{m_k} K_{n_1,\dots,n_{k-1},n_{k+1},\dots,n_r}^{m_1,\dots,m_{k-1},m_{k+1},\dots,m_r}(t-x_k;x_1,\dots,x_{k-1},x_{k+1},\dots,x_k) +$$

$$+ \frac{c^2 x_k}{2(n_k+1)} K_{n_1,\dots,n_{k-1},n_k+1,n_{k+1},\dots,n_r}^{m_1,\dots,m_{k-1},m_k,\ m_{k+1},\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) \ . \tag{738}$$ 110

Diferenciramo li (735) po $\underline{t}$, to slijedi:

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{n_1,\dots,n_r}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) = + x_1^{m_1} K_{n_2,\dots,n_r}^{m_2,\dots,m_r}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) +$$

$$+ m_1 K_{n_1,\ n_2,\dots,n_r}^{m_1-1,m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) - \frac{c^2}{2(n_1+1)} K_{n_1+1,n_2,\dots,n_r}^{m_1+1,m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) \tag{739}$$ 111

ili pomoću (737)

$$\frac{\partial}{\partial t} K_{n_1,\dots,n_r}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) = m_1 K_{n_1,\ n_2,\dots,n_r}^{m_1-1,m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) -$$

$$- \frac{1}{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} K_{n_1,\ n_2,\dots,n_r}^{m_1+1,m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) \tag{740}$$ 112

i analogno za bilo koji x_k :

$$\frac{\partial}{\partial t} K^{m_1,\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_r}(t;x_1,\dots,x_r) =$$

$$= m_k K^{m_1,\dots,m_{k-1},m_k-1,m_{k+1},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_{k-1},n_k,\ n_{k+1},\dots,n_r}(t;x_1,\dots,x_r) -$$

$$- \frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k} K^{m_1,\dots,m_{k-1},m_k+1,m_{k+1},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_{k-1},n_k,\ n_{k+1},\dots,n_r}(t;x_1,\dots,x_r) . \qquad (741)$$

Usporede li se formule (737),(738) i (739) sa (714),(717), to se vidi, da (737) do (739) vrijede i za $r=2$, ako se definira

$$K^m_n(t;x) = t^m \Lambda_n(c\sqrt{t^2-x^2}) . \qquad (742)$$

Razumije se, da i formule (740), (741) vrijede i za $r=2$, te u tom slučaju odgovaraju formuli (720).

U analogonu formule (721), koji bismo dobili iz (740), bila bi integracija po prvom parametru protegnuta od $t-X+x_1$ do x_1, tako da integral iščezava za $t=X$.

6. Izravne formule za kompoziciju povoljnog broja Besselovih funkcija višega reda.

Pretpostavimo $r \geq 2$ i primijenimo na (740) operaciju S_{x_1} definiranu prema (254) sa $g_1(x_1) = x_1$. Uočimo li, da sve kompozicije (735) zadovoljavaju uvjet (267), kako se odmah uvidja, to obzirom na stavak I.5. slijedi:

$$K^{m_1+1,m_2,\dots,m_r}_{n_1,\ n_2,\dots,n_r}(t;x_1,\dots,x_r) = S_{x_1}\left\{m_1 K^{m_1-1,m_2,\dots,m_r}_{n_1,\ n_2,\dots,n_r}(t;x_1,\dots,x_r) - \frac{\partial}{\partial t} K^{m_1,\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_r}(t;x_1,\dots,x_r)\right\}. \qquad (743)$$

Ova jednadžba vrijedi i za $m_1=0$, kad prvi član u vitičastoj zagradi otpada, analogno, kaošto je to bilo kod (721),(722).

Izbjegavajmo ponajprije svaku komutaciju operatora S_{x_1} i $\frac{\partial}{\partial t}$. Označimo li kratkoće radi samo prvi gornji indeks kompozicija, dok mjesto S_{x_1} pišemo S, to postepena primjena rekurzione jednadžbe (743) daje primjerice:

$$K^4 = \Big(3\,S^2 + 3\,S^2 \frac{\partial}{\partial t}\,S\,\frac{\partial}{\partial t} + 2\,S\,\frac{\partial}{\partial t}\,S^2\,\frac{\partial}{\partial t} + S\,\frac{\partial}{\partial t}\,S\,\frac{\partial}{\partial t}\,S + S\,\frac{\partial}{\partial t}\,S\,\frac{\partial}{\partial t}\,S\,\frac{\partial}{\partial t}\,S\,\frac{\partial}{\partial t}\Big)\,K^0 \;. \qquad (744)$$

Pogled na tu jednadžbu nas uči, da desno od svakog $\frac{\partial}{\partial t}$ stoji S ili K^0, i lako je vidjeti potpunom indukcijom, da to vrijedi i za bilo koji K^m. Prema stavku I.5. komutira dakle svaki $\frac{\partial}{\partial t}$ s operatorom, koji mu je na lijevo, pa stoga možemo u svakom članu operatore $\frac{\partial}{\partial t}$, počevši s onim, koji stoji najdalje na lijevo u dotičnom članu, postepeno pomicati na lijevi kraj člana. Time prelazi (744) u oblik

$$K^4 = \Big[3\,S^2 + 6\,\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^2 S^3 + \Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big)^4 S^4\Big]\,K^0 \;. \qquad (745)$$

Općenito vrijedi, kako se dokazuje potpunom indukcijom na temelju (743) :

$$K^{m_1,\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_r}(t;x_1,\dots,x_r) =$$

$$= (-1)^{m_1} m_1! \sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \frac{1}{2^k k!(m_1-2k)!} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1-2k} S_{x_1}^{m_1-k} K^{0,\, m_2,\dots,m_r}_{n_1,m_2,\dots,n_r}(t;x_1,\dots,x_r) . \tag{746}$$

Da taj dokaz provedemo, nadovezujemo ponajprije na stavak I.5. Tvrdimo, da izraz $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p S^q f(t;x_1,\dots,x_r)$, gdje S^q znači produkt od $\underline{q}$ operatora $S_{g_k(x_k)}$ $(k=1,\dots,r)$, koji ne moraju biti medjusobno jednaki, zadovoljava uvjet (267), ako to čini funkcija $f(t;x_1,\dots,x_r)$ i ako je $p \leq q$. To svakako vrijedi za $q=1$, jer je za $p=0$ izraz jednak $S \cdot f$, pa prema stavku I.5. zadovoljava (267), a za $p=1$ izraz glasi $\frac{\partial}{\partial t} S\, f$, pa je prema istom stavku $\frac{\partial}{\partial t} Sf = S\frac{\partial}{\partial t} f$, čime je operator S na prvom mjestu, pa izraz opet zadovoljava (267). Pretpostavimo, da je tvrdnja ispravna za neki $\underline{q}$, to će biti dopustiva prijetvorba

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p+1} S^{q+1} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p} S \frac{\partial}{\partial t} S^{q} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p-1} S \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2} S^{q-1} = \dots = S\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{p+1} S^{q} \tag{747}$$

čime je S došao na prvo mjesto, pa tvrdnja vrijedi i za $q+1$. Time je tvrdnja potpunom indukcijom dokazana. Iz nje dalje slijedi, da vrijedi

$$S^n \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p S^q f = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p S^{n+q} f , \tag{748}$$

ako je $p \leq q$, a funkcija $\underline{f}$ zadovoljava (267). Čitamo li naime (747) s desna na lijevo, vidimo, da se operatori $\underline{S}$ jedan po jedan mogu s lijeve strane potencije $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^p$ prenijeti na desnu.

Ako se dakle na izraz (746) izvrši operacija S_{x_1}, to se ta operacija može dodati potenciji $S_{x_1}^{m_1-k}$, jer je $m_1-2k \leq m_1-k$, a kompozicija $K_{n_1,\, n_2,\dots,n_r}^{m_1+1,m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r)$ zadovoljava (267).

Pretpostavljajući da (746) vrijedi za neki $m_1 \geq 1$ uvrstimo ga sad u (743) i nadomjestimo u prvoj sumi na desnoj strani <u>k</u> sa <u>k-1</u>. Slijedi

$$(-1)^{m_1+1}(m_1+1)!\sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1+1}{2}\right]}\frac{1}{2^k k!(m_1-2k+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1,n_2,\dots,n_r}^{o,\, m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) =$$

$$= m_1(-1)^{m_1-1}(m_1-1)!\sum_{k=1}^{\left[\frac{m_1+1}{2}\right]}\frac{1}{2^{k-1}(k-1)!(m_1-2k+1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1,n_2,\dots}^{o,\, m_2,\dots} -$$

$$- (-1)^{m_1} m_1!\sum_{k=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\frac{1}{2^k k!(m_1-2k)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1+1-2k} S_{x_1}^{m_1+1-k} K_{n_1,n_2,\dots,n_r}^{o,\, m_2,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r) . \tag{749}$$

121

Pretpostavimo ponajprije

$$1 \leq k \leq \frac{m_1}{2} . \tag{750}$$

122

Članovi s indeksom <u>k</u> daju

$$\frac{(-1)^{m_1+1}(m_1+1)!}{2^k k!(m_1-2k+1)!} = \frac{(-1)^{m_1-1}(m_1-1)!m_1}{2^{k-1}(k-1)!(m_1-2k+1)!} - \frac{(-1)^{m_1}m_1!}{2^k k!(m_1-2k)!} . \tag{751}$$

123

Dijelimo li s $(-1)^{m_1-1}m_1!$ i množimo s $2^k k!(m_1-2k+1)!$, to dobijemo

$$m_1+1 = 2k + m_1 - 2k + 1 , \tag{752}$$

124

što je ispravno. Za $k=0$ dobijemo

$$\frac{(-1)^{m_1+1}(m_1+1)!}{2^0 0!(m_1+1)!} = - \frac{(-1)^{m_1}m_1!}{2^0 0!m_1!} \tag{753}$$

125

što je ispravno. Ako je m_1 lih broj, može biti $k = \frac{m_1+1}{2} = s$, dakle $m_1=2s-1$, pa dobijemo

$$\frac{(-1)^{2s}(2s)!}{2^s s!0!} = \frac{(-1)^{2s-2}(2s-2)!(2s-1)}{2^{s-1}(s-1)!0!} \tag{754}$$ 126

što je ispravno. Budući da formula (746) vrijedi za $m_1=0$ i za $m_1=1$, to je time dokazana. Razumije se, da analogna formula vrijedi za svaki od gornjih indeksa kompozicije.

Podjemo li od kompozicije, kojoj su svi gornji indeksi jednaki nuli i provedemo postepeno povišenje pojedinih indeksa prema formuli (746), to dobijemo članove s operatorskim produktima oblika

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1-2k_1} S_{x_1}^{m_1-k_1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_2-2k_2} S_{x_2}^{m_2-k_2} \ldots,$$

u kojima možemo na temelju (748) sve operatore $\underline{S}$ premjestiti na desni kraj dotičnog operatorskog produkta, počevši s onima, koji su desnom kraju najbliži. Dobijemo stoga općenito

$$K_{n_1,\ldots,n_r}^{m_1,\ldots,m_r}(t;x_1,\ldots,x_r) =$$

$$\left(\prod_{k=1}^{r}(-1)^{m_k}m_k!\right)\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\sum_{k_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]}\cdots\sum_{k_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2}\right]}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{s=1}^{r}m_s-2k_s}\left(\prod_{v=1}^{r}S_{x_v}^{m_v-k_v}\right)K_{n_1,\ldots,n_r}^{o,\ldots,o}(t;x_1,\ldots,x_r). \tag{755}$$ 127

Ako stavimo sve dolnje indekse jednake nuli i uvrstimo (709), možemo pisati:

$$K_{o,\ldots,o}^{m_1,\ldots,m_r}(t;x_1,\ldots,x_r) =$$

$$= \frac{1}{(r-2)!}\left(\prod_{k=1}^{r}(-1)^{m_k}m_k!\right)\sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\cdots\sum_{k_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2}\right]}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{s=1}^{r}m_s-2k_s}\left(\prod_{v=1}^{r}S_{x_v}^{m_v-k_v}\right)\int_x^t (y-x)^{r-2}\Lambda_o\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy\,. \tag{756}$$ 128

Za $r=2$ dobije se iz toga:

$$K_{o,\ o}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2) =$$

$$= (-1)^{m_1+m_2}\, m_1!\,m_2! \sum_{k_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \sum_{k_2=0}^{\left[\frac{m_2}{2}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m_1+m_2-2k_1-2k_2} S_{x_1}^{m_1-k_1} S_{x_2}^{m_2-k_2} \int_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_o\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy \ . \tag{757}$$

129

Ova se formula može uvrstiti u (733), pa je time dobiven izraz za $K_{n_1,n_2}^{m_1,m_2}(t;x_1,x_2)$.

Na osnovu rekurzione jednadžbe (737) možemo postaviti opću formulu, koja izražava $K_{n_1,\dots,n_r}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r)$ pomoću $K_{o,\ \dots,o}^{m_1,\dots,m_r}(t;x_1,\dots,x_r)$.

Neka je $\underline{r}$, kao i dosad, broj parova indeksa kompozicije. (Smatramo, da svaki dolnji indeks s pripadnim gornjim čini par). Neka je dalje $\underline{p}$ broj dolnjih indeksa, koji su veći od nule, dok su ostali dolnji indeksi jednaki nuli. Dopuštamo $1 \le p \le r$. (Slučaj $p=0$ je trivijalan). Radi jednostavnosti zamišljamo, da je <u>prvih</u> $\underline{p}$ dolnjih indeksa veće od nule, što zbog komutativnog zakona komponiranja ne znači sužavanje općenitosti. Neka je $\underline{Q}$ minimum dvaju brojeva $\underline{p}$ i $\underline{r-1}$, t.j. $Q=p$, ako je $p \le r-1$, i $Q=r-1$ za $p=r$. Neka konačno $(k_1,k_2,\dots,k_\gamma)$ znači kombinaciju γ-tog razreda $(1 \le \gamma \le Q)$ elemenata $1,2,\dots,p$, a $(s_1,s_2,\dots,s_{r-\gamma})$ tomu komplementarna kombinacija $(r-\gamma)$-tog razreda, tako da su $k_1,k_2,\dots,k_\gamma,s_1,s_2,\dots,s_{r-\gamma}$ svi elementi $1,2,\dots,r$. Zbog $1 \le \gamma \le Q$ i jedna i druga kombinacija imaju uvijek barem jedan elemenat. Pod sumom $\sum\limits_{(k_1,\dots,k_\gamma)}$ sa zadanim γ

razumijevamo, da u dotičnom izrazu treba uvrstiti redom sve kombinacije indeksa $(k_1,\dots,k_\gamma)$, a istodobno za indekse $s_1,\dots,s_{r-\gamma}$ tomu komplementarnu kombinaciju, i tako nastale izraze zbrojiti. Postavljamo sada opću formulu služeći se oznakom

$$\frac{1}{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k} = D_{x_k} , \tag{758}$$ 130

koja odgovara oznaci (253).

$$K^{m_1,\dots,m_p,m_{p+1},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_p,0,\quad\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r) =$$

$$\prod_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_\alpha} n_\alpha! \quad \left\{\left(\prod_{\beta=1}^{p} D_{x_\beta}^{n_\beta}\right) K^{m_1,\dots,m_r}_{0,\quad\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r) \; +\right.$$

$$+\sum_{\gamma=1}^{Q}\;\sum_{(k_1,\dots,k_\gamma)}\;\prod_{\delta=1}^{r-\gamma} D_{x_{s_\delta}}^{n_{s_\delta}} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1}\cdots\sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_\gamma}-1}\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_\varepsilon}\frac{1}{w_\varepsilon!}\,D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}\right)\cdot$$

$$\left.\cdot\left[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1}\right) K^{m_{s_1},\dots,m_{s_{r-\gamma}}}_{0,\quad\dots,0}\left(t-\sum_{\varphi=1}^{\gamma}x_{k_\varphi};\; x_{s_1},\dots,x_{s_{r-\gamma}}\right)\right]\right\} . \tag{759}$$ 131

Opaža se, da smo umjesto komplementarne kombinacije $(s_1,\dots,s_{r-\gamma})$ mogli staviti komplementarnu kombinaciju $(s_1,\dots,s_{p-\gamma})$, t.j. mogli smo ispustiti elemente $s_{p+1},\dots,s_r$, jer ti elementi u produktu $\prod_{\delta=1}^{r-\gamma}$ pridonose samo faktore $D^0_{x_{s_{p+1}}},\dots,D^0_{x_{s_r}}$, koji znače jedinični operator, pa ih se može ispustiti. Gornja granica spomenutog produkta glasila bi onda $p-\gamma$ umjesto $r-\gamma$, a kompoziciju na kraju formule (759) pisali bismo

$$K^{m_{s_1},\dots,m_{s_{p-\gamma}},m_{p+1},\dots,m_r}_{0,\quad\dots,0,\qquad 0,\quad\dots,0}\left(t-\sum_{\varphi=1}^{\gamma}x_{k_\varphi};x_{s_1},\dots,x_{s_{p-\gamma}},x_{p+1},\dots,x_r\right).$$

Za kasnije svrhe nam je ipak zgodnije ostati kod oblika (759).

Treba još primijetiti, da za $r \geq p \geq r-1$, $\gamma = p$ kompozicija na kraju formule (759) ima samo jedan par indeksa, pa se treba sjetiti definicije (742).

Da dokažemo formulu (759) pretpostavimo $r \geq 2$ i stavimo u (737) $n_1 = n_2 = \dots = n_r = 0$. Prema (759) bi bilo za $p=1$, $n_1=1$

$$K^{m_1,m_2,\dots,m_r}_{1,\,0,\,\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r) = \frac{2}{c^2}\Big\{D_{x_1} K^{m_1,\dots,m_r}_{0,\,\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r) + x^{m_1-1} K^{m_2,\dots,m_r}_{0,\,\dots,0}(t-x_1;x_2,\dots,x_r)\Big\} \tag{762}$$

u skladu sa (737). Formula (759) dakle vrijedi za taj slučaj. Pretpostavimo dalje, da je (759) dokazan, ako je $p=1$, a $\underline{n_1}$ je neki pozitivni cijeli broj. Dokazujemo, da (759) onda vrijedi i za n_1+1. Iz (759) bi naime slijedilo:

$$K^{m_1,\ m_2,\dots,m_r}_{n_1+1,n_2,\dots,n_r}(t;x_1,\dots,x_r) = \left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_1+1}(n_1+1)!\Big\{D^{n_1+1}_{x_1} K^{m_1,\dots,m_r}_{0,\,\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r) + \sum_{w_1=0}^{n_1}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_1}\frac{1}{w_1!}D^{n_1-w_1}_{x_1}\Big[x_1^{m_1-1} K^{m_2,\dots,m_r}_{0,\,\dots,0}(t-x_1;x_2,\dots,x_r)\Big]\Big\}. \tag{763}$$

Izlučimo li $\frac{2}{c^2}(n_1+1)D_{x_1}$ i odvojimo član sume za $w_1=n_1$, to vidimo, da dobijemo

$$K^{m_1,\ m_2,\dots,m_r}_{n_1+1,n_2,\dots,n_r}(t;x_1,\dots,x_r) = \frac{2(n_1+1)}{c^2} D_{x_1}\Big\{\left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_1} n_1!\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-n_1}\frac{1}{n_1!}\,\cdot$$

$$\cdot\, x_1^{m_1-1} K^{m_2,\dots,m_r}_{0,\,\dots,0}(t-x_1;x_2,\dots,x_r) + \left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_1} n_1!\, D^{n_1}_{x_1} K^{m_1,\dots,m_r}_{0,\,\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r) +$$

$$+ \sum_{w_1=0}^{n_1-1}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_1}\frac{1}{w_1!}D^{n_1-w_1-1}_{x_1}\Big[x_1^{m_1-1} K^{m_2,\dots,m_r}_{0,\,\dots,0}(t-x_1;x_2,\dots,x_r)\Big]\Big\} =$$

$$= \frac{2(n_1+1)}{c^2} D_{x_1} \left\{ x_1^{m_1-1} K_{o,\ \ldots,o}^{m_2,\ldots,m_r}(t-x_1;x_2,\ldots,x_r) + \right.$$

$$\left. + K_{n_1,\ldots,n_r}^{m_1,\ldots,m_r}(t;x_1,\ldots,x_r) \right\} \qquad (764)$$

u suglasnosti sa (737). Budući da analogni dokaz vrijedi za bilo koji x_k, to je time potpunom indukcijom dokazano, da (759) vrijedi za $p=1$.

Pretpostavimo sad, da (759) vrijedi za neki p ($1 \leq p \leq r-1$). Dokazujemo, da onda vrijedi i za $p+1$. Neka su dakle $n_1,\ldots,n_p$ povoljni pozitivni cijeli brojevi i neka je ponajprije $n_{p+1}=1$. U izrazu, što ga za taj slučaj daje (759), razmotrimo članove, kod kojih je u kombinaciji $(k_1,\ldots,k_\gamma)$ sadržan $p+1$. Indeks sumacije w_{p+1} zbog $n_{p+1}=1$ poprima samo jedinu vrijednost nula, pa se iz svih tih članova može izlučiti $x_{p+1}^{m_{p+1}-1}$ i k tome dodati faktor $\frac{2}{c^2}$ iz produkta pred vitičastom zagradom, a izraz, koji ostaje, jest očito isti onaj, što ga daje

$$K_{n_1,\ldots,n_p,o,\ \ \ldots,o}^{m_1,\ldots,m_p,m_{p+2},\ldots,m_r}(t-x_{p+1};x_1,\ldots,x_p,x_{p+2},\ldots,x_r)$$

prema formuli (759). Prvi član u vitičastoj zagradi, kako ga ta formula daje za ovu potonju kompoziciju, nastaje od one kombinacije $(k_1,\ldots,k_\gamma)$, u kojoj se nalazio samo $p+1$.

Razmotrimo dalje članove, koji odgovaraju kombinacijama $(k_1,\ldots,k_\gamma)$, u kojima nije sadržan $p+1$. Iz tih članova se može izlučiti $D_{x_{p+1}}$, (koji se nalazi medju faktorima $D_{x_{s_\gamma}}^{n_{s_\gamma}}$), a taj isti faktor se može izlučiti i iz prvog člana u vitičastoj zagradi, koji bi glasio

$$\left(\prod_{\beta=1}^{p+1} D_{x_\beta}^{n_\beta}\right) K_{o,\ \ldots,o}^{m_1,\ldots,m_r}(t;x_1,\ldots,x_r) = D_{x_{p+1}} \left(\prod_{\beta=1}^{p} D_{x_\beta}^{n_\beta}\right) K_{o,\ \ldots,o}^{m_1,\ldots,m_r}(t;x_1,\ldots,x_r). \qquad (765)$$

I ovdje dodajemo faktor $\frac{2}{c^2}$ od produkta pred vitičastom zagradom, a izraz, koji ostaje, je prema (759) očito jednak

$$K^{m_1,\dots,m_p,m_{p+1},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_p,o,\quad\dots,o}(t;x_1,\dots,x_r)\ .$$

Slijedi dakle

$$K^{m_1,\dots,m_p,m_{p+1},m_{p+2},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_p,1,\quad o,\quad\dots,o}(t;x_1,\dots,x_r) =$$

$$= \frac{2}{c^2}\left\{x_{p+1}^{m_{p+1}-1}\ K^{m_1,\dots,m_p,m_{p+2},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_p,o,\quad\dots,o}(t-x_{p+1};x_1,\dots,x_p,x_{p+2},\dots,x_r)\ +\right.$$

$$\left. + D_{x_{p+1}}\ K^{m_1,\dots,m_p,m_{p+1},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_p,o,\quad\dots,o}(t;x_1,\dots,x_r)\right\}\ . \qquad (766)$$ 136

što odgovara formuli (738), ako se u njoj mjesto <u>k</u> piše <u>p+1</u> i stavi $x_{p+1}=1$.

Budući da je u kompozicijama na desnoj strani od (766) broj od nule različitih dolnjih indeksa jednak <u>p</u>, to smo prema pretpostavci na njih s pravom primijenili formulu (759), a relacija (766) dokazuje, da je ta formula (759) ispravna i za kompoziciju na lijevoj strani, gdje je taj broj indeksa jednak <u>p+1</u>, a (p+1)-ti indeks jednak jedan.

Pretpostavimo dalje, da je (759) dokazan za slučaj, da je (p+1)-ti indeks n_{p+1} neki pozitivni cijeli broj. Dokazujemo, da formula onda vrijedi i onda, ako je taj indeks jednak $n_{p+1}+1$.

Primijenimo opet formulu (759) na taj slučaj, da je (p+1)-ti indeks $n_{p+1}+1$. Razmotrimo članove, koje daju kombinacije $(k_1,\dots,k_\nu)$, u kojima je sadržan <u>p+1</u>, uzevši u obzir samo vrijednost indeksa sumacije $w_{p+1}=n_{p+1}$, i izlučimo $(\frac{2}{c^2})^{n_{p+1}+1}(n_{p+1}+1)!$ iz produkta pred vitičastom zagradom, a $(\frac{2}{c^2})^{-w_{p+1}}\frac{1}{w_{p+1}!} = (\frac{2}{c^2})^{-n_{p+1}}\frac{1}{n_{p+1}!}$ iz dotičnih članova unutar zagrade, dakle ukupno $\frac{2}{c^2}(n_{p+1}+1)$, to dobijemo izraz, koji prema (759) odgovara $K^{m_1,\dots,m_p,m_{p+1},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_p,0,\quad\dots,0}(t-x_{p+1};x_1,\dots x_p,x_{p+2},\dots,x_r)$.

Razmotrimo li sve ostale članove, to možemo izlučiti $D_{x_{p+1}}$. Ovaj se operator nalazi medju faktorima $D^{n_{k_\xi}-w_\xi-1}_{x_{k_\xi}}$, ako je $\underline{p+1}$ sadržan u kombinaciji $(k_1,\dots,k_\gamma)$, pa je tada za $k_\xi=p+1$ $D^{n_{k_\xi}-w_\xi-1}_{x_{k_\xi}}$ nadomješteno sa $D^{n_{p+1}-w_{p+1}}_{x_{p+1}}$, jer je $(p+1)$-ti indeks $n_{p+1}+1$ umjesto n_{p+1}. Tu dakle izlučujemo $D_{x_{p+1}}$. Ako $\underline{p+1}$ nije sadržan u kombinaciji $(k_1,\dots,k_\gamma)$, to se medju faktorima $D^{n_{s_\delta}}_{x_{s_\delta}}$ nalazi jedan, koji glasi $D^{n_{p+1}+1}_{x_{p+1}} = D_{x_{p+1}} D^{n_{p+1}}_{x_{p+1}}$. I ovdje izlučujemo $D_{x_{p+1}}$. Odvojimo li još faktor $\frac{2}{c^2}(n_{p+1}+1)$ iz produkta pred vitičastom zagradom, to preostaje izraz, koji je u smislu (759) jednak $K^{m_1,\dots,m_p,m_{p+1},\; m_{p+2},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_p,n_{p+1}+1,0,\quad\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r)$.

Dobili smo dakle

$$K^{m_1,\dots,m_{p+1},m_{p+2},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_{p+1},0,\quad\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r) =$$

$$= \frac{2(n_{p+1}+1)}{c^2}\Big\{ x_{p+1}^{m_{p+1}-1}\, K^{m_1,\dots,m_p,m_{p+2},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_p,0,\quad\dots,0}(t-x_{p+1};x_1,\dots,x_p,x_{p+2},\dots,x_r) +$$

$$+ D_{x_{p+1}}\, K^{m_1,\dots,m_{p+1},m_{p+2},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_{p+1},0,\quad\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r)\Big\}. \tag{767}$$

Primjena formule (759) na prvu kompoziciju desne strane od (767) ~~je~~ je opravdana, jer ta kompozicija ima samo $\underline{p}$ dolnjih indeksa, koji su od nule različiti, a primjena na drugu kompoziciju desne strane je opravdana prema pretpostavci, jer je $(p+1)$-ti dolnji indeks n_p.

Relacija (767) dokazuje, da je onda (759) ispravno i za lijevu stranu od (767). Tim je potpunom indukcijom proveden dokaz za formulu (759).

Radi boljeg pregleda napisat ćemo tu formulu opširnije za slučaj $r=3$, $p=3$:

$$
\begin{aligned}
&K^{m_1,m_2,m_3}_{n_1,n_2,n_3}(t;x_1,x_2,x_3) = \\
&= \left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_1+n_2+n_3} n_1!\,n_2!\,n_3! \left\{ D^{n_1}_{x_1} D^{n_2}_{x_2} D^{n_3}_{x_3}\, K^{m_1,m_2,m_3}_{\cancel{n_1,n_2,n_3}\; 0,0,0}(t;x_1,x_2,x_3) \right. + \\
&+ D^{n_2}_{x_2} D^{n_3}_{x_3} \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_1} \frac{1}{w_1!} D^{n_1-w_1-1}_{x_1}\left[x_1^{m_1-1}\, K^{m_2,m_3}_{0,\,0}(t-x_1;x_2,x_3)\right] + \\
&+ D^{n_1}_{x_1} D^{n_3}_{x_3} \sum_{w_2=0}^{n_2-1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_2} \frac{1}{w_2!} D^{n_2-w_2-1}_{x_2}\left[x_2^{m_2-1}\, K^{m_1,m_3}_{0,\,0}(t-x_2;x_1,x_3)\right] + \\
&+ D^{n_1}_{x_1} D^{n_2}_{x_2} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_3} \frac{1}{w_3!} D^{n_3-w_3-1}_{x_3}\left[x_3^{m_3-1}\, K^{m_1,m_2}_{0,\,0}(t-x_3;x_1,x_2)\right] + \\
&+ D^{n_3}_{x_3} \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \sum_{w_2=0}^{n_2-1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_1-w_2} \frac{1}{w_1!\,w_2!} D^{n_1-w_1-1}_{x_1} D^{n_2-w_2-1}_{x_2}\left[x_1^{m_1-1}\, x_2^{m_2-1} \cdot \right. \\
&\qquad\qquad \left. \cdot\, K^{m_3}_{0}(t-x_1-x_2;x_3)\right] + \\
&+ D^{n_2}_{x_2} \sum_{w_1=0}^{n_1-1} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_1-w_3} \frac{1}{w_1!\,w_3!} D^{n_1-w_1-1}_{x_1} D^{n_3-w_3-1}_{x_3}\left[x_1^{m_1-1}\, x_3^{m_3-1} \cdot \right. \\
&\qquad\qquad \left. \cdot\, K^{m_2}_{0}(t-x_1-x_3;x_2)\right] + \\
&+ D^{n_1}_{x_1} \sum_{w_2=0}^{n_2-1} \sum_{w_3=0}^{n_3-1} \left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_2-w_3} \frac{1}{w_2!\,w_3!} D^{n_2-w_2-1}_{x_2} D^{n_3-w_3-1}_{x_3}\left[x_2^{m_2-1}\, x_3^{m_3-1} \cdot \right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. \cdot\, K^{m_1}_{0}(t-x_2-x_3;x_1)\right]\right\} . \qquad (768)\ 138
\end{aligned}
$$

Želimo li izraziti $K^{m_1,\dots,m_p,m_{p+1},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_p,0,\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r)$ pomoću $K^{0,\dots,0}_{0,\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r)$ (vidi (709)), to moramo formulu (756) uvrstiti u (759). Pri tom treba uočiti, da se za $r-1\leq p\leq r$ u (759) pojavljuju kompozicije s jednim parom indeksa, kako smo već spomenuli (usporedi (768)), dok (756) vrijedi samo za $r\geq 2$, a za $r=1$ vrijedi definicija (742). Razlog, da (756) ne vrijedi za $r=1$, leži u tom, da za taj slučaj iz (740) ne slijedi (743), jer (740) doduše vrijedi i za $r=1$, kako je lako uvjeriti se na temelju definicije (742) i formule (346), ali funkcija $K^m_n(t;x)$ ne zadovoljava uvjet (267). Moramo stoga u (759) za slučaj, da ima kompozicija s jednim parom indeksa, dotične članove odvojiti.

Bit će nam dalje zgodno, da dopustimo i negativne cijele potenicje integralnih operatora S_{x_k} definirajući

$$S^{-n}_{x_k} = D^n_{x_k} \quad . \tag{769}$$

Pretpostavimo dakle ponajprije $r\geq 3$ i $1\leq p< r-1$. U tom slučaju je $Q=p$ i nema kompozicija s jednim parom indeksa. Uvrštenje od (756) u (759) daje, ako uzmemo u obzir (769):

$$K^{m_1,\dots,m_p,m_{p+1},\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_p,0,\dots,0}(t;x_1,\dots,x_r) = \prod_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_\alpha} n_\alpha! \;\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{1}{(r-2)!}\sum_{q_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]}\dots\sum_{q_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2}\right]}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum\limits_{u=1}^{r}(m_u-2q_u)}\left(\prod_{v=1}^{r}(-1)^{m_v}m_v!\,S_{x_v}^{m_v-n_v-q_v}\right)\int_X^t (y-X)^{r-2}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy+\right.$$

$$+\frac{1}{(r-\gamma-2)!}\sum_{\gamma=1}^{p}\sum_{(k_1,\dots,k_\gamma)}\sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1}\dots\sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_\gamma}-1}\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_\varepsilon}\frac{1}{w_\varepsilon!}D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}\right)\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma}x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1}\right)\sum_{v_1=0}^{\left[\frac{m_{s_1}}{2}\right]}\dots\sum_{v_{r-\gamma}=0}^{\left[\frac{m_{s_{r-\gamma}}}{2}\right]}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum\limits_{\varphi=1}^{r-\gamma}(m_{s_\varphi}-2v_\varphi)}\left(\prod_{\sigma=1}^{r-\gamma}(-1)^{m_{s_\sigma}}m_{s_\sigma}!\,S_{x_{s_\sigma}}^{m_{s_\sigma}-n_{s_\sigma}-v_\sigma}\right)\right.\cdot$$

$$\cdot \int_{x_{s_1}+\dots+x_{s_{r-\gamma}}}^{t-(x_{k_1}+\dots+x_{k_\gamma})} (y-x_{s_1}-\dots-x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2} \Lambda_o\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_\gamma})^2-y^2}\right)dy \Bigg] \Bigg\} \tag{770}$$

/40

Ako je naprotiv $r-1 \leq p \leq r$, to će biti $Q=r-1$, a članovi sa $\gamma=r-1$ ćemo odijeliti. Dobijemo na pr. za $p=r$ $(r \geq 2)$:

$$K_{n_1,\dots,n_{r-1},o}^{m_1,\dots,m_{r-1},m_r}(t;x_1,\dots,x_r) = \prod_{\alpha=1}^{p}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{n_\alpha} n_\alpha! \ \cdot$$

$$\cdot \Bigg\{ \frac{1}{(r-2)!} \sum_{q_1=0}^{\left[\frac{m_1}{2}\right]} \dots \sum_{q_r=0}^{\left[\frac{m_r}{2}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{u=1}^{r}(m_u-2q_u)} \left(\prod_{v=1}^{r}(-1)^{m_v} m_v! S_{x_v}^{m_v-n_v-q_v}\right) \int_X^t (y-X)^{r-2}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})dy +$$

$$+ \frac{1}{(r-\gamma-2)!} \sum_{\gamma=1}^{r-2} \sum_{(k_1,\dots,k_\gamma)} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1} \dots \sum_{w_\gamma=0}^{n_{k_\gamma}-1} \left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_\varepsilon} \frac{1}{w_\varepsilon!} D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}\right) \cdot$$

$$\cdot \Bigg[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1}\right) \sum_{v_1=0}^{\left[\frac{m_{s_1}}{2}\right]} \dots \sum_{v_{r-\gamma}=0}^{\left[\frac{m_{s_{r-\gamma}}}{2}\right]} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum_{\varphi=1}^{r}(m_{s_\varphi}-2v_\varphi)} \left(\prod_{\zeta=1}^{r-\gamma}(-1)^{m_{s_\zeta}} m_{s_\zeta}! S_{x_{s_\zeta}}^{m_{s_\zeta}-n_{s_\zeta}-v_\zeta}\right) \cdot$$

$$\cdot \int_{x_{s_1}+\dots+x_{s_{r-\gamma}}}^{t-(x_{k_1}+\dots+x_{k_\gamma})} (y-x_{s_1}-\dots-x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2} \Lambda_o\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_\gamma})^2-y^2}\right)dy \Bigg] +$$

$$+ \sum_{(k_1,\dots,k_{r-1})} \sum_{w_1=0}^{n_{k_1}-1} \dots \sum_{w_{r-1}=0}^{n_{k_{r-1}}-1} \left(\prod_{\varepsilon=1}^{r-1}\left(\frac{2}{c^2}\right)^{-w_\varepsilon} \frac{1}{w_\varepsilon!} D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}\right) D_{x_{s_1}}^{n_{s_1}} \cdot$$

$$\cdot \Bigg[\left(\prod_{\varepsilon=1}^{r-1} x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1}\right) (t-x_{k_1}-\dots-x_{k_{r-1}})^{m_{s_1}} \Lambda_o\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}\right) \Bigg] \Bigg\} \tag{771}$$

/41

Pri tom je $\underline{s_1}$ onaj broj izmedju brojeva $1,\ldots,r$, koji nije sadržan u kombinaciji $(k_1,\ldots,k_{r-1})$.

Za $p=r-1$ formula ostaje formalno ista, samo što se kombinacije $(k_1,\ldots,k_\gamma)$ tvore samo od brojeva $1,\ldots,r-1$, pa u zadnjoj sumi dobijemo jedinu kombinaciju $(k_1,\ldots,k_{r-1}) = (1,\ldots,r-1)$ sa

$$D_{x_{s_1}}^{n_{s_1}} = D_{x_r}^{n_r} = D_{x_r}^{o} = I.$$

7. Kanonički oblik integralnih teorema.

Pokušajmo desnu stranu najopćenitijeg integralnog teorema (771) izraziti pomoću što manjeg broja što jednostavnijih funkcija.

Pogledamo li zadnju višestruku sumu u vitičastoj zagradi, to vidimo, da opetovano izvršenje operacija $D_{x_{k_\varepsilon}}$ i $D_{x_{s_1}}$ na izraz u uglatoj zagradi obzirom na (758),(234),(456) i (394), koja potonja formula s oznakama prema (340) glasi

$$\Lambda_n(z) = n! \left\{ \Lambda_1(z) \sum_{w=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^w \left[(n-w-1)!\right]^2}{(\frac{z}{2})^{2n-2w} (w!)^2 (n-2w-1)!} - \right.$$

$$\left. - \Lambda_o(z) \sum_{w=0}^{\left[\frac{n-2}{2}\right]} \frac{(-1)^w (n-w-2)! \, (n-w-1)!}{(\frac{z}{2})^{2n-2w-2} \, w! \, (w+1)! \, (n-2w-2)!} \right\} , \qquad (772) \quad 142$$

daje očito funkciju oblika

$$R_o(t;x_1,\ldots,x_r) . \Lambda_o(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}) +$$

$$+ R_1(t;x_1,\ldots,x_r) . \Lambda_1(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}) , \qquad (773) \quad 143$$

gdje su R_o i R_1 racionalne funkcije od $t,x_1,\ldots,x_r$. Da su te funkcije racionalne, uvjetovano je napose time, što su sve potencije od $\underline{z}$ u (772) take, tako da korijen u argumentu Besselove funkcije otpada, kad se uvrsti mjesto $\underline{z}$ u formulu (772).

Razmotrimo sad srednju višestruku sumu u vitičastoj zagradi u formuli (771). Pretpostavimo ponajprije, da je eksponent operatora $S_{x_{s_\delta}}$ pozitivan. Stavimo li

$$t-(x_{k_1}+\ldots+x_{k_\gamma}) = \tau \qquad (774) \quad 144$$

$$x_{s_1}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}} = y \qquad (775) \quad 145$$

$$\varphi(\tau,y) = \Lambda_o(c\sqrt{\tau^2-y^2}) , \qquad (776) \quad 146$$

to se integral u srednjoj višestrukoj sumi u (771) nakon izvršenja operacije $S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}$ može prema (304) i (306) svesti na oblik

$$\int_0^{\bar t-\bar X}\phi(y)\,\varphi(\bar t,y+\bar X)dy=\int_{\bar X}^{\bar t}\phi(y-\bar X)\,\varphi(\bar t,y)dy=\int_{\bar X}^{\bar t}\phi(y-\bar X)\,\Lambda_o(c\sqrt{\bar t^2-y^2})dy=$$

$$\int_{x_{s_1}+\dots+x_{s_{r-\gamma}}}^{t-(x_{k_1}+\dots+x_{k_\gamma})}\phi(y-x_{s_1}-\dots-x_{s_{r-\gamma}})\,\Lambda_o(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_\gamma})^2-y^2})dy\,, \qquad (777)$$

gdje je ϕ u smislu (307) cijela racionalna funkcija od $y,x_{s_1},\dots,x_{s_{r-\gamma}}$.

Izvrši li se na takav integral operacija $\left(\frac{\partial}{\partial \bar t}\right)^{m_{s_\varphi}-2v_\varphi}$ i zatim, poslije množenja sa $x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-1}$ operacija $D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}$, to će očito diferencijacije pod znakom integracije obzirom na (346) povisivati indeks Λ-funkcije, koja će biti pomnožena s cijelom racionalnom funkcijom od $y,x_1,\dots,x_r$, dok će pred dobivenim integralima stajati racionalne funkcije od $x_{k_1},\dots,x_{k_\gamma}$. Rastavljanjem tih integrala po pojedinim potencijama od $\underline{y}$ dolazimo na integrale oblika

$$\int_{\bar X}^{\bar t} y^m\,\Lambda_n(c\sqrt{\bar t^2-y^2})dy,$$ pomnožene racionalnim funkcijama od

$x_1,\dots,x_r$, a ti se integrali prema (598) do (601), (555) i (534),(542) mogu izraziti u obliku

$$R_o\Lambda_o(c\sqrt{\bar t^2-\bar X^2})+R_1\Lambda_1(c\sqrt{\bar t^2-\bar X^2})+R_2\int_{\bar X}^{\bar t}\Lambda_o(c\sqrt{\bar t^2-y^2})dy+R_3\int_{\bar X}^{\bar t}\Lambda_1(c\sqrt{\bar t^2-y^2})dy+$$

$$+\,R_4\,, \qquad (778)$$

gdje $\overline{t}$ i $\overline{X}$ imaju značenje (774), (775), a R_o, R_1, R_2, R_3, R_4 su racionalne funkcije od $t, x_1, \ldots, x_r$.

Diferencijacije po gornjoj granici integrala (777) vode očito na analogne izraze kao (773), pa ih možemo smatrati već sadržanim u (778).

Slučaj, da je eksponent od $S_{x_{s_\gamma}}$ u (771) nula ili negativan, ne pruža nikakvih principijelnih promjena u razmatranju, jer se time samo pojednostavnjuje funkcija Φ u (777) i u smislu (769) dodaju nove operacije diferenciranja.

Prva višestruka suma u vitičastoj zagradi u (771) dopušta isto razmatranje, pa je rezultat sadržan u obliku (778) za $\gamma=0$, u kojem slučaju je $t=\overline{t}$ i $X=\overline{X}$. Isto tako je i (773) specijalan slučaj od (778) za $\gamma=r-1$ (pri čemu je $R_2=R_3=R_4=0$), tako da se (771) može izraziti pomoću članova oblika (778). Razumije se, da to vrijedi i za slučaj (770), koji se od (771) razlikuje u tome, što stanoviti članovi fale.

Označimo sad sa $\underline{N}$ broj kombinacija nultog do $(r-1)$-tog razreda elemenata $1,\ldots,r$, i numeriramo sve te kombinacije od 1 do N. (Nije teško vidjeti, da je $N=2^r-1$). Neka je $(x_{k_1},\ldots,x_{k_\gamma})$ k-ta od tih kombinacija. Stavljamo

$$x_{k_1}+\ldots+x_{k_\gamma} = a_k \quad (k=1,\ldots,N) \tag{779}$$

$$x_{s_1}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}} = b_k \quad (k=1,\ldots,N)\,. \tag{780}$$

Napose neka je prva kombinacija ona, koja odgovara $\gamma=0$, dakle kombinacija "nikakav elemenat", koja je nultog razreda, pa je za taj slučaj

$$a_1 = 0, \quad b_1 = x_1+\ldots+x_r = X\,. \tag{781}$$

Razumije se, da je uvijek

$$a_k + b_k = X \qquad (k=1,\ldots,N) \tag{782}$$

Možemo sada integralni teorem (771) dovesti u oblik

$$\begin{aligned} K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;x_1,\ldots,x_r) &= \sum_{k=1}^{N} R_{o,k}(t;x_1,\ldots,x_r)\,\Lambda_o\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N} R_{1,k}(t;x_1,\ldots,x_r)\,\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) + \\ &+ \sum_{k=1}^{N} R_{2,k}(t;x_1,\ldots,x_r)\int_{b_k}^{t-a_k}\Lambda_o\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy + \\ &+ \sum_{k=1}^{N} R_{3,k}(t;x_1,\ldots,x_r)\int_{b_k}^{t-a_k}\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy + \\ &+ R_4(t;x_1,\ldots,x_r)\,, \end{aligned} \tag{783}$$

gdje su $R_{o,k}, R_{1,k}, R_{2,k}, R_{3,k}$ $(k=1,\ldots,N)$ i R_4 racionalne funkcije od $t, x_1,\ldots,x_r$. Pri tom su obzirom na (773) svakako neki od $R_{2,k}$ i $R_{3,k}$ jednaki nuli, na što se medjutim ne obaziremo.

Oblik (783) integralnih teorema nazvat ćemo kanoničkim oblikom tih teorema. Nameće se pitanje, da li je u tom izrazu, koji je linearan obzirom na funkcije $\Lambda_o\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right)$, $\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right)$, $\int_{b_k}^{t-a_k}\Lambda_o\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy$, $\int_{b_k}^{t-a_k}\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy$, $(k=1,\ldots,N)$, broj tih funkcija sveden na minimum, t.j. ne daju li se možda neke od tih funkcija linearno izraziti pomoću ostalih funkcija, s koeficijentima, koji su racionalne funkcije od $t, x_1,\ldots,x_r$. Razumije se, da bi to moralo vrijediti za bilo kakve vrijednosti parametara $x_1,\ldots,x_r$, (izuzevši vrijednost nula, koju zasad isključujemo), i varijable $\underline{t}$. Ovo je pitanje ekvivalentno s pitanjem, da li izmedju navedenih funkcija postoji linearna relacija s koeficijentima, koje su racionalne funkcije od $x_1,\ldots,x_r$ i varijable $\underline{t}$. Dokažemo li, da takve relacije ne može biti, to je time i dokazano, da se ne daju pojedine od navedenih funkcija izraziti linearno pomoću ostalih i da su prema tome racionalne funkcije, koje fungiraju kao koeficijenti u izrazu (783), jednoznačno odredjene. Na temelju takvog dokaza bit će opravdan naziv "kanonički oblik" za izraz (783).

Treba primijetiti, da za taj dokaz nisu dovoljni poznati kriteriji linearne neovisnosti (Wronskijeva i Gramova determinanta), jer koeficijenti nisu konstante, već racionalne funkcije varijable $\underline{t}$.

Jasno je, da je dovoljno dokazati nemogućnost linearne relacije za neke specijalne vrijednosti parametara $x_1,\ldots,x_r$. Odabiremo stoga parametre $x_1,\ldots,x_r$ tako, da bude ispunjen uvjet, da ni u kojem paru jednačaba

$$\left.\begin{aligned} a_j &= a_k \\ b_j^2 &= b_k^2 \end{aligned}\right\} \quad (j \neq k;\ \ j,k = 1,\ldots,N) \tag{784}$$

ne budu zadovoljene obje jednadžbe i da za najviše jednu vrijednost $\underline{k_1}$ indeksa $\underline{k}$ bude

$$b_{k_1} = 0 . \tag{784a}$$

Da je moguće odabrati parametre $x_1,\ldots,x_r$ tako, da ovaj uvjet bude ispunjen, slijedi iz poznatog stavka algebre*):

> "Ako su $f_1(x_1,\ldots,x_r),\ldots, f_n(x_1,\ldots,x_r)$ bilo kakvi polinomi, koji ne iščezavaju identično, i ako je $\underline{M}$ neki skup od neizmjerno mnogo veličina, na pr. skup cijelih brojeva, to se mogu za varijable $x_1,x_2,\ldots,x_r$ na neizmjerno mnogo načina

---

*) <u>O.Perron</u>, Algebra I., W. de Gryter, Berlin u. Leipzig 1932, str. 77., stavak 29.

odabrati takve veličine $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ skupa $\underline{M}$, da bude

$$f_\nu(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) \neq 0 \quad \text{za} \quad \nu=1,\ldots,n."$$

Stavimo li za naš slučaj

$$f_{j,k}(x_1,\ldots,x_r) = a_j-a_k + i(b_j^2-b_k^2) \quad (j\neq k;\ j,k=1,\ldots,N) \quad (785)$$

to je jasno, da su prema (779),(780) te funkcije polinomi varijabla $x_1,\ldots,x_r$, koji ne iščezavaju identično, jer bi inače za realne varijable realni dio bio a_j-a_k, i taj bi realni dio morao identično iščezavati, što je nemoguće, jer su $\underline{a_j}$ i $\underline{a_k}$ sume elemenata različitih kombinacija varijabla $x_1,\ldots,x_r$. Odaberemo li za $\underline{M}$ na pr. skup pozitivnih cijelih brojeva, to smo izbjegli vrijednost nula za parametre $x_1,\ldots,x_r$, pa i za brojeve b_k, a primjena citiranog stavka daje mogućnost ispunjavanja željenog uvjeta.

Na temelju toga provest ćemo u slijedećoj točki dokaz nemogućnosti linearne relacije izmedju spomenutih funkcija s koeficijentima, koji su racionalne funkcije varijable $\underline{t}$.

8. Dokaz jednoznačnosti kanoničkog oblika integralnih teorema.

Dokazujemo

STAVAK III.8.

Neka je zadano $\underline{N}$ parova kompleksnih brojeva a_k, b_k $(k=1,\ldots,N)$ tako, da ni u kojem od parova jednačaba

$$\left.\begin{array}{l} a_j = a_k \\ b_j^2 = b_k^2 \end{array}\right\} \quad (j \neq k; \quad j,k = 1,\ldots,N) \tag{786}$$ 156

nisu zadovoljene obje jednadžbe, i da najviše za jednu vrijednost $\underline{k_1}$ indeksa $\underline{k}$ vrijedi

$$b_{k_1} = 0 \,. \tag{786a}$$ 156a

Neka su dalje $R_{o,k}$, $R_{1,k}$, $R_{2,k}$, $R_{3,k}$ $(k=1,\ldots,N)$ i R_4 cijele racionalne funkcije varijable $\underline{t}$, koje nisu sve identično jednake nuli. Onda je nemoguće, da postoji identitet oblika

$$\sum_{k=1}^{N} R_{o,k} \Lambda_o\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) + \sum_{k=1}^{N} R_{1,k} \Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{N} R_{2,k} \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_o\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy + \sum_{k=1}^{N} R_{3,k} \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1\left(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy +$$
$$+ R_4 = 0 \,. \tag{787}$$ 157

Jasno je, da se slučaj, da su koeficijenti $\underline{R}$ razlomljeno racionalne funkcije, koji nam treba, može svesti na ovaj, ako se identitet pomnoži sa zajedničkim mnogokratnikom svih nazivnika.

Uvest ćemo još pojednostavnjenje

$$c = 1 \,, \tag{788}$$ 158

koje ne znači sužavanje općenitosti, jer se to pojednostavnjenje može postići supstitucijom

$$t = \frac{\overline{t}}{c}, \quad y = \frac{\overline{y}}{c}, \quad a_k = \frac{\overline{a}_k}{c}, \quad b_k = \frac{\overline{b}_k}{c}, \tag{789}$$

koja ne narušava pretpostavke našeg stavka.

Provest ćemo najprije dokaz za slučaj $N=1$. Radi jednostavnosti ćemo staviti $a_1=0$, što ne znači sužavanje općenitosti, jer se to može postići supstitucijom

$$t = \overline{t} + a_1 . \tag{790}$$

Ispustimo li još suvišne indekse, to se dakle radi o identitetu

$$R_o\Lambda_o(\sqrt{t^2-b^2}) + R_1\Lambda_1(\sqrt{t^2-b^2}) + R_2\int_b^t\Lambda_o(\sqrt{t^2-y^2})dy + R_3\int_b^t\Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2})dy +$$

$$+ R_4 \equiv 0 . \tag{791}$$

Izvest ćemo ponajprije neke pomoćne formule. Stavimo li u (420) $n=0$, odnosno $n=1$ i integriramo po $\underline{z}$ od $\underline{0}$ do $\underline{t}$, to dobijemo, ako mjesto $\underline{z}$ pišemo $\underline{y}$:

$$\int_o^t\Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})dy = \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-1)^w(\frac{c}{2})^{2w}t^{2w+1}}{(w!)^2}\sum_{k=0}^{w}\frac{(-1)^k\binom{w}{k}}{2k+1} \tag{792}$$

$$\int_o^t\Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})dy = \sum_{w=0}^{\infty}\frac{(-1)^w(\frac{c}{2})^{2w}t^{2w+1}}{w!\,(w+1)!}\sum_{k=0}^{w}\frac{(-1)^k\binom{w}{k}}{2k+1} . \tag{793}$$

Stavimo li u (215)

$$-q = 2n+1 \tag{794}$$

i nadomjestimo $\underline{n}$ sa $\underline{w}$, to slijedi

$$\sum_{k=0}^{w} \frac{(-1)^k \binom{w}{k}}{2k+1} = \frac{2^{2w+1}\,(w+1)!\,w!}{(2w+2)!} = \frac{2^{2w}\,(w!)^2}{(2w+1)!} \quad . \tag{795}$$ 165

Uvrštenje u (792) i (793) daje

$$\int_0^t \Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w c^{2w} t^{2w+1}}{(2w+1)!} = \frac{1}{c}\sin(ct) \tag{796}$$ 166

$$\int_0^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy = \sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w 2 c^{2w} t^{2w+1}}{(2w+2)!} = \frac{2}{c^2 t}\sum_{w=0}^{\infty} \frac{(-1)^w c^{2w+2} t^{2w+2}}{(2w+2)!} =$$

$$= \frac{2}{c^2 t}\Big[1 - \cos(ct)\Big] \quad . \tag{797}$$ 167

Na temelju tih formula vrijedi, ako još uvedemo (788),

$$\int_b^t \Lambda_o(\sqrt{t^2-y^2})\,dy = \sin t - \int_0^b \Lambda_o(\sqrt{t^2-y^2})\,dy \tag{798}$$ 168

$$\int_b^t \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2})\,dy = \frac{2}{t}(1-\cos t) - \int_0^b \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2})\,dy \quad . \tag{799}$$ 169

~~Ako u (666)~~ Stavimo ~~stavimo~~ li se u (42)

$$c_2 = 0, \quad c_1 = -1 \tag{800}$$ 170

i odijele ~~odijelimo~~ realni članovi od imaginarnih, to ~~slijedi~~ slijedi

$$\cos\left(t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right) = \cos\left(\sqrt{t^2-x^2} - t\right) = 1 - \frac{x^4}{8t^2} + \dots = 1 + O(|t|^{-2}) \tag{801}$$ 171

$$\sin\left(t\sqrt{1-\frac{x^2}{t^2}} - 1\right) = \sin\left(\sqrt{t^2-x^2} - t\right) = -\frac{x^2}{2t} - \left(1-\frac{x^2}{6}\right)\frac{x^4}{8t^3} - \dots = O(|t|^{-1}) \quad . \tag{802}$$ 172

Pišemo li see mjesto (realnog) broja $\underline{x}$ kompleksni broj $\underline{b}$, to ovi razvoji očito ostaju na snazi, ako je samo predznak korijena tako odabran, da bude

$$\lim_{|t|\to\infty}\sqrt{1-\frac{b^2}{t^2}} = \lim_{|t|\to\infty}\frac{\sqrt{t^2-b^2}}{t} = +1 \quad , \tag{803}$$ 173

pri čemu i $\underline{t}$ može biti kompleksna varijabla. Vrijedi dakle

$$\cos(\sqrt{t^2-b^2} - t) = 1 + O(|t|^{-2}) \tag{804}$$ 174

$$\sin(\sqrt{t^2-b^2} - t) = O(|t|^{-1}) \quad . \tag{805}$$ 175

Možemo stoga pisati

$$\sin(\sqrt{t^2-b^2} - \frac{\pi}{4}) = \sin(t-\frac{\pi}{4})\cos(\sqrt{t^2-b^2} - t) + \cos(t-\frac{\pi}{4})\sin(\sqrt{t^2-b^2} - t) =$$

$$= \sin(t-\frac{\pi}{4})\left[1 + O(|t|^{-2})\right] + \cos(t-\frac{\pi}{4})\,O(|t|^{-1}) \tag{806}$$ 176

i analogno

$$\cos(\sqrt{t^2-b^2} - \frac{\pi}{4}) = \cos(t-\frac{\pi}{4})\left[1 + O(|t|^{-2})\right] - \sin(t-\frac{\pi}{4})\,O(|t|^{-1}) \quad . \tag{807}$$ 177

Ako je imaginarni dio od $\underline{t}$ ograničen, a realni dio teži prema $\pm\infty$, to je $|\sin(t-\frac{\pi}{4})|$ i $|\cos(t-\frac{\pi}{4})|$ ograničen, pa je očito za taj slučaj

$$\sin(t-\frac{\pi}{4})\,O(|t|^{-n}) = O(|t|^{-n}) \tag{808}$$ 178

$$\cos(t-\frac{\pi}{4})\,O(|t|^{-n}) = O(|t|^{-n}) \tag{809}$$ 179

dakle prema (806) i (807)

$$\sin(\sqrt{t^2-b^2} - \frac{\pi}{4}) = \sin(t-\frac{\pi}{4}) + O(|t|^{-1}) \tag{810}$$ 180

$$\cos(\sqrt{t^2-b^2} - \frac{\pi}{4}) = \cos(t-\frac{\pi}{4}) + O(|t|^{-1}) \quad . \tag{811}$$ 181

Iz (634) slijedi za $\nu=0$, i $\nu=1$ obzirom na (340):

$$\Lambda_o(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\cos(z-\frac{\pi}{4})\left[1 + O(|z|^{-2})\right] + \sin(z-\frac{\pi}{4})\, O(|z|^{-1})\right\} \qquad (812)$$

$$\Lambda_1(z) = \frac{2}{z}\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left\{\sin(z-\frac{\pi}{4})\left[1 + O(|z|^{-2})\right] + \cos(z-\frac{\pi}{4})\, O(|z|^{-1})\right\} . \qquad (813)$$

Zbog (803) očito vrijedi

$$O(|\sqrt{t^2-b^2}|^{-n}) = O(|t|^{-n}) . \qquad (814)$$

Nadomjestimo li u (812), (813) $\underline{z}$ sa $\sqrt{t^2-b^2}$, gdje je $\underline{t}$ varijabla s ograničenim imaginarnim dijelom i s realnim dijelom, koji teži prema $+\infty$, to će obzirom na (803) biti ispunjen uvjet (636) (i onda, ako je imaginarni dio od $\underline{t}$ jednak nuli), pa dobijemo pomoću (810),(811), (814)

$$\Lambda_o(\sqrt{t^2-b^2}) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left\{\cos(t-\frac{\pi}{4}) + O(|t|^{-1})\right\} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\cos(t-\frac{\pi}{4}) + O(|t|^{-\frac{3}{2}}) \qquad (815)$$

$$\Lambda_1(\sqrt{t^2-b^2}) = \frac{2}{t}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left\{\sin(t-\frac{\pi}{4}) + O(|t|^{-1})\right\} =$$

$$= \frac{2}{t}\sqrt{\frac{2}{\pi t}}\sin(t-\frac{\pi}{4}) + O(|t|^{-\frac{5}{2}}) \qquad (816)$$

Obzirom na (808),(809) slijedi takodjer

$$\Lambda_o(\sqrt{t^2-b^2}) = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \qquad (817)$$

$$\Lambda_1(\sqrt{t^2-b^2}) = O(|t|^{-\frac{3}{2}}) , \qquad (818)$$

što, drukčije rečeno, znači, da postoji konačni $\limsup\limits_{|t|\to\infty} |t|^{\frac{1}{2}}\left|\Lambda_o(\sqrt{t^2-b^2})\right|$ i $\limsup\limits_{|t|\to\infty} |t|^{\frac{3}{2}}\left|\Lambda_1(\sqrt{t^2-b^2})\right|$, gdje $|t|$ tako teži prema ∞, da realni dio teži prema $+\infty$, dok imaginarni dio ostaje ograničen.

Označuje li $M_o(t)$ maksimum od $\left|\Lambda_o(\sqrt{t^2-\lambda^2b^2})\right|$, a $M_1(t)$ maksimum od $\left|\Lambda_1(\sqrt{t^2-\lambda^2b^2})\right|$ obzirom na realnu varijablu λ, koja prelazi zatvoreni interval (0,1), to će pod istim uvjetima očito postojati i konačni

$$\limsup_{|t|\to\infty} |t|^{\frac{1}{2}} M_o(t) \quad \text{i} \quad \limsup_{|t|\to\infty} |t|^{\frac{3}{2}} M_1(t) \quad \text{, ili}$$

$$M_o(t) = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \tag{819}$$ 189

$$M_1(t) = O(|t|^{-\frac{3}{2}}) \text{ .} \tag{820}$$ 190

Iz toga slijedi

$$\left|\int_0^b \Lambda_o(\sqrt{t^2-y^2})dy\right| = \left|\int_0^1 b\,\Lambda_o(\sqrt{t^2-\lambda^2b^2})d\lambda\right| \leq |b|\int_0^b \left|\Lambda_o(\sqrt{t^2-\lambda^2b^2})\right| d\lambda \leq$$

$$= |b|\, M_o(t) \tag{821}$$ 191

dakle

$$\int_0^b \Lambda_o(\sqrt{t^2-y^2})dy = O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \tag{822}$$ 192

i analogno

$$\int_0^b \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2})dy = O(|t|^{-\frac{3}{2}}) \text{ ,} \tag{823}$$ 193

Prema (798),(799) dobivamo dakle

$$\int_b^t \Lambda_o(\sqrt{t^2-y^2})dy = \sin t + O(|t|^{-\frac{1}{2}}) \tag{824}$$ 194

$$\int_b^t \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2})dy = \frac{2}{t}(1-\cos t) + O(|t|^{-\frac{3}{2}}). \tag{825}$$ 195

Poslije ovih priprava prelazimo na dokaz nemogućnosti identiteta (791).

Neka je <u>t</u> realna varijabla, a <u>m</u> najveći stepen polinoma R_o, R_1, R_2, R_3, R_4 i stavimo prema tome

$$\left.\begin{aligned} R_o &= p_m t^m + p_{m-1} t^{m-1} + \dots \\ R_1 &= q_m t^m + q_{m-1} t^{m-1} + \dots \\ R_2 &= r_m t^m + r_{m-1} t^{m-1} + \dots \\ R_3 &= s_m t^m + s_{m-1} t^{m-1} + \dots \\ R_4 &= u_m t^m + u_{m-1} t^{m-1} + \dots \end{aligned}\right\} \tag{826}$$

gdje je barem jedan od koeficijenata p_m, q_m, r_m, s_m, u_m od nule različit.

Označimo lijevu stranu identiteta (791) sa $F(t)$, to slijedi iz tog identiteta na temelju (815),(816),(824),(825),(826):

$$\lim_{t \to \infty} t^{-m} F(t) = \lim_{t \to \infty} (r_m \sin t + u_m) = 0 \tag{827}$$

dakle zbog periodiciteta sinusa

$$r_m \sin t + u_m \equiv 0 \tag{828}$$

ili

$$r_m = u_m = 0 \; . \tag{829}$$

To dakle znači, da su R_2 i R_4 najviše (m-1)-tog stepena ili nula,(ako je m=0). Time dobijemo dalje

$$\lim_{t \to \infty} t^{-m+\frac{1}{2}} F(t) = \lim_{t \to \infty} p_m \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(t - \frac{\pi}{4}) = 0 \; , \tag{830}$$

dakle

$$p_m = 0 \; . \tag{831}$$

I R_o je dakle najviše (m-1)-tog stepena ili nula. ~~Slijedi~~ dalje

$$\lim_{t\to\infty} t^{-m+1}F(t) = \lim_{t\to\infty}\left[r_{m-1}\sin t + 2s_m(1-\cos t) + u_{m-1}\right] = 0\,, \tag{832}$$ 202

dakle zbog periodiciteta izraza u uglatoj zagradi

$$r_{m-1}\sin t + 2s_m(1-\cos t) + u_{m-1} \equiv 0. \tag{833}$$ 203

Za $t = 0$ slijedi

$$u_{m-1} = 0\,, \tag{834}$$ 204

za $t = \pi$ dobijemo

$$s_m = 0 \tag{835}$$ 205

a za $t = \frac{\pi}{2}$

$$r_{m-1} = 0\,, \tag{836}$$ 206

tako da je i R_3 najviše $(m-1)$-tog stepena ili nula, a R_2 i R_4 najviše $(m-2)$-tog stepena ili nula. Prema tomu je dalje

$$\lim_{t\to\infty} t^{-m+\frac{3}{2}}F(t) = \lim_{t\to\infty}\left[p_{m-1}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(t-\tfrac{\pi}{4}) + q_m\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(t-\tfrac{\pi}{4})\right] = 0 \tag{837}$$ 207

dakle

$$p_{m-1}\cos(t-\tfrac{\pi}{4}) + q_m\sin(t-\tfrac{\pi}{4}) \equiv 0\,. \tag{838}$$ 208

Za $t=\frac{\pi}{4}$ slijedi

$$p_{m-1} = 0\,, \tag{839}$$ 209

a za $t=\frac{3\pi}{4}$

$$q_m = 0\,. \tag{840}$$ 210

Time je i R_1 najviše $(m-1)$-tog stepena ili nula, a R_o najviše $(m-2)$-tog stepena ili nula. Prema (829),(831),(835),(840) su dakle svi koeficijenti p_m, q_m, r_m, s_m, u_m jednaki nuli, t.j. nijedan od polinoma $R_o,\ldots,R_4$ nije m-tog stepena, što se protivi pretpostavci. Identitet (791) je dakle nemoguć.

Da dokažemo nemogućnost općeg identiteta (787), prenijet ćemo taj identitet pomoću Laplaceove transformacije iz područja prvotnih funkcija u područje izvedenih funkcija.

Pomnožimo ponajprije identitet s polinomom

$$G(t) = \prod_{k=1}^{N} (t-a_k-b_k)(t-a_k) \quad , \tag{841}$$ 211

koji sigurno ne iščezava identično. Stavimo li

$$R_{o,k}(t).G(t) = \overline{R}_{o,k}(t) \tag{842}$$ 212

$$R_{1,k}(t).G(t) = (t-a_k-b_k)\,\overline{R}_{1,k}(t) \tag{843}$$ 213

$$R_{2,k}(t).G(t) = \overline{R}_{2,k}(t) \tag{844}$$ 214

$$R_{3,k}(t).G(t) = (t-a_k)\,\overline{R}_{3,k}(t) \tag{845}$$ 215

$$R_4(t).G(t) = \overline{R}_4(t) \quad , \tag{846}$$ 216

to su i $\overline{R}_{o,k}(t), \overline{R}_{1,k}(t), \overline{R}_{2,k}(t), \overline{R}_{3,k}(t), \overline{R}_4(t)$ opet polinomi i njihovo identično iščezavanje je ekvivalentno s identičnim iščezavanjem polinoma $R_{o,k}(t),\dots,R_4(t)$. Uvedemo li još (788), to možemo mjesto identiteta (787) razmatrati identitet

$$\sum_{k=1}^{N} \overline{R}_{o,k}(t)\,\Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) + \sum_{k=1}^{N} \overline{R}_{1,k}(t).(t-a_k-b_k)\,\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} \overline{R}_{2,k}(t) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy + \sum_{k=1}^{N} \overline{R}_{3,k}(t).(t-a_k) \int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy +$$

$$+ \overline{R}_4(t) \equiv 0 \quad . \tag{847}$$ 217

Prema (627) vrijedi

$$\int_{b}^{\infty} e^{-st}\,\Lambda_o\left(\sqrt{t^2-b^2}\right)dt = \frac{e^{-b\sqrt{s^2+1}}}{\sqrt{s^2+1}} \qquad (b \geq 0,\ \ Re(s) > 0) \quad . \tag{848}$$ 218

Kaošto je spomenuto u ~~napomeni k jednadžbi~~ (627), može se analitičkim produživanjem uvidjeti, da se b može odabrati i kompleksan, pa u tom slučaju krivulja integracije počinje u točki b i teži prema $+\infty$. Možemo je napose odabrati i tako, da vodi od točke b do jedne na osi x po volji odabrane točke, a odanle uz os x prema $+\infty$.

Ako je αi imaginarni dio kompleksnog broja a, to će supstitucija

$$t = \bar{t} - a \tag{849}$$

uvjetovati, da krivulja integracije počinje u točki $a+b$ i teži prema $\alpha i + \infty$. Uočimo li, da je integrand cijela funkcija, koja teži eksponencijalno prema nuli, kad uz ograničeni imaginarni dio realni dio od t teži prema $+\infty$, (usporedi (817)), to uvidjamo, da se na temelju Cauchyevog ~~stavka~~ može put integracije tako pomaknuti, da od točke $a+b$ teži prema $+\infty$. Vrijedi stoga

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} \Lambda_0\left(\sqrt{(t-a)^2-b^2}\right)dt = \frac{e^{-b\sqrt{s^2+1} - as}}{\sqrt{s^2+1}} \qquad (\mathrm{Re}(s) > 0) . \tag{850}$$

Diferenciramo li ovu jednadžbu r puta po s, to slijedi

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r \Lambda_0\left(\sqrt{(t-a)^2-b^2}\right)dt = (-1)^r \frac{d^r}{ds^r} \frac{e^{-b\sqrt{s^2+1} - as}}{\sqrt{s^2+1}} . \tag{851}$$

Diferencijacija od (850) po b daje pomoću (345)

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a)^2-b^2}\right)dt = \frac{2}{b}\left(e^{-(a+b)s} - e^{-b\sqrt{s^2+1} - as}\right). \tag{852}$$

Diferenciramo li to po s, slijedi:

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st}\, t\, \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a)^2-b^2}\right)dt = \frac{2}{b}\left[(a+b)e^{-(a+b)s} + \frac{d}{ds}\, e^{-b\sqrt{s^2+1}\,-as}\right] . \quad (853) \quad 223$$

Iz (852) i (853) slijedi

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st}(t-a-b)\, \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a)^2-b^2}\right)dt = \frac{2}{b}\left(\frac{d}{ds}+a+b\right) e^{-b\sqrt{s^2+1}\,-as} . \quad (854) \quad 224$$

Derivirano ~~Diferenciramo~~ to još $\underline{r}$ puta po $\underline{s}$ i dobijemo:

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r (t-a-b)\, \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a)^2-b^2}\right)dt = (-1)^r \frac{d^r}{ds^r}\left[\left(\frac{d}{ds}+a+b\right)\left\{\frac{2}{b}\, e^{-b\sqrt{s^2+1}\,-as}\right\}\right].$$

(855) 225

Prema (653) vrijedi

$$\int_{b}^{\infty} e^{-st} \int_{b}^{t} \Lambda_0\left(\sqrt{t^2-y^2}\right)dy\,dt = \frac{e^{-b\sqrt{s^2+1}}}{s^2+1} \quad (\mathrm{Re}(s) > 0) . \quad (856) \quad 226$$

Nadomjestimo li opet $\underline{t}$ sa $\underline{t-a}$, pomaknemo shodno put integracije i derivirano ~~diferenciramo~~ $\underline{r}$ puta po $\underline{s}$, to slijedi

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r \int_{b}^{t-a} \Lambda_0\left(\sqrt{(t-a)^2-y^2}\right)dy\,dt = (-1)^r \frac{d^r}{ds^r}\, \frac{e^{-b\sqrt{s^2+1}\,-\,as}}{s^2+1} . \quad (857) \quad 227$$

Ako na temelju (852) provedemo prijetvorbu analognu onoj, koja je dovela od (682) do (683) i pomnožimo jednadžbu sa e^{as}, to dobijemo

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-s(t-a)} \int_{b}^{t-a} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a)^2-y^2}\right)dy\,dt = \int_{b}^{\infty} \frac{2}{y}\left(e^{-ys} - e^{-y\sqrt{s^2+1}}\right)dy . \quad (858) \quad 228$$

$(\mathrm{Re}(s) > 0)$

Deriviranje ~~Diferencijacija~~ po $\underline{s}$ i dioba sa e^{as} daje

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st}(t-a)\int_{b}^{t-a} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a)^2-y^2}\right)dy\,dt = \frac{2e^{-(a+b)s}}{s} - \frac{2s}{s^2+1}\, e^{-b\sqrt{s^2+1}-as} . \tag{859}$$ 229

Deriviramo

Diferenciramo tu jednadžbu $\underline{r}$ puta po $\underline{s}$:

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st}t^r(t-a)\int_{b}^{t-a} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a)^2-y^2}\right)dy\,dt =$$

$$= (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial s^r}\left\{\frac{2e^{-(a+b)s}}{s} - \frac{2s}{s^2+1}\, e^{-b\sqrt{s^2+1}-as}\right\} . \tag{860}$$ 230

Uvedemo sad kraticu

$$Q_k(t) = \overline{R}_{o,k}(t)\Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) + \overline{R}_{1,k}(t)(t-a_k-b_k)\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) +$$

$$+ \overline{R}_{2,k}(t)\int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy + \overline{R}_{3,k}(t)(t-a_k)\int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_k)^2-y^2}\right)dy \tag{861}$$ 231

i tvorimo izraz

$$T(s) = \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k+b_k}^{\infty} e^{-st}Q_k(t)\,dt + \int_{o}^{\infty} e^{-st}\overline{R}_4(t)\,dt \quad . \tag{862}$$ 232

Zamislimo, da put integracije pojedinih integrala pod sumom vodi od $\underline{a_k+b_k}$ do $\underline{O}$, (na pr. pravocrtno), i zatim od $\underline{O}$ po osi $\underline{x}$ prema ∞, to će dijelovi integrala od $\underline{O}$ do ∞ sa zadnjim integralom od (862) prema pretpostavljenom identitetu (847) dati nulu, tako da ostaje

$$T(s) = \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k+b_k}^{o} e^{-st}Q_k(t)\,dt \quad . \tag{863}$$ 233

Time je postignuto, da su otpale poteškoće konvergencije, pa je stoga cijela analitička funkcija (863) jednoznačno definirana u cijeloj ravnini. (Dvoznačnost korijena u argumentima Besselovih funkcija ne dolazi do izražaja, jer su to tâke funkcije svojeg argumenta).
Razumijevamo li pod $\bar{R}_{o,k}(-\frac{d}{ds})$ simbolički izraz, koji dobijemo, ako u polinomu $\bar{R}_{o,k}(t)$ zamijenimo općenito t^r sa $(-1)^r \frac{d^r}{ds^r}$, i analogno za $\bar{R}_{1,k}(t),\ldots,\bar{R}_4(t)$, to možemo na temelju (851),(855), (857),(860) i na temelju relacije

$$\int_0^\infty e^{-st}t^r dt = \frac{r!}{s^{r+1}} = (-1)^r \frac{d^r}{ds^r}\,\frac{1}{s} \tag{864}$$

mjesto (862) pisati

$$T(s) = \sum_{k=1}^{N}\left\{\bar{R}_{o,k}(-\frac{d}{ds})\,\frac{e^{-b_k\sqrt{s^2+1}\,-\,a_k s}}{\sqrt{s^2+1}} + \bar{R}_{1,k}(-\frac{d}{ds})\left\{\left(\frac{d}{ds}+a_k+b_k\right)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\cdot\,\frac{2e^{-b_k\sqrt{s^2+1}\,-\,a_k s}}{b_k}\right] + \bar{R}_{2,k}(-\frac{d}{ds})\,\frac{e^{-b_k\sqrt{s^2+1}\,-\,a_k s}}{s^2+1} +$$

$$\left.+\,\bar{R}_{3,k}(-\frac{d}{ds})\left[\frac{2e^{-(a_k+b_k)s}}{s} - \frac{2s\,e^{-b_k\sqrt{s^2+1}\,-\,a_k s}}{s^2+1}\right]\right\} + \bar{R}_4(-\frac{d}{ds})\,\frac{1}{s}\,. \tag{865}$$

Slučaj $b_{k_1}=0$, (vidi (786a)), ne daje bitnih poteškoća. U prvom, trećem i četvrtom članu pod sumom možemo izravno staviti $b_{k_1}=0$, što se može učiniti već u (850), dakle i u (851), zatim u (856) i (857) te u (859) i (860). U drugom članu dobijemo mjesto

$\frac{2e^{-b_{k_1}\sqrt{s^2+1}\,-\,a_{k_1}s}}{b_{k_1}}$ graničnim prijelazom $-2\sqrt{s^2+1}\,e^{-a_{k_1}s}$, što se može provesti već u (854) i (855).

U području, u kojem su integrali u (862) konvergentni, funkcija (865) je identična s funkcijom (863), pa analitičkim produživanjem slijedi, da mora s njom biti identična svagdje, t.j. (864) je cijela analitička funkcija i prema tome ne mijenja svoju vrijednost, ako se <u>s</u> uzduž zatvorene krivulje povrati u prvotnu točku.

Riemannova ploha funkcije $\sqrt{s^2+1}$ ima dva razgraništa <u>s=i</u> i <u>s=-i</u>, pa opkoljavanje svakog od tih razgraništa mijenja korijenu predznak. Odaberimo dakle zatvorenu krivulju, koja obuhvaća, recimo, <u>+i</u>, a ne obuhvaća <u>-i</u>, i zamislimo, da <u>s</u> prodje tu krivulju. Tim će se u (865) izmijeniti predznaci korijena. Budući da čitava funkcija (865) mora ostati ista, to će razlika dobivenog i prvotnog izraza biti jednaka nuli:

$$\sum_{k=1}^{N}\Big\{\bar{R}_{0,k}\Big(-\frac{\partial}{\partial s}\Big)\frac{e^{-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s}+e^{b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s}}{\sqrt{s^2+1}}+$$

$$+\bar{R}_{1,k}\Big(-\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial s}+a_k+b_k\Big)\Big[\frac{2}{b_k}e^{-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s}-\frac{2}{b_k}e^{b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s}\Big]\Big\}+$$

$$+\bar{R}_{2,k}\Big(-\frac{\partial}{\partial s}\Big)\frac{e^{-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s}-e^{b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s}}{s^2+1}+$$

$$+\bar{R}_{3,k}\Big(-\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big[-\frac{2s}{s^2+1}e^{-b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s}+\frac{2s}{s^2+1}e^{b_k\sqrt{s^2+1}-a_k s}\Big]\Big\}\equiv 0. \tag{866}$$

Ni ovdje slučaj $b_{k_1}=0$ ne daje bitnih poteškoća. Prvi član pod sumom daje $\bar{R}_{0,k_1}\Big(-\frac{\partial}{\partial s}\Big)\frac{2e^{-a_{k_1}s}}{\sqrt{s^2+1}}$, drugi član daje

$\bar{R}_{1,k_1}\Big(-\frac{\partial}{\partial s}\Big)\Big[\Big(\frac{\partial}{\partial s}+a_{k_1}\Big)\Big(-4\sqrt{s^2+1}\,e^{-a_{k_1}s}\Big)\Big]$, a treći i četvrti član otpadaju.

Razmatrajmo kompleksne brojeve $\underline{-a_k+b_k}$ i $\underline{-a_k-b_k}$ $(k=1,\ldots,N)$, pri čemu je moguće, da su neki od tih brojeva medjusobno jednaki, a da nije povrijedjen uvjet stavka III.8., da ni u kojem paru jednadžba (786) nisu zadovoljene obje jednadžbe. Ipak ćemo sve te brojeve in abstracto razlikovati. Ako medjutim za jednu vrijednost $\underline{k_1}$ indeksa $\underline{k}$ vrijedi (786a), to ne ćemo razlikovati dotična dva broja $\underline{-a_{k_1}+b_{k_1}}$ i $\underline{-a_{k_1}-b_{k_1}}$, koja su oba jednaka $\underline{-a_{k_1}}$, već ćemo taj broj uvrstiti samo medju brojeve $\underline{-a_k+b_k}$. U tom slučaju dakle razmatramo svega $2N-1$ takvih brojeva, dok ih je inače $2N$.

Neka je ρ maksimum apsolutnih vrijednosti tih $2N$ odnosno $2N-1$ brojeva, t.j. ~~radij~~ polumjer najveće kružnice sa središtem u ishodištu, na kojoj leži bar jedna od točaka, koje odgovaraju tim brojevima. Odaberimo jednu od tih točaka na toj kružnici, pri čemu je moguće, da toj točki odgovara nekoliko medjusobno jednakih brojeva. Neka su ti medjusobno jednaki brojevi

$$-a_k+b_k \quad \text{za indekse} \quad k=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{n_1} \tag{867}$$

$$-a_k-b_k \quad \text{"} \quad \text{"} \quad k=\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_{n_2} \tag{868}$$

Medju indeksima pod (867) može pri tom biti sadržan indeks $\underline{k_1}$. Zajednička vrijednost tih brojeva neka je $\rho e^{i\varphi}$ $(-\pi < \varphi \leq \pi)$.

Da korijeni u (866) budu jednoznačni, ograničimo se na područje izvan kružnice s ~~nekim~~ ~~radijem~~ polumjerom $\underline{R}=1$ i ustanovimo, da korijen $\sqrt{s^2+1}$ treba da bude pozitivan za realni pozitivni $\underline{s}$. (Ta pretpostavka odgovara (803) i šutke je vrijedila već za (848)). Možemo tada korijen razviti u red potencija po $\frac{1}{s}$:

$$\sqrt{s^2+1} = s\sqrt{1+\frac{1}{s^2}} = s + \frac{1}{2s} - \frac{1}{8s^3} + \ldots \qquad (869)$$

Funkcija

$$\sqrt{s^2+1} - s = \frac{1}{2s} - \frac{1}{8s^3} + \ldots \qquad (870)$$

je dakle za $s = \infty$ regularna i jednaka nuli i stoga funkcija

$$e^{A(\sqrt{s^2+1} - s)} = e^{A(\frac{1}{2s} - \frac{1}{8s^3} + \ldots)} \qquad (871)$$

gdje je $\underline{A}$ bilo kakav kompleksni broj, za $s = \infty$ regularna i jenaka jedan.

Lako se uvidja, da (866) poslije provedenih diferencijacija dobiva oblik

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{U_k(s) + \sqrt{s^2+1}\, V_k(s)\right\} e^{-b_k\sqrt{s^2+1} - a_k s} -$$

$$- \sum_{k=1}^{N}\left\{U_k(s) - \sqrt{s^2+1}\, V_k(s)\right\} e^{b_k\sqrt{s^2+1} - a_k s} \equiv 0 \qquad (872)$$

gdje su $U(s)$ i $V(s)$ stanovite racionalne funkcije od $\underline{s}$. Taj oblik vrijedi napose i za $k = k_1$ $(b_{k_1}=0)$, samo što će za taj indeks dio sa $U_{k_1}(s)$ otpasti, a dijelovi sa $V_{k_1}(s)$ će se zbrojiti.

Pomnožimo li (872) sa $e^{-s\rho e^{i\varphi}}$, to možemo pisati:

$$\sum_{k=1}^{N}\left\{U_k(s) + \sqrt{s^2+1}\, V_k(s)\right\} e^{-b_k(\sqrt{s^2+1} - s)}\, e^{(-a_k-b_k-\rho e^{i\varphi})s} -$$

$$- \sum_{k=1}^{N}\left\{U_k(s) - \sqrt{s^2+1}\, V_k(s)\right\} e^{b_k(\sqrt{s^2+1} - s)}\, e^{(-a_k+b_k-\rho e^{i\varphi})s} \equiv 0\,. \qquad (873)$$

Istražimo iz prve sume članove, za koje indeks $\underline{k}$ ima vrijednosti (868), a iz druge sume članove, kojima indeks ima vrijednosti (867).

Medju ovim potonjima može biti član s indeksom $k=k_1$, za koji je $b_{k_1}=0$. Za taj indeks izvadimo dotične članove iz obih suma, što zajedno daje $2\sqrt{s^2+1}\;V_{k_1}(s)\;e^{(-a_{k_1}-\rho e^{i\varphi})s}$. Sve ove izvadjene članove skupimo u funkciju $G_1(s)$, dok sve ostale članove skupimo u funkciju $G_2(s)$. Onda je dakle

$$G_1(s) + G_2(s) \equiv 0 \tag{874}$$ 244

ili

$$G_1(s) \equiv -G_2(s) \;. \tag{875}$$ 245

Uzmemo li sad u obzir, da su eksponencijalne funkcije

$e^{(-a_k-b_k-\rho e^{i\varphi})s}$ i $e^{(-a_k+b_k-\rho e^{i\varphi})s}$ u članovima od $G_1(s)$

sve jednake jedan, jer smo zajedničku vrijednost dotičnih brojeva $\underline{-a_k-b_k}$ i $\underline{-a_k+b_k}$ označili sa $\rho e^{i\varphi}$, to slijedi iz (869) i (871), da $G_1(s)$ za $s=\infty$ može imati samo nebitno singularno mjesto.

Za vrijednosti indeksa $\underline{k}$, koje su sadržane u $G_2(s)$, vrijedi:

$$-a_k+b_k = \rho_k e^{i\varphi_k} \qquad (-\pi < \varphi_k \leq \pi) \tag{876}$$ 246

$$-a_k-b_k = \sigma_k e^{i\psi_k} \qquad (-\pi < \psi_k \leq \pi) \tag{877}$$ 247

pri čemu je sigurno

$$\rho_k \leq \rho \quad , \quad \sigma_k \leq \rho \tag{878}$$ 248

jer je ρ maksimum svih apsolutnih vrijednosti tih brojeva, a u slučaju

$$\rho_k = \rho \qquad \text{odnosno} \qquad \sigma_k = \rho \tag{879}$$ 249

je sigurno

$$\varphi_k \neq \varphi \qquad \text{odnosno} \qquad \psi_k \neq \varphi \tag{880}$$ 250

jer su ti brojevi različiti od $\rho e^{i\varphi}$.

Stavimo li sad u $G_2(s)$

$$s = \lambda e^{-i\varphi} \;, \tag{881}$$ 251

gdje neka bude λ pozitivan (i realan), to za eksponente eksponencijalnih funkcija dobijemo

$$(-a_k+b_k-\rho e^{i\varphi})\lambda e^{-i\varphi} = \lambda\left[(-a_k+b_k)e^{-i\varphi}-\rho\right] =$$
$$= \lambda\left[\rho_k e^{i(\varphi_k-\varphi)}-\rho\right] = \lambda\left[\rho_k\cos(\varphi_k-\varphi)-\rho+i\,\rho_k\sin(\varphi_k-\varphi)\right] \tag{882}$$

i analogno

$$(-a_k-b_k-\rho e^{i\varphi})\lambda e^{-i\varphi} = \lambda\left[\sigma_k\cos(\psi_k-\varphi)-\rho+i\,\sigma_k\sin(\psi_k-\varphi)\right]. \tag{883}$$

Realni dio tih eksponenata je u slučaju (879) negativan zbog (880), a pogotovo je negativan u slučaju znaka $<$ u (878). Ako je dakle μ minimum brojeva $\rho-\rho_k\cos(\varphi_k-\varphi)$ i $\rho-\sigma_k\cos(\psi_k-\varphi)$ i ako je $0<\varepsilon<\mu$, to će za $\lambda\to\infty$ $G_2(s)$ sigurno jače težiti prema nuli nego $e^{-(\mu-\varepsilon)\lambda}$, jer su eksponencijalne funkcije pomnožene s funkcijama poput (871),(869) i racionalnim funkcijama $U_k(s)$, odnosno $V_k(s)$, a sve te funkcije ne mogu težiti jače prema ∞ nego konačna potencija. Ako dakle funkcija $G_2(s)$ sadrži barem jedan član, to ona ima za $s=\infty$ sigurno bitno singularno mjesto, ukoliko ne iščezava identično. Budući da lijeva strana od (875) nema bitno singularno mjesto za $s=\infty$, to mora desna strana, pa i lijeva, identično iščezavati, t.j. vrijedi

$$G_1(s) \equiv 0 . \tag{883}$$

Kad $G_2(s)$ ne bi uopće imao članova, vrijedio bi eo ipso (883), no $G_2(s)$ ima za $N\geq 2$, (a slučaj $N=1$ smo već riješili), sigurno barem jedan član, jer bi inače <u>svi</u> brojevi $\underline{-a_k-b_k}$ i $\underline{-a_k+b_k}$ bili sadržani medju jednakim brojevima (867) i (868), što bi dovelo do protuslovlja s pretpostavkom stavka III.8. obzirom na jednadžbe (786).

Kako smo vidjeli, u izrazu $G_1(s)$ može biti sadržan član s indeksom $\underline{k_1}$. Ako je u $G_1(s)$ sadržan <u>samo</u> taj član sa $\underline{k_1}$, za koji je $\underline{g_{k_1}}=0$, to je onda

$$G_2(s) \equiv 0 \tag{884}$$

identitet, koji odgovara identitetu (866), samo što fale članovi s indeksom $\underline{k_1}$. Na temelju toga skraćenog identiteta, koji zbog $N \geq 2$ sigurno nije bez članova, provedemo analogni postupak, koji smo proveli sa (866) i dolazimo do jedne nove funkcije $G_1(s)$, koja više ne sadrži član sa $\underline{k_1}$, (ali sigurno nije bez članova, kako proizlazi iz postupka, kojim se ta funkcija dobije).

Prema tome smo dakle svakako došli do jedne funkcije $G_1(s)$, koja sigurno ne sadržava <u>samo</u> član s indeksom $\underline{k_1}$.

Prema načinu, kako smo iz (873) odijelili članove za $G_1(s)$, imat će (883) oblik

$$\sum_{k=1}^{n_2}\left\{U_{\beta_k}(s)+\sqrt{s^2+1}\,V_{\beta_k}(s)\right\} e^{-b_{\beta_k}\sqrt{s^2+1}-a_{\beta_k}s} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n_1}\left\{U_{\alpha_k}(s)-\sqrt{s^2+1}\,V_{\alpha_k}(s)\right\} e^{b_{\alpha_k}\sqrt{s^2+1}-a_{\alpha_k}s} \equiv 0 \tag{885}$$

pri čemu smo faktor $e^{-s\varphi e^{i\varphi}}$ opet odbacili. Ukoliko je član s indeksom k_1 sadržan u tom identitetu, on glasi prema prije spomenutom $2\sqrt{s^2+1}\,V_{k_1}(s)\,e^{-s_{k_1}s}$.

Prodje li $\underline{s}$ iznova zatvorenu krivulju, koja uključuje $\underline{+i}$, a isključuje $\underline{-i}$, to će se predznaci korijena u (885) promijeniti, t.j. slijedi

$$\sum_{k=1}^{n_2}\left\{U_{\beta_k}(s) - \sqrt{s^2+1}\,V_{\beta_k}(s)\right\} e^{b_{\beta_k}\sqrt{s^2+1} - a_{\beta_k}s} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n_1}\left\{U_{\alpha_k}(s) + \sqrt{s^2+1}\,V_{\alpha_k}(s)\right\} e^{-b_{\alpha_k}\sqrt{s^2+1} - a_{\alpha_k}s} \equiv 0\,, \qquad (886)$$ 257

a član s indeksom $\underline{k_1}$, ukoliko je sadržan, glasi $-2\sqrt{s^2+1}\,V_{k_1}(s)\,e^{-a_{k_1}s}$.

Razmatrajmo sad brojeve

$$-a_k - b_k \quad \text{za indekse} \quad k = \alpha_1, \dots, \alpha_{n_1} \qquad (887)$$ 258

$$-a_k + b_k \quad \text{"} \quad \text{"} \quad k = \beta_1, \dots, \beta_{n_2}\,, \qquad (888)$$ 259

koje dobijemo iz (867) i (868) promjenom predznaka brojeva $\underline{b_k}$. Budući da su brojevi (867) i (868) medjusobno jednaki, to su brojevi (887), (888) svi medjusobno različiti. Da su dva broja (887) jednaka, t.j.

$$-a_j - b_j = -a_k - b_k\,, \qquad (889)$$ 260

a uz to od prije

$$-a_j + b_j = -a_k + b_k \qquad (890)$$ 261

izlazilo

slijedilo bi

$$a_j = a_k\,, \qquad b_j = b_k \qquad (891)$$ 262

u protuslovlju s pretpostavkom stavka III.8. Analogno vrijedi za slučaj, da su dva broja (888) jednaka. Da je jedan broj (887) jednak jednom broju (888), bilo bi

$$-a_\alpha - b_\alpha = -a_\beta + b_\beta\,, \qquad (892)$$ 263

a od prije

$$-a_\alpha + b_\alpha = -a_\beta - b_\beta\,, \qquad (893)$$ 264

pa bi slijedilo

$$a_\alpha = a_\beta \quad \text{i} \quad b_\alpha = -b_\beta\,, \quad \text{dakle} \quad b_\alpha^2 = b_\beta^2 \qquad (894)$$ 265

u protuslovlju s pretpostavkom stavka III.8. Ovdje se vidi, zašto su u (786) brojevi $\underline{b_k}$ u kvadratu. Na ovo pitanje ćemo se još kasnije osvrnuti.

Ako je $\bar{\rho}$ maksimum apsolutnih vrijednosti brojeva (887),(888), pa je $\bar{\rho}\,e^{i\bar{\varphi}}$ jedan od brojeva, koji imaju tu apsolutnu vrijednost, to možemo (886) pomnožiti sa $e^{-s\bar{\rho}e^{i\bar{\varphi}}}$ i dobivamo analogon relacije (873):

$$\sum_{k=1}^{n_2}\left\{U_{\beta_k}(s)-\sqrt{s^2+1}\,V_{\beta_k}(s)\right\}e^{b_{\beta_k}(\sqrt{s^2+1}-s)}\,e^{(-a_{\beta_k}+b_{\beta_k}-\bar{\rho}e^{i\bar{\varphi}})s}\;-$$

$$-\sum_{k=1}^{n_1}\left\{U_{\alpha_k}(s)+\sqrt{s^2+1}\,V_{\alpha_k}(s)\right\}e^{-b_{\alpha_k}(\sqrt{s^2+1}-s)}\,e^{(-a_{\alpha_k}-b_{\alpha_k}-\bar{\rho}e^{i\bar{\varphi}})s}\equiv 0\,. \qquad (266)$$

(Eventualni član indeksa k_1 naravno glasi $-2\sqrt{s^2+1}\,V_{k_1}(s)\,e^{(-a_{k_1}-\bar{\rho}e^{i\bar{\varphi}})s}$).

Ako se broj $\bar{\rho}\,e^{i\bar{\varphi}}$ nalazi medju brojevima $-a_{\beta_k}+b_{\beta_k}$, to izvadimo član s indeksom β_k i nazovemo ga $\bar{G}_1(s)$, dok ostatak izraza (895) nazovemo $\bar{G}_2(s)$. Ako je naprotiv $\bar{\rho}\,e^{i\bar{\varphi}}$ sadržan medju brojevima $-a_{\alpha_k}-b_{\alpha_k}$, neka je $\bar{G}_1(s)$ član s indeksom α_k, a ostatak izraza neka je $\bar{G}_2(s)$. Analognim razmatranjem kao prije dobijemo

$$\bar{G}_1(s)\equiv 0\,. \qquad (896) \quad 267$$

Ako je $\bar{\rho}\,e^{i\bar{\varphi}}$ bio broj s indeksom $\underline{k_1}$, t.j. $\bar{\rho}\,e^{i\bar{\varphi}}=-a_{k_1}$, to nam

$$\bar{G}_2(s)\equiv 0 \qquad (897) \quad 268$$

daje identitet, koji se podudara sa (886), samo što fali član s indeksom $\underline{k_1}$. Ponovimo li razmatranje, dolazimo svakako do jedne funkcije $\bar{G}_1(s)$, koja ne sadržava toga člana, t.j. ima oblik

$$\left\{U_\alpha(s) + \sqrt{s^2+1}\,V_\alpha(s)\right\} e^{-b_\alpha\sqrt{s^2+1} - a_\alpha s} \equiv 0, \qquad (898) \quad 269$$

ako je $\bar{\varrho}\, e^{i\varphi}$ medju brojevima (887), odnosno

$$\left\{U_\beta(s) - \sqrt{s^2+1}\,V_\beta(s)\right\} e^{b_\beta\sqrt{s^2+1} - a_\beta s} \equiv 0, \qquad (899) \quad 270$$

ako je $\bar{\varrho}\, e^{i\varphi}$ medju brojevima (888). Prodje li $\underline{s}$ zatvorenu krivulju, koja uključuje $\underline{+i}$, a isljučuje $\underline{-i}$, možemo u (899) promijeniti predznake korijena, tako da i tu dobijemo oblik (898).

Usporedimo li (873) sa (866), to je jasno, da identitet (898), koji sadrži samo članove, u kojima je u eksponentu eksponencijalne funkcije negativne predznak pred $\underline{b_k}$, mora glasiti

$$\bar{R}_{0,\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{e^{-b_\alpha\sqrt{s^2+1} - a_\alpha s}}{\sqrt{s^2+1}} +$$

$$+ \bar{R}_{1,\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial s} + a_\alpha + b_\alpha\right)\left[\frac{2}{b_\alpha}\, e^{-b_\alpha\sqrt{s^2+1} - a_\alpha s}\right]\right\} +$$

$$+ \bar{R}_{2,\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right) \frac{e^{-b_\alpha\sqrt{s^2+1} - a_\alpha s}}{s^2+1} + \bar{R}_{3,\alpha}\left(-\frac{\partial}{\partial s}\right)\left(-\frac{2s}{s^2+1}\, e^{-b_\alpha\sqrt{s^2+1} - a_\alpha s}\right) \equiv 0.$$

$$(900) \quad 271$$

Obzirom na (851),(855),(857),(860) i na relaciju

$$\int_{a+b}^{\infty} e^{-st} t^r\, dt = (-1)^r \frac{\partial^r}{\partial s^r} \frac{e^{-(a+b)s}}{s} \qquad (901) \quad 272$$

može se mjesto (900) pisati

$$\int_{a_\alpha+b_\alpha}^{\infty} e^{-st} \left\{\bar{R}_{0,\alpha}(t)\, \Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_\alpha)^2 - b_\alpha^2}\right) + \bar{R}_{1,\alpha}(t)(t-a_\alpha-b_\alpha)\, \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_\alpha)^2 - b_\alpha^2}\right) + \right.$$

$$+ \bar{R}_{2,\alpha}(t) \int_{b_\alpha}^{t-a_\alpha} \Lambda_0\left(\sqrt{(t-a_\alpha)^2 - y^2}\right) dy + \bar{R}_{3,\alpha}(t)(t-a_\alpha) \int_{b_\alpha}^{t-a_\alpha} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_\alpha)^2 - y^2}\right) dy -$$

$$\left. - 2\bar{R}_{3,\alpha}(t)\right\} dt \equiv 0. \qquad (902) \quad 273$$

Stavimo li

$$t = \bar{\tau} + a_\alpha + b_\alpha \tag{903}$$

to dolnja granica vanjskog integrala postaje nula, a ako shodno pomaknemo put integracije, gornja granica je opet $+\infty$. Time je integracija protegnuta uzduž realne osi, pa možemo upotrijebiti stavak o recipročnoj jednoznačnosti preslikavanja, što ga daje Laplaceova transformacija*). Time je izraz u zagradi, u kojem naknadno opet uvedemo $\underline{t}$ prema (903), identično jednak nuli. To je onda relacija poput (790), tako da vrijedi

$$\bar{R}_{o,\alpha}(t) \equiv \bar{R}_{1,\alpha}(t) \equiv \bar{R}_{2,\alpha}(t) \equiv \bar{R}_{3,\alpha}(t) \equiv 0 \tag{904}$$

i obzirom na (842) do (846):

$$R_{o,\alpha}(t) \equiv R_{1,\alpha}(t) \equiv R_{2,\alpha}(t) \equiv R_{3,\alpha}(t) \equiv 0 \, . \tag{905}$$

Time smo u prvotnom identitetu (787) snizili $\underline{N}$ za jednu jedinicu. Ponavljanjem toga postupka možemo sniziti $\underline{N}$ na jedan. Ukoliko postoji indeks $\underline{k_1}$, za koji je $b_{k_1}=0$, to će dotični članovi ostati u tom zadnjem identitetu, u kojem je $N=1$. Budući da smo za taj slučaj već proveli dokaz, koji ne ovisi o tom, da li je $b=0$, to je time sve dokazano.

Provest ćemo još diskusiju nekih slučajeva, gdje nisu ispunjeni svi uvjeti stavka III.8.

Ako nije ispunjen uvjet, da (786a) vrijedi za najviše jednu vrijednost $\underline{k_1}$ indeksa $\underline{k}$, već ako je za barem dva indeksa $\underline{k_1}$ i $\underline{k_2}$

$$b_{k_1} = b_{k_2} = 0 \, , \tag{906}$$

---

*) G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplacetransformation, Springer Berlin 1937, 3. Kap. §7.

to se lako vidi, da postoji identitet poput (787). Prema (798) slijedi naime

$$I_1 = \int_{b_{k_1}}^{t-a_{k_1}} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_{k_1})^2-y^2}\right)dy = \int_{o}^{t-a_{k_1}} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_{k_1})^2-y^2}\right)dy = \sin(t-a_{k_1}) \tag{907}$$

$$I_2 = \int_{b_{k_2}}^{t-a_{k_2}} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_{k_2})^2-y^2}\right)dy = \int_{o}^{t-a_{k_2}} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_{k_2})^2-y^2}\right)dy = \sin(t-a_{k_2}) \tag{908}$$

a prema (799)

$$I_3 = \int_{b_{k_1}}^{t-a_{k_1}} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_{k_1})^2-y^2}\right)dy = \int_{o}^{t-a_{k_1}} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_{k_1})^2-y^2}\right)dy =$$

$$= \frac{2}{t-a_{k_1}}\left[1 - \cos(t-a_{k_1})\right] \tag{909}$$

$$I_4 = \int_{b_{k_2}}^{t-a_{k_2}} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_{k_2})^2-y^2}\right)dy = \int_{o}^{t-a_{k_2}} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_{k_2})^2-y^2}\right)dy =$$

$$= \frac{2}{t-a_{k_2}}\left[1 - \cos(t-a_{k_2})\right] . \tag{910}$$

Ako u izrazu

$$\sin(t-a_{k_1}-a_{k_2}) = \cos a_{k_2} \sin(t-a_{k_1}) - \sin a_{k_2} \cos(t-a_{k_1}) =$$

$$= \cos a_{k_1} \sin(t-a_{k_2}) - \sin a_{k_1} \cos(t-a_{k_2}) \tag{911}$$

nadomjestimo $\sin(t-a_{k_1})$, $\sin(t-a_{k_2})$, $\cos(t-a_{k_1})$, $\cos(t-a_{k_2})$ vrijednostima prema (907),(908),(909),(910), dobijemo identitet

$$\cos a_{k_2} I_1 - \cos a_{k_1} I_2 + \frac{1}{2}(t-a_{k_1}) \sin a_{k_2} I_3 -$$

$$- \frac{1}{2}(t-a_{k_2}) \sin a_{k_1} I_4 + \sin a_{k_1} - \sin a_{k_2} \equiv 0 , \tag{912}$$

koji potpada pod oblik (787).

Ovdje istina treba primijetiti, da su koeficijenti u kanoničkom obliku integralnih teorema bile racionalne funkcije nesamo obzirom na varijablu $\underline{t}$, već i obzirom na parametre $x_1,\dots,x_r$. Kad bismo za parametre $\underline{a_k}$ uvrstili izraze (779), u identitetu (912) bili bi koeficijenti doduše racionalne funkcije varijable $\underline{t}$, ali transcendentne funkcije parametara $x_1,\dots,x_r$. Iz toga se vidi, da bi zahtjev, da koeficijenti ovise racionalno o parametrima, omogućio slabije uvjete obzirom na te parametre u stavku III.8. U ovo pitanje medjutim ne ulazimo.

Pretpostavimo dalje, da u drugoj jednadžbi (786) ne pišu kvadrati, već prve potencije parametara $\underline{b_k}$. To dakle znači, da na pr. može biti za neki $\underline{k}$

$$a_j = a_k \tag{913}$$

$$b_j = -b_k \neq 0 \quad . \tag{914}$$

Funkcije za indekse $\underline{j}$ i $\underline{k}$ podudaraju se u prvoj sumi od (787), a isto tako i u drugoj sumi. Takvi se članovi dakle mogu zbrojiti. U trećoj i četvrtoj sumi će se takodjer neki članovi moći zbrojiti, kako ćemo još vidjeti. (Pri tom još pridolaze neke trigonometrijske funkcije). Pitanje je, nisu li poslije tog zbrajanja koeficijenti opet jednoznačno odredjeni.

Neka ponajprije postoje barem dva para indeksa $\underline{j_1}$, $\underline{k_1}$ i $\underline{j_2}$, $\underline{k_2}$, za koje vrijedi (913) i (914).

Supstitucija

$$y = -\bar{y} \qquad (915)$$ 286

daje

$$\int_0^b \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})dy = -\int_0^{-b} \Lambda_0(\sqrt{t^2-\bar{y}^2})d\bar{y} , \qquad (916)$$ 287

dakle obzirom na (798)

$$\int_{-b}^{t} \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})dy = \sin t - \int_0^{-b} \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})dy = \sin t + \int_0^{b} \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})dy =$$

$$\sin t + (\sin t - \int_b^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})dy \qquad (918)$$ 288

ili

$$\int_b^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})dy + \int_{-b}^t \Lambda_0(\sqrt{t^2-y^2})dy = 2 \sin t . \qquad (919)$$ 289

Slično slijedi

$$\int_b^t \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2})dy + \int_{-b}^t \Lambda_1(\sqrt{t^2-y^2})dy = \frac{4}{t}(1 - \cos t) . \qquad (920)$$ 290

Prema tome će biti

$$A \int_{b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2})dy + A \int_{-b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2})dy +$$

$$B \int_{b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2})dy + B \int_{-b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_0(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2})dy +$$

$$+ C(t-a_{j_1}) \int\limits_{b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2})dy + C(t-a_{j_1}) \int\limits_{-b_{j_1}}^{t-a_{j_1}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{j_1})^2-y^2})dy +$$

$$+ D(t-a_{j_2}) \int\limits_{b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2})dy + D(t-a_{j_2}) \int\limits_{-b_{j_2}}^{t-a_{j_2}} \Lambda_1(\sqrt{(t-a_{j_2})^2-y^2})dy -$$

$$- 4C - 4D = 2A\sin(t-a_{j_1}) + 2B\sin(t-a_{j_2}) - 4D\cos(t-a_{j_1}) - 4D\cos(t-a_{j_2}) .$$

(921) 291

Stavimo li

$$\left.\begin{aligned} A &= -2\mathrm{ctg}(a_{j_1}-a_{j_2}) \\ B &= \frac{2}{\sin(a_{j_1}-a_{j_2})} \\ C &= 1 \\ D &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (922)$$

292a 292b 292 292c 292d

to desna strana izraza (921), u kojoj su stegnuti dotični članovi treće i četvrte sume prema (787), identično iščezava, kako se lako izračuna. U tom slučaju dakle postoji identitet oblika (786). I ovdje su koeficijenti racionalne funkcije varijable $\underline{t}$, ali djelomice transcendentne funkcije parametara.

Postoji li samo jedan par indeksa $\underline{j}$, $\underline{k}$, za koji vrijedi (913),(914), a da nema indeksa, za koji bi vrijedila jednadžba (786a), dokaz jednoznačnosti se može ipak provesti, ako se članovi, koji odgovaraju u (787) tim indeksima, stegnu.

Na temelju (913),(914) vrijedi

$$R_{oj}(t) \Lambda_o(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}) + R_{o,k}(t) \Lambda_o(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) =$$

$$= \left[R_{o,j}(t) + R_{o,k}(t)\right] \Lambda_o(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}) \qquad (923)$$

293

$$R_{1,j}(t)\,\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}\right) + R_{1,k}(t)\,\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}\right) =$$

$$= \left[R_{1,j}(t) + R_{1,k}(t)\right]\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}\right) \qquad (924)$$

Dalje je s obzirom na (918) i (796),(797)

$$\int_{-b_j}^{t-a_j} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy = -\int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy + 2\sin(t-a_j) =$$

$$= -\int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy + 2\int_{o}^{t-a_j} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy \qquad (925)$$

$$\int_{-b_j}^{t-a_j} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy = -\int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy + \frac{4}{t-a_j}\left[1-\cos(t-a_j)\right] =$$

$$= -\int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy + 2\int_{o}^{t-a_j} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy \ . \qquad (926)$$

Možemo dakle prema (923) do (926) članove identiteta s indeksima

j i k dovesti u oblik

$$\left[R_{o,j}(t) + R_{o,k}(t)\right]\Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}\right) + \left[R_{1,j}(t) + R_{1,k}(t)\right]\Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-b_j^2}\right) +$$

$$+\left[R_{2,j}(t) - R_{2,k}(t)\right]\int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy + 2R_{2,k}(t)\int_{o}^{t-a_j} \Lambda_o\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy +$$

$$+\left[R_{3,j}(t) - R_{3,k}(t)\right]\int_{b_j}^{t-a_j} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy + 2R_{3,k}(t)\int_{o}^{t-a_j} \Lambda_1\left(\sqrt{(t-a_j)^2-y^2}\right)dy \ .$$

$$(927)$$

Ako mjesto članova s indeksima <u>j</u> i <u>k</u> uvedemo članove s novim indeksima <u>p</u> , <u>q</u> s vrijednostima

$$
\begin{aligned}
a_p &= a_j && (928)\\
b_p &= b_j && (929)\\
R_{o,p}(t) &= R_{o,j}(t) + R_{o,k}(t) && (930)\\
R_{1,p}(t) &= R_{1,j}(t) + R_{1,k}(t) && (931)\\
R_{2,p}(t) &= R_{2,j}(t) - R_{2,k}(t) && (932)\\
R_{3,p}(t) &= R_{3,j}(t) - R_{3,k}(t) && (933)\\
a_q &= a_j && (934)\\
b_q &= 0 && (935)\\
R_{o,q}(t) &= R_{1,q}(t) = 0 && (936)\\
R_{2,q}(t) &= 2R_{2,j}(t) && (937)\\
R_{3,q}(t) &= 2R_{3,j}(t) \quad . && (938)
\end{aligned}
$$

to dobijemo upravo izraz (927). Vrijednost $b_q=0$ je dopustiva, jer smo pretpostavili, da nijedan od ostalih <u>b_k</u> nije jednak nuli. Stavak III.8. je dakle primjenljiv i identitet je nemoguć.

Time je diskusija naročitih slučajeva provedena.

9. Rekurzione formule za kompozicije u slučaju, da pojedini parametri iščezavaju.

87 88 92 93 94

Rekurzione jednadžbe (715),(716),(720),(721),(722) zataje, kad je dotični parametar jednak nuli. Za taj slučaj ćemo izvesti druge rekurzione jednadžbe.

Stavimo u (710) $x_2=0$ i upotrijebimo (343):

$$K^{m_1,m_2+2}_{n_1,n_2+2}(t;x_1,0) = \int_{x_1}^{t} y^{m_1}(t-y)^{m_2+2}\Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2-x_1^2})\Lambda_{n_2+2}\left[c(t-y)\right]dy =$$

$$= \frac{4(n_2+1)(n_2+2)}{c^2}\int_{x_1}^{t} y^{m_1}(t-y)^{m_2}\Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2-x_1^2})\left\{\Lambda_{n_2+1}\left[c(t-y)\right] - \Lambda_{n_2}\left[c(t-y)\right]\right\}dy =$$

$$= \frac{4(n_2+1)(n_2+2)}{c^2}\left[K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2+1}(t;x_1,0) - K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,0)\right] . \qquad (939) \quad 309$$

Nadomjestimo li u (717) $\underline{n_2}$ sa $\underline{n_2+1}$ i $\underline{m_2}$ sa $\underline{m_2+1}$, stavimo $x_2=0$ te uvrstimo izraz (939), to slijedi

$$\frac{\partial K^{m_1,m_2+1}_{n_1,n_2+1}(t;x_1,0)}{\partial t} = (m_2-2n_2-1)\, K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2+1}(t;x_1,0) + 2(n_2+1)\, K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) .$$

$$(940) \quad 310$$

Pretpostavimo li $m_2>0$, diferenciramo (718), (u kojem je stavljeno $x_2=0$), po $\underline{t}$ i uvrstimo izraz (940), to dobijemo

$$K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2+1}(t;x_1,0) = \frac{2(n_2+1)}{2n_2-m_2+1}\left\{K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) - \frac{m_2}{c^2}\,\frac{\partial K^{m_1,m_2-1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0)}{\partial t} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,0)}{\partial t^2}\right\} \quad (2n_2-m_2+1 \neq 0,\ m_2>0) . \qquad (941) \quad 311$$

Ako je naprotiv $m_2=0$, to u (718) 90 prvi član u vitičastoj zagradi ne iščezava, kad stavimo $x_2=0$, ali iščezava drugi član. Dobijemo za taj slučaj

$$K^{m_1,o}_{n_1,n_2+1}(t;x_1,0) =$$

$$= \frac{2(n_2+1)}{2n_2+1}\left\{K^{m_1,o}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^{m_1}\Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{t^2-x_1^2}\right)\right] + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 K^{m_1,o}_{n_1,n_2}(t;x_1,0)}{\partial t^2}\right\}$$

(942) 312

Formule 311 312 (941),(942) dopuštaju postepeno povisivanje dolnjeg indeksa, kojemu odgovara parametar stavljen jednak nuli, pretpostavivši da je $m_2 \neq 2n_2+1$. Uz lihi m_2 može se dakle povisivanje od n_2 provesti od $\underline{0}$ do $\frac{m_2-1}{2}$ i od $\frac{m_2+1}{2}$ na više, dok za tâki m_2 povisivanju od n_2 nema zapreka.

Pretpostavimo sad $m_2>0$ i nadomjestimo u 311 (941) $\underline{m_2}$ sa $\underline{m_2+1}$. Usporedba sa 90 (718), gdje zbog $x_2=0$ prvi član u zagradi otpada, daje

$$c^2K^{m_1,m_2+1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}K^{m_1,m_2+1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) =$$

$$= (2n_2-m_2)m_2K^{m_1,m_2-1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) - (2n_2-2m_2-1)\frac{\partial}{\partial t}K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,0)$$

$(m_2>0)$ (943) 313

Stavimo li u 311 (941) $m_2=1$, $x_2=0$ i usporedimo sa 90 (718), gdje stavimo $m_2=0$, tako da otpada drugi član u zagradi, dok prvi član ne otpada, to slijedi

$$c^2K^{m_1,1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}K^{m_1,1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) =$$

$$= 2n_2t^{m_1}\Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{t^2-x_1^2}\right) - (2n_2-1)\frac{\partial}{\partial t}K^{m_1,o}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) \quad . \qquad (944)\ 314$$

Jednadžbe (943) i (944) imaju oblik

$$c^2 f(t) + f''(t) = \varphi(t) \tag{945}$$
315

pri čemu je za slučaj (943)

$$f(x_1) = 0 \tag{946}$$
316

$$f'(x_1) = 0 \qquad \cancel{(947)}$$

a za slučaj (944)

$$f(x_1) = 0 \tag{948}$$
317

$$f'(x_1) = x_1^{m_1} \qquad \cancel{(949)}$$

kako proizlazi iz definicije (710) i iz jednadžbe (717), koja vrijedi i za $m_2 = 0$, pri čemu otpada drugi član na desnoj strani. Opće rješenje jednadžbe (945) možemo varijacijom konstanta dobiti u obliku

$$f(t) = \frac{e^{ict}}{2ic}\left\{C_1 + \int_0^t e^{-icy}\varphi(y)\,dy\right\} + \frac{e^{-ict}}{-2ic}\left\{C_2 + \int_0^t e^{icy}\varphi(y)\,dy\right\} . \tag{950}$$
318

Odredimo li konstante $\underline{C_1}$ i $\underline{C_2}$ pomoću (946),(947), dobijemo

$$f(t) = \frac{1}{2ic}\left\{e^{ict}\int_{x_1}^t e^{-icy}\varphi(y)\,dy - e^{-ict}\int_{x_1}^t e^{icy}\varphi(y)\,dy\right\} =$$

$$= \frac{1}{c}\int_{x_1}^t \varphi(y)\sin\left[c(t-y)\right]dy . \tag{951}$$
319

Odredimo li te konstante pomoću (948),(949), to slijedi

$$f(t) = \frac{1}{2ic}\left\{e^{ic(t-x_1)}x_1^{m_1} + e^{ict}\int_{x_1}^t e^{-icy}\varphi(y)\,dy - e^{-ic(t-x_1)}x_1^{m_1} -\right.$$

$$\left. - e^{-ict}\int_{x_1}^t e^{ict}\varphi(y)\,dy\right\} = \frac{1}{c}\left\{x_1^{m_1}\sin\left[c(t-x_1)\right] + \int_{x_1}^t \varphi(y)\sin\left[c(t-y)\right]dy\right\} \tag{952}$$
320

Uvrštenjem izraza za $\varphi(t)$ prema (943) glasi jednadžba (951):

$$K^{m_1,m_2+1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) = \frac{(2n_2-m_2)m_2}{c}\int_{x_1}^{t} K^{m_1,m_2-1}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\,\sin\left[c(t-y)\right]dy \; -$$

$$- \frac{2n_2-2m_2-1}{c}\int_{x_1}^{t}\frac{\partial}{\partial y}K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\,\sin\left[c(t-y)\right]dy \qquad (m_2>0) \tag{953}$$ 321

Parcijalna integracija daje

$$\int_{x_1}^{t}\frac{\partial}{\partial y}K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\,\sin\left[c(t-y)\right]dy = \left\{K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\,\sin\left[c(t-y)\right]\right\}_{y=x_1}^{y=t} +$$

$$+ c\int_{x_1}^{t}K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\,\cos\left[c(t-y)\right]dy = c\int_{x_1}^{t}K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\,\cos\left[c(t-y)\right]dy \tag{954}$$ 322

No budući daje

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{t}K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\,\sin\left[c(t-y)\right]dy = c\int_{x_1}^{t}K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\,\cos\left[c(t-y)\right]dy \tag{955}$$ 323

to slijedi

$$\int_{x_1}^{t}\frac{\partial}{\partial y}K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\,\sin\left[c(t-y)\right]dy = \frac{\partial}{\partial t}\int_{x_1}^{t}K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\,\sin\left[c(t-y)\right]dy \tag{956}$$ 324

Stavimo kao u (711)

$$F_1(t) = \begin{cases} t^{m_1}\Lambda_{n_1}\left(c\sqrt{t^2-x_1^2}\right) & \text{za } t > x_1 \\ 0 & \text{za } 0 \leq t \leq x_1 \end{cases} \tag{957}$$ 325

a kao specijalne slučajeve od (712) i (686) odnosno (687)

$$F_2(t) = t^{m_2}\Lambda_{n_2}(ct) \qquad (t \geq 0) \tag{958}$$ 326

$$F_3(t) = \Lambda_0(ct) \qquad (t \geq 0) \tag{959}$$ 327

to je prema (112) i (710)

$$K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) = F_1(t) * F_2(t) \qquad (t > x_1) \qquad (960)$$ 328

a prema (688),(693),(796)

$$\frac{1}{c}\sin(ct) = F_3(t) * F_3(t) \qquad (t \geqq 0) \quad . \qquad (961)$$ 329

Prema tome je očito za $t > x_1$

$$\frac{1}{c}\int_{x_1}^{t} K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\sin[c(t-y)]\,dy = F_1(t) * F_2(t) * F_3(t) * F_3(t) =$$

$$= K^{m_1,m_2,o,o}_{n_1,n_2no,o}(t;x_1,0,0,0) \qquad (962)$$ 330

a analitičkim produživanjem se uvidja, da je i za bilo koji kompleksni x_1, t

$$\frac{1}{c}\int_{x_1}^{t} K^{m_1,m_2}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\sin[c(t-y)]\,dy = K^{m_1,m_2,o,o}_{n_1,n_2,o,o}(t;x_1,0,0,0) \quad . \qquad (963)$$ 331

Jednadžba (953) može se dakle pisati u obliku

$$K^{m_1,m_2+1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) = m_2(2n_2-m_2)\,K^{m_1,m_2-1,o,o}_{n_1,n_2,\ o,o}(t;x_1,0,0,0) -$$

$$-(2n_2-2m_2-1)\frac{\partial}{\partial t}K^{m_1,m_2,o,o}_{n_1,n_2,o,o}(t;x_1,0,0,0) \qquad (m_2 > 0) \qquad (964)$$ 332

Uvrštenjem izraza za $\varphi(t)$ prema (944) u jednadžbu (952) slijedi

$$K^{m_1,1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) = \frac{1}{c}x_1^{m_1}\sin[c(t-x_1)] + \frac{2n_2}{c}\int_{x_1}^{t} y^{m_1}\Lambda_{n_1}(c\sqrt{y^2-x_1^2})\sin[c(t-y)]\,dy -$$

$$-\frac{2n_2-1}{c}\int_{x_1}^{t}\frac{\partial}{\partial y}K^{m_1,o}_{n_1,n_2}(y;x_1,0)\sin[c(t-y)]\,dy \quad . \qquad (965)$$ 333

Analognim zaključivanjem uvidja se, da se ta jednadžba može dovesti u oblik

$$K^{m_1,1}_{n_1,n_2}(t;x_1,0) = x_1^{m_1} K^{0,0}_{0,0}(t-x_1;0,0) + 2n_2\, K^{m_1,0,0}_{n_1,0,0}(t;x_1,0,0) -$$

$$- (2n_2-1) \frac{\partial}{\partial t} K^{m_1,0,\,0,0}_{n_1,n_2,0,0}(t;x_1,0,0,0)\,. \qquad (966)$$ 334

Za kompozicije s više od dva para indeksa dobije se mjesto (939) 309 sasvim analognim načinom

$$K^{m_1+2,m_2,\ldots,m_r}_{n_1+2,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) =$$

$$= \frac{4(n_1+1)(n_1+2)}{c^2}\Big[K^{m_1,\;m_2,\ldots,m_r}_{n_1+1,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) -$$

$$- K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r)\Big] \qquad (967)$$ 335

gdje je samo radi jednostavnosti prvi parametar stavljen jednak nuli umjesto drugog. Nadomjestimo li u (739) 111 $\underline{m_1}$ sa $\underline{m_1+1}$ i $\underline{n_1}$ sa $\underline{n_1+1}$, stavimo $x_1=0$ i uvrstimo zatim izraz (967) 335, to dobijemo:

$$\frac{\partial}{\partial t} K^{m_1+1,m_2,\ldots,m_r}_{n_1+1,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) = 2(n_1+1)\, K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) -$$

$$- (2n_1-m_1+1)\, K^{m_1,\;m_2,\ldots,m_r}_{n_1+1,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) \quad . \qquad (968)$$ 336

Neka je sad $m_1>0$. Diferenciramo li (739) 111, u kojem je stavljeno $x_1=0$, po $\underline{t}$ i uvrstimo (968) 336, to slijedi

$$K^{m_1,\;m_2,\ldots,m_r}_{n_1+1,n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) = \frac{2(n_1+1)}{2n_1-m_1+1}\Big\{K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) -$$

$$- \frac{m_1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t} K^{m_1-1,m_2,\ldots,m_r}_{n_1,\;n_2,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) +$$

$$+ \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r)\Big\} \quad (2n_1-m_1+1 \neq 0,\ m_1>0)$$

$$(969)$$ 337

Ako je $m_1=0$, to za $x_1=0$ u (739) ne otpada prvi član desne strane, ali otpada drugi član. U tom slučaju se dobije:

$$K^{o,\ m_2,\dots,m_r}_{n_1+1,n_2,\dots,n_r}(t;0,x_2,\dots,x_r) = \frac{2(n_1+1)}{2n_1+1}\Big\{K^{o,\ m_2,\dots,m_r}_{n_1,n_2,\dots,n_r}(t;0,x_2,\dots,x_r) -$$

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}K^{m_2,\dots,m_r}_{n_2,\dots,n_r}(t;x_2,\dots,x_r) + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}K^{o,\ m_2,\dots,m_r}_{n_1,n_2,\dots,n_r}(t;0,x_2,\dots,x_r)\Big\} . \tag{970}$$

338

Formule (969),(970) dopuštaju povisivanje dolnjeg indeksa za ove kompozicije pod analognim uvjetima kao formule (941),(942) za kompozicije s dva para indeksa.

Za povisivanje gornjeg indeksa postupamo sasvim analogno kao u slučaju kompozicija s dva para indeksa. Polazeći od formule (739) umjesto (717) odnosno (718), te od (969) umjesto (941), dobijemo analogno prema (943),(944):

$$(c^2+\frac{\partial^2}{\partial t^2})\,K^{m_1+1,m_2,\dots,m_r}_{n_1,\ \ n_2,\dots,n_r}(t;0,x_2,\dots,x_r) =$$

$$= (2n_1-m_1)m_1\,K^{m_1-1,m_2,\dots,m_r}_{n_1,\ \ n_2,\dots,n_r}(t;0,x_2,\dots,x_r) -$$

$$-(2n_1-2m_1-1)\frac{\partial}{\partial t}K^{m_1,\dots,m_r}_{n_1,\dots,n_r}(t;0,x_2,\dots,x_r) \qquad (m_1>0) \tag{971}$$

339

$$(c^2+\frac{\partial^2}{\partial t^2})\,K^{1,\ m_2,\dots,m_r}_{n_1,n_2,\dots,n_r}(t;0,x_2,\dots,x_r) = 2n_1\,K^{m_2,\dots,m_r}_{n_2,\dots,n_r}(t;x_2,\dots,x_r) -$$

$$-(2n_1-1)\,K^{o,\ m_2,\dots,m_r}_{n_1,n_2,\dots,n_r}(t;0,x_2,\dots,x_r) . \tag{972}$$

340

Jednadžba (945) vrijedi i ovdje. Mjesto (946),(947),(948),(949) dobijemo za $m_1>0$ i za $m_1=0$

$$f(x_2+\ldots+x_r) = 0 \tag{973}$$

$$f'(x_2+\ldots+x_r) = 0 \tag{974}$$

kako se razabire iz (735) i (739). Sasvim analogni zaključci kao kod kompozicija s dva para indeksa dovode konačno do jednačabe

$$K_{n_1,\ n_2,\ldots,n_r}^{m_1+1,m_2,\ldots,m_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) =$$

$$= m_1(2n_1-m_1)\ K_{n_1,\ n_2,\ldots,n_r,o,o}^{m_1-1,m_2,\ldots,m_r,o,o}(t;0,x_2,\ldots,x_r,0,0) -$$

$$- (2n_1-2m_1-1)\ \frac{\partial}{\partial t}\ K_{n_1,\ldots,n_r,o,o}^{m_1,\ldots,m_r,o,o}(t;0,x_2,\ldots,x_r,0,0) \qquad (m_1>0) \tag{976}$$

i

$$K_{n_1,n_2,\ldots,n_r}^{1,\ m_2,\ldots,m_r}(t;0,x_2,\ldots,x_r) = 2n_1\ K_{n_2,\ldots,n_r,o,o}^{m_2,\ldots,m_r,o,o}(t;x_2,\ldots,x_r,0,0) -$$

$$- (2n_1-1)\ K_{n_1,n_2,\ldots,n_r,o,o}^{o,\ m_2,\ldots,m_r,o,o}(t;0,x_2,\ldots,x_r,0,0)\ . \tag{977}$$

Formule (941),(942),(964),(966),(969),(970),(976),(977) omogućuju postepeno povisivanje indeksa, za koje je pripadni parametar stavljen jednak nuli. Formule su izvedene za slučaj, da je to prvi par indeksa, ali vrijede naravno analogno i ako je to bilo koji par indeksa.

Polazna točka kod tog povisivanja je formula (709), koja daje kompoziciju s bilo koliko indeksa, ako su ovi indeksi jednaki nuli. Povisivanje dolnjih indeksa svih potrebnih kompozicija vrši se onda na temelju formula (715),(73), ako je pripadni parametar različit od nule, a pomoću (941),(942),(969),(970), ako je jednak nuli,(pri čemu nema poteškoća, jer gornji indeks nije lih, nego jednak nuli).

Zatim se provodi povisivanje gornjih indeksa pomoću (721),(740), ako je pripadni parametar različit od nule, a pomoću (964),(966), (976),(977), ako je jednak nuli.

Razabire se, da je postupak za slučaj, da je koji parametar jednak nuli, dosta opsežan, pa će zato biti podesnija metoda graničnog prijelaza, koju ćemo raspraviti u slijedećoj točki.

10. Granični prijelaz u izravnim formulama za kompozicije, kad pojedini parametri $x_1, x_2, \ldots$ konvergiraju prema nuli.

Želimo li u općim formulama (770),(771) neke od parametara $x_1, \ldots, x_r$ staviti jednake nuli, nailazimo na poteškoće, jer operator $D_{x_k} = \frac{1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k}$ u tom slučaju gubi smisao. Očito lijeva strana u tim formulama prema definiciji (755) ne pruža nikakve poteškoće u tom pogledu, pa je vrijednost te lijeve strane, kad se stavi neke parametre jednake nuli, jednoznačno odredjena i jednaka limesu, koji dobivamo, ako ti parametri istodobno na bilo koji način, ili svaki za sebe u bilo kojem slijedu, konvergiraju prema nuli. Taj granični prijelaz dakle mora biti primjenljiv i na desnu stranu kao cjelinu, ali ne mora biti primjenljiv na svaki sumand desne strane. Tu ćemo se poslužiti stavkom I.7., koji je primjenljiv, jer svi sumandi desne strane imaju derivacije bilo kojeg reda i za $x_k=0$, ako ih prethodno pomnožimo dovoljno visokom potencijom dotičnog parametra x_k, koji treba konvergirati prema nuli.

Prema (324), a obzirom na formule (251) i (252) vidi se, da je rezultat postupka taj, da treba operatorsku potenciju $D^s_{x_k} = (\frac{1}{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k})^s$ nadomjestiti sa $\frac{2^s s!}{(2s)!} (\frac{\partial}{\partial x_k})^{2s}$, ako je izvršena na neku funkciju $f(x_k)$, a sa $\frac{2^s s!}{(2s+1)!} (\frac{\partial}{\partial x_k})^{2s+1}$, ako je izvršena na funkciju oblika $\frac{1}{x_k} \varphi(x_k)$, i poslije izvršenja tih diferencijacija na $f(x_k)$ odnosno $\varphi(x_k)$ staviti $x_k=0$. Slučaj, da je funkcija oblika $\frac{1}{x_k} \varphi(x_k)$, nastaje u (770) odnosno (771), kad je $m_{k_\varepsilon}=0$, jer je onda dotični ~~prvi~~ faktor u uglatoj zagradi $x^{-1}_{k_\varepsilon}$.

Time bi problem graničnog prijelaza u principu bio riješen, no mi ćemo još raspraviti neka pojednostavnjenja, koja se mogu provesti.

Zamislimo primjerice, da se u srednjem članu vitičaste zagrade na desnoj strani od 141 (771) treba neki stanoviti x_{k_ε} staviti jednak nuli. Označimo uglatu zagradu u tom srednjem članu sa $\frac{1}{x_{k_\varepsilon}}\varphi(t,x_{k_\varepsilon})$ i stavimo

$$\varphi(t,x_{k_\varepsilon}) = x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}}\psi(t,x_{k_\varepsilon}) \quad . \tag{978}$$ 344

Prema prije rečenom imat ćemo nadomjestiti

$$D_{x_{k_\varepsilon}}^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}\frac{1}{x_{k_\varepsilon}}\varphi(t,x_{k_\varepsilon}) \tag{979}$$ 345

sa

$$\frac{2^{n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1}(n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\varphi(t,x_{k_\varepsilon})\right\}_{x_{k_\varepsilon}=0} \quad . \tag{980}$$ 346

Prema 344 (978) je

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\varphi(t,x_{k_\varepsilon}) = \sum_{s=0}^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\binom{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}{s}\frac{m_{k_\varepsilon}!}{(m_{k_\varepsilon}-s)!}x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-s} \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1-s}\psi(t,x_{k_\varepsilon}) \tag{981}$$ 347

ako je

$$m_{k_\varepsilon} > 2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1 \tag{982}$$ 348

i

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\varphi(t,x_{k_\varepsilon}) =$$

$$=\sum_{s=0}^{m_{k_\varepsilon}}\binom{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}{s}\frac{m_{k_\varepsilon}!}{(m_{k_\varepsilon}-s)!}x_{k_\varepsilon}^{m_{k_\varepsilon}-s}\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\varepsilon}}\right)^{2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1-s}\psi(t,x_{k_\varepsilon}) \tag{983}$$ 349

ako je

$$m_{k_\varepsilon} \leq 2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1 \quad . \tag{984}$$ 350

Stavimo li sad $x_{k_\xi}=0$, to u slučaju (982) iščezne desna strana od (981), dok u slučaju (984) dobijemo

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\xi}}\right)^{2n_{k_\xi}-2w_\xi-1} \varphi t, x_{k_\xi})\right\}_{x_{k_\xi}=0} =$$

$$= \frac{(2n_{k_\xi}-2w_\xi-1)!}{(2n_{k_\xi}-2w_\xi-m_{k_\xi}-1)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\xi}}\right)^{2n_{k_\xi}-2w_\xi-m_{k_\xi}-1} \psi(t,x_{k_\xi})\right\}_{x_{k_\xi}=0}. \qquad (985)$$ 351

Prema tomu treba izraz (979) u slučaju (982) nadomjestiti ~~s~~ nulom, a u slučaju (984), obzirom na (980), sa

$$\frac{2^{n_{k_\xi}-w_\xi-1}(n_{k_\xi}-w_\xi-1)!}{(2n_{k_\xi}-2w_\xi-m_{k_\xi}-1)!}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_{k_\xi}}\right)^{2n_{k_\xi}-2w_\xi-m_{k_\xi}-1} \psi(t,x_{k_\xi})\right\}_{x_{k_\xi}=0} \qquad (986)$$ 352

Budući da $\psi(t,x_k)$ ovisi o varijablama $\underline{t}$ i $\underline{x_{k_\xi}}$ očito samo u obliku linearnog izraza $t-x_{k_1}-\dots-x_{k_\nu}$, gdje se x_{k_ξ} nalazi medju varijablama $x_{k_1},\dots,x_{k_\nu}$, to se može diferencijacija $\frac{\partial}{\partial x_{k_\xi}}$ nadomjestiti diferencijacijom $(-\frac{\partial}{\partial t})$, tako da mjesto (986) možemo pisati

$$\frac{2^{n_{k_\xi}-w_\xi-1}\cdot(-1)^{m_{k_\xi}+1}(n_{k_\xi}-w_\xi-1)!}{(2n_{k_\xi}-2w_\xi-m_{k_\xi}-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n_{k_\xi}-2w_\xi-m_{k_\xi}-1}\psi(t,0) \quad . \qquad (987)$$ 353

Konačni je dakle efekt, da se u slučaju (982) dotični član u (771) odbaci, dok se u slučaju (984) ispušta dotični $x_{k_\xi}^{m_{k_\xi}-1}$, a mjesto dotičnog operatora

$$D_{x_{k_\xi}}^{n_{k_\xi}-w_\xi-1} \qquad \cancel{(988)}$$ 354

se piše

$$\frac{2^{n_{k_\xi}-w_\xi-1}\cdot(-1)^{m_{k_\xi}+1}(n_{k_\xi}-w_\xi-1)!}{(2n_{k_\xi}-2w_\xi-m_{k_\xi}-1)!}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{2n_{k_\xi}-2w_\xi-m_{k_\xi}-1} \qquad (989)$$ 355

te se konačno stavi $x_{k_\xi}=0$, što se može učiniti i prije diferencijacije po $\underline{t}$. Razumije se, da se diferencijacija po $\underline{t}$, sadržana u (~~989~~ 355), može sažeti s diferencijacijom

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\sum\limits_{\varphi=1}^{r}(m_{s_\varphi}-2v_\varphi)}$$, koja se nalazi u (~~771~~ 141).

Uzmimo sad, da treba jedan stanoviti broj parametara x_{s_ξ} $(\xi=1,2,\ldots,H\ ;\quad 1\leq H\leq r-\gamma)$ u (~~771~~ 141) staviti jednako nuli. Pretpostavimo, da uz odabrane v_ξ vrijedi

$$m_{s_\xi}-n_{s_\xi}-v_\xi \geq 0 \qquad (\xi=1,2,\ldots,h) \tag{990}$$ 356

i

$$m_{s_\xi}-n_{s_\xi}-v_\xi < 0 \qquad (\xi=h+1,\ldots,H) \tag{991}$$ 357

gdje je

$$1 \leq h \leq H\ , \tag{992}$$ 358

pa se pitajmo, čime treba nadomjestiti operaciju

$$\prod_{\xi=1}^{H}(-1)^{m_{s_\xi}}\, m_{s_\xi}!\, S_{x_{s_\xi}}^{m_{s_\xi}-n_{s_\xi}-v_\xi} \tag{993}$$ 359

ako se hoće parametri x_{s_ξ} $(\xi=1,\ldots,H)$ staviti jednako nuli. Primijenimo li jednadžbu (~~322a~~ Π(205) 322a), dobijemo

$$\left\{\left(\prod_{\xi=1}^{h}(-1)^{m_{s_\xi}}\, m_{s_\xi}!\, S_{x_{s_\xi}}^{m_{s_\xi}-n_{s_\xi}-v_\xi}\right)\int\limits_{x_{s_1}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}}}^{t-(x_{k_1}+\ldots+x_{k_\gamma})}(y-x_{s_1}-\ldots-x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2}\Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\ldots-x_{k_\gamma})^2-y^2}\right)dy\right\}_{x_{s_1}=\ldots=x_{s_h}=0} =$$

$$= \frac{(r-\gamma-2)!}{\left[r-\gamma-2+2\sum\limits_{\varphi=1}^{h}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)\right]!}\left(\prod_{\xi=1}^{h}\frac{(-1)^{n_{s_\xi}+v_\xi}\,2^{m_{s_\xi}-n_{s_\xi}-v_\xi}\, m_{s_\xi}!\,\Gamma(m_{s_\xi}-n_{s_\xi}-v_\xi+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}}\right).$$

$$\cdot \int_{X_h}^{t-(x_{k_1}+\dots+x_{k_\gamma})} (y-X_h)^{r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{h}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)} \Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_\gamma})^2-y^2}\right)dy\,, \qquad (994)$$ 360

gdje je

$$X_h = x_{s_{h+1}} + \dots + x_{s_{r-\gamma}}\ . \qquad (995)$$ 361

Na ovaj izraz treba još izvršiti operaciju

$$\prod_{\delta=h+1}^{H} (-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}!\, S_{\lambda_{s_\delta}}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta} \qquad (996)$$ 362

koju zbog (991) 357 i (769) 139 treba prema prije rečenom nadomjestiti operacijom

$$\prod_{\delta=h+1}^{H} \frac{(-1)^{m_{s_\delta}} m_{s_\delta}!\; 2^{-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta}\,(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta)!}{(-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta)!} \left(\frac{\partial}{\partial x_{s_\delta}}\right)^{-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta} \qquad (997)$$ 363

i poslije izvršenja te operacije staviti

$$x_{s_{h+1}} = \dots = x_{s_H} = 0\ . \qquad (998)$$ 364

Stavimo li kratkoće radi

$$w = -m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta \qquad (999)$$ 365

to s obzirom na (205) III(85) vrijedi

$$\frac{(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta)!}{(-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta)!} = \frac{w!}{(2w)!} = \frac{(w-1)!}{2\,(2w-1)!} = \frac{\Gamma(w)}{2\,\Gamma(2w)} = \frac{(-1)^w\,\Gamma(-w+\frac{1}{2})}{2^{2w}\sqrt{\pi}} =$$

$$= \frac{(-1)^{-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta}\,\Gamma(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta+\frac{1}{2})}{2^{-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta}\sqrt{\pi}}\,, \qquad (1000)$$ 366

363

tako da (997) dobiva oblik

$$\prod_{\delta=h+1}^{H} \frac{(-1)^{n_{s_\delta}+v_\delta}\, m_{s_\delta}!\, 2^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}\, \Gamma(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\partial}{\partial x_{s_\delta}}\right)^{-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta} \qquad (1001)$$ 367

Pretpostavivši

$$q \geqq \sum_{r=1}^{s} 2n_r \qquad (1002)$$ 368

gdje su $\underline{n_r}$ pozitivni cijeli brojevi, vrijedi očito

$$\left\{\left(\prod_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^{2n_r}\right)\int_X^t (z-X)^q \varphi(t,z)\,dz\right\}_{x_1=\ldots=x_s=0} =$$

$$= \frac{q!}{(q-2n_1-\ldots-2n_s)!}\int_{X_o}^{t} (z-X_o)^{q-2n_1-\ldots-2n_s}\,\varphi(t,z)\,dz \qquad (1003)$$ 369

dok za

$$q < \sum_{r=1}^{s} 2n_r \qquad (1004)$$ 370

dobijemo lako

$$\left\{\left(\prod_{r=1}^{s}\left(\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^{2n_r}\right)\int_X^t (z-X)^q\, \varphi(t,z)\,dz\right\}_{x_1=\ldots=x_s=0} =$$

$$= (-1)^{q+1}\, q!\, \left\{\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-(q-\sum_{r=1}^{s} 2n_r)-1} \varphi(t,X)\right\}_{X=X_o} . \qquad (1005)$$ 371

Ako je $X_o \neq 0$, može se naravno već unutar vitičaste zagrade staviti $X=X_o$.

Primijenimo li formule (1003) odnosno (1005) na operaciju (1001), koju treba izvršiti na izraz (994), to slijedi konačno, da iščezavanje parametara $x_{s_1},\dots,x_{s_H}$ znači, da u (771) treba izraz

$$\prod_{\gamma=1}^{H} (-1)^{m_{s_\gamma}} m_{s_\gamma}!\, S_{x_{s_\gamma}}^{m_{s_\gamma}-n_{s_\gamma}-v_\gamma} \int\limits_{x_{s_1}+\dots+x_{s_{r-\gamma}}}^{t-(x_{k_1}+\dots+x_{k_\gamma})} (y-x_{s_1}-\dots-x_{s_{r-\gamma}})^{r-\gamma-2} \Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_\gamma})^2-y^2}\right)dy \qquad (1006)\ 372$$

za slučaj

$$r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{H}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi) \geq 0 \qquad (1007)\ 373$$

nadomjestiti izrazom

$$\frac{(r-\gamma-2)!}{\left[r-\gamma-2+2\sum\limits_{\varphi=1}^{H}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)\right]!} \prod_{\gamma=1}^{H} \frac{(-1)^{n_{s_\gamma}+v_{s_\gamma}}\, 2^{m_{s_\gamma}-n_{s_\gamma}-v_\gamma}\, m_{s_\gamma}!\, \Gamma(m_{s_\gamma}-n_{s_\gamma}-v_\gamma+\frac{1}{2})}{\sqrt{\pi}} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{X_H}^{t-(x_{k_1}+\dots+x_{k_\gamma})} (y-X_H)^{r-\gamma-2+2\sum\limits_{\varphi=1}^{H}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)} \Lambda_0\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_\gamma})^2-y^2}\right)dy, \qquad (1008)\ 374$$

gdje je

$$X_H = x_{s_{H+1}} + \dots + x_{s_{r-\gamma}} , \qquad (1009)\ 375$$

a za slučaj

$$r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{H}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi) < 0 \qquad (1010)\ 376$$

izrazom

$$(-1)^{r-\gamma-1}\,(r-\gamma-2)!\prod_{\delta=1}^{H}\frac{(-1)^{n_{s_\delta}+v_\delta}\,m_{s_\delta}!\;2^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}\,\Gamma\left(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}\;\cdot$$

$$\cdot\left\{\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)^{-\left[r-\gamma-1+2\sum\limits_{\varphi=1}^{H}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)\right]}\Lambda_o\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_\gamma})^2-X^2}\right)\right\}_{X=X_H}. \qquad (1011)$$ 377

Pojednostavnjenja, koja smo raspravili, mogu se naravno analogno primijeniti na prvi izraz u vitičastoj zagradi u 141 (771).

U zadnjem izrazu u toj zagradi može se operator $D_{x_{s_1}}^{n_{s_1}}$ direktno izvršiti na Besselovu funkciju $\Lambda_o\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}\right)$ što obzirom na 104 (732) daje

$$D_{x_{s_1}}^{n_{s_1}}\Lambda_o\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}\right)=$$

$$=\frac{c^{2n_{s_1}}}{2^{n_{s_1}}\,n_{s_1}!}\Lambda_{n_{s_1}}\left(c\sqrt{(t-x_{k_1}-\dots-x_{k_{r-1}})^2-x_{s_1}^2}\right) \qquad (1012)$$ 378

pa se naknadno može staviti $x_{s_1}=0$, tako da se tu dobije rezultat i bez provedbe primjene stavka II.7, koja bi naravno dala isto, jer je

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{1}{m!}\left\{\frac{d^m}{dx^m}\left[(x-a)^m f(x)\right]\right\}_{x=a} \qquad (1013)$$ 379

ako i limes na lijevoj strani postoji. U tom slučaju ga dakle ne treba nadomjestiti limesom desne strane, kaošto to činimo u smislu jenadžbe II(217) (324). Prijetvorbu 378 (1012) smo uostalom već upotrijebili u formuli (733) 105 za kompozicije dviju Besselovih funkcija.

Što smo proveli za jednadžbu (771) 141, može se naravno analogno provesti i za jednadžbu (770) 140, osim prijetvorbe (1012) 378, koja ne dolazi u obzir, jer dotičnih članova nema.

Kad su neki parametri stavljeni jednako nuli, jasno je, da će se brojevi a_k, b_k, definirani prema (779) 149,(780) 150, tvoriti samo od onih parametara, koji nisu stavljeni jednako nuli, i da će broj članova u kanoničkom obliku biti prema tomu manji. Ako su napose svi parametri stavljeni jednako nuli, bit će samo jedan par brojeva a_k, b_k, naime $a=b=0$.

11. Kriterij za pojavljivanje integrala u kanoničkom obliku integralnih teorema.

Prema (783) mogu se kompozicije, koje razmatramo, izraziti pomoću četiri vrsti transcendentnih funkcija:

$$\Lambda_o(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) \tag{1014}$$ 380

$$\Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2-b_k^2}) \tag{1015}$$ 381

$$\int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_o(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2})dy \tag{1016}$$ 382

$$\int_{b_k}^{t-a_k} \Lambda_1(c\sqrt{(t-a_k)^2-y^2})dy \quad . \tag{1017}$$ 383

Od tih su funkcija prve dvije vrsti dobro poznate Besselove funkcije, za koje postoje i tablice, dok su zadnje dvije vrsti manje poznate transcendentne funkcije, za koje smo u ~~III~~ IV.8. dokazali, da se ne mogu linearno izraziti pomoću prvih dviju, a ni medjusobno. Da su te nove funkcije (1016),(1017) transcendentne, ~~slijedi~~ već iz toga, što prema (796),(797) za specijalnu vrijednost parametra b_k degeneriraju u trigonometrijske funkcije, za koje znamo, da su transcendentne.

Bit će zanimljivo istražiti, pod kojim se uvjetima u kanonskom obliku uopće ne pojavljuju funkcije (1016),(1017), koje ćemo kratko zvati "integralima", t.j. kada će racionalne funkcije, koje u (783) fungiraju kao koeficijenti tih integrala, biti identično jednake nuli s obzirom na varijablu t za bilo koje vrijednosti parametara $x_1,\dots,x_r$. Pri tom ćemo uzeti u obzir i slučaj, da neki od tih parametara imaju fiksiranu vrijednost nula.

Kao odgovor na to pitanje postavljamo

STAVAK IV.11.

Da u kanoničkom obliku kompozicije $K^{m_1,\ldots,m_r}_{n_1,\ldots,n_r}(t;x_1,\ldots,x_r)$ $(r \geq 2)$ koeficijenti integrala budu identično jednaki nuli obzirom na varijablu t za bilo koje vrijednosti onih od parametara $x_1,\ldots,x_r$, koji nisu stavljeni jednaki nuli, potrebno je i dovoljno, da bude ispunjen jedan od ovih uvjeta:

A/ Za sve $k=1,\ldots,r$ vrijedi

$$m_k < n_k \quad , \qquad (1018)$$ 384

a nijedan od parametara ne mora biti stavljen jednako nuli.

B/ Medju $\underline{r}$ vrijednosti $k=1,\ldots,r$ ima jedna vrijednost $\underline{k_1}$, za koju je

$$m_{k_1} - n_{k_1} \geq 0 \quad , \qquad (1019)$$ 385

a za sve ostale $k \neq k_1$ vrijedi

$$m_k - n_k \leq -(m_{k_1} - n_{k_1} + 1) \quad . \qquad (1020)$$ 386

Nijedan od parametara ne mora biti stavljen jednako nuli.

C/ Medju vrijednostima $k=1,\ldots,r$ ima lih broj $q > 1$ vrijednosti $k_1,k_2,\ldots,k_q$, za koje je

$$m_{k_j} \geq 2n_{k_j} \quad (j=1,\ldots,q) \quad , \qquad (1021)$$ 387

a pripadni parametri su stavljeni jednaki nuli:

$$x_{k_j} = 0 \quad (j=1,\ldots,q) \quad . \qquad (1022)$$ 388

Za sve ostale vrijednosti $k_{q+1},\ldots,k_r$, ukoliko ih ima, (t.j. ako nije $q=r$), vrijedi

$$m_{k_j} - n_{k_j} \leq -\left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\alpha=1}^{q}(m_{k_\alpha}-n_{k_\alpha})\right] \quad (j=q+1,\ldots,r) \ , \qquad (1023)$$ 389

a pripadni parametri $x_{k_{q+1}},\ldots,x_{k_r}$ ne moraju biti stavljeni jednaki nuli.

Obzirom na komutativni zakon za komponiranje možemo uvijek postići, da bude $k_1=1$, t.j. da (1019) glasi

$$m_1 - n_1 \geq 0 \qquad (1024)$$ 391

a (1020) postane

$$m_k - n_k \leq -(m_1-n_1+1) \quad (k=2,\ldots,r) \quad . \qquad (1025)$$ 392

Dalje možemo postići, da vrijednosti $k_1,\ldots,k_q$ budu prve u nizu $1,2,\ldots,r$, tako da (1021) glasi

$$m_k \geq 2n_k \qquad (k=1,\ldots,q) \ , \qquad (1026)$$ 393

a mjesto (1022) vrijedi

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0 \ . \qquad (1027)$$ 394

Konačno je (1023) nadomješten sa

$$m_k - n_k \leq -\left[\frac{q+1}{2} + \sum_{\alpha=1}^{q}(m_\alpha-n_\alpha)\right] \qquad (k=q+1,\ldots,r). \qquad (1028)$$ 395

Time smo postigli pojednostavnjenje u pisanju.

Prije nego što pristupimo dokazu stavka, primjećujemo: Ako je za neku kompoziciju dokazano, da koeficijenti integrala identično iščezavaju, onda taj zaključak ostaje na snazi, ako bilo koje od parametara, (koji nisu već stavljeni jednako nuli), stavimo jednako nuli. Ako naime u kanoničkom obliku nema integrala (1016),(1017), i ako neki od koeficijenata funkcija (1014),(1015) odnosno član R_4 u (783) postaju neizmjerni, kad dotični parametri teže prema nuli, to moramo provesti granični prijelaz prema stavku II.7. Takav postupak involvira procese diferencijacije, koji, izvršeni na funkcije (1014), (1015), prema (346) i (772) daju opet funkcije tih vrsti, tako da u kanoničkom obliku opet nema integrala (1016),(1017). Dokazujemo li dakle, daje koji od uvjeta A/,B/,C/ dovoljan, to možemo pretpostaviti, da su samo oni parametri jednaki nuli, koji prema uvjetu to moraju biti, pa će dokaz vrijediti i za slučaj, da su još dalji parametri stavljeni jednako nuli. Ako dokazujemo, da su ti uvjeti potrebni, moći ćemo za slučajeve, koji tim uvjetima nisu obuhvaćeni, pretpostaviti, da je što više parametara jednako nuli, i dokazati, da se u kanoničkom obliku pojavljuju integrali. Taj će dokaz vrijediti i onda, ako ti parametri nisu stavljeni jednako nuli, jer bi inače integrali morali nastati stavljanjem tih parametara jednako nuli, što smo vidjeli, da ne može biti.

Kratko rečeno, stavljanjem parametara jednako nuli mogu integrali iz kanoničkog oblika nestati, ali integrali ne mogu nastati, ako ih nije već bilo.

Dokazujemo najprije, da su uvjeti stavka dovoljni.

Pri tom trebamo neke zaključke, koji se daju izvesti iz stavka II.2. Zamislimo, da je u smislu III.7. odredjen kanonički oblik integrala

$$\int_X^t (y-X)^m \Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \quad . \tag{1029}$$ 396

Pitamo se, pod kojim se uvjetima izvršenjem operacija D_{x_k} $(k=1,\dots,n)$ na taj integral mogu ukloniti integrali u njegovu kanonskom obliku. Razvijemo li potenciju $(y-X)^m$ po binomnom stavku i rastavimo integral (1029) 396 na toliko sumanda, koliko taj razvoj ima članova, to je prema III 269 (470) i III 333 (534) jasno, da članovi s lihim potencijama od y ne pridonose integrala za kanonski oblik, pa naravno niti onda, ako na njih još izvršimo neke operacije D_{x_k}. Članovi s takim potencijama od y daju prema III 341 (542) izraz, koji, ako ispustimo članove bez integrala, ima oblik

$$(-1)^m \left\{X^m - \binom{m}{2}f_2(t)X^{m-2} + \binom{m}{4}f_4(t)X^{m-4} - \dots\right\}\int_X^t \Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \;+$$

$$+\;(-1)^m \left\{X^m - \binom{m}{2}g_2(t)X^{m-2} + \binom{m}{4}g_4(t)X^{m-4} - \dots\right\}\int_X^t \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \tag{1030}$$ 397

gdje funkcije $f(t)$ i $g(t)$ znače sume, koje u III 341 (542) fungiraju kao koeficijenti integrala, a indeksi tih funkcija znače eksponent od x u integralu na lijevoj strani od III 341 (542).

Izvršimo li na izraz (1030) 397 operacije D_{x_k}, to se vidi, da diferencijacije po dolnjoj granici integrala daju članove bez integrala, tako da se možemo ograničiti na pitanje, pod kojim se uvjetima izvršenjem operacija D_{x_k} može poništiti izraz oblika

$$X^m - \binom{m}{2}f_2(t)X^{m-2} + \binom{m}{4}f_4(t)X^{m-4} - \dots \tag{1031}$$ 398

Jasno je, da se mora poništiti koeficijenat svake potencije od $\underline{t}$ u tom izrazu, a takav koeficijenat ima oblik polinoma

$$aX^m + bX^{m-2} + \dots \tag{1032}$$ 399

gdje neki od koeficijenata $a, b, \dots$ mogu biti jednaki nuli. Potencija X^s je prema (225) homogena funkcija s-tog stepena varijabla $x_1, \dots, x_n$, pa izvršenje nekih operacija D_{x_k} na sumu (1032) snižava stepen svakog člana, koji pri tom ne iščezne, za isti broj jedinica, tako da su članovi, koji nisu iščeznuli, i poslije izvršenja tih operacija raznog stepena, i njihova suma ne može biti jednaka nuli za bilo koje vrijednosti parametara $x_1, \dots, x_r$. Moraju dakle svi članovi sume (1032) iščeznuti svaki za sebe, da cijela suma iščezne. Budući da svaka potencija od $\underline{X}$, koja dolazi u (1031), mora biti sadržana u nekom koeficijentu (1032) neke potencije od $\underline{t}$ (uključivo nulte potencije), to će dakle (1031) primjenom operacija D_{x_k} iščeznuti identično obzirom na $\underline{t}$ za bilo koje vrijednosti parametara $x_1, \dots, x_n$ onda i samo onda, ako primjenom tih istih operacija iščeznu sve potencije $X^m, X^{m-2}, \dots$, koje se nalaze u (1031).

Za iščezavanje potencije X^m vrijede kriteriji stavka I.2. Ako je za najvišu potenciju X^m ispunjen kriterij A/ toga stavka, t.j. ako je

$$m < n \tag{1033}$$ 400

to je taj uvjet pogotovo ispunjen i za sve niže potencije od $\underline{X}$ u (1031). Ako je za najvišu potenciju X^m ispunjen kriterij B/ rečenog stavka, t.j. ako je $\underline{m-n}$ lih broj, a $\underline{m \geq n}$, onda je i za sve niže potencije X^{m-2k} u (1031) $\underline{m-2k-n}$ lih broj, pa te potencije, bez obzira na to, da li je za njih $\underline{m-2k \geq n}$, iščeznu $\frac{m-n+3}{2}$-kratnom primjenom svih operacija D_{x_k}. Te su operacije za poništenje najviše potencije X^m ~~potrebne~~ nužne i dovoljne, a za poništenje nižih potencija očito pogotovo dovoljne.

Prema tome možemo ustanoviti, da su kriteriji za poništenje integrala u kanoničkom (š) obliku od (1029) 396 primjenom operacija D_{x_k} isti, kao kriteriji prema stavku II.2., koji su ~~potrebni~~ nužni i dovoljni za poništenje potencije X^m.

Prijedjimo sad na pitanje, da li je uvjet A/ stavka ~~III~~ IV.11. dovoljan. Promotrimo u tu svrhu prvi član vitičaste zagrade u (770) 140 odnosno (771) 141. Budući da je zbog (1018) 384

$$m_\nu - n_\nu - q_\nu \le -1 \qquad (1034) \quad 401$$

to možemo prema (769) 139 pisati

$$S_{x_\nu}^{m_\nu - n_\nu - q_\nu} = D_{x_\nu}^{-m_\nu + n_\nu + q_\nu} . \qquad (1035) \quad 402$$

Budući da je

$$r-2 < r \qquad (1036) \quad 403$$

što odgovara uvjetu $m < n$ kriterija A/ u stavku II.2., a primijenjeno je $\underline{r}$ raznih operacija (1035) 402, dok prema rečenom kriteriju treba primijeniti barem $\underline{m+1}$, t.j. u našem slučaju $r-2+1 = r-1$ takvih operacija, to taj član ne daje integrala za kanonički (š) oblik.

U drugom članu u vitičastoj zagradi od (770) 140 odnosno (771) 141 možemo analogno zbog (1018) 384 staviti

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta \le -1 \qquad (1037) \quad 404$$

i prema (769) 139

$$S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta} - n_{s_\delta} - v_\delta} = D_{x_{s_\delta}}^{-m_{s_\delta} + n_{s_\delta} + v_\delta} . \qquad (1038) \quad 405$$

Ovdje je broj varijabla $x_{s_1}, \dots, x_{s_{r-\gamma}}$ jednak $r-\gamma$, pa je

$$r-\gamma-2 < r-\gamma \qquad (1039) \quad 406$$

analogon relacije $m < n$. Izvršeno je $r-\gamma$ operacija (1038) 405, što je više nego $m+1 = r-\gamma-2+1 = r-\gamma-1$. I ovaj član dakle ne daje integrala za kanoni$\check{\text{s}}$ki oblik, a treći član u vitičastoj zagradi (771) 141 uopće ne sadrži integrala. Time je dokazano, da je uvjet A/ stavka ~~III~~ IV.11. dovoljan pod pretpostavkom, da nijedan od parametara $x_1,\ldots,x_r$ nije stavljen jednako nuli, što se pretpostavlja u (770) 140, (771) 141. Pogotovo je onda taj uvjet dovoljan i onda, ako se neki ili svi ti parametri stave jednako nuli, kako smo već prije raspravili.

Pretpostavimo dalje, da vrijedi uvjet B/ stavka ~~III~~ IV.11., t.j. da vrijede (1024) 391 i (1025) 392.

Za članove drugog izraza u vitičastoj zagradi od (770) 140 odnosno (771) 141, za koje je m_1 sadržan u brojevima $m_{k_1},\ldots,m_{k_\gamma}$, t.j. kad je $\underline{1}$ sadržan medju $k_1,\ldots,k_\gamma$, vrijedi isto razmatranje kao gore, t.j. ti članovi ne daju integrala. Ako je naprotiv u drugom izrazu vitičaste zagrade $\underline{1}$ sadržan medju brojevima $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$, t.j. m_1 medju brojevima $m_{s_1},\ldots,m_{s_{r-\gamma}}$, moramo provesti novo razmatranje, koje će biti primjenljivo i na prvi izraz u vitičastoj zagradi.

Zamislimo, da je u drugom izrazu u vitičastoj zagradi na integral ponajprije izvršena samo operacija $S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1}$, gdje smo pretpostavili, da je $s_1=1$. Smijemo dalje pretpostaviti, da je

$$m_1-n_1-v_1 \geq 0 \,, \tag{1040}$$ 407

jer inače operator $S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1}$ u smislu (769) 139 znači ~~diferencijaciju~~ deriviranje i stoga taj slučaj potpada pod argumentaciju, koju smo dali za slučaj uvjeta A/ stavka ~~III~~ IV.11.

Uvedimo kratice

$$X_1 = x_{k_1}+\ldots+x_{k_\gamma} \tag{1041}$$ 408

$$X_2 = x_{s_1}+x_{s_2}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}} = x_1+x_{s_2}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}} \quad . \tag{1042}$$ 409

Prema definicijama ~~na str. 149.~~ koje su dane prije formule (131), ~~onda~~ vrijedi onda

$$X_1 + X_2 = X = x_1+\ldots+x_r \quad . \tag{1043}$$ 410

Supstitucijom

$$z = y-X_2+x_1 \tag{1044}$$ 411

možemo integral drugog izraza u vitičastoj zagradi od 140 (770) odnosno 141 (771) dovesti u nešto drugi oblik:

$$\int_{X_2}^{t-X_1} (y-X_2)^{r-\gamma-2} \Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2})dy =$$

$$= (-1)^{r-\gamma-1} \int_{t-X+x_1}^{x_1} (x_1-z)^{r-\gamma-2} \Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-(z+X_2-x_1)^2})dz \quad . \tag{1045}$$ 412

Stavimo sad u II (168) (287)

$$n = r \tag{1046}$$ 413

$$q = r-\gamma-2 \tag{1047}$$ 414

$$k = 1 \tag{1048}$$ 415

$$\varphi(t;z,x_2,\ldots,x_r) = (-1)^{r-\gamma-1}(r-\gamma-2)!\,\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-(z+X_2-x_1)^2}) \tag{1049}$$ 416

označivši varijablu $\underline{y}$ sa $\underline{z}$. Prema II (170) (289) i II (175) (293), gdje osim 413 (1046) do 416 (1049) još stavimo

$$m = m_1-n_1-v_1 \tag{1050}$$ 417

dobivamo onda s obzirom na 412 (1045)

$$S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1}\int\limits_{X_2}^{t-X_1}(y-X_2)^{r-\gamma-2}\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2})dy =$$

$$= \frac{(-1)^{r-\gamma-1}(r-\gamma-2)!}{(m_1-n_1-v_1)!\,2^{m_1-n_1-v_1}}\int\limits_{t-X+x_1}^{x_1}\left[\Big(\int\limits_{x_1}^{z}dz\Big)^{r-\gamma-2}(x_1^2-z^2)^{m_1-n_1-v_1}\right]\cdot$$

$$\cdot\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-(z+X_2-x_1)^2})dz \qquad (1051)$$ 418

što u slučaju

$$\gamma = r-2 \qquad (1052)$$ 419

(to je najveća moguća vrijednost od γ u dotičnom izrazu od
140 141
(770) i (771)), daje

$$S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1}\int\limits_{X_2}^{t-X_1}\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2})dy =$$

$$= -\frac{1}{(m_1-n_1-v_1)!\,2^{m_1-n_1-v_1}}\int\limits_{t-X+x_1}^{x_1}(x_1^2-z^2)^{m_1-n_1-v_1}\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-(z+X_2-x_1)^2})dz \qquad (1053)$$ 420

dok u slučaju

$$\gamma < r-2 \qquad (1054)$$ 421

II(176)
možemo prijeći na oblik (294), t.j.

$$S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1}\int\limits_{X_2}^{t-X_1}(y-X_2)^{r-\gamma-2}\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2})dy =$$

$$= \frac{(-1)^{r-\gamma-1}\,(r-\gamma-2)}{(m_1-n_1-v_1)!\,2^{m_1-n_1-v_1}}\int\limits_{t-X+x_1}^{x_1}\left[\int\limits_{x_1}^{z}(z-u)^{r-\gamma-3}(x_1^2-u^2)^{m_1-n_1-v_1}du\right]\cdot$$

$$\cdot\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-(z+X_2-x_1)^2})dz \qquad (1055)$$ 422

420 422

Ako na desnoj strani od (1053) i (1055) opet uvedemo $\underline{y}$ prema

411

(1044), to te formule glase:

$$S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1}\int_{X_2}^{t-X_1}\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2})\,dy =$$

$$= \frac{1}{(m_1-n_1-v_1)!\;2^{m_1-n_1-v_1}}\int_{X_2}^{t-X_1}\left[x_1^2-(y-X_2+x_1)^2\right]^{m_1-n_1-v_1}\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2})\,dy \tag{1056}$$ 423

$$S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1}\int_{X_2}^{t-X_1}(y-X_2)^{r-\gamma-2}\,\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2})\,dy =$$

$$= \frac{(-1)^{r-\gamma-2}\,(r-\gamma-2)}{(m_1-n_1-v_1)!\;2^{m_1-n_1-v_1}}\int_{X_2}^{t-X_1}\left[\int_{x_1}^{y-X_2+x_1}(y-X_2+x_1-u)^{r-\gamma-3}(x_1^2-u^2)^{m_1-n_1-v_1}du\right]\cdot$$

$$\cdot\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2})\,dy\quad . \tag{1057}$$ 424

Stavimo

$$X_2-x_1 = \overline{X}_2 = x_{s_2}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}}\quad . \tag{1058}$$ 425

419

Pretpostavimo li ponajprije (1052), to je

$$\overline{X}_2 = x_{s_2} \tag{1059}$$ 426

423

pa možemo integral u (1056) pisati u obliku

$$\int_{x_1+x_{s_2}}^{t-X_1}\left[x_1^2-(y-x_{s_2})^2\right]^{m_1-n_1-v_1}\Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2})\,dy\quad . \tag{1060}$$ 427

140 141

Prema (770) odnosno (771) treba na taj integral još izvršiti operaciju

$$S_{x_{s_2}}^{m_{s_2}-n_{s_2}-v_2} = D_{x_{s_2}}^{-m_{s_2}+n_{s_2}+v_2} \tag{1061}$$ 428

gdje je obzirom na (1025) sigurno

$$-m_{s_2}+n_{s_2}+v_2 \geqq m_1-n_1+1 > m_1-n_1-v_1 . \qquad (1062)$$ 429

Razvijemo li potenciju u integralu (1060) po binomnom stavku, dobijemo integrale oblika (1029), (gdje je sad $X=x_{s_2}$). Kako smo vidjeli, možemo na te integrale primijeniti kriterije stavka II.2. Najviši eksponent će biti

$$m = 2(m_1-n_1-v_1) \qquad (1063)$$ 430

a i svi ostali eksponenti su <u>taki</u>. Broj varijabla je jednak jedan, dakle

$$n = 1 . \qquad (1064)$$ 431

U slučaju

$$m = 0 \qquad (1065)$$ 432

dat će diferencijacija (1061) izraz, koji ne sadrži integrala.
Ako je

$$m_1-n_1-v_1 > 0 \qquad (1066)$$ 433

može prema (1063) i (1064) biti $m > n$, a <u>$m-n$</u> je lih broj, dakle treba prema stavku II.2.B/ izvršiti jedinu operaciju $D_{x_{s_2}}$, i to $\frac{m-n+3}{2} = \frac{2(m_1-n_1-v_1)-1+3}{2} = m_1-n_1-v_1+1$ puta. Prema (1061) ona je izvršena $-m_{s_2}+n_{s_2}+v_2$ puta, što je zbog (1062) barem toliko kao $m_1-n_1-v_1+1$. U kanoničkom obliku dakle nema integrala.

Za slučaj (1054) služimo se oblikom (1057). S oznakom (1058) integral na desnoj strani od (1057) dobiva oblik

$$\int_{x_1+\overline{X}_2}^{t-X_1}\left[\int_{x_1}^{y-\overline{X}_2}(y-\overline{X}_2-u)^{r-\gamma-3}(x_1^2-u^2)^{m_1-n_1-v_1}du\right]\Lambda_o\left(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2}\right)dy . \qquad (1067)$$ 434

Nutarnji integral možemo razviti po potencijama od $y-\overline{X}_2$ pomoću formule (300), čime dobijemo same integrale oblika (1029):

$$\int_{x_1}^{y-\bar{X}_2} (y-\bar{X}_2-u)^{r-\gamma-3}(x_1^2-u^2)^{m_1-n_1-v_1}du =$$

$$= \sum_{s=0}^{r-\gamma-3} \frac{(-1)^{r-\gamma-2-s}(m_1-n_1-v_1)!\binom{r-\gamma-3}{s}\Gamma\left(\frac{r-\gamma-2-s}{2}\right)}{2\cdot\Gamma\left(\frac{r-\gamma-s}{2}+m_1-n_1-v_1\right)}\, x_1^{2(m_1-n_1-v_1)+r-\gamma-2-s}(y-\bar{X}_2)^{s} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{m_1-n_1-v_1} \frac{(-1)^{s}\binom{m_1-n_1-v_1}{s}}{(r-\gamma-2)\binom{r-\gamma-2+2s}{r-\gamma-2}}\, x_1^{2(m_1-n_1-v_1)-2s}(y-\bar{X}_2)^{r-\gamma-2+2s} . \qquad (1068)$$

U prvoj sumi je najviši eksponent $s=r-\gamma-3$, koji odgovara eksponentu $\underline{m}$ u (1029) i u stavku II.2. Da se ponište integrali u kanoničkom obliku, treba prema stavku II.2.A/ izvršiti $\underline{m+1}$ raznih operacija $D_{x_{s_\delta}}$, svaku barem jedamputa. Prema (770) odnosno (771) ima tih operacija $\underline{r-\gamma-1}$, dakle za jednu više, nego što je potrebno, a svaka je izvršena barem jedamputa, jer je zbog (1020) i (1019)

$$-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta \geq 1 . \qquad (1069)$$

Članovi prve sume od (1068) dakle ne pridonose integrala za kanonički oblik.

U drugoj sumi je najmanji eksponent od $\underline{y-\bar{X}_2}$ jednak $\underline{r-\gamma-2}$. Tu je $m<n$, a primijenjeno je, kako smo spomenuli, $r-\gamma-1$, dakle $\underline{m+1}$ raznih operacija $D_{x_{s_\delta}}$, što je prema stavku II.2.A/ dosta, da se uklone integrali u kanoničkom obliku. Za sve ostale potencije je $\underline{m>n}$, a $\underline{m-n = r-\gamma-2+2s-(r-\gamma-1) = 2s-1}$ lih broj, pa prema stavku II.2.B/ treba primijeniti sve operacije $D_{x_{s_\delta}}$ $(\delta=2,\dots,r-\gamma)$ i to svaku $\frac{m-n+3}{2}$ puta. To je u našem slučaju

$$\frac{m-n+3}{2} = \frac{r-\gamma-2+2s-(r-\gamma-1)+3}{2} = s+1 \quad \text{puta.}$$

386

No budući da je $s \leq m_1 - n_1 - v_1$, to je zbog (1020)

$$s+1 \leq m_1-n_1-v_1+1 \leq -(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}) \leq -(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta) \,, \qquad (1069)$$ 437

tako da je i taj zahtjev zadovoljen i niti ovi članovi ne pridonose integrala za kanonički oblik.

Razmatranje je očito primjenljivo i na prvi član u vitičastoj zagradi u (770)[140],(771)[141], ako stavimo $\gamma=0$. Timeje dokazano, da je uvjet B/ stavka III.11. [IV] dovoljan. To pogotovo vrijedi, ako su koji od parametara stavljeni jednako nuli.

Prelazimo na pitanje, da li je uvjet C/ stavka III.11. [IV] dovoljan. Neka dakle vrijede (1026)[393],(1027)[394],(1028)[395].

Ako su koji od brojeva $1,\ldots,q$ sadržani medju brojevima $k_1,\ldots,k_\gamma$, to će zbog (1026)[393] za njih vrijediti (982)[348], tako da desna strana od (981)[347] iščezne, kako je tamo spomenuto, kad se dotični parametri prema (1027)[394] stave jednako nuli, odnosno tih članova u smislu (770)[140] uopće nema, ako je dotični dolnji indeks jednak nuli. (Razumije se, da u (770)[140] ne bi moralo baš posljednjih <u>r-p</u> dolnjih indeksa biti jednako nuli, kako smo radi jednostavnijeg pisanja pretpostavili). U tom slučaju dakle dotični članovi u (770)[140] odnosno (771)[141] otpadnu. Zamislimo prema tome, da su svi brojevi $1,\ldots,q$ sadržani medju brojevima $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$, na pr. kao $s_1=1$, $s_2=2$, ... , $s_q=q$, gdje je $q \leq r-\gamma$, (jer inače moraju neki od brojeva $1,\ldots,q$ biti sadržani medju $k_1,\ldots,k_\gamma$). Na ovaj slučaj možemo primijeniti formulu (1008)[374], gdje samo treba mjesto <u>H</u> pisati <u>q</u>. Zbog $\gamma \leq r-2$ i uvjeta (1026)[393] ne može vrijediti (1010)[376], tako da (1011)[377] ne dolazi u obzir. (Taj izraz i onako ne bi pridonio integrala za kanonički oblik).

Ako je najprije $q = r-\gamma$, to je X_q, (koji odgovara X_H u (1008))[374], jednak nuli, a operatori u izrazu (1006)[372] su <u>svi</u> integralni operatori, koje prema (770)[140],(771)[141] treba primijeniti. Budući da je <u>q</u> lih broj, to je i eksponent od <u>y</u> u (1008)[374] lih, pa taj izraz u smislu (534)[III 318] ne daje integrala za kanonički oblik, na čemu ni primjena operatora $D_{x_{k_\varepsilon}}$ i $\frac{\partial}{\partial t}$ [prema (770)[140],(771)[141]] ništa ne mijenja.

Neka je dakle $q < r-\gamma$. U tom slučaju na (1008), (u kojem piše $\underline{H}$ mjesto $\underline{q}$), treba još primijeniti operatore

$$S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta} \qquad (\delta = q+1,\ldots,r-\gamma).$$

U smislu stavka II,2. i formule (1029) vrijedi u ovom slučaju za broj varijabla

$$n = r-\gamma-q \qquad (1070)\ 438$$

a za eksponent pod integralom

$$m = r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi-v_\varphi) \quad . \qquad (1071)\ 439$$

Ako je $m < n$, to prema stavku II.2.A/ treba da bude izvršeno barem $\underline{m+1}$ raznih operacija $D_{x_{s_\delta}}$ $(\delta = q+1,\ldots,r-\gamma)$, svaka barem jedamput. Budući da je broj raznih izvršenih operacija jednaka broju varijabla $\underline{n}$, koji je pretpostavljen kao veći od $\underline{m}$, a svaka je operacija $D_{x_{s_\delta}}$ s obzirom na (769) izvršena barem jedamput, jer je zbog (1026),(1028) i $q \geq 3$

$$m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta \leq m_{s_\delta}-n_{s_\delta} \leq -\left[\frac{q+1}{2}+\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi)\right] \leq -\frac{q+1}{2} < -1$$

$$(\delta = q+1,\ldots,r-\gamma) \quad , \qquad (1072)\ 440$$

to je taj uvjet zadovoljen. U slučaju, da je $m \geq n$, to je prema (1070),(1071) $\underline{m-n}$ lih broj, jer je $\underline{q}$ lih, pa se može primijeniti stavak II.2.B/. Broj $\underline{m}$ je po (1071) maksimalan, ako su svi $v_\varphi=0$, t.j.

$$m_{max} = r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi) \quad . \qquad (1073)\ 441$$

Treba dakle svaku operaciju izvršiti barem

$$\frac{m_{max}-n+3}{2} = \frac{q+1}{2} + \sum_{\varphi=1}^{q} (m_\varphi - n_\varphi) \qquad (1074)\ 442$$

puta, a to je obzirom na (~~1072~~ 440) i (~~769~~ 439) zaista učinjeno. Prema tome u drugom članu vitičaste zagrade u (~~770~~ 140),(~~771~~ 141) nema integrala u kanoničkom obliku, a isto razmatranje vrijedi i za prvi član, ako stavimo $\gamma=0$. Ovo vrijedi pogotovo onda, ako su koji od parametara $x_{q+1},\dots,x_r$ stavljeni jednako nuli. Time je dokazano, da je i uvjet C/ stavka III.11. dovoljan.

Prije nego što dokažemo, da su uvjeti stavka III.11. ~~potrebni~~ nužni, provest ćemo neka pomoćna razmatranja.

Recimo, da želimo sve parametre $x_{k_1},\dots,x_{k_\gamma}$ u drugom izrazu vitičaste zagrade od (~~770~~ 140),(~~771~~ 141) staviti jednako nuli. Ako za jedan od k_ε $(\varepsilon=1,\dots,\gamma)$ vrijedi

$$m_{k_\varepsilon} \geqq 2n_{k_\varepsilon} \qquad (1075)\ 443$$

onda će obzirom na (~~982~~ 348) svi članovi dotične sume po w_ε otpasti, t.j. članovi za dotičnu kombinaciju $(k_1,\dots,k_\gamma)$ otpadaju. Možemo dakle pretpostaviti

$$m_{k_\varepsilon} < 2n_{k_\varepsilon} \qquad (\varepsilon=1,\dots,\gamma) \quad . \qquad (1076)\ 444$$

Indeks sumacije w_ε će onda trebati poprimiti samo cijele vrijednosti

$$0 \leqq w_\varepsilon \leqq \frac{2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}{2} \qquad (1077)\ 445$$

jer za ostale vrijednosti na temelju (~~982~~ 348) dotični članovi otpadaju. Prema (~~989~~ 355) dobijemo stoga za dotičnu kombinaciju $(k_1,\dots,k_\gamma)$, a uz odabrane v_φ, kao dio drugog izraza vitičaste zagrade u (~~770~~ 140),(~~771~~ 141):

$$\frac{1}{(r-\gamma-2)!}\sum_{w_1=0}^{\left[\frac{2n_{k_1}-m_{k_1}-1}{2}\right]}\cdots\sum_{w_\gamma=0}^{\left[\frac{2n_{k_\gamma}-m_{k_\gamma}-1}{2}\right]}\left\{\left(\prod_{\varepsilon=1}^{\gamma}\frac{(-1)^{m_{k_\varepsilon}+1}\,c^{2w_\varepsilon}\,2^{n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\,(n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{w_\varepsilon!\,(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1)!}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left(\frac{d}{dt}\right)^{\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon})-\gamma+h}\psi(t,0,\dots,0)\right\}, \qquad (1078) \quad 446$$

gdje smo radi kraćeg pisanja stavili

$$h = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma}(m_{s_\varphi}-2v_\varphi) \qquad (1079) \quad 447$$

a $\psi(t,0,\dots,0)$ znači $\left[\psi(t,x_{k_1},\dots,x_{k_\gamma})\right]_{x_{k_1}=\dots=x_{k_\gamma}=0}$, gdje je ψ izraz u uglatoj zagradi (770),(771), od kojega je odbačen faktor parametara λ_{k_ε}.

Opetovanom primjenom od (1056),(1057),(1058) može se $\psi(t,0,\dots,0)$ izraziti linearno pomoću integrala oblika

$$P = \int_{X_2}^{t} y^M \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \qquad (1080) \quad 448$$

sa

$$X_2 = x_{s_1}+\dots+x_{s_{r-\gamma}} \qquad . \qquad (1081) \quad 449$$

Pri tom možemo pretpostaviti, da je M tak broj, jer u slučaju lihog M integrali (1080) prema (470),(534) ne pridonose integrala za kanonički oblik. Nadomjestit ćemo dakle $\psi(t,0,\dots,0)$ u izrazu (1078) integralom (1080).

<u>Prvi slučaj.</u> Neka je

$$M = 4n \qquad (1082) \quad 450$$

$$\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon})-\gamma+h = 2r = N-2\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}w_\varepsilon \qquad (1083) \quad 451$$

sa

$$N = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon})-\gamma+h \qquad . \qquad (1084) \quad 452$$

III (408)

Uvrstimo li to u (620), to dobijemo

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{N-2\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon} P = \frac{(-1)^{\frac{M}{4}+\frac{N}{2}-\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon}\, M!}{2^{\frac{M}{2}}\, c^{\frac{M}{2}-N+2\sum\limits_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon}\, \left(\frac{M}{2}\right)!}\, t^{\frac{M}{2}} P_0 + \text{const.}\, t^{\frac{M}{2}} P_1 + \dots \qquad (1085)$$ 453

446

Ako to uvedemo u (1078), vidi se, da će se moći faktori c^{2w_ε} kratiti i da pridolazi faktor $(-1)^{-w_\varepsilon}$, čime je omogućena provedba sumacija po $w_1,\dots,w_\gamma$, koje su naznačene u (1078), i to pomoću formule (206). 446 II (52)
Stavimo li u (206) II (52)

$$n = 2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1 \qquad (1086)$$ 454

$$m = n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1 \qquad (1087)$$ 455

to dobijemo

$$\sum_{w_\varepsilon=0}^{\left[\frac{2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{w_\varepsilon}\, 2^{2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1-2w_\varepsilon}\, (n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{w_\varepsilon!\, (2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1-2w_\varepsilon)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}\, 2^{2n_{k_\varepsilon}-2m_{k_\varepsilon}-1}\, \Gamma\left(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-\frac{1}{2}\right).\, m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi}\, (2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1)!} \qquad (1088)$$ 456

gdje uvjet $m \leq \frac{n-1}{2}$ sad znači $n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1 \leq \frac{2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}{2}$, što je ispravno, jer m_{k_ε} nije negativan.

456

Pišimo (1088) u obliku

$$\sum_{w_\varepsilon=0}^{\left[\frac{2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}{2}\right]} \frac{(-1)^{m_{k_\varepsilon}+w_\varepsilon+1}\; 2^{n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-1}\;(n_{k_\varepsilon}-w_\varepsilon-1)!}{w_\varepsilon!\,(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}-1)!} =$$

$$= \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}}\; 2^{n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}\;\Gamma\left(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-\frac{1}{2}\right).\; m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi}\,(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1)!} \qquad (1089) \;\; 457$$

i uvrstimo (~~1085~~ 453) i (~~1089~~ 457) u (~~1078~~ 446). Ako označimo

$$\prod = \prod_{\varepsilon=1}^{\gamma} \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}}\; 2^{n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1}\;\Gamma\left(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-\frac{1}{2}\right).\; m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi}\,(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}-1)!}\;, \qquad (1090) \;\; 458$$

to dobijemo mjesto (~~1078~~ 446), u kojem smo ψ nadomjestili integralom (~~1080~~ 448), izraz

$$t^{\frac{M}{2}} P_o \frac{(-1)^{\frac{M}{4}+\frac{N}{2}}\, M!}{2^{\frac{M}{2}}\, c^{\frac{M}{2}-N} \left(\frac{M}{2}\right)!\,(r-\gamma-2)!} \prod \quad + \;\text{const.}\; t^{\frac{M}{2}} P_1 + \ldots \qquad (1091) \;\; 459$$

<u>Drugi slučaj.</u> Neka je

$$M = 4n+2 \qquad (1092) \;\; 460$$

$$N - 2\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-2w_\varepsilon-m_{k_\varepsilon}) - \gamma + h = 2r+1 \;. \qquad (1093) \;\; 461$$

Služeći se ovaj puta formulom (~~623~~ III (411)) dolazimo sasvim analognim načinom do formule

$$t^{\frac{M}{2}} P_o \frac{(-1)^{\frac{M-2}{4}+\frac{N-1}{2}}\, M!}{2^{\frac{M}{2}}\, c^{\frac{M}{2}-N} \left(\frac{M}{2}\right)!\,(r-\gamma-2)!} \prod \quad + \;\text{const.}\; t^{\frac{M}{2}} P_1 + \ldots \qquad (1094) \;\; 462$$

Treći slučaj. Neka je

$$M = 4n \tag{1095}$$ 463

$$N - 2\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon}) - \gamma + h = 2r+1 \quad . \tag{1096}$$ 464

III(409)

Služimo se formulom (621) i računamo ovaj puta koeficijent od P_1, pa dolazimo do oblika

$$t^{\frac{M}{2}+1} P_1 \frac{(-1)^{\frac{M}{4}+\frac{N-1}{2}+1} M!}{2^{\frac{M}{2}+1} c^{\frac{M}{2}-N} (\frac{M}{2})!(r-\gamma-2)!} \prod + \text{const.}\ t^{\frac{M}{2}-1} P_0 + \dots \tag{1097}$$ 465

Četvrti slučaj. Neka je

$$M = 4n+2 \tag{1098}$$ 466

$$N - 2\sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} w_\varepsilon = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon} - 2w_\varepsilon - m_{k_\varepsilon}) - \gamma + h = 2r \quad . \tag{1099}$$ 467

III 410

Služimo se formulom (622) i dolazimo do oblika

$$t^{\frac{M}{2}+1} P_1 \frac{(-1)^{\frac{M}{4}+\frac{N-1}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}+1} c^{\frac{M}{2}-N} (\frac{M}{2})!(r-\gamma-2)!} \prod + \text{const.}\ t^{\frac{M}{2}-1} P_0 + \dots \tag{1100}$$ 468

Prvi i drugi slučaj mogu se sažeti u jedan oblik. U oba slučaja je $\frac{M}{2} + N$ tak broj, t.j.

$$\frac{M}{2} + N \equiv 0 \pmod 2 , \tag{1101}$$ 469

a ta zajednička pretpostavka može biti ostvarena samo prema

450 451 460 461

(1082),(1083) prvog slučaja ili prema (1092),(1093) drugog slučaja.

450 451

Vrijede li (1082),(1083), to je očito

$$\frac{M}{4} + \frac{N}{2} \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N}{2} \pmod 2 \tag{1102}$$ 470

a vrijede li (1092),(1093), to je

$$\frac{M-2}{4} + \frac{N-1}{2} \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N}{2} \pmod 2 \tag{1103}$$

tako da (1091) i (1094) možemo predočiti u zajedničkom obliku

$$t^{\frac{M}{2}} P_0 \frac{(-1)^{-\frac{M}{4}+\frac{N}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}} c^{\frac{M}{2}-N} (\frac{M}{2})!(r-\gamma-2)!} \prod + \text{const.}\ t^{\frac{M}{2}} P_1 + \dots \tag{1104}$$

(Ne tvrdi se, da je konstanta pred $t^{\frac{M}{2}} P_1$ u (1091) i (1094) ista. Ta konstanta nas dalje ne zanima).

Treći i četvrti slučaj imaju zajedničku pretpostavku, da je $\frac{M}{2} + N$ lih broj, t.j.

$$\frac{M}{2} + N \equiv 1 \pmod 2 , \tag{1105}$$

a ta pretpostavka može biti ostvarena samo prema (1095),(1096) trećeg slučaja ili prema (1098),(1099) četvrtog slučaja. Ako vrijede (1095),(1096), dobijemo

$$\frac{M}{4} + \frac{N-1}{2} + 1 \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2} \pmod 2 , \tag{1106}$$

a ako vrijede (1098),(1099), ~~slijedi~~ izlazi

$$\frac{M}{4} + \frac{N-1}{2} \equiv -\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2} \pmod 2 , \tag{1107}$$

tako da možemo (1097),(1100) predočiti u zajedničkom obliku

$$t^{\frac{M}{2}+1} P_1 \frac{(-1)^{-\frac{M}{4}+\frac{N+1}{2}} M!}{2^{\frac{M}{2}+1} c^{\frac{M}{2}-N} (\frac{M}{2})!(r-\gamma-2)!} \prod + \text{const.}\ t^{\frac{M}{2}-1} P_0 + \dots \tag{1108}$$

Za kasnije svrhe treba još pretresti predznak produkta (1090).

Neka je za stanovite vrijednosti od ε , na pr. za $\varepsilon = 1,\dots,\delta$

$$n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1 \geqq 0 \qquad (\varepsilon = 1,\dots,\delta) , \tag{1109}$$ 477

dok je za sve ostale vrijednosti od ε

$$n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1 < 0 \qquad (\varepsilon = \delta+1,\dots,\gamma) . \tag{1110}$$ 478

Razdvajamo onda produkt (1090):

$$\prod = \prod_1 \prod_2 \tag{1111}$$ 479

$$\prod_1 = \prod_{\varepsilon=1}^{\delta} \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}} \, 2^{n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1} \, \Gamma(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - \frac{1}{2}) \cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi} \, (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!} \tag{1112}$$ 480

$$\prod_2 = \prod_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma} \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}} \, 2^{n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1} \, \Gamma(n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - \frac{1}{2}) \cdot m_{k_\varepsilon}!}{\sqrt{\pi} \, (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!} . \tag{1113}$$ 481

Obzirom na (1109) i (204) možemo pisati

$$\prod_1 = \prod_{\varepsilon=1}^{\delta} \frac{(-1)^{n_{k_\varepsilon}} (2n_{k_\varepsilon} - 2m_{k_\varepsilon} - 2)! \, m_{k_\varepsilon}!}{2^{n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1} (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)! (n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!} \tag{1114}$$ 482

a obzirom na (1110) i (205)

$$\prod_2 = \prod_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma} \frac{(-1)^{m_{k_\varepsilon}+1} \, 2^{m_{k_\varepsilon} - n_{k_\varepsilon} + 1} (m_{k_\varepsilon} - n_{k_\varepsilon} + 1)! \, m_{k_\varepsilon}!}{(2m_{k_\varepsilon} - 2n_{k_\varepsilon} + 2)! \, (2n_{k_\varepsilon} - m_{k_\varepsilon} - 1)!} . \tag{1115}$$ 483

Prema tome je

$$\operatorname{sgn} \prod\nolimits_1 = (-1)^{\sum_{\varepsilon=1}^{\delta} n_{k_\varepsilon}}, \qquad (1116)$$ 484

$$\operatorname{sgn} \prod\nolimits_2 = (-1)^{\gamma-\delta+\sum_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma} m_{k_\varepsilon}}, \qquad (1117)$$ 485

iz čega ~~pro~~izlazi predznak čitavog produkta.

Prelazimo sada na dokaz, da su uvjeti stavka ~~III~~IV.11. ~~potrebni~~ nužni, t.j. da u svim slučajevima, koji tim uvjetima nisu obuhvaćeni, kanoni~~č~~ski oblik sadrži barem jedan integral.

<u>a/</u>. Pretpostavimo, da vrijede uvjeti C/ stavka ~~III~~IV.11., samo s tom razlikom, da nisu svi parametri $x_1,\dots,x_q$ stavljeni jednako nuli, kako bi prema (1027) trebalo biti, već da je jedan od tih parametara, na pr. x_1, ~~povoljan~~, dok ćemo sve druge parametre uključivo $x_{q+1},\dots,x_r$ staviti jednako nuli.

Neka dakle vrijedi, da je $q>1$ lih, neka vrijedi (1026) i (1028), a (1027) neka je nadomješten sa

$$x_2=x_3=\dots=x_r=0 \, . \qquad (1118)$$ 486

Budući da je $\underline{x_1}$ jedini parametar, koji nije stavljen jednako nuli, to obzirom na (779),(780),(781) kao gornje granice integrala (1016), (1017) u kanoni~~č~~skom obliku dolaze u obzir samo $\underline{t}$ i $\underline{t-x_1}$. Provest ćemo dokaz, da u kanoni~~č~~skom obliku ima sigurno integral s gornjom granicom $\underline{t}$., t.j. sa $a=0$, $b=x_1$.

Takav integral se očito može pojaviti samo u članovima od (770),(771), gdje je $\underline{x_1}$ sadržan medju $x_{s_1},\dots,x_{s_{r-\gamma}}$. No i $x_2,\dots,x_q$ moraju tu biti sadržani, jer inače dotični član zbog (1026) i (982) otpada, kad se dotični parametar stavi jednako nuli, odnosno uopće nema toga člana, ako je dotični donji indeks jednak nuli, kako se razabire iz (770). Neka je dakle, recimo,

$$x_{s_1} = x_1, \quad x_{s_2} = x_2, \ldots , \quad x_{s_q} = x_q \quad . \tag{1119}$$ 487

Pretpostavimo ponajprije, da je

$$r - \gamma > q \tag{1120}$$ 488

t.j., da medju x_{s_δ} $(\delta = 1,\ldots,r-\gamma)$ osim $x_1,\ldots,x_q$ ima još jedan ili više parametara $x_{s_{q+1}},\ldots,x_{s_{r-\gamma}}$. Označimo prema tome

$$r - \gamma - q = \chi \geqq 1 \quad . \tag{1121}$$ 489

Izvršimo na integral u drugom članu vitičaste zagrade u (770), (771) najprije operacije $S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}$ $(\delta = 2,\ldots,q)$ i stavimo dotične parametre jednako nuli. Budući da je $q \geqq 3$, $r-\gamma > q$, $0 \leqq v_\delta \leqq m_{s_\delta}$, a vrijedi (1026), to se lako vidi, da je uvjet (1007), u kojem sad $\underline{\varphi}$ poprima vrijednosti od $\underline{2}$ do $\underline{q}$, sigurno ispunjen, tako da dobijemo izraz (1008), gdje $\underline{\varphi}$ i $\underline{\delta}$ poprimaju vrijednosti od $\underline{2}$ do $\underline{q}$, a $\underline{X_H}$ je nadomješten sa

$$\overline{X}_{2,q} = (\overline{X}_2)_{x_2=\ldots=x_q=0} = x_{s_{q+1}}+\ldots+x_{s_{r-\gamma}} \tag{1122}$$ 490

t.j. dobijemo integral oblika

$$\int\limits_{\overline{X}_{2,q}}^{t-X_1} (y-\overline{X}_{2,q})^{r-\gamma-2+2\sum\limits_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi-n_\varphi-v_\varphi)} \Lambda_0(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2})\,dy \ . \tag{1123}$$ 491

Ako na ovaj integral primijenimo operaciju $S_{x_1}^{m_1-n_1-v_1}$, to dobijemo u analogiji s formulom (1057)[424] odnosno (1067)[434] te (1068)[435] same integrale oblika

$$\int_{x_1+\bar{X}_{2,q}}^{t-X_1} (y-\bar{X}_{2,q})^R \Lambda_o(c\sqrt{(t-X_1)^2-y^2})dy \quad . \qquad (1124) \quad 492$$

Treba pri tom svagdje eksponenat $r-\gamma-2$ nadomjestiti eksponentom u (1125)[491], tako da je najveća vrijednost indeksa sumacije $\underline{s}$ u prvoj sumi (1068)[435] $r-\gamma-3+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi-n_\varphi-v_\varphi)$, a u drugoj sumi eksponenat od $y-\bar{X}_{2,q}$ glasi $r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi-n_\varphi-v_\varphi)+2s$. Očito je eksponenat $\underline{R}$ najviši u drugoj sumi za $v_1=v_2=\ldots=v_q$, $s=m_1-n_1$, dakle

$$R_{max} = r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi-n_\varphi)+2(m_1-n_1) = r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi) \quad . \qquad (1125) \quad 493$$

Primijenimo sad na integrale oblika (1124)[492] operatore $S_{x_\delta}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}$ $(\delta=q+1,\ldots,r-\gamma)$ i stavimo dotične parametre jednako nuli. S Obzirom na (1028)[395], a u smislu (769)[139] stavimo

$$S_{x_\delta}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta} = D_{x_\delta}^{-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta} \qquad (1126) \quad 494$$

i nadomjestimo ih prema razlaganjima ~~u~~ na početku točke III.10. ~~na str. 203~~ sa

$$\frac{2^{-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta)!}{(-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta)!}\left(\frac{\partial}{\partial x_{s_\delta}}\right)^{-2m_{s_\delta}+2n_{s_\delta}+2v_\delta} \quad . \qquad (1127) \quad 495$$

Formula (1003)[364] nije neposredno primjenljiva, jer dolnja granica integrala (1124)[492] nije $\bar{X}_{2,q}$, već $x_1+\bar{X}_{2,q}$, tako da diferencijacije po dolnjoj granici integrala daju članove, koji ne otpadaju, kao što je to u slučaju formule (~~1003~~ 369). Ipak ti dodatni članovi ne sadržavaju više integrala, i jasno je, da će i sada uvjet analogan sa (~~1004~~ 370) biti dovoljan, da dobijemo izraz bez integrala. Taj bi uvjet glasio

$$R < 2\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta) \quad . \tag{1128}$$ 496

Prema (~~1125~~ 493) je

$$R \le R_{max} = r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi) \quad . \tag{1129}$$ 497

Dalje je

$$\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}) \le \sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta) \quad . \tag{1130}$$ 498

S Obzirom na (~~1028~~ 395) i (~~1121~~ 489) vrijedi

$$\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}) \ge \lambda\left[\frac{q+1}{2}+\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi)\right] \tag{1131}$$ 499

dakle

$$2\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi)+2\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}) \le -\lambda(q+1)-2(\lambda-1)\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi-n_\varphi) \le$$

$$\le -\lambda(q+1) = -(r-\gamma-q)(q+1) \quad . \tag{1132}$$ 500

Razmotrimo li parabolu

$$y = -(r-\gamma-x)(x+1) \tag{1133}$$ 501

i stavimo

$$y = r-\gamma-2 \tag{1134}$$ 502

to ~~slijedi~~ izlazi

$$x_1 = \frac{r-\gamma-1}{2}\left[1+\sqrt{1+\frac{2}{r-\gamma-1}}\right], \tag{1135}$$ 503

$$x_2 = \frac{r-\gamma-1}{2}\left[1-\sqrt{1+\frac{2}{r-\gamma-1}}\right] . \tag{1136}$$ 504

Budući da je q lih broj veći od jedan, a s obzirom na (1077), ~~slijedi~~ blaži

$$3 \leq q \leq r-\gamma-1, \tag{1137}$$ 505

dakle svakako

$$r-\gamma-1 > 0 . \tag{1138}$$ 506

Jasno je, da ~~je~~ za

$$x_1 > x > x_2 \quad \text{i vrijedi} \tag{1139}$$ 507

$$y < r-\gamma-2 . \tag{1140}$$ 508

S obzirom na (1138) vrijedi prema (1135),(1136)

$$x_1 > r-\gamma-1, \tag{1141}$$ 509

$$x_2 < 0 \tag{1142}$$ 510

dakle možemo na temelju (1139) i (1137) pisati

$$x_1 > r-\gamma-1 \geq q \geq 3 > 0 > x_2, \tag{1143}$$ 511

pa je stoga prema (1133) i (1140) za naš q

$$-(r-\gamma-q)(q+1) < r-\gamma-2 . \tag{1144}$$ 512

Prema (1129),(1132),(1144) i (1130) vrijedi dakle

$$R \leq R_{max} = r-\gamma-2 + 2\sum_{\varphi=1}^{q}(m_\varphi - n_\varphi) < 2\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}) \leq 2\sum_{\delta=q+1}^{r-\gamma}(-m_{s_\delta}+n_{s_\delta}+v_\delta), \tag{1145}$$ 513

a to je traženi uvjet (1128). Slučaj $r-\gamma > q$ dakle ne daje integrala za kanonički oblik. Razmatranje ~~naravno~~ dakako vrijedi i za prvi član vitičaste zagrade u (770),(771), ako stavimo $\gamma=0$.

Pretpostavimo dakle sada

$$r-\gamma = q \geqq 3 \quad . \tag{1146}$$ 574

($r-\gamma < q$ ne dolazi u obzir, jer bi onda neki od parametara $x_1,\dots,x_q$ bili medju $x_{k_1},\dots,x_{k_\gamma}$, a taj slučaj smo već prije odbacili).

(1146) odredjuje jednoznačno $\underline{\gamma}$, q odredjuje i kombinaciju $(s_1,\dots,s_{r-\gamma})$, jer u njoj moraju biti sadržani brojevi $1,\dots,q$, t.j. ta kombinacija je identična s kombinacijom $(1,\dots,q)$.

Jasno je, da je prema (1122) sada

$$\overline{X}_{2,q} = 0 \quad . \tag{1147}$$ 575

Integrali (1124), koji potječu od članova druge sume (1068), u kojoj je, kako smo spomenuli, $r-\gamma-2$ nadomješten sa $r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi-n_\varphi-v_\varphi)$, imaju svi lihe eksponente $\underline{R}$, jer je zbog (1146) sa $\underline{q}$ i $\underline{r-\gamma}$ lih. Ti integrali prema (470),(534) ne pridonose integrala za kanonički oblik. Medju članovima prve sume (1068) ima naprotiv i potencijâ s takim eksponentima. Najveća vrijednost eksponenta $\underline{s}$ uz odabrane v_φ je, kako smo spomenuli, $r-\gamma-3+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi-n_\varphi-v_\varphi)$, a ta je tâka, jer je $\underline{r-\gamma}$ lih, i poprima svoju najveću vrijednost za $v_2=\dots=v_q=0$, t.j. imamo za tâki $\underline{R}$

$$R_{tak\ max} = M = r-\gamma-3+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi-n_\varphi) = q-3+2\sum_{\varphi=2}^{q}(m_\varphi-n_\varphi) = 0 \quad . \tag{1148}$$ 576

Na dotični integral treba u smislu (987) još izvršiti stanovite diferencijacije po $\underline{t}$, tako da se radi o izrazu poput (1078). Prema (1104) odnosno (1108) dobijemo dakle za kanonički oblik ili $t^{\frac{M}{2}}P_o$ ili $t^{\frac{M}{2}+1}P_1$ s koeficijentom, koji je očito od nule različit, (jer je i faktor, koji potječe iz (1068) od nule različit), uz eventualno još druge članove s nižim potencijama od $\underline{t}$. Integrali (1124) s manjim takim eksponentom $\underline{R}$, dakle sa

$$R \leq M-2 \tag{1149}$$

daju prema (1104) i (1108) članove s najvišom potencijom od $\underline{t}$ oblika $t^{\frac{M}{2}-1} P_o$ odnosno $t^{\frac{M}{2}} P_1$. Članovi $t^{\frac{M}{2}} P_o$ ili $t^{\frac{M}{2}+1} P_1$, koje nam je dao integral s eksponentom $\underline{M}$, sigurno su dakle jedini te vrsti, pa budući da im je koeficijent od nule različit, kako smo spomenuli, to je time dokaz proveden, da u kanonskom obliku ima barem jedan integral. To vrijedi pogotovo onda, ako koji od parametara $x_2,\ldots,x_r$ nisu stavljeni jednako nuli.

b/ Pretpostavimo, da je

$$m_k \geq n_k \qquad (k=1,\ldots,q) \quad , \tag{1150}$$

gdje je $\underline{q}$ lih broj, za koji ovaj put dopuštamo i vrijednost $q=1$. (Za nekoje ili sve vrijednosti $1,\ldots,q$ može vrijediti dapače $m_k \geq 2n_k$). Neka dalje postoji barem jedna vrijednost $k = k_f > q$, za koju je

$$m_{k_f}-n_{k_f} > -\left[\frac{q+1}{2} + \sum_{k=1}^{q}(m_k-n_k)\right] \tag{1151}$$

a najviše jedna vrijednost $k = k_g > q$, za koju je

$$m_{k_g} \geq 2n_{k_g} \ . \tag{1152}$$

(Medju vrijednostima $k= q+1,\ldots,r$ može biti takvih, za koje je $m_k \geq n_k$. Ako ima takva vrijednost, ili ako za jednu od njih vrijedi dapače (1152), tada je tom vrijednošću već zadovoljen uvjet (1151)). Konačno neka budu svi parametri stavljeni jednako nuli.

Dokazat ćemo, da u kanonskom obliku ima integrala.

Uzmimo opet u razmatranje drugi izraz vitičaste zagrade u (770),(771). Jasno je najprije, da medju $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$ moraju biti sadržani svi oni indeksi $\underline{k}$, za koje je $m_k \geqq 2n_k$, jer bi inače dotični članovi za $x_k=0$ u smislu (981) otpali, ako je $n_k>0$, jer za njih vrijedi (982), a uopće ih nema, ako je $n_k=0$, kako se vidi (770). Uzet ćemo povrh toga medju $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$ još i sve one indekse $\underline{k}$, za koje je $m_k \geqq n_k$, ali $m_k < 2n_k$.

Budući da su svi parametri stavljeni jednako nuli, to će primjena operatorâ $S_{x_{s_\delta}}^{m_{s_\delta}-n_{s_\delta}-v_\delta}$ prema (994) dati integral oblika

$$\int_0^t y^{r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}-v_\varphi)} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \tag{1153}$$

na koji u smislu (1078) treba još izvršiti stanovite diferencijacije po $\underline{t}$.

Ako je $\underline{r-\gamma}$ tâk broj, bit će eksponent u tom integralu tâk i budući da smo za $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$ odabrali sve one vrijednosti, za koje je $m_{s_\varphi} \geqq n_{s_\varphi}$, to je za $v_1=\ldots=v_{r-\gamma}=0$ ovo i najveći tâki eksponent, koji se može pojaviti. U smislu (1104),(1108) kanonski će oblik dakle sadržavati $t^{\frac{M}{2}} P_0$ ili $t^{\frac{M}{2}+1} P_1$ sa

$$M = r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}) \ . \tag{1154}$$

Ako je naprotiv $\underline{r-\gamma}$ lih broj, eksponent će biti lih i članovi (1153) dakle prema (470),(534) ne pridonose integrala za kanonski oblik. U tom slučaju moramo potražiti članove s najvećim tâkim eksponentom pod znakom integracije. Za to moramo broj $\underline{r-\gamma}$ ili povećati ili smanjiti. Treba dakle iz indeksa $k_1,\ldots,k_\gamma$ preseliti još neke indekse medju $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$, ili iz ovih nekoje indekse preseliti medju $k_1,\ldots,k_\gamma$. Preseljenjem nekog indeksa $\underline{k_\varepsilon}$ u $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$, za koji je $m_{k_\varepsilon} < n_{k_\varepsilon}$, povećava se $\underline{r-\gamma}$ za $\underline{1}$, tako da se eksponent smanjuje za $2(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}) - 1 \geqq 1$, dok se preseljenjem nekog indeksa s_δ, za koji je $m_{s_\delta} \geqq n_{s_\delta}$, medju $k_1,\ldots,k_\gamma$ eksponent smanjuje za $2(m_{s_\delta}-n_{s_\delta})+1 \geqq 1$. Budući da želimo smanjiti eksponent za što manje, svakako ćemo izvesti samo jedno preseljenje, čime će se naš lihi eksponent smanjiti za lih broj, tako da će postati tâk. Pri tom smo ~~naravno~~ dakako sve v_φ stavili jednako nuli, jer konačni tâki eksponent treba da bude što veći.

Ako se prebacuje jedan indeks iz $k_1,\ldots,k_\gamma$ u $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$, zvat ćemo to preseljenjem prve vrsti. Pri tom se γ promijenio u γ_1, tako da je

$$\gamma_1 = \gamma - 1 \; . \qquad (1155) \quad 523$$

Prebacuje li se indeks iz $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$ u $k_1,\ldots,k_\gamma$, neka se to zove preseljenje druge vrsti, a γ se pri tom mijenja u γ_2, tako da je

$$\gamma_2 = \gamma + 1 \; . \qquad (1156) \quad 524$$

Treba sada dokazati:

1/ Da uvijek postoji barem jedna mogućnost preseljenja, koja vodi do integrala, čiji je koeficijent od nule različit.

2/ Da su u slučaju, kad ima više mogućnosti preseljenja, koje vode do istog najvećeg tâkog eksponenta, koeficijenti dotičnih istovrsnih integrala za kanonički oblik svi istog predznaka, pa se ne mogu medjusobno ukinuti.

Ad 1/. Neka ima osim 518 (1150) još daljih indeksa, za koje je $m_k \geqq n_k$, koje smo, prema prije rečenom, uvrstili medju $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$.

Mora ih biti tak broj, dakle barem dva, jer bi inače zbog lihog $\underline{q}$ ispao $\underline{r-\gamma}$ tâk, a taj slučaj smo već uzeli u obzir. Od tih dvaju ili više indeksa može prema pretpostavkama najviše za jedan vrijediti $m_k \geq 2n_k$, dakle ima i barem jedan, za koji je $m_k \geq n_k$, ali $m_k < 2n_k$. Taj se posljednji indeks može preseliti medju $k_1,\dots,k_\gamma$, a da dotični članovi onda ne otpadnu. Eksponent poslije preseljenja je

$$\overline{M} = r-\gamma_2-2+2\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma_2}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}) \quad , \tag{1157}$$ 525

koji sigurno nije negativan, jer je $m_{s_\varphi} \geq n_{s_\varphi}$ za sve $\underline{\varphi}$, pa budući da ima barem jedan indeks (1150) 578 (jer je $q \geq 1$), a barem je jedan dalji, koji nije sadržan u (1150) 578, ali je za nj $m_k \geq n_k$, preostao medju $s_1,\dots,s_{r-\gamma}$, to je $r-\gamma_2 \geq 2$. To preseljenje druge vrsti dakle zaista vodi do člana (1153) 521, koji može pridonijeti integrala za kanonski oblik.

Ako naprotiv osim (1150) 578 nema nijednog indeksa, za koji je $m_k \geq n_k$, to ipak prema pretpostavkama ima barem jedan indeks k_f, za koji vrijedi (1151) 579. Taj se nalazi medju $k_1,\dots,k_\gamma$, pa ćemo ga preseliti medju $s_1,\dots,s_{r-\gamma}$. Budući da je sad $r-\gamma = q$, to će biti $r-\gamma_1 = q+1$, a eksponent će postati

$$\overline{M} = r-\gamma_1-2+2\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi})+2(m_{k_f}-n_{k_f}) =$$

$$= q-1+2\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi})+2(m_{k_f}-n_{k_f}) \quad . \tag{1158}$$ 526

Prema (1151) 579 vrijedi

$$m_{k_f}-n_{k_f} \geq -\left[\frac{q+1}{2}+\sum_{k=1}^{q}(m_k-n_k)\right]+1 \tag{1159}$$ 527

ili

$$2(m_{k_f}-n_{k_f}) \geq -q+1-2\sum_{k=1}^{q}(m_k-n_k) \; / \qquad (1160)$$ 528

dakle je

$$N \geq q-1+2\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi})-q+1-2\sum_{k=1}^{q}(m_k-n_k) = 0 \;. \qquad (1161)$$ 529

Ni ovdje dakle eksponent ne može biti negativan, t.j. ovo preseljenje prve vrsti daje član oblika (1153) 521, koji može pridonijeti integrala za kanonički oblik. Time je pokazano, da uvijek ima barem jedno preseljenje, koje vodi do cilja.

Ad 2/. Kako smo rekli, medju $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$ su stavljeni svi indeksi $\underline{k}$, za koje je $m_k \geq n_k$, (medju kojima se nalaze i oni, za koje je dapače $m_k \geq 2n_k$), dok se svi drugi indeksi nalaze medju $k_1,\ldots,k_\gamma$. Za preseljenje prve vrsti dolaze u obzir oni od indeksa $\underline{k}$ izmedju $k_1,\ldots,k_\gamma$, za koje je izraz $2(n_k-m_k)-1$ što manji, jer se za tu vrijednost smanjuje eksponent pod integralom (1153) 521. Za preseljenje druge vrsti dolaze u obzir indeksi $\underline{s}$ izmedju $s_1,\ldots,s_{r-\gamma}$, za koje je izraz $2(m_s-n_s)+1$ što manji, jer se za toliko smanjuje rečeni eksponent, a osim toga mora biti $m_s < 2n_s$, jer inače poslije preseljenja svi članovi otpadaju, kako smo spomenuli.

Neka je μ_1 minimum izraza $2(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon})-1$ $(\varepsilon=1,\ldots,\gamma)$, a μ_2 minimum izraza $2(m_{s_\delta}-n_{s_\delta})+1$ $(\delta=1,\ldots,r-\gamma)$, za koje je $m_{s_\delta} < 2n_{s_\delta}$. Ako je $\mu_1 < \mu_2$, dolaze u obzir samo preseljenja prve vrsti, ako je $\mu_1 > \mu_2$, samo preseljenja druge vrsti, a ako je $\mu_1=\mu_2=\mu$ dolaze u obzir obje vrsti preseljenja. Pretpostavit ćemo taj najopćenitiji slučaj. Neka izraz $2(n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon})-1$ poprimi taj minimum za nekoliko vrijednosti indeksa k_ε, na pr. za $k_\varepsilon = a$, $k_\varepsilon = b$ i t.d., t.j.

$$2(n_a-m_a)-1 = 2(n_b-m_b)-1 = \dots = \mu . \qquad (1162)$$ 530

Izraz $2(m_{s_\zeta}-n_{s_\zeta})+1$ neka poprimi taj minimum za neke vrijednosti $s_\zeta = \alpha$, $s_\zeta = \beta$ i t.d., za koje je $m_{s_\zeta} < 2n_{s_\zeta}$, t.j.

$$2(m_\alpha-n_\alpha)+1 = 2(m_\beta-n_\beta)+1 = \dots = \mu . \qquad (1163)$$ 531

Sva preseljenja prve vrsti pojedinih indeksa $a, b, \dots$ i $\alpha, \beta, \dots$ dovode do istog najvećeg takog eksponenta

$$M = r-\gamma-2+2\sum_{\varphi=1}^{r-\gamma}(m_{s_\varphi}-n_{s_\varphi}) - \mu . \qquad (1164)$$ 532

Pitanje je ponajprije, da li će za integrale kanoničkog oblika, koji su pomnoženi najvećom potencijom od t, biti primjenljiva formula (1104) ili (1108). Označimo li u smislu (1084),(1079) sa N_1 i h_1 dotične izraze poslije preseljenja prve vrsti indeksa a, a sa N_2 i h_2 te izraze poslije preseljenja druge vrsti indeksa α, i analogno dotične veličine γ_1 i γ_2 prema (1155) i (1156), to je očito s obzirom na $v_\varphi=0$

$$h_1 = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} + m_a \qquad (1165)$$ 533

$$h_2 = \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} - m_\alpha \qquad (1166)$$ 534

$$\begin{aligned} N_1 &= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}) - (2n_a-m_a) - \gamma_1 + h_1 = \\ &= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}) - (2n_a-m_a) - (\gamma-1) + \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} + m_a = \\ &= N + 2(m_a-n_a)+1 \qquad (1167) \end{aligned}$$ 535

$$N_2 = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}) + (2n_\alpha-m_\alpha) - \gamma_2 + h_2 =$$

$$= \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma}(2n_{k_\varepsilon}-m_{k_\varepsilon}) + 2n_\alpha - m_\alpha - (\gamma+1) + \sum_{\varphi=1}^{r-\gamma} m_{s_\varphi} - m_\alpha =$$

$$= N - 2(m_\alpha-n_\alpha) - 1 \qquad (1168)$$ 536

dakle

$$\frac{M}{2} + N_1 - \left(\frac{M}{2}+N_2\right) = N_1 - N_2 = 2(m_a-n_a+m_\alpha-n_\alpha) + 2 \equiv 0 \pmod 2 \qquad (1169)$$ 537

pa stoga

$$\frac{M}{2} + N_1 \equiv \frac{M}{2} + N_2 \pmod 2 . \qquad (1170)$$ 538

Prema tome vrijede ili za sva preseljenja (1101) i (1104) ili za sva preseljenja (1105) i (1108).

Treba sada pokazati, da je predznak članova s integralom $t^{\frac{M}{2}} P_o$ prema (1104) odnosno s integralom $t^{\frac{M}{2}+1} P_1$ prema (1108) poslije svih pojedinih preseljenja isti, tako da se ti članovi sigurno ne mogu ukidati. Taj se predznak sastoji od ovih faktora:

α) Faktor, koji potječe iz formule (994), iz koje smo dobili integrale oblika (1153). U toj formuli (994) treba naravno staviti $h = r-\gamma$. Prema (204) vrijedi za

$$m_{s_\delta} - n_{s_\delta} \geqq 0 \qquad (1171)$$ 539

$$\Gamma\left(m_{s_\delta}-n_{s_\delta}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\,(2m_{s_\delta}-2n_{s_\delta})!}{2^{2m_{s_\delta}-2n_{s_\delta}}(m_{s_\delta}-n_{s_\delta})!} \qquad (1172)$$ 540

a za

$$m_a - n_a < 0 \qquad (1172)$$ 541

prema (205)

$$\Gamma\left(m_a-n_a+\frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{n_a-m_a}\sqrt{\pi}\,2^{2n_a-2m_a}(n_a-m_a)!}{(2n_a-2m_a)!} . \qquad (1173)$$ 542

Prema tome na temelju formule (994) predznak za slučaj preseljenja prve vrsti, recimo indeksa a, ima oblik $(-1)^{E_1(a)}$, gdje je

$$E_1(a) = \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + n_a + (n_a - m_a) = \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} + 2n_a - m_a \tag{1174}$$

dok je u slučaju preseljenja druge vrsti, recimo indeksa α, taj eksponent od (-1)

$$E_1(\alpha) = \sum_{\delta=1}^{r-\gamma} n_{s_\delta} - n_\alpha \tag{1175}$$

β) Faktor, koji se pojavljuje u formulama (1104) odnosno (1108). Prema (1104) bio bi eksponent od (-1) poslije preseljenja prve vrsti indeksa a s obzirom na (1167)

$$E_2(a) = -\frac{M}{4} + \frac{N_1}{2} = -\frac{M}{4} + \frac{N}{2} + m_a - n_a + \frac{1}{2} \tag{1176}$$

a poslije preseljenja druge vrsti indeksa α s obzirom na (1168)

$$E_2(\alpha) = -\frac{M}{4} + \frac{N_2}{2} = -\frac{M}{4} + \frac{N}{2} - m_\alpha + n_\alpha - \frac{1}{2} \; . \tag{1177}$$

Za slučaj, da se primjenjuje (1108), glasile bi te formule analogno

$$E_2(a) = -\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2} + m_a - n_a + \frac{1}{2} \tag{1178}$$

$$E_2(\alpha) = -\frac{M}{4} + \frac{N+1}{2} - m_\alpha + n_\alpha - \frac{1}{2} \; . \tag{1179}$$

Razumije se, da su eksponenti (1176),(1177) cijeli brojevi, ako za $\frac{M}{2} + N_1$ i $\frac{M}{2} + N_2$ vrijedi uvjet (1101), a eksponenti (1178), (1179) su cijeli, ako analogno vrijedi uvjet (1105).

γ) Faktor (1116). Poslije preseljenja prve vrsti vrijedi za sve preostale indekse k_ε uvjet (1109). Tih indeksa ima $\delta = \gamma_1 = \gamma - 1$, t.j. od prvotnih γ indeksa otpao je indeks $\underline{a}$, tako da je eksponent od (-1)

$$E_3(a) = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - n_a \,. \tag{1180}$$ 549

Kod preseljenja druge vrsti pridolazi medju indekse k_ε indeks α, za koji (1109) ne vrijedi, dakle je $\delta = \gamma_2 - 1 = \gamma$ i eksponent od (-1)

$$E_3(\alpha) = \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} \,. \tag{1181}$$ 550

δ) Faktor (1117). Poslije preseljenja prve vrsti ne vrijedi ni za koji od preostalih k_ε uvjet (1110), tako da je $\delta = \gamma_1 = \gamma - 1$, dakle eksponent od (-1)

$$E_4(a) = \gamma_1 - \delta + \sum_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma_1} m_{k_\varepsilon} = 0 \,. \tag{1182}$$ 551

Poslije preseljenja druge vrsti za jedini indeks α, koji je pridošao medju k_ε, vrijedi uvjet (1110), tako da je $\delta = \gamma_2 - 1 = \gamma$, i eksponent od (-1)

$$E_4(\alpha) = \gamma_2 - \delta + \sum_{\varepsilon=\delta+1}^{\gamma_2} m_{k_\varepsilon} = 1 + m_\alpha \,. \tag{1183}$$ 552

Ako je dakle primjenljiva formula (1104), to je ~~sve~~ukupni eksponent od (-1) za slučaj preseljenja prve vrsti prema (1174), (1176), (1180), (1182)

$$E(a) = E_1(a) + E_2(a) + E_3(a) + E_4(a) =$$

$$= \sum_{\varsigma=1}^{r-\gamma} n_{s_\varsigma} + 2n_a - m_a - \frac{M}{4} + \frac{N}{2} + m_a - n_a + \frac{1}{2} + \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - n_a + 0 =$$

$$= \sum_{\varsigma=1}^{r-\gamma} n_{s_\varsigma} + \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - \frac{M}{4} + \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \,, \tag{1184}$$ 553

a za preseljenje druge vrsti prema (1175),(1177),(1181),(1183)

$$E(\alpha) = E_1(\alpha) + E_2(\alpha) + E_3(\alpha) + E_4(\alpha) =$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{r-\gamma} n_{s_\varrho} - n_\alpha - \frac{\underline{M}}{4} + \frac{\underline{N}}{2} - m_\alpha + n_\alpha - \frac{1}{2} + \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} + 1 + m_\alpha =$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{r-\gamma} n_{s_\varrho} + \sum_{\varepsilon=1}^{\gamma} n_{k_\varepsilon} - \frac{\underline{M}}{4} + \frac{\underline{N}}{2} + \frac{1}{2}\,. \qquad (1185)$$ 554

Kad je primjenljiva formula (1108) dobijemo analogno, upotrijebivši (1178) odnosno (1179) umjesto (1176) odnosno (1177), iste formule, samo je $\underline{N}$ nadomješten sa $\underline{N+1}$. Svakako je

$$E(a) = E(\alpha)\,, \qquad (1186)$$ 555

a budući da izrazi (1184) i (1185) uopće ne ovise o tom, da li smo preselili indeks $\underline{a}$ ili $\underline{b}$ i t.d., odnosno α ili β i t.d., to je dakle

$$E(a) = E(b) = \ldots = E(\alpha) = E(\beta) = \ldots \qquad (1187)$$ 556

t.j. sva dopustiva preseljenja daju članove s istim predznakom.

U slučaju primjenljivosti formule (1104) osigurali smo dakle, da u kanoničkom obliku postoji član oblika $t^{\frac{\underline{M}}{2}} P_o$, a u slučaju primjenljivost formule (1108), da postoji član oblika $t^{\frac{\underline{M}}{2}+1} P_1$. Time je proveden dokaz, da pod uvjetima $\underline{b/}$ ima integrala u kanoničkom obliku. To vrijedi tim više, ako parametri nisu stavljeni jednako nuli, kako smo to pretpostavili.

$\underline{c/}$ Na temelju razlaganja pod $\underline{a/}$ ~~(str. 234 do 240)~~ i pod $\underline{b/}$ ~~(str. 240 do 249)~~ možemo sad provesti dokaz, da su uvjeti stavka ~~III~~IV.11. ~~potrebni~~ nužni, t.j. da u svim slučajevima, gdje nijedan od triju uvjeta A/,B/,C/ tog stavka nije zadovoljen, ima integrala u kanoničkom obliku. Da dobijemo sve te slučajeve, razlikujemo ove mogućnosti:

1. Nema nijednog indeksa <u>k</u>, za koji je $m_k \geqq 2n_k$.

2. Ima jedan indeks, za koji je $m_k \geqq 2n_k$.

3. Ima tak broj (veći od nule) takvih indeksa.

4. Ima lih broj veći od jedan takvih indeksa.

Ad 1. Da uvjet A/ stavka III.11. ne bude zadovoljen, mora postojati jedan indeks k_1, za koji je

$$m_{k_1} \geqq n_{k_1} . \qquad (1188)$$

Da uvjet B/ ne bude zadovoljen, mora postojati jedan indeks k_2, za koji je

$$m_{k_2} - n_{k_2} > -(m_{k_1} - n_{k_1} + 1) . \qquad (1189)$$

Uvjet C/ očito nije zadovoljen. Budući da (1188),(1189) odgovaraju pretpostavkama (1150) i (1151) za q=1, to je taj slučaj sadržan pod <u>b/</u>. U kanoničkom obliku dakle ima integrala.

Ad 2. Uvjeti A/ i C/ očito nisu zadovoljeni. Budući da iz $m_k \geqq 2n_k$ slijedi $m_k \geqq n_k$, to postoji indeks, za koji vrijedi (1188), tako da moramo tražiti, da postoji i indeks, koji zadovoljava (1189), jer bi inače bio zadovoljen uvjet B/. Time je slučaj opet sveden na razmatranje pod b/. I ovdje dakle ima integrala u kanoničkom obliku.

Ad 3. Ako je broj indeksa, za koje vrijedi $m_k \geqq 2n_k$, jednak q+1, gdje je <u>q</u> lih broj, to za <u>q</u> indeksa vrijedi pogotovo (1150), dok (q+1)-ti svakako zadovoljava (1152) i ujedno (1151). I ovaj slučaj se dakle svodi na razmatranja pod b/, dakle ima integrala u kanoničkom obliku.

Ad 4. Uvjeti A/ i B/ očito nisu zadovoljeni. Ako od uvjeta C/ nije zadovoljen (1028), onda to znači, da ima jedan indeks, za koji vrijedi (1151), dok sa (1026) nužno vrijedi i (1150). Prema razlaganju pod b/ dakle ima integrala u kanoničkom obliku.

Ako je naprotiv (1028) zadovoljen, moramo pretpostaviti, da ima barem jedan indeks izmedju $1,\ldots,q$, za koji dotični parametar nije stavljen jednako nuli, tako da je prekršen uvjet (1027). Ovaj slučaj je raspravljen pod a/, tako da i tu ima integrala u kanoničkom obliku.

Time su sve mogućnosti iscrpljene i dokaz stavka III.11. je proveden.

12. Nekoliko specijalnih slučajeva integralnih teorema.

Kao primjenu općih razmatranja odredit ćemo kanonski oblik najjednostavnijih integralnih teorema. Odabiremo za to kompozicije dviju Besselovih funkcija, kojima nijedan indeks nije veći od jedan.

Da tekst bude kraći, stavit ćemo iznad znaka jednakosti broj formule, na kojoj se temelji dotična prijetvorba. Slučaj, da je koji parametar stavljen jednako nuli, posebno će se navesti, ako kod toga nastaje neodredjen oblik, pa je potreban granični prijelaz.

$$K^{1,1}_{o,o}(t;x_1,x_2) \overset{\substack{129\\(757)}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_{x_1} S_{x_2} \int\limits_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})dy =$$

$$\overset{\substack{\text{II } 187\\(305)}}{=} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} S_{x_1} S_{x_2} S_{j(x_k)} \Lambda_o(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) =$$

$$\overset{\substack{\text{II } 188\\(306)}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{o}^{t-x_1-x_2} \Phi(y)\, \Lambda_o(c\sqrt{t^2-(y+x_1+x_2)^2})dy =$$

$$\overset{\substack{\text{II } 194\\(312)}}{=} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int\limits_{x_1+x_2}^{t} \Phi(y-x_1-x_2)\, \Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})dy \qquad (1190)\ 559$$

$$\Phi(x) \overset{\substack{\text{II } 189\\(307)}}{=} F_1(x) * F_2(x) * H(x) \qquad (1191)\ 560$$

$$F_1(x) \overset{\substack{\text{II } 159 \qquad \text{II } 191\\(278),(309)}}{=} x+x_1 \qquad (1192)\ 561$$

$$F_2(x) \overset{\substack{\text{II } 159 \qquad \text{II } 191\\(278),(309)}}{=} x+x_2 \qquad (1193)\ 562$$

$$H(x) \overset{\substack{\text{II } 188\\(305)}}{=} 1 \qquad (1194)\ 563$$

Dakle:

$$\phi(y-x_1-x_2) = \int\limits_0^{y-x_1-x_2} \left[\int\limits_0^{\eta} (\eta-\xi+x_1)(\xi+x_2)\,d\xi\right] d\eta \quad . \tag{1195}$$ 564

Proračun ovog integrala daje

$$\phi(y-x_1-x_2) = \frac{y^4}{24} - \frac{(x_1^2+x_2^2)y^2}{4} + \frac{(x_1^3+x_2^3)y}{3} - \frac{(x_1^2-x_2^2)^2}{8} \tag{1196}$$ 565

Provedemo li u (1190) 559 diferencijaciju po t, ~~slijedi~~:

$$K^{1,1}_{o,o}(t;x_1,x_2) \overset{\text{III (9)}}{\overset{(346)}{=}} \frac{\partial}{\partial t}\left\{\phi(t-x_1-x_2) - \frac{c^2 t}{2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\phi(y-x_1-x_2)\,\Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy\right\} =$$

$$\overset{\text{III (9)}}{\overset{(346)}{=}} \frac{\partial}{\partial t}\phi(t-x_1-x_2) - \frac{c^2}{2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\phi(y-x_1-x_2)\,\Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy -$$

$$- \frac{c^2 t}{2}\phi(t-x_1-x_2) + \frac{c^4 t^2}{8}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\phi(y-x_1-x_2)\,\Lambda_2(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \tag{1197}$$ 566

Uvrstimo li ovdje (1196) 565, to se integrali raspadaju u integrale oblika

$\int\limits_{x_1+x_2}^{t} y^m\,\Lambda_n(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy$ sa $m=4,2,1,0$ i $n=1,2$. Ti se integrali

mogu izraziti ovako:

$$\int\limits_{x_1+x_2}^{t} y^4\,\Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \overset{\text{III 383}}{\overset{(599)}{=}} \frac{2}{c^2}\left[t^3 - (x_1+x_2)^3\,\Lambda_o(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2})\right] -$$

$$- \frac{6}{c^2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t} y^2\,\Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \overset{\text{III 255}}{\overset{(471)}{=}} \frac{2t^3}{c^2} + \frac{6t}{c^4} -$$

$$-\left[\frac{2(x_1+x_2)^3}{c^2} + \frac{6(x_1+x_2)}{c^4}\right]\Lambda_o(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) - \frac{3(x_1+x_2)\left[t^2-(x_1+x_2)^2\right]}{c^2}\,\cdot$$

$$\cdot\,\Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) - \frac{6}{c^4}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy - \frac{3t^2}{c^2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \tag{1198}$$ 567

$$\int_{x_1+x_2}^{t} y^2 \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \overset{\text{III 382}}{\overset{(598)}{=}} \frac{2}{c^2}\left[t-(x_1+x_2)\,\Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2})\right] -$$

$$- \frac{2}{c^2}\int_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \qquad (1199)\ 568$$

$$\int_{x_1+x_2}^{t} y\, \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \overset{\text{III 384}}{\overset{(600)}{=}} \frac{2}{c^2}\left[1-\Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2})\right] \qquad (1200)\ 569$$

$$\int_{x_1+x_2}^{t} y^4 \Lambda_2(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \overset{\text{III 382}}{\overset{(598)}{=}} \frac{4}{c^2}\left[t^3-(x_1+x_2)^3\,\Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2})\right] -$$

$$- \frac{24}{c^4}\left[t-(x_1+x_2)\,\Lambda_0(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2})\right] + \frac{24}{c^4}\int_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \qquad (1201)\ 570$$

$$\int_{x_1+x_2}^{t} y^2 \Lambda_2(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \overset{\text{III 382}}{\overset{(598)}{=}} \frac{4}{c^2}\left[t-(x_1+x_2)\,\Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2})\right] -$$

$$- \frac{4}{c^2}\int_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \qquad (1202)\ 571$$

$$\int_{x_1+x_2}^{t} y\, \Lambda_2(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \overset{\text{III 384}}{\overset{(600)}{=}} \frac{4}{c^2}\left[1-\Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2})\right] \qquad (1203)\ 572$$

$$\int_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_2(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \overset{\text{III 336}}{\overset{(552)}{=}} \frac{4}{c^2 t} - \frac{4(x_1+x_2)}{c^2t^2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) -$$

$$- \frac{8}{c^2t^2}\int_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_0(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy + \frac{4}{c^2t^2}\int_{x_1+x_2}^{t} \Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})\,dy \qquad (1203)\ 573$$

Pomoću tih izraza dolazimo konačno do kanoni$\overset{s}{\text{č}}$kog oblika, koji glasi:

$$\underline{\underline{K^{1,1}_{o,o}(t;x_1,x_2)}} = \frac{x_1+x_2}{8}\left[t^2+(x_1-x_2)^2+\frac{1}{c^2}\right]\Lambda_o\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right) +$$

$$+ \frac{x_1+x_2}{16}\left[t^2-c^2t^2(x_1-x_2)^2+c^2(x_1^2-x_2^2)^2-(x_1+x_2)^2\right]\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right) +$$

$$+\left[\frac{t^2}{8}+\frac{c^2(x_1^2-x_2^2)^2}{8}-\frac{x_1^2+x_2^2}{4}+\frac{1}{8c^2}\right]\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_o\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy +$$

$$+\left[\frac{t^2}{16}+\frac{c^2t^2(x_1^2+x_2^2)}{8}\right]\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy - \frac{t}{8c^2} - \frac{t(x_1^2+x_2^2)}{4} \qquad (1204)$$ 574

Slično se dobije

$$K^{1,o}_{o,o}(t;x_1,x_2) \overset{\overset{129}{(757)}}{=} -\frac{\partial}{\partial t}S_{x_1}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_o\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy =$$

$$\overset{\overset{II\ 187}{(305)}}{=} \frac{\partial}{\partial t}S_{x_1}S_{j(x_k)}\Lambda_o\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right) =$$

$$\overset{\overset{II\ 188\quad II\ 194}{(306),(312)}}{=} \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\phi(y-x_1-x_2)\Lambda_o\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy \overset{\overset{III(9)}{(346)}}{=} \phi(t-x_1-x_2) -$$

$$- \frac{c^2t}{2}\int\limits_{x_1+x_2}^{t}\phi(y-x_1-x_2)\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy \qquad (1205)$$ 575

$$\phi(x) = F_1(x) * H(x) = \int\limits_{o}^{x}(\xi+x_1)d\xi \qquad (1206)$$ 576

$$\phi(y-x_1-x_2) = \frac{y^2}{2} - x_2y - \frac{x_1^2-x_2^2}{2} \qquad (1207)$$ 577

Uvrštenje u 575 (1205) daje uz pomoć 567 569 (1199),(1200)

$$\underline{\underline{K^{1,o}_{o,o}(t;x_1,x_2)}} = \frac{(x_1-x_2)t}{2}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \frac{t}{2}\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})dy +$$

$$+ \frac{c^2(x_1^2-x_2^2)t}{4}\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})dy - \frac{x_1^2-x_2^2}{2} \qquad (1208)$$ 578

Dalje ~~dobijemo~~ vamo

$$\underline{\underline{K^{1,1}_{1,o}(t;x_1,x_2)}} \overset{(715)}{=} \frac{2}{c^2x_1}\left\{\frac{\partial K^{1,1}_{o,o}(t;x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_1(t-x_1)\Lambda_o(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2})\right\} =$$

574 III 9 III 11

$$\overset{(1204),(346),(348)}{=} \frac{x_1-x_2}{c^2}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) +$$

$$+ \frac{2(t-x_1)}{c^2}\Lambda_o(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) - \frac{x_1-x_2}{2}\left[t^2-(x_1+x_2)^2\right]\Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) +$$

$$+ \left[(x_1^2-x_2^2)-\frac{1}{c^2}\right]\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})dy + \frac{t^2}{2}\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})dy - \frac{t}{c^2}$$

$$(1209)$$ 579

$$\underline{\underline{K^{1,1}_{1,1}(t;x_1,x_2)}} \overset{(716)}{=} \frac{2}{c^2x_2}\left\{\frac{\partial K^{1,1}_{o,o}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2} + x_2(t-x_2)\Lambda_1(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2})\right\} =$$

579 III(9) III 11

$$\overset{(1209),(346),(348)}{=} -\frac{2(x_1+x_2)}{c^2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) +$$

$$+ \frac{2(t-x_1)}{c^2}\Lambda_1(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) + \frac{2(t-x_2)}{c^2}\Lambda_1(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) -$$

$$- \frac{4}{c^2}\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})dy \qquad (1210)$$ 580

87

$$\underline{\underline{K^{1,0}_{1,0}(t;x_1,x_2)}} \overset{(715)}{=} \frac{2}{c^2 x_1}\left\{ \frac{\partial K^{1,0}_{0,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_1} + x_1 \Lambda_o(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2})\right\} =$$

578 III(9)

$$\overset{(1208),(346)}{=} \frac{2}{c^2}\Lambda_o(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) + t\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})dy - \frac{2}{c^2} \qquad (1211)$$ 581

88

$$\underline{\underline{K^{1,0}_{0,1}(t;x_1,x_2)}} \overset{(716)}{=} \frac{2}{c^2 x_2}\left\{ \frac{\partial K^{1,0}_{0,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2} + (t-x_2)\Lambda_o(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2})\right\} =$$

578 III(9)

$$\overset{(1208),(346)}{=} -\frac{2t}{c^2 x_2}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \left(\frac{2t}{c^2 x_2} - \frac{2}{c^2}\right)\Lambda_o(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) -$$

$$- t\int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-y^2})dy + \frac{2}{c^2} \qquad (1212)$$ 582

88

$$\underline{\underline{K^{1,0}_{1,1}(t;x_1,x_2)}} \overset{(716)}{=} \frac{2}{c^2 x_2}\left\{ \frac{\partial K^{1,0}_{1,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2} + (t-x_2)\Lambda_o(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2})\right\} =$$

581 III(9)

$$\overset{(1211),(346)}{=} -\frac{2t}{c^2 x_2}\Lambda_1(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \frac{2}{c^2}\Lambda_1(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}) +$$

$$+ \frac{2(t-x_2)}{c^2 x_2}\Lambda_1(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}) \qquad (1213)$$ 583

69

$$\underline{\underline{K^{0,0}_{0,0}(t;x_1,x_2)}} \overset{(693)}{=} \int_{x_1+x_2}^{t}\Lambda_o(c\sqrt{t^2-y^2})dy \qquad (1214)$$ 584

87

$$\underline{\underline{K^{0,0}_{1,0}(t;x_1,x_2)}} \overset{(715)}{=} \frac{2}{c^2 x_1}\left\{ \frac{\partial K^{0,0}_{0,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_1} + \Lambda_o(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2})\right\} =$$

584

$$\overset{(1214)}{=} \frac{2}{c^2 x_1}\left\{ -\Lambda_o(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}) + \Lambda_o(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2})\right\} \qquad (1215)$$ 585

$$K^{0,0}_{1,1}(t;x_1,x_2) \overset{(716)}{=} \frac{2}{c^2x_2}\left\{\frac{\partial K^{0,0}_{1,0}(t;x_1,x_2)}{\partial x_2} + \Lambda_1\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right)\right\} =$$

$$\overset{(1215),(346)}{=} -\frac{2(x_1+x_2)}{c^2x_1x_2}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-(x_1+x_2)^2}\right) +$$

$$+\frac{2}{c^2x_1}\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-x_1)^2-x_2^2}\right) + \frac{2}{c^2x_2}\Lambda_1\left(c\sqrt{(t-x_2)^2-x_1^2}\right) \qquad (1216)$$ 586

Stavimo li u kompozicijama (1212),(1213),(1215),(1216) $x_1=0$, odnosno $x_2=0$, odnosno oboje, to granični prijelaz daje:

$$\underline{\underline{K^{1,0}_{0,1}(t;x_1,0)}} = -\frac{2}{c^2}\Lambda_0\left[c(t-x_1)\right] - tx_1\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-x_2^2}\right) -$$

$$-\int_{x_1}^{t}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-y^2}\right)dy + \frac{2}{c^2} \qquad (1217)$$ 587

$$\underline{\underline{K^{1,0}_{1,1}(t;x_1,0)}} = -\frac{4t}{c^2(t+x_1)}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-x_1^2}\right) + \frac{2(t-x_1)}{c^2(t+x_1)}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-x_1^2}\right) +$$

$$+\frac{2}{c^2}\Lambda_1\left[c(t-x_1)\right] \qquad (1218)$$ 588

$$\underline{\underline{K^{0,0}_{1,0}(t;0,x_2)}} = (t-x_2)\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-x_2^2}\right) \qquad (1219)$$ 589

$$\underline{\underline{K^{0,0}_{1,1}(t;0,x_2)}} = -\frac{4}{c^2(t+x_2)}\Lambda_0\left(c\sqrt{t^2-x_2^2}\right) - \frac{2(t-x_2)}{c^2x_2(t+x_2)}\Lambda_1\left(c\sqrt{t^2-x_2^2}\right) +$$

$$+\frac{2}{c^2x_2}\Lambda_1\left[c(t-x_2)\right] \qquad (1220)$$ 590

$$\underline{\underline{K^{0,0}_{1,1}(t;0,0)}} = -\frac{8}{c^2t}\left[\Lambda_0(ct) - \Lambda_1(ct)\right] \qquad (1221)$$ 591

Formule za kompozicije, koje se iz navedenih mogu dobiti pomoću komutativnog zakona komponiranja, kao $K^{1,1}_{o,1}$, $K^{o,1}_{o,o}$, $K^{o,1}_{1,o}$, $K^{o,1}_{1,1}$, $K^{o,1}_{o,o}$, $K^{o,o}_{o,1}$, nije potrebno posebno navesti.

Očito je (1219) identičan sa (109), dok (1215) daje (110), ako stavimo $x_2=0$. Vidimo dakle, da su teoremi (109) i (110), do kojih smo došli drugim putom već u ~~uvodu,~~ I. dijelu kao specijalni slučajevi sadržani u našim općim formulama.

Još ćemo na tim primjerima provjeriti ispravnost stavka III.11. ~~Uvjet C/ toga~~ stavka je za r=2 neispunjiv, jer se traži $r \geq q \geq 3$. Uvjeti A/ i B/ daju se očito ~~za r=2 sažeti u nejednadžbu~~

$$m_1+m_2 < n_1+n_2 \quad . \tag{1222}$$

Lako je vidjeti, da $K^{1,o}_{1,1}$, $K^{o,o}_{1,o}$ i $K^{o,o}_{1,1}$ zadovoljavaju ~~taj~~ uvjet, pa zaista prema (1213),(1215),(1216) u kanonskom obliku nema integrala, dok ih za $K^{1,1}_{o,o}$, $K^{1,1}_{1,o}$, $K^{1,1}_{1,1}$, $K^{1,o}_{o,o}$, $K^{1,o}_{1,o}$, $K^{1,o}_{o,1}$ i $K^{o,o}_{o,o}$ ima, kako pokazuju formule (1204),(1209),(1210),(1208),(1211),(1212),(1214).

- . -

S A D R Ž A J

III. DIO

INTEGRALNI TEOREMI BESSELOVIH FUNKCIJA

LITERATURA

G.N.Watson, A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge 1922. (Autoru ova knjiga nije bila pristupačna).
Gray, Matthews and Macrobert, A treatise on Bessel functions. London 1931.
R. Weyrich, Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen. Leipzig u. Berlin 1937.
Jahnke-Emde, Funktionentafeln, Leipzig u. Berlin 1933.
Courant u. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I. Berlin 1931. (7. Kap. §2.)
Whittaker and Watson, A course of modern analysis. Cambridge 1935.(Ch.XVII)
H. Jeffreys, Operationa methods in mathematical physics. Cambridge 1931. (Ch.VIII).
Frank-v.Mises, Differentialgleichungen der Physik I. Braunschweig 1930. (6.Kap. §4., 8.Kap. § 3.).
K.W.Wagner, Operatorenrechnung. Leipzig 1940. (Naročito odlomak 9).
G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation. Berlin 1937.
H. Fischer, Die Laplace-Transformation in der Theorie der Besselfunktionen. Freiburg i Br. 1936.
Campbell and Foster, Fourier integrals for practical applications. American Telephone and Telegraph Company 1931.
R.O.Kuzmin, Besselevi funkcii. Leningrad Moskva, 1935.

Osim toga u tekstu citirana literatura.

D O D A T A K 1.

Izvod formule (350) izmedju triju Besselovih funkcija iz poznatih formula.

Schafheitlin*) daje ove dvije formule:

$$J_{\nu+p} = J_\nu \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda)\ \Pi(\nu+p-\lambda-1)}{\Pi(\lambda)\ \Pi(p-2\lambda)\ \Pi(\nu+\lambda-1)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda} -$$

$$- J_{\nu-1} \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda-1)\ \Pi(\nu+p-\lambda-1)}{\Pi(\lambda)\ \Pi(p-2\lambda-1)\ \Pi(\nu+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1} \qquad (D_1 1)$$

$$J_{\nu-p} = J_\nu \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda)\ \Pi(\nu-\lambda)}{\Pi(\lambda)\ \Pi(p-2\lambda)\ \Pi(\nu-p+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda} -$$

$$- J_{\nu+1} \sum_0 (-1)^\lambda \frac{\Pi(p-\lambda-1)\ \Pi(\nu-\lambda-1)}{\Pi(\lambda)\ \Pi(p-2\lambda-1)\ \Pi(\nu-p+\lambda)} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2\lambda-1}. \qquad (D_1 2)$$

Našim oznakama (390),(391),(392) može se $(D_1 1)$ pisati u oblicima

$$J_a - J_b A_{a,b-1} + J_{b-1} A_{a,b} = 0 \qquad (D_1 3)$$

$$J_a - J_{b+1} A_{a,b} + J_b A_{a,b+1} = 0 \qquad (D_1 4)$$

$$J_a - J_c A_{a,c-1} + J_{c-1} A_{a,c} = 0 \qquad (D_1 5)$$

$$J_a - J_{c+1} A_{a,c} + J_c A_{a,c+1} = 0 \qquad (D_1 6)$$

$$J_b - J_c A_{b,c-1} + J_{c-1} A_{b,c} = 0 \qquad (D_1 7)$$

$$J_b - J_{c+1} A_{b,c} + J_c A_{b,c+1} = 0 , \qquad (D_1 8)$$

a $(D_1 2)$ se može pisati

---

*) P.Schafheitlin, Die Theorie der Besselschen Funktionen, Teubner, Leipzig und Berlin 1908, str. 17 i 19, formule (6) i (7).

$$J_{a+1} A_{a,b} - J_a A_{a+1,b} + J_b = 0 \qquad (D_1 9)$$

$$J_a A_{a-1,b} - J_{a-1} A_{a,b} + J_b = 0 \qquad (D_1 10)$$

$$J_{a+1} A_{a,c} - J_a A_{a+1,c} + J_c = 0 \qquad (D_1 11)$$

$$J_a A_{a-1,c} - J_{a-1} A_{a,c} + J_c = 0 \qquad (D_1 12)$$

$$J_{b+1} A_{b,c} - J_b A_{b+1,c} + J_c = 0 \qquad (D_1 13)$$

$$J_b A_{b-1,c} - J_{b-1} A_{b,c} + J_c = 0 \quad . \qquad (D_1 14)$$

Eliminacija od J_{b-1} iz $(D_1 3),(D_1 14)$, odnosno od J_{b+1} iz $(D_1 4),(D_1 13)$ daje relacije

$$J_a A_{b,c} - J_b (A_{a,b-1} A_{b,c} - A_{b-1,c} A_{a,b}) + J_c A_{a,b} = 0 \quad (D_1 15)$$

odnosno

$$J_c A_{b,c} - J_b (A_{b+1,c} A_{a,b} - A_{a,b+1} A_{b,c}) + J_c A_{a,b} = 0 \quad (D_1 16)$$

Eliminacija od J_{c-1} iz $(D_1 5),(D_1 7)$ odnosno od J_{c+1} iz $(D_1 6),(D_1 8)$ daje:

$$J_a A_{b,c} - J_b A_{a,c} + J_c (A_{b,c-1} A_{a,c} - A_{a,c-1} A_{b,c}) = 0 \qquad (D_1 17)$$

odnosno

$$J_a A_{b,c} - J_b A_{a,c} + J_c (A_{a,c+1} A_{b,c} - A_{b,c+1} A_{a,c}) = 0 \qquad (D_1 18)$$

Eliminacija od J_{a-1} iz $(D_1 10),(D_1 12)$ odnosno od J_{a+1} iz $(D_1 9),(D_1 11)$ daje:

$$J_a (A_{a-1,c} A_{a,b} - A_{a-1,b} A_{a,c}) - J_b A_{a,c} + J_c A_{a,b} = 0 \qquad (D_1 19)$$

odnosno

$$J_a (A_{a+1,b} A_{a,c} - A_{a+1,c} A_{a,b}) - J_b A_{a,c} + J_c A_{a,b} = 0 \qquad (D_1 20)$$

Budući da su koeficijenti Besselovih funkcija u (350) do jednog zajedničkog faktora jednoznačno odredjeni, to poredbom jednačaba $(D_1 15)$ do $(D_1 20)$ slijedi:

$$A_{a,b-1}\,A_{b,c} - A_{b-1,c}\,A_{a,b} = A_{b+1,c}\,A_{a,b} - A_{a,b+1}\,A_{b,c} = A_{a,c} \qquad (D_1 21)$$

$$A_{b,c-1}\,A_{a,c} - A_{a,c-1}\,A_{b,c} = A_{a,c+1}\,A_{b,c} - A_{b,c+1}\,A_{a,c} = A_{a,b} \qquad (D_1 22)$$

$$A_{a-1,c}\,A_{a,b} - A_{a-1,b}\,A_{a,c} = A_{a+1,}\,A_{a,c} - A_{a+1,c}\,A_{a,b} = A_{b,c} \qquad (D_1 23)$$

pa je time opća relacija (350) s koeficijentima (390),(391),(392) dokazana.

Formule ($D_1$1) i ($D_1$2) daje i Nielsen*), koji ih pripisuje Lommelu**). Isto tako pripisuje Lommelu formule

$$R^{\nu,n-1}(x)\,R^{\nu-1,p}(x) - R^{\nu,p-1}(x)\,R^{\nu-1,n}(x) = R^{\nu+p,n-p-1}(x) \qquad (D_1 24)^{***)}$$

sa specijalnim slučajem

$$R^{\nu,p}(x)\,R^{\nu-1,p}(x) - R^{\nu,p-1}(x)\,R^{\nu-1,p+1}(x) = 1 \qquad (D_1 25)^{***)}$$

gdje je $R^{\nu,p}(x)$ Lommelov polinom

$$R^{\nu,p}(x) = \sum_{s=0}^{<\frac{p+1}{2}} \frac{(-1)^s\,(p-s)!}{s!} \binom{\nu+p-s}{p-2s} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2s} \qquad (D_1 26)^{4)}$$

koji očito odgovara našim koeficijentima $A_{a,b}$, i to vrijedi

$$R^{\nu,p} = A_{\nu+p+1,\nu} \qquad (D_1 27)$$

ili

$$A_{a,b} = R^{b,a-b-1} \,. \qquad (D_1 28)$$

---

*) N.Nielsen, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Teubner, Leipzig 1904, str.30 (4),(5), str.23 (2).

**) Lommel, Studien über die Besselschen Funktionen, p. 3, 1868.

***) Nielsen, l.c. str. 33 (6) i str. 34 (7). Citira se Lommel, Mathematische Annalen, Bd. 4. p. 115; 1871.

4) Nielsen, l,c, str. 23 (2).

$(D_1 24)$ glasi dakle s našim oznakama

$$A_{\nu+n,\nu}\, A_{\nu+p,\nu-1} - A_{\nu+p,\nu}\, A_{\nu+n,\nu-1} = A_{\nu+n,\nu+p} \qquad (D_1 29)$$

a to je identično sa $(D_1 22)$.

Nije teško posveopćiti relacije $(D_1 21)$,$(D_1 22)$,$(D_1 23)$. Pišemo li u smislu (355)

$$M_{c,d}\, J_a + M_{d,a}\, J_c + M_{a,c}\, J_d = 0 \qquad (D_1 30)$$

$$M_{c,d}\, J_b + M_{d,b}\, J_c + M_{b,c}\, J_d = 0 \qquad (D_1 31)$$

i eliminiramo J_d, to slijedi

$$M_{c,d}\, M_{b,c}\, J_a - M_{c,d}\, M_{a,c}\, J_b + (M_{d,a}\, M_{b,c} - M_{d,b}\, M_{a,c})\, J_c = 0 \qquad (D_1 32)$$

ili s obzirom na (355) i s obzirom na

$$M_{a,c} = -M_{c,a} \quad \text{i t.d.} \qquad (D_1 33)$$

$$M_{d,a}\, M_{b,c} - M_{d,b}\, M_{a,c} = M_{c,d}\, M_{a,b} \qquad (D_1 34)$$

ili

$$M_{a,b}\, M_{c,d} + M_{b,c}\, M_{a,d} + M_{c,a}\, M_{b,d} = 0 \quad . \qquad (D_1 35)$$

Opaža se, da se iz jednog člana lijeve strane od $(D_1 35)$ dobiju ostali članovi cikličkom permutacijom bilo kojih triju indeksa. Dalje se vidi, da je jednadžba $(D_1 35)$ invarijantna s obzirom na bilo kakvu permutaciju svih četiriju indeksa.

Stavimo li

$$a = r+s+p+q \qquad (D_1 36)$$

$$b = r+s+p \qquad (D_1 37)$$

$$c = r+s \qquad (D_1 38)$$

$$d = r \qquad (D_1 39)$$

to se na temelju $(D_1 27)$ može $(D_1 35)$ pisati kao relacija izmedju

Lommelovih polinoma $(D_1 26)$:

$$R^{r+s+p,q-1}\, R^{r,s-1} + R^{r+s,p-1}\, R^{r,s+p+q-1} = R^{r+s,p+q-1}\, R^{r,s+p-1} \qquad (D_1 40)$$

ili, ako stavimo

$$r = \nu - 1 \qquad (D_1 41)$$

$$q = n-p \qquad (D_1 42)$$

$$R^{\nu+s+p-1,n-p-1}\, R^{\nu-1,s-1} + R^{\nu+s-1,p-1}\, R^{\nu-1,s+n-1} =$$

$$= R^{\nu+s-1,n-1}\, R^{\nu-1,s+p-1} \qquad (D_1 43)$$

što za $s=1$ daje $(D_1 24)$. Sa $(D_1 40)$ je dakle dobiveno powveopćenje relacije $(D_1 24)$, koju navodi Nielsen. *)

Nešto elegantnije se može dobiti relacija $(D_1 35)$ kao uvjet snošljivosti homogenih jednačaba

$$M_{c,d}\, J_b + M_{d,b}\, J_c + M_{b,c}\, J_d = 0 \qquad (D_1 44)$$

$$M_{c,d}\, J_a + M_{d,a}\, J_c + M_{a,c}\, J_d = 0 \qquad (D_1 45)$$

$$M_{b,d}\, J_a + M_{d,a}\, J_b + M_{a,b}\, J_d = 0 \qquad (D_1 46)$$

$$M_{b,c}\, J_a + M_{c,a}\, J_b + M_{a,b}\, J_c = 0 \ , \qquad (D_1 47)$$

koji glasi:

$$\begin{vmatrix} 0 & M_{c,d} & M_{d,b} & M_{b,c} \\ M_{c,d} & 0 & M_{d,a} & M_{a,c} \\ M_{b,d} & M_{d,a} & 0 & M_{a,b} \\ M_{b,c} & M_{c,a} & M_{a,b} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & M_{c,d} & -M_{b,d} & M_{b,c} \\ -M_{c,d} & 0 & M_{a,d} & M_{c,a} \\ M_{b,d} & -M_{a,d} & 0 & M_{a,b} \\ -M_{b,c} & -M_{c,a} & -M_{a,b} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (M_{a,b}\, M_{c,d} + M_{c,a}\, M_{b,d} + M_{b,c}\, M_{a,d})^2 = 0 \qquad (D_1 48)$$

*) I ovu relaciju navodi Nielsen str. 34 (8). Citira Crelier, Annali di Matematica (2) Bd 24. p. 141; 1896.

DODATAK 2.

Relacija izmedju Lommelovih polinoma na temelju teorije veričnih razlomaka.

Definiramo*)

$$\alpha_{\nu,\lambda} = K\begin{pmatrix} a_{\lambda+1}, a_{\lambda+2}, \dots, a_{\lambda+\nu} \\ b_\lambda, b_{\lambda+1}, \dots, b_{\lambda+\nu}\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} b_\lambda & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{\lambda+1} & b_{\lambda+1} & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_{\lambda+2} & b_{\lambda+2} & -1 & 0 & \dots \\ & & \dots\dots\dots\dots & & & \end{vmatrix} \qquad (D_21)$$

$$\alpha_{\nu,0} = \alpha_\nu \qquad (D_22)$$

$$\beta_{\nu,\lambda} = \alpha_{\nu-1,\lambda+1} \qquad (D_23)$$

$$\alpha_{-1,\lambda} = 1, \quad \beta_{-1,\lambda} = 0, \quad \alpha_{0,\lambda} = b_\lambda, \quad \beta_{0,\lambda} = 1, \quad \beta_{1,\lambda} = b_{\lambda+1} \qquad (D_24)$$

Ako medju varijablama $x_0, x_1, x_2, \dots$ postoje jednadžbe**)

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= b_0x_1 + a_1x_2 \\ x_1 &= b_1x_2 + a_2x_3 \\ &\dots\dots\dots \\ x_\nu &= b_\nu x_{\nu+1} + a_{\nu+1}x_{\nu+2} \end{aligned}\right\} \qquad (D_25)$$

to vrijedi

---

*) O.Perron, Die Lehre von den Kettenbrüche, Teubner, Leipzig und Berlin 1929, str. 14. (23),(23a), str. 6 (9), str. 11 (15), str. 15 (25). Da se izbjegne kolizija s našim oznakama, pišemo mjesto Perronovih oznaka $A_{\nu,\lambda}$, $B_{\nu,\lambda}$ svagdje $\alpha_{\nu,\lambda}$, $\beta_{\nu,\lambda}$.

**) Perron, l.c. str. 12 (21).

$$x_\lambda = \alpha_{\nu-1,\lambda}\, x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda}\alpha_{\nu-2,\lambda}\, x_{\nu+\lambda+1} \qquad (D_2 6)^*)$$

$$x_{\lambda+1} = \beta_{\nu-1,\lambda}\, x_{\nu+\lambda} + a_{\nu+\lambda}\beta_{\nu-2,\lambda}\, x_{\nu+\lambda+1} \qquad (D_2 7)^*)$$

a $\frac{x_0}{x_1}$ se može predočiti kao verižni razlomak**)

$$\frac{x_0}{x_1} = b_0 + \frac{a_1|}{|b_1} + \dots + \frac{a_{\nu-1}|}{|b_{\nu-1}} + \frac{a_\nu \;|}{|x_\nu : x_{\nu+1}} \qquad (D_2 8)$$

Dalje vrijede jednadžbe***)

$$\beta_{\nu-1,\mu}\alpha_{\mu+\nu+\lambda-1} = \beta_{\nu+\lambda-1,\mu}\alpha_{\mu+\nu-1} + (-1)^{\nu-1}a_{\mu+1}a_{\mu+2}\cdots a_{\mu+\nu}\beta_{\lambda-1,\mu+\nu}\alpha_{\mu-1} \qquad (D_2 9)$$

Povisi li se indeks svih a_λ, b_λ za ρ, to se prema $(D_2 1)$,$(D_2 3)$ povisuju drugi indeksi izraza $\alpha_{\nu,\lambda}$, $\beta_{\nu,\lambda}$ za ρ, t.j. iz njih postaje $\alpha_{\nu,\lambda+\rho}$, $\beta_{\nu,\lambda+\rho}$, a prema $(D_2 2)$ postaje iz $\alpha_\nu = \alpha_{\nu,0}$ $\underline{\alpha_{\nu,\rho}}$.
Jednadžbe $(D_2 9)$ dobiju onda oblik

$$\beta_{\nu-1,\mu+\rho}\alpha_{\mu+\nu+\lambda-1,\rho} = \beta_{\nu+\lambda-1,\mu+\rho}\alpha_{\mu+\nu-1,\rho} +$$
$$+ (-1)^{\nu-1}a_{\mu+\rho+1}a_{\mu+\rho+2}\cdots a_{\mu+\rho+\nu}\beta_{\lambda-1,\mu+\nu+\rho}\alpha_{\mu-1,\rho} \qquad (D_2 10)$$

Stavimo li

$$a_\lambda = -1 \quad (\lambda = 0,1,2,\dots) \qquad (D_2 11)$$

$$b_\lambda = \frac{2(\lambda+1)}{z} \quad (\lambda=0,1,2,\dots) \qquad (D_2 12)$$

$$x_\lambda = J_\lambda(z) \quad (\lambda=0,1,2,\dots) \qquad (D_2 13)$$

---

*) Perron, l.c. str. 14.
**) Perron, l.c. str. 13.
***) Perron, l.c. str. 18. (36).

to rekurziona formula Besselovih funkcija

$$J_{\lambda-1} = \frac{2\lambda}{z} J_\lambda - J_{\lambda+1} \quad (\lambda = 0,1,2,\dots) \qquad (D_2 14)$$

postaje identična s jednadžbama $(D_2 5)$, tako da prema $(D_2 6)$ mora vrijediti

$$J_\lambda = \alpha_{\nu-1,\lambda} J_{\nu+\lambda} - \alpha_{\nu-2,\lambda} J_{\nu+\lambda+1} \qquad (D_2 15)$$

ili

$$J_{\nu+\lambda+1}\alpha_{\nu-2,\lambda} - J_{\nu+\lambda}\alpha_{\nu-1,\lambda} + J_\lambda = 0 . \qquad (D_2 16)$$

Poredba sa $(D_1 9)$ u dodatku 1. pokazuje, da mora biti

$$\alpha_{\nu-2,\lambda} = A_{\nu+\lambda,\lambda} \quad , \quad \alpha_{\nu-1,\lambda} = A_{\nu+\lambda+1,\lambda} \qquad (D_2 17)$$

ili s obzirom na $(D_2 1)$,$(D_2 11)$,$(D_2 12)$

$$A_{\nu,\lambda} = \alpha_{\nu-\lambda-2,\lambda} = K\begin{pmatrix} & -1, & -1, & \dots & ,-1 & \\ \frac{2(\lambda+1)}{z}, & & \frac{2(\lambda+2)}{z}, & \dots & & , \frac{2(\nu-1)}{z} \end{pmatrix} . \qquad (D_2 18)$$

Prema $(D_1 27)$ u dodatku 1. vrijedi dakle za Lommelove polinome $R^{\nu,p}$

$$R^{\nu,p} = A_{\nu+p+1,\nu} = \alpha_{p-1,\nu} = K\begin{pmatrix} & -1, & -1, & \dots & ,-1 & \\ \frac{2(\nu+1)}{z}, & & \frac{2(\nu+2)}{z}, & \dots & & , \frac{2(\nu+p)}{z} \end{pmatrix} \qquad (D_2 19)$$

pa su time Lommelovi polinomi identificirani s kontinuantama.

S obzirom na $(D_2 11)$,$(D_2 3)$ dobijemo iz $(D_2 10)$

$$\alpha_{\nu-2,\mu+\rho+1}\alpha_{\mu+\nu+\lambda-1,\rho} = \alpha_{\nu+\lambda-2,\mu+\rho+1}\alpha_{\mu+\nu-1,\rho} - \alpha_{\lambda-2,\mu+\nu+\rho+1}\alpha_{\mu-1,\rho} \qquad (D_2 20)$$

ili prema $(D_2 19)$

$$R^{\mu+\rho+1,\nu-1} R^{\rho,\mu+\nu+\lambda} = R^{\mu+\rho+1,\nu+\lambda-1} R^{\rho,\mu+\nu} - R^{\mu+\nu+\rho+1,\lambda-1} R^{\rho,\mu} . \qquad (D_2 21)$$

Stavimo li

$$\rho = m-1 \qquad (D_2 22)$$

$$\mu = s-1 \qquad (D_2 23)$$

$$\nu = p \qquad (D_2 24)$$

$$\lambda = n-p \qquad (D_2 25)$$

to dobijemo

$$R^{m+s-1,p-1}\, R^{m-1,n+s-1} = R^{m+s-1,n-1}\, R^{m-1,s+p-1} - R^{m+s+p-1,n-p-1}\, R^{m-1,s-1} \qquad (D_2 26)$$

a to je identično s relacijom ($D_1 43$) u dodatku 1. Vidi se dakle, da opća relacija ($D_1 43$) odnosno ($D_2 26$) izmedju Lommelovih polinom izvire iz relacija ($D_2 18$), poznatih iz teorije verižnih razlomaka, i to na temelju identifikacije ($D_2 16$) Lommelovih polinoma s kontinuantama.