

# Sustav asistencije vozaču za zadržavanje vozila u prometnoj traci

---

Miočević, Davor

Master's thesis / Diplomski rad

2025

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:168:819703>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-20**



*Repository / Repozitorij:*

[FER Repository - University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing repository](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 101

**SUSTAV ASISTENCIJE VOZAČU ZA ZADRŽAVANJE VOZILA  
U PROMETNOJ TRACI**

Davor Miočević

Zagreb, veljača 2025.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 101

**SUSTAV ASISTENCIJE VOZAČU ZA ZADRŽAVANJE VOZILA  
U PROMETNOJ TRACI**

Davor Miočević

Zagreb, veljača 2025.

## DIPLOMSKI ZADATAK br. 101

Pristupnik: **Davor Miočević (0036510256)**  
Studij: Informacijska i komunikacijska tehnologija  
Profil: Automatika i robotika  
Mentor: izv. prof. dr. sc. Šandor Ileš

Zadatak: **Sustav asistencije vozaču za zadržavanje vozila u prometnoj traci**

### Opis zadatka:

Cilj ovog rada je razviti i simulirati sustav asistencije vozaču za zadržavanje vozila unutar prometne trake (Lane Keeping Assist - LKA). U prvom koraku potrebno je izraditi matematički model bočne dinamike vozila u prostoru stanja. Zatim, na temelju tog modela, sintetizirati regulator koji će upravljati kutom upravljača kako bi se vozilo zadržalo unutar prometne trake. Projektirani regulator potrebno je testirati kroz simulacije u simulatoru visoke vjernosti te analizirati ponašanje vozila u različitim uvjetima. Potrebno je usporediti ponašanje vozila kod ručnog upravljanja i uz razvijeni sustav asistencije vozaču za različite brzine vozila.

Rok za predaju rada: 14. veljače 2025.

## *Zahvala*

*Zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc. Šandoru Ilešu na pruženoj pomoći tijekom izrade ovog diplomskog rada.*

*Zahvaljujem obitelji i prijateljima na podršci tijekom izrade diplomskog rada, kao i tijekom cijelog trajanja studija.*

*Posebno zahvaljujem roditeljima na neizmjerljivoj podršci tijekom studija.*

# Sadržaj

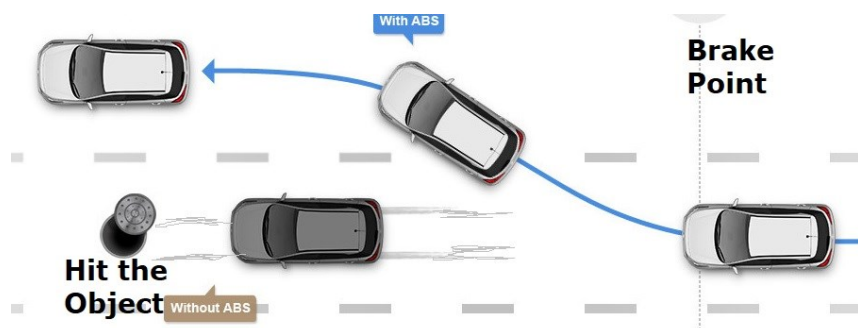
Sadržaj .....	ii
Uvod .....	1
1. Sustav pomoći zadržavanja vozila u prometnoj traci .....	3
1.1 Povijest sustava .....	3
1.2 Trenutne implementacije u industriji .....	4
2. Fizikalni model automobila .....	6
3. Metode sinteze regulatora .....	12
3.1 Linearni Kvadratni Regulator (LQR) .....	12
3.2 Metoda postavljanja polova .....	13
3.3 Predupravljanje .....	13
3.4 Proračun pojačanja regulatora ovisno o brzini Bass-Gura metodom .....	15
4. Algoritam upravljanja zakreta kuta volana .....	18
4.1 Računanje LQR pojačanja .....	18
4.2 Računanje pojačanja naredbom Place .....	19
4.3 Računanje predupravljačkog signala .....	19
4.4 Računanje pojačanja Bass-Gura metodom .....	20
5. Pojednostavljeni bicikl model .....	21
6. Rezultati s pojednostavljenim bicikl modelom .....	23
6.1 LQR regulator bez predupravljačke veze .....	23
6.2 LQR regulator s predupravljačkom vezom .....	24
6.3 Bass-Gura metoda .....	25
7. Simulacijski model .....	27
8. Rezultati eksperimenta .....	29
8.1 Odziv LQR regulatora na skok pobudu .....	30
8.2 Odziv regulatora dobivenog Bass-Gura metodom na skokovitu pobudu .....	32
8.3 Odziv LQR regulatora na DLC manevar .....	34
8.4 Odziv regulatora dobivenog Bass-Gura metodom na DLC manevar .....	36
9. Zaključak .....	39

Literatura .....	40
Sažetak .....	41
Abstract .....	42
Privitak .....	43

## Uvod

U današnje vrijeme sigurnost u prometu je postala jedan od najvećih prioriteta industrije. Kako je tehnologija napredovala, tako su se razvijali napredniji sustavi pomoći vozaču, kako bi vožnja bila sigurnija, ugodnija te ekonomičnija. Prvi sustavi bili su pomoć pri održavanju trakcije pri ubrzavanju (engl. *Traction Control Systems*, TCS) te pri kočenju (engl. *Anti-lock Braking System*, ABS), te su prvi puta uvedeni 70-ih i 80-ih godina prošlog stoljeća. Oni su pomagali vozaču u rubnim situacijama gdje vozač sam nije mogao kontrolirati proklizavanje vozila. TCS sustavi su omogućavali lakše pokretanje pri poledici i mokrome, dok je ABS sprječavao blokiranje kotača u istim situacijama te skratio put kočenja između 16% i 29% [1] a uz to je omogućio vozaču da zadrži kontrolu nad vozilom, nije "proklizao". U situacijama gdje je cesta suha, razlika nije tolika, no prosječan vozač i dalje brže stane kada je ABS sustav prisutan (Slika 0.1).

Nakon ABS i TCS sustava, 90-ih godina u uporabu je ušao sustav kontrole stabilnosti vozila (engl. *Electronic Stability Control*, ESC). Njegova svrha je da spriječi klizanje vozila te gubitak kontrole.



Slika 0.1: Razlika kontrole vozila u slučajevima s i bez ABS-a [2]

Do njegovog izuma dolazi zbog činjenice da je do 20-25% prometnih nesreća u Njemačkoj prije njegovog uvođenja dolazilo zbog gubitka kontrole u situacijama gdje je vozilo na rubu, pa vozači u panici previše pokušavaju ispraviti situaciju (engl. *overcorrecting*). Analiza iz 2001. godine pokazala je da je ESC u vozilu mogao spriječiti 18% svih nesreća s ozljedama te čak 34% nesreća sa smrtonosnim posljedicama. Ovaj sustav je, u kombinaciji s ABS i TCS sustavima serijska oprema u većini novih automobila. [3]

Nakon svih tih sustava, sljedeći korak je bio pomoć pri upravljanju vozilom, tj. Sustav koji upravlja zakretom volana. Sustav za pomoć pri zadržavanju u traci (engl. *Lane Keep Assist*,



LKA, LKAS) je prvi puta predstavljen početkom 20. stoljeća, te on pomoću kamera i raznih senzora zadržava auto u svojoj traci.

U okviru ovog rada izrađen je upravo takav sustav, LKA koji s pomoću zakreta kuta upravljača omogućava vozilu da prati unaprijed zadanu referencu. Temelji se na analizi dinamičkog bicikl modela vozila, uzimajući pritom u obzir parametre poput brzine vožnje i zakrivljenosti trake. Glavni cilj je bio napraviti sustav koji može prilagoditi kut zakreta volana kako bi se vozilo održalo unutar granica trake, čak i u složenim uvjetima poput zavoja.

Ovaj rad opisuje korišteni model vozila, model guma te izbor i implementaciju algoritma. Nakon toga, sustav je simuliran u Matlabu na pojednostavljenom bicikl modelu te kasnije na vjernom simulacijskom modelu. No prije svega, u idućem poglavlju opisana je povijest LKA sustava, te njegova trenutačna implementacija u industriji.

# 1. Sustav pomoći zadržavanja vozila u prometnoj traci

Sustavi pomoći zadržavanja vozila u traci (engl. *Lane Keep Assist*, LKA) razvijeni su kao dio šireg trenda automatizacije vožnje, čiji je cilj povećanje sigurnosti na cestama te smanjenje nesreća i smrti uzrokovanih izlaskom vozila iz prometne trake. Ti sustavi koriste senzore i kamere s pomoću kojih prate trake na cesti te upozoravaju vozača ili ispravljaju vozilo ako ono odstupi od sredine trake. LKA je ključ modernih ADAS (engl. *Advanced Driver Assistance Systems*) sustava za pomoć vozaču.

## 1.1 Povijest sustava

Počeci LKA sustava (Slika 1.1) mogu se naći u sustavu upozorenja napuštanja trake (engl. *Lane Departure Warning*, LDW) sustavu iz ranih 2000-tih godina. Prvi LDW patent pripada Nick Parishu koji ga je ugradio u Rover SD1, te je iz 1989. godine (Patent application No 8911571.1).



Slika 1.1: Prikaz LKA sustava u vozilu [4]

Prvi komercijalno ugrađen LDW sustav nalazio se u europskom Mercedes Actros kamionu 2000. godine. U Americu, takav sustav je došao 2002. godine, također u kamionu. Ti rani LDW sustavi generirali su zvuk na zvučnicima sa strane s kojom se prešla traka.

Već 2001. godine LDW sustavi se počinju integrirati u osobna vozila više klase, prvo od strane japanskih proizvođača Nissana i Toyote, dok su 2004. godine sustav počeli koristiti i

europski i američki proizvođači. Ti LDW sustavi koristili su kombinaciju zvučnih upozorenja, s fizičkim upozorenjima poput trešnje sjedala.

Pravi aktivni LKA sustav prvi puta je uveden 2003. godine u Hondi Inspire. Koristio je jednu kameru s kutom gledanja od 40°, te je mogao prepoznati trake na autoputu. Automobil je održavao u traci s pomoću zakreta volana, na koji je djelovao potrebnim momentom. Potrebnu količinu zakreta volana računao je s pomoću kamere, kuta nagiba vozila te brzine vozila.

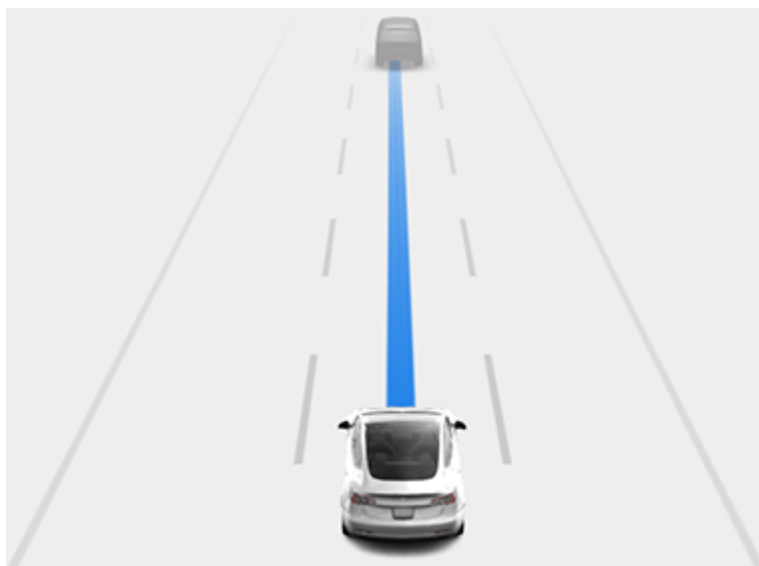
Sljedeća generacija LKA sustava nalazio se u Lexusu LS460, te je koristio više kamera te prepoznavanje uzoraka. Također, uz LKA imao je i radar koji se koristio za adaptivni tempomat (engl. *cruise control*), te je mogao davati moment suprotan momentu zakreta volana kako bi onemogućio vozača da pretjera s pokretom volana i destabilizira vozilo. [5]

## 1.2 Trenutne implementacije u industriji

Od sredine 2010-ih godina, LKA sustav nudi se kao standardna ili dodatna oprema u većini automobila. Moderni LKA sustavi koriste napredne senzore, radare i kamere kako bi pratili položaj vozila u traci, te su kamen temeljac za razvoj autonomne vožnje. Razvoj novih komunikacijskih tehnologija poput 5G mreža omogućio je integraciju LKA sustava s informacijama u stvarnom vremenu.

Moderni automobili, uz LKA sustave, imaju razne druge sustave pomoći poput aktivnog adaptivnog tempomata, automatskog kočenja i prepoznavanja prometnih znakova, te integracijom toga postižu određeni stupanj autonomne vožnje.

Primjer vozila koje ima određeni stupanj autonomne vožnje su Teslini modeli koji imaju njihov "Autopilot" sustav. Taj sustav, kombinacijom raznih kamera i senzora te snažnih računala integriranih u vozila, omogućuju Teslinim automobilima da sami prate i mijenjaju trake, parkiraju i dođu do vlasnika u određenim jednostavnijim situacijama (engl. *Actually Smart Summon*). Iako je trenutačno u testnoj fazi, javnosti je dostupan i sustav potpune autonomne vožnje druge razine (engl. *Partial Driving Automation*, Slika 1.2), što znači da vozač mora aktivno pratiti cestu i biti spreman preuzeti kontrolu u bilo kojem trenutku. [6]



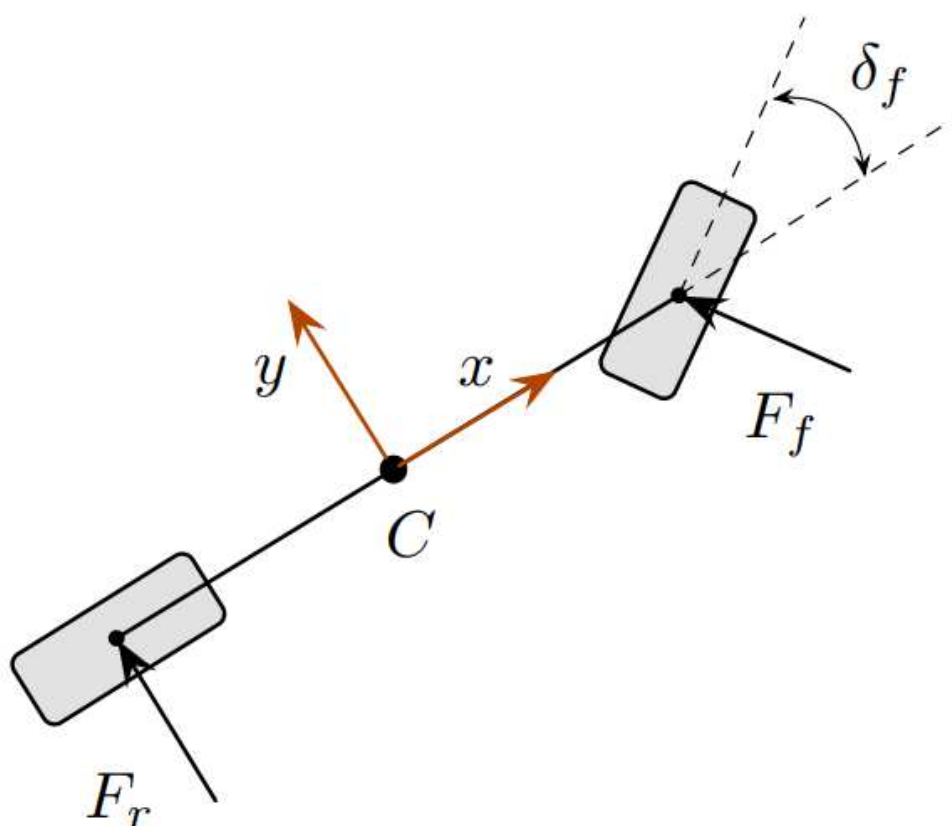
Slika 1.2: Vizualizacija sustava "Navigate on autopilot" u Tesli [7]

Drugi proizvođači imaju svoje LKA sustave, te ih također integriraju s drugim sustavima poput prepoznavanja znakova i adaptivnog tempomata kako bi omogućili autonomnu vožnju bar na autocestama. Volkswagenov sustav se na primjer zove Travel Assist [8] te se koristi na autocestama, dok Kia i Hyundai imaju Lane Following Assist (LFA, [9]) koji funkcionira i kroz zavoje. Takvi sustavi se koriste kako bi olakšali vožnju na dalje relacije te smanjili zamor vozača.

Najmoderniji sustavi koriste informacije u stvarnom vremenu, poput vremenskih uvjeta i stanja na cestama, kako bi bolje i sigurnije funkcionirali. Uz pomoć novih tehnologija poput 5G mreža, vozila će moći funkcionirati međusobno kako bi se smanjile prometne gužve i povećala sigurnost u prometu.

## 2. Fizikalni model automobila

Fizikalni model bočne dinamike vozila korišten u ovom diplomskom radu je dinamički bicikl model (engl. *bicycle model*, Slika 2.1). On pojednostavljuje realni model automobila tako da se prednja osovina miče, te se prednja dva kotača predstavljaju samo s jednim kotačem. Također, isto vrijedi i za stražnju osovину, koja je predstavljena samo jednim kotačem. Time se uklanja poseban račun za lijevi i desni kotač na svakoj osovini, te se omogućuje jednostavnija analiza bočne dinamike ponašanja vozila.

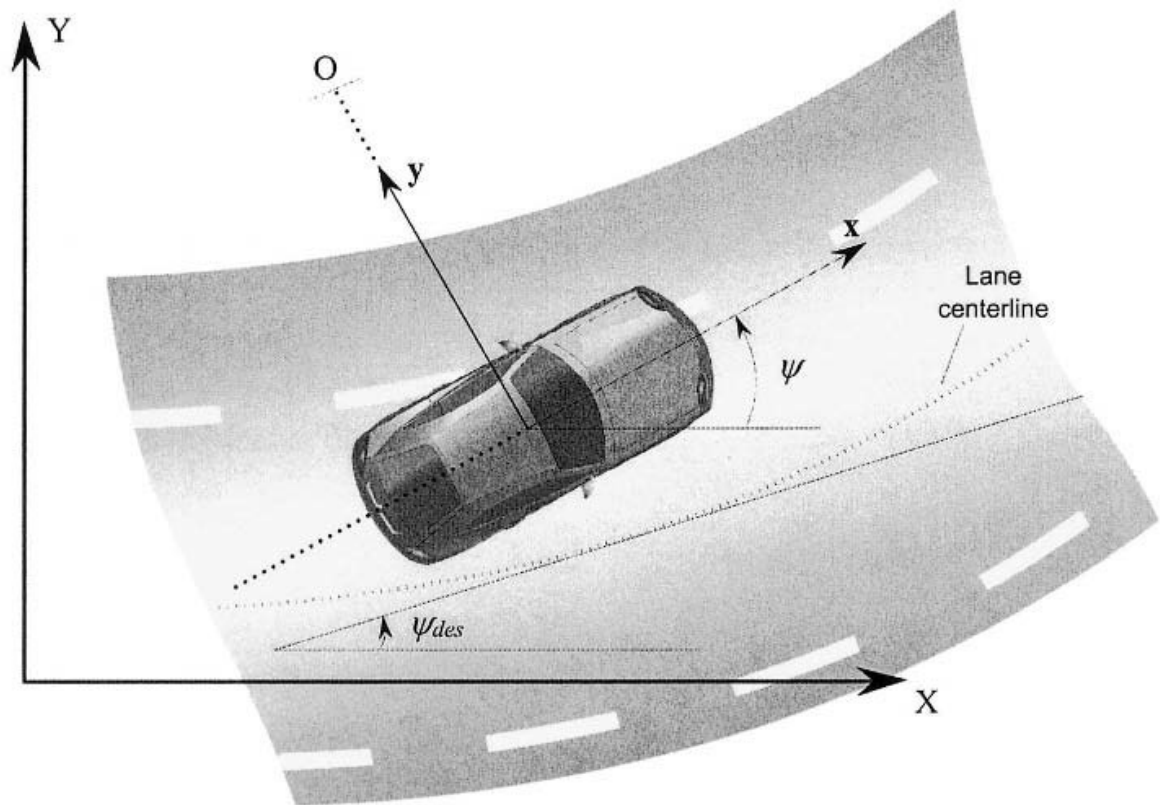


Slika 2.1: Pojednostavljeni bicikl model vozila [10]

- $\delta_f$  – kut zakreta prednjih kotača
- $F_f$  – bočna sila na prednje kotače
- $F_r$  – bočna sila na stražnje kotače
- $C$  – centar mase vozila
- $x, y$  – koordinate koordinatnog sustava vozila

Dinamički model (Slika 2.2) obuhvaća četiri stanja:

- $y$  – lateralna (bočna) pozicija vozila
- $\dot{y}$  – bočna brzina vozila
- $\psi$  – kut vozila (yaw angle)
- $\dot{\psi}$  – kutna brzina vozila



Slika 2.2: Bočna dinamika vozila [11]

Koristeći drugi Newtonov zakon gibanja po y-osi:

$$ma_y = F_{yf} + F_{yr} \quad (2.1)$$

gdje su  $F_{yf}$  i  $F_{yr}$  bočne sile na prednje i stražnje gume. Akceleracija  $a_y$  u centru mase vozila, u smjeru y-osi glasi:

$$a_y = \ddot{y} + V_x \dot{\psi} \quad (2.2)$$

gdje je  $V_x \dot{\psi}$  centripetalna akceleracija, a  $\ddot{y}$  akceleracija u smjeru y-osi. Ako primijenimo jednadžbu (2.2) u jednadžbu (2.1), dobije se:

$$m(\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) = F_{yf} + F_{yr} \quad (2.3)$$

Dinamika skretanja opisuje se jednađbom:

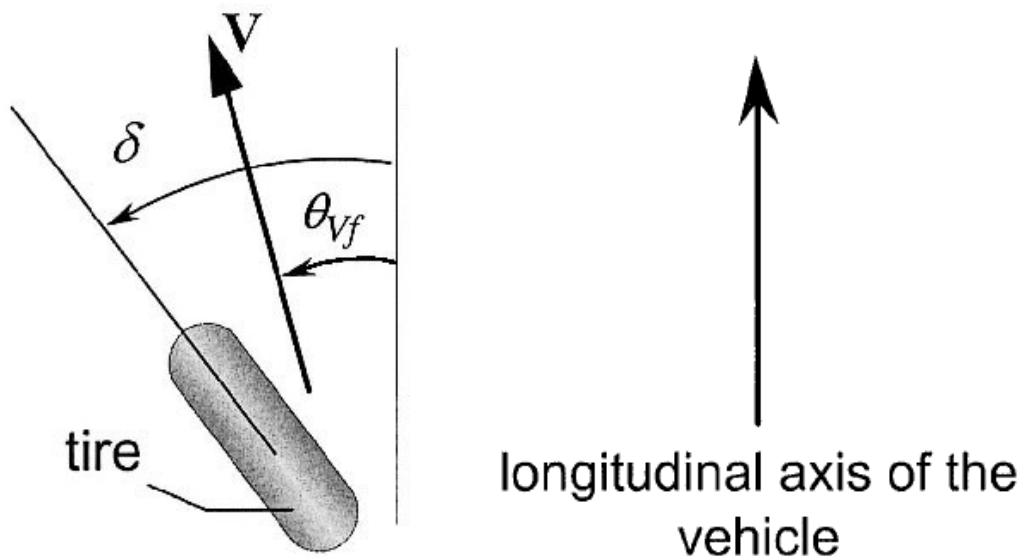
$$I_z \ddot{\psi} = aF_{yf} - bF_{yr} \quad (2.4)$$

gdje  $a$  i  $b$  označavaju udaljenost centra mase vozila i prednje, to jest stražnje osovine. Nakon toga, izvodi se model bočnih sila na gume, za koji se kod manjih kutova klizanja uzima da je proporcionalan kutu klizanja. Taj kut definiran je kao kut između orijentacije gume i vektora brzine kotača (slika ispod), dok njegov matematički izvod za prednje kotače glasi:

$$\alpha_f = \delta - \theta_{vf} \quad (2.5)$$

gdje je  $\theta_{vf}$  kut između vektora brzine i longitudinalne osi prikazan na slici 2.3, a  $\delta$  je kut zakreta prednjih kotača. Za stražnje kotače ne postoji kut zakreta kotača (barem u ovom slučaju, no postoje i takva vozila), pa njegov kut klizanja glasi:

$$\alpha_r = -\theta_{vr} \quad (2.6)$$



Slika 2.3: Kut klizanja gume [11]

Koristeći izračunate kutove klizanja, dobiju se formule za bočne sile koje za prednje kotače iznose:

$$F_{yf} = 2C_{\alpha f} * \alpha_f = 2C_{\alpha f}(\delta - \theta_{vf}), \quad (2.7)$$

a za stražnje kotače:

$$F_{yr} = 2C_{\alpha r} * \alpha_r = 2C_{\alpha r}(-\theta_{vr}) \quad (2.8)$$

U ovim jednadžbama,  $C_{\alpha f}$  i  $C_{\alpha r}$  označavaju bočnu krutost prednjih i stražnjih guma,  $\theta_{Vf}$  kut između vektora brzine i longitudinalne osi, a  $\delta$  je kut zakreta prednjih kotača. To sve se množi s faktorom 2 jer se na svakoj osovinu nalaze po dva kotača.

Ovaj linearni model nije postupak realizacije složenijeg modela (poput Magic Formula), nego se koristi zbog jednostavnosti i praktičnosti u analizi pri normalnim uvjetima vožnje.

Nadalje, kut brzine  $\theta_{Vf}$  i  $\theta_{Vr}$  može se dobiti iz sljedećih relacija:

$$tg(\theta_{Vf}) = \frac{V_y + a\dot{\psi}}{V_x} \quad (2.9)$$

$$tg(\theta_{Vr}) = \frac{V_y - b\dot{\psi}}{V_x} \quad (2.10)$$

A kada se u obzir uzme pretpostavka malih kutova klizanja te notacija  $V_y = \dot{y}$ , dobije se:

$$\theta_{Vf} = \frac{\dot{y} + a\dot{\psi}}{V_x} \quad (2.11)$$

$$\theta_{Vr} = \frac{\dot{y} - b\dot{\psi}}{V_x} \quad (2.12)$$

Konačno, ubacivanjem jednadžbi (2.5), (2.6), (2.11) i (2.12) u (2.3) i (2.4), dobiju se jednadžbe:

$$m\ddot{y} = 2C_{\alpha f}\delta - \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{V_x}\dot{y} - \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{V_x}\dot{\psi} - V_x m\dot{\psi} \quad (2.13)$$

$$I_z\ddot{\psi} = 2aC_{\alpha f}\delta - \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{V_x}\dot{y} - \frac{2a^2C_{\alpha f} + 2b^2C_{\alpha r}}{V_x}\dot{\psi} \quad (2.14)$$

te se model u prostoru stanja matično opisuje kao:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} & 0 & -V_x - \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{I_z V_x} & 0 & -\frac{2a^2C_{\alpha f} + 2b^2C_{\alpha r}}{I_z V_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \psi \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2aC_{\alpha f}}{I_z} \end{bmatrix} \delta \quad (2.15)$$

Za slučaj LKA sustava, potreban je dinamički model kojem će varijable stanja biti pogreška pozicije i orijentacije u odnosu na cestu. Kako bi se to postiglo, uvode se dvije varijable stanja koje su:

$$e_1 - \text{udaljenost centra mase vozila od središta trake (y)}$$



$e_2$  – orijentacijska greška vozila u odnosu na cestu ( $\psi$ )

Za izvod se koristi pretpostavka da je longitudinalna brzina vozila  $V_x$  konstantna, kao i radijus zavoja  $R$ . Sa svim tim informacijama, stopa promijene željene orijentacije vozila računa se kao:

$$\dot{\psi}_{des} = \frac{V_x}{R} \quad (2.16)$$

Željena akceleracija vozila zapisuje se kao:

$$\frac{V_x^2}{R} = V_x \dot{\psi}_{des} \quad (2.17)$$

Jednadžbe za  $\ddot{e}_1$  i  $e_2$  definiraju se kao (Guldner, et. al., 1996):

$$\ddot{e}_1 = (\ddot{y} + V_x \dot{\psi}) - \frac{V_x^2}{R} = \ddot{y} + V_x (\dot{\psi} - \dot{\psi}_{des}) \quad (2.18)$$

$$e_2 = \psi - \psi_{des} \quad (2.19)$$

Definirajmo:

$$\dot{e}_1 = \dot{y} + V_x (\psi - \psi_{des}) \quad (2.20)$$

$\dot{e}_1$  se ovako integrira u slučajevima kada je brzina  $V_x$  konstantna. Supstitucijom novodefiniranih vrijednosti u (2.3) i (2.4) dobije se LTI model u ovisnosti o greškama, čiji izvod glasi:

$$\ddot{e}_1 = \ddot{y} + V_x (\dot{\psi} - \dot{\psi}_{des}) \quad (2.21)$$

$$\ddot{e}_1 = \frac{2C_{\alpha f} \delta}{m} - \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} \dot{y} - \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{mV_x} \dot{\psi} - V_x \dot{\psi} + V_x \dot{\psi} - V_x \dot{\psi}_{des} \quad (2.22)$$

$$\ddot{e}_2 = \frac{2aC_{\alpha f} \delta}{I_z} - \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{I_z V_x} \dot{y} - \frac{2a^2 C_{\alpha f} + 2b^2 C_{\alpha r}}{I_z V_x} \dot{\psi} - \ddot{\psi}_{des} \quad (2.23)$$

Druga jednadžba dolazi iz činjenice da je druga derivacija  $e_2$  za male kutove:

$$\ddot{e}_2 = \ddot{\psi} - \ddot{\psi}_{des} \quad (2.24)$$

Uzimajući u obzir da su:

$$\dot{y} = -V_x (\psi - \psi_{des}) + \dot{e}_1 = -V_x e_2 + \dot{e}_1 \quad (2.25)$$

$$\dot{\psi} = \dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des} \quad (2.26)$$

Dobijemo jednadžbu za  $\ddot{e}_1$  koja glasi:

$$\ddot{e}_1 = \frac{2C_{\alpha f}\delta}{m} - \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x}(-V_x e_2 + \dot{e}_1) - \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{mV_x}(\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des}) - V_x \dot{\psi}_{des} \quad (2.27)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \ddot{e}_1 = & \frac{2C_{\alpha f}}{m}\delta + \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{m}e_2 - \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x}\dot{e}_1 - \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{mV_x}\dot{e}_2 \\ & - \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{mV_x}\dot{\psi}_{des} - V_x\dot{\psi}_{des} \end{aligned} \quad (2.28)$$

te jednadžbu za  $\ddot{e}_2$  koja glasi:

$$\ddot{e}_2 = \frac{2aC_{\alpha f}\delta}{I_z} - \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{I_z V_x}(-V_x e_2 + \dot{e}_1) - \frac{2a^2C_{\alpha f} + 2b^2C_{\alpha r}}{I_z V_x}(\dot{e}_2 + \dot{\psi}_{des}) - \ddot{\psi}_{des} \quad (2.29)$$

odnosno:

$$\begin{aligned} \ddot{e}_2 = & \frac{2aC_{\alpha f}}{I_z}\delta + \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{I_z}e_2 - \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{I_z V_x}\dot{e}_1 - \frac{2a^2C_{\alpha f} + 2b^2C_{\alpha r}}{I_z V_x}\dot{e}_2 \\ & - \frac{2a^2C_{\alpha f} + 2b^2C_{\alpha r}}{I_z V_x}\dot{\psi}_{des} - \ddot{\psi}_{des} \end{aligned} \quad (2.30)$$

Model u prostoru stanja opisan jednadžbama (2.28) i (2.30) u matričnom stanju može se zapisati kao:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{mV_x} & \frac{2C_{\alpha f} + 2C_{\alpha r}}{m} & -\frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{mV_x} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{I_z V_x} & \frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{I_z} & -\frac{2a^2C_{\alpha f} + 2b^2C_{\alpha r}}{I_z V_x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ \dot{e}_1 \\ e_2 \\ \dot{e}_2 \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2C_{\alpha f}}{m} \\ 0 \\ \frac{2aC_{\alpha f}}{I_z} \end{bmatrix} \delta + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2aC_{\alpha f} - 2bC_{\alpha r}}{mV_x} - V_x \\ 0 \\ -\frac{2a^2C_{\alpha f} + 2b^2C_{\alpha r}}{I_z V_x} \end{bmatrix} \dot{\psi}_{des} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Model bočne dinamike vozila zadan matričnom jednadžbom (2.31) je funkcija longitudinalne brzine  $V_x$  koja je konstantna. Problem upravljanja vozilom sveo se na problem stabilizacije gore zadane dinamike, koja je zadana kao model po greškama stanja. [11]

### 3. Metode sinteze regulatora

U svrhu sinteze regulatora u ovom diplomskom radu prvo su korištena dva tipa sinteze, linearni kvadratni regulator (engl. *Linear Quadratic Regulator*, skraćeno LQR) te metoda postavljanja polova (engl. *pole placement*), dok su kasnije dodani predupravljanje (engl. *Feedforward*) te Bass-Gura metoda proračuna pojačanja u ovisnosti o brzini.

#### 3.1 Linearni Kvadratni Regulator (LQR)

LQR jedna je od najčešće korištenih metoda u optimalnom upravljanju sustavima u prostoru stanja. LQR minimizira kvadratnu funkciju cilja:

$$J_c(x) = \int_0^{\infty} [x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt \quad (3.1)$$

s obzirom na:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (3.2)$$

gdje su:

- $x$  – vektor stanja sustava
- $u$  – upravljački ulaz
- $Q$  – matrica težina vektora stanja, simetrična pozitivno semidefinitna
- $R$  – matrica težina upravljačkog signala, simetrična pozitivno definitna
- $A$  i  $B$  – matrice modela sustava u prostoru stanja

Matrice  $Q$  i  $R$  izabiru se proizvoljno, obično su početni izbor jedinične matrice koje se dalje prilagođavaju specifičnim zahtjevima sustava. Povećanjem vrijednosti u matrici  $Q$  regulator više kažnjava odstupanja specifičnih stanja sustava, dok povećavanje matrice  $R$  smanjuje agresivnost upravljanja, to jest ograničava upravljački signal.

LQR optimalno upravljanje postiže rješavanjem kvadratnih matričnih jednadžbi pod nazivom algebarske Riccatijeve jednadžbe (engl. *Algebraic Riccati Equation*, ARE), koje glase:

$$A^T P + PA + Q - PBR^{-1}B^T P = 0 \quad (3.3)$$

Kao rješenje ovih jednažbi dobije se matrica  $P$  koja je jedinstvena pozitivno semidefinitna matrica, te se preko nje dobije traženo pojačanje  $K$ :

$$u = -Kx, \quad K = R^{-1}B^T P \quad (3.4)$$

Matrica zatvorene petlje  $A-BK$  mora biti stabilna. LQR na ovaj način pronalazi kompromis između minimalizacije odstupanja sustava i ograničenja upravljačkog signala [12], [13].

## 3.2 Metoda postavljanja polova

Metoda postavljanja polova, u Matlabu pozivana naredbom `Place` funkcionira tako da zatvoreni sustav  $A_{cl} = A - BK$  stabilizira postavljanjem polova na zadane lokacije u kompleksnoj ravnini, to jest polovi se zadaju ručno. Iz toga se jednažbom:

$$eig(A - BK) = P_{\text{željeni}} \quad (3.5)$$

dobije željeno pojačanje  $K$  kojim se dobiju zadani željeni polovi sustava. Ovom metodom dobiva se direktna kontrola dinamike sustava, s obzirom na to da se pomicanjem polova dalje od realne nule (za kontinuirane sustave, prema nuli za diskretne) direktno utječe na brzinu odziva sustava.

## 3.3 Predupravljanje

Predupravljanje unaprijed računa kompenzacijski upravljački signal na temelju modela sustava te očekivanih odstupanja prije nego se oni pojave u stvarnom vremenu [14]. Kako bi predupravljanje dobro radilo, potrebno je imati dovoljno preciznu aproksimaciju stvarnog modela, kako bi se ispravno mogla predvidjeti te kompenzirati reakcija sustava na smetnju.

Prednosti ovog načina upravljanja su brža reakcija, s obzirom na to da se ne čeka pojava greške nego se upravljački signal računa na temelju modela. Također, u slučajevima kada postoje unaprijed poznate smetnje, predupravljački signal ih može kompenzirati prije njihovog utjecaja na ponašanje sustava.

U ovom radu, signal predupravljanja je korišten za smanjenje stacionarne pogreške modela koja se najbolje vidi u primjeru bez predupravljačkog signala (6.1 LQR regulator bez predupravljačke veze).

Kao što je vidljivo iz matrica sustava, model u prostoru stanja zadan je kao:

$$\dot{x} = (A - BK)x + B_1\dot{\psi}_{des} \quad (3.6)$$

Zbog drugog člana formule  $B_1\dot{\psi}_{des}$  greška praćenja neće biti nula u slučaju da vozilo putuje po zavoju, neovisno o tome je li matrica  $(A - BK)$  asimptotski stabilna. Radi toga, dodaje se predupravljački signal te upravljački signal onda iznosi:

$$\delta = -Kx + \delta_{ff} \quad (3.7)$$

te upravljački krug onda glasi:

$$\dot{x} = (A - BK)x + B\delta_{ff} + B_1\dot{\psi}_{des} \quad (3.8)$$

Izračunom Laplace transformacije, uz pretpostavku nultih početnih uvjeta, dobivamo:

$$X(s) = [sI - (A - BK)]^{-1}\{BL(\delta_{ff}) + B_1L(\dot{\psi}_{des})\} \quad (3.9)$$

gdje su  $L(\delta_{ff})$  i  $L(\dot{\psi}_{des})$  Laplace transformacije  $\delta_{ff}$  i  $\dot{\psi}_{des}$  te glase  $\frac{V_x}{Rs}$  i  $\frac{\delta_{ff}}{s}$ .

Primjenom Teorema konačne vrijednosti, pogreška praćenja u stacionarnom stanju dana je izrazom:

$$x_{ss} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = -(A - BK)^{-1}\left\{B\delta_{ss} + B_1\frac{V_x}{R}\right\} \quad (3.10)$$

Koristeći Symbolic Toolbox u Matlabu, dobije se pogreška praćenja koja glasi:

$$x_{ss} = \begin{Bmatrix} \frac{\delta_{ff}}{k_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{1}{k_1} \frac{mV_x^2}{R(l_f+l_r)} \left[ \frac{l_r}{2C_{\alpha f}} - \frac{l_f}{2C_{\alpha r}} + \frac{l_f}{2C_{\alpha r}} k_3 \right] - \frac{1}{k_1 R} [l_f + l_r - l_r k_3] \\ 0 \\ \frac{1}{2RC_{\alpha r}(l_f+l_r)} [-2C_{\alpha r} l_f l_r - 2C_{\alpha r} l_r^2 + l_f mV_x^2] \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.11)$$

a iz koje se vidi da se pogreška bočne pozicije  $e_1$  može ispraviti s pomoću ispravnog odabira  $\delta_{ff}$ . Također se vidi da  $\delta_{ff}$  nema utjecaja na pogrešku kuta zakreta  $e_2$  tako da se ona ne može ispraviti s pomoću predupravljanja, a glasi:

$$\begin{aligned}
e_{2_{ss}} &= \frac{1}{2RC_{\alpha r}(l_f + l_r)} [-2C_{\alpha r}l_f l_r - 2C_{\alpha r}l_r^2 + l_f m V_x^2] \\
&= -\frac{l_r}{R} + \frac{l_f}{2C_{\alpha r}(l_f + l_r)} \frac{m V_x^2}{R}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Kako bi izračunali  $\delta_{ff}$ , potrebno je još odrediti akceleraciju u smjeru y-osi  $a_y = \frac{V_x^2}{R}$  te gradijent podupravljanja  $K_V$  koji glasi:

$$K_V = \frac{l_r m}{2C_{\alpha f}(l_f + l_r)} - \frac{l_f m}{2C_{\alpha r}(l_f + l_r)} = \frac{m_f}{2C_{\alpha f}} - \frac{m_r}{2C_{\alpha r}} \tag{3.13}$$

gdje su  $m_f$  i  $m_r$  količina mase vozila na prednjoj odnosno stražnjoj osi, a računaju se kao

$$m_f = m \frac{l_r}{L}, m_r = m \frac{l_f}{L}.$$

Konačno, uz  $k_3$  koji označava treći član iz pojačanja regulatora K,  $\delta_{ff}$  se određuje kao:

$$\delta_{ff} = \frac{L}{R} + K_V a_y + k_3 e_{2_{ss}} \tag{3.14}$$

[11]

### 3.4 Proračun pojačanja regulatora ovisno o brzini Bass-Gura metodom

S obzirom na to da se iz (2.31) vidi kako da matrica  $A$  ovisi o brzini vozila  $V_x$ , regulatori navedeni do sada su optimizirani za određenu konstantnu brzinu vozila koja se unaprijed zadaje. Kako bi adaptirali pojačanje ovisno o brzini koristimo Bass-Gura metodu sinteze regulatora u prostoru stanja uz unaprijed zadane vlastite vrijednosti sustava. Temelji se na pretvorbi originalnog sustava u upravljivi kanonički oblik (engl. *Controllable Canonical Form*, CCF) tako da su koeficijenti karakterističnih polinoma direktno dostupni:

$$G_p(s) = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_m s^m}{a_0 + a_1 s + \dots + a_{n-1} s^{n-1} + s^n}, \quad m < n \tag{3.15}$$

$$A_{CCF} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}, \quad B_{CCF} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Ako se odabere pojačanje pojačanje regulatora:

$$K_{CCF} = [\delta_0 \quad \delta_1 \quad \delta_2 \quad \cdots \quad \delta_{n-1}] \quad (3.17)$$

Dobije se matrica zatvorenog kruga u upravljivom kanoničkom obliku koja glasi:

$$A_{CCF} - B_{CCF}K_{CCF} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 - \delta_0 & -a_1 - \delta_1 & -a_2 - \delta_2 & \cdots & -a_{n-1} - \delta_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Ako za proizvoljan vektor po varijablama stanja postoji matrica transformacije:

$$x = T_{CCF}x_{CCF} \quad (3.19)$$

tada upravljački zakon postaje:

$$u = -K_{CCF}x_{CCF} = -K_{CCF}T_{CCF}^{-1}x \quad (3.20)$$

iz kojega se vidi da novi vektor glasi:

$$K = K_{CCF}T_{CCF}^{-1} \quad (3.21)$$

Kako bi odredili  $K_{CCF}$ , potrebni su nam originalni koeficijenti karakterističnih polinoma i željeni koeficijente, te onda on glasi:

$$K_{CCF} = [(\alpha_0 - a_0) \quad (\alpha_1 - a_1) \quad (\alpha_2 - a_2) \quad \cdots \quad (\alpha_{n-1} - a_{n-1})] \quad (3.22)$$

Za  $T_{CCF}$  su potrebne matrica upravljivosti sustava  $P$ :

$$P = [B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] \quad (3.23)$$

kao i matrica upravljivosti kanoničkog sustava  $P_{CCF}$ :

$$P_{CCF} = [B_{CCF} \quad A_{CCF}B_{CCF} \quad A_{CCF}^2B_{CCF} \quad \cdots \quad A_{CCF}^{n-1}B_{CCF}] \quad (3.24)$$

Konačno, to se sve uvrštava u formulu (3.21) kako bi se pojačanje u kanoničkom obliku transformiralo u originalni koordinatni sustav s pomoću transformacijske matrice. U sklopu ovog diplomskog rada, Bass-Gura je implementiran kao diskretni regulator, te su još dodane pretvorbe matrica iz kontinuiranog u diskretni sustav matrice  $A$  i  $B$  diskretiziraju koristeći

Tustinovu aproksimaciju formulama (3.25), (3.26). Diskretna primjena potrebna je jer dinamika vozila i kut zakreta volana ovise o brzini te će se pojačanje računati Bass-Gura metodom u ovisnosti o trenutačnoj brzini. [15]

$$A_d = \left( I - \frac{T_s}{2} A \right)^{-1} \left( I + \frac{T_s}{2} A \right) \quad (3.25)$$

$$B_d = \left( I - \frac{T_s}{2} A \right)^{-1} T_s B \quad (3.26)$$

Osim matrica  $A$  i  $B$ , potrebno je diskretizirati i željene polove  $P_{zeljeni}$  koji su zadani za kontinuirani sustav. Ova diskretizacija također je izvedena pomoću Tustina, a zapisana je formulom (3.27).

$$P_{zeljenid} = \frac{2 + P_{zeljeni} T_s}{2 - P_{zeljeni} T_s} \quad (3.27)$$



## 4. Algoritam upravljanja zakreta kuta volana

Algoritam upravljanja računa se s pomoću dvije Matlab skripte, `Racun_pojacanja.m` te `model_vozila.m`. U skripti `model_vozila.m`, koja se poziva iz skripte `Racun_pojacanja.m`, upisane su matrice modela bočne dinamike vozila po greškama u prostoru stanja izračunate u poglavlju 2.

Osim matrica modela vozila, unutar te skripte nalazi se još provjera upravljivosti koristeći matricu upravljivosti  $C = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ , koja je tu kako bi se osiguralo da je izračunati model vozila upravljiv s vrijednostima koje su zadane u skripti `Racun_pojacanja.m`, a prima ih skripta `model_vozila.m`:

- $C_f, C_r$  – koeficijenti bočne sile prednjih i stražnjih kotača
- $m$  – masa vozila
- $I_z$  – moment inercije oko vertikalne osi
- $a, b$  – udaljenost središta mase od prednjih i stražnjih kotača
- $v$  – brzina vozila

Ako izračunata matrica ima puni rang, sustav je upravljiv, tj. moguće je dizajnirati regulator. U suprotnom slučaju, postoji greška u zadanim vrijednostima ili izračunatim matricama.

Konačno, `model_vozila.m` u funkciju `Racun_pojacanja.m` vraća vrijednosti matrica  $A, B, BI, C, D$  s uvrštenim i izračunatim numeričkim vrijednostima. Dobivene numeričke matrice onda se koriste u tri metode dobivanja regulatora, LQR, metoda postavljanja polova gdje je pojačanje izračunato naredbom `Place` te metoda postavljanja polova gdje je pojačanje ručno izračunato korištenjem Bass-Gura metode, u slučajevima sa i bez predupravljanja koje su opisane u prethodnom poglavlju.

### 4.1 Računanje LQR pojačanja

Za sintezu LQR regulatora potrebno je prvo odabrati matrice  $Q$  i  $R$ , koje su odabrane kao jedinične matrice te kroz par iteracija prilagođavane sustavu, kako bi se dobio optimalan odziv.

Nakon toga, poziva se LQR naredba iz koje se dobije željeno pojačanje regulatora  $K$ , rješenje Riccatijeve jednadžbe  $S$  te polovi zatvorenog sustava s izračunatim pojačanjem [16]. Iz te funkcije, za svrhu regulatora u modelu potrebno nam je pojačanje  $K$  koje se uvrsti kao Gain blok vrijednosti  $-K$  te matrično množi ulaz u blok.

## 4.2 Računanje pojačanja naredbom Place

Primjena metode postavljanja polova u Matlabu koristeći naredbu Place vrlo je jednostavna. Potrebno je samo odrediti željeni položaj polova, koji se u ovom radu dobije iz LQR naredbe te se onda poziva naredba Place kako bi se pomoću zadanih željenih polova te matrica  $A$  i  $B$  sustava vraća željeno pojačanje  $K$ .

Moguća je i kombinacija korištenih naredbi, tako da se umjesto ručno određenih željenih polova u Place stave polovi  $PI$  koji se dobiju kao rezultat LQR sinteze. Tada bi pojačanje LQR i dobivenom metodom postavljanja polova trebalo biti jednako. U drugom slučaju, moguće je postaviti željene polove jednako kao u kod računanja pojačanja s Bass-Gura metodom, te je tada odziv sustava jednak s obje metode.

## 4.3 Računanje predupravljačkog signala

Predupravljački signal proračunava se u sklopu Matlab funkcije, čiji je cilj na izlazu dati upravljački signal  $\delta_{ff}$  (predupravljački kut zakreta volana) temeljen na parametrima vozila te željenoj dinamici skretanja. Blok Delta\_ff prima derivaciju brzine skretanja  $\dot{\psi}_{ref}$  te koristi zadane parametre:

- $lf, lr$  – udaljenost od centra mase do prednjih/stražnjih kotača
- $m$  – masa vozila
- $L$  – međuosovinski razmak, suma  $lf$  i  $lr$
- $v$  – brzina vozila
- $Caf, Car$  – koeficijenti bočne sile prednjih/stražnjih kotača
- $k_3$  – član na trećem mjestu u pojačanju  $K$ .

Prije svega, pomoću derivirane reference brzine zakreta  $\dot{\psi}_{ref}$ , uz uvjet da je brzina vozila konstantna, računa se radijus zakrivljenosti zavoja. Nakon toga, računaju se mase po osovini vozila, te se računa stacionarna pogreška kuta skretanja  $e_{2_{ss}}$  (3.12).

Nakon toga, potrebno je još izračunati koeficijent klizanja  $K_V$  (3.13) te bočno ubrzanje  $a_y$ . Konačno, sve to se koristi u formuli za predupravljajući kut zakreta volana koji je ujedno i izlaz bloka (3.14).

## 4.4 Računanje pojačanja Bass-Gura metodom

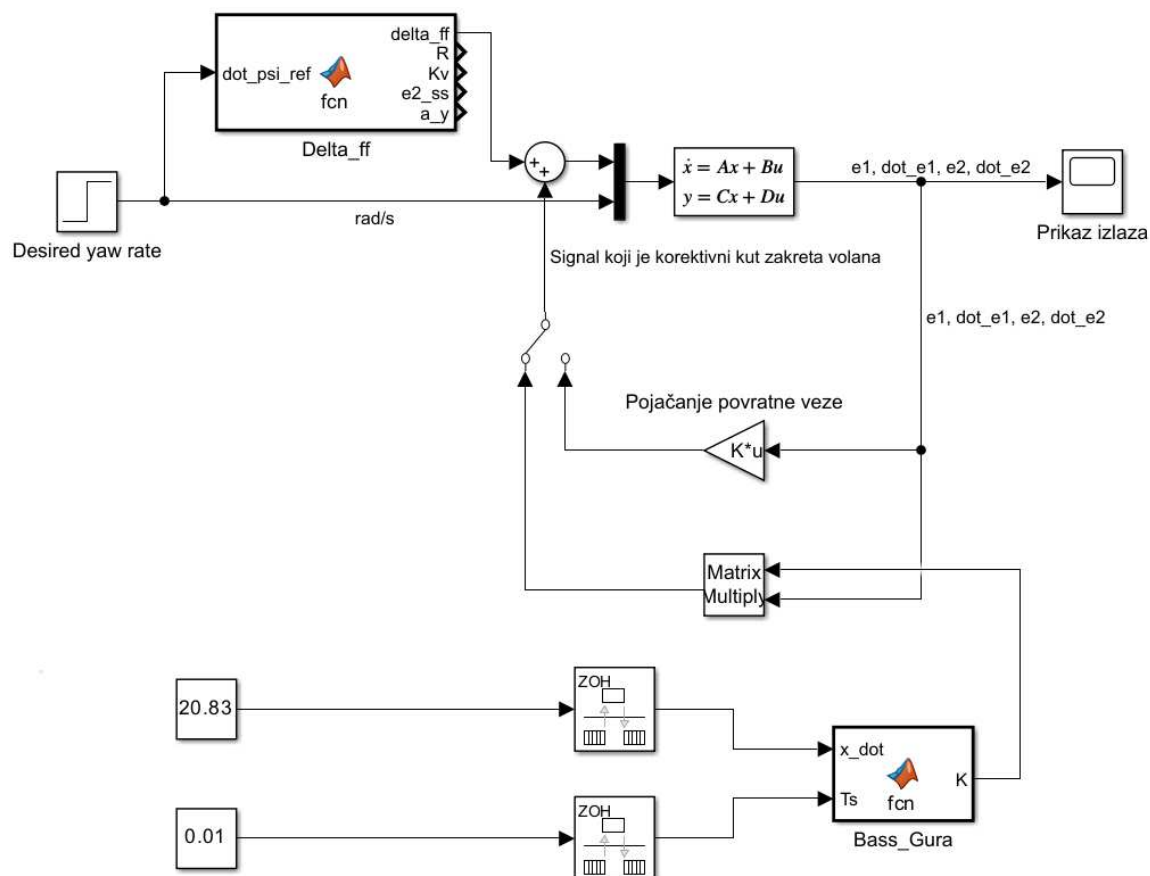
Postavljanje polova Bass-Gura metodom u Simulink modelu implementirano je pomoću MATLAB Function bloka naziva Bass\_Gura. S obzirom na to da se radi o diskretnoj implementaciji regulatora, kao ulaz u blok se uz brzinu  $x_{dot}$  dodaje i vrijeme uzorkovanja  $T_s$ .

Unutar skripte, prvo se zadaju parametri modela potrebni za račun, koji su jednaki parametrima korištenima za predupravljajući signal, osim brzine vozila koja se sada prima s vanjskog ulaza. Nakon toga, računaju se matrice A i B koristeći zadane vrijednosti te ulaznu brzinu koje se onda diskretiziraju Tustinovom metodom.

Nakon toga, računaju se vlastite vrijednosti diskretnog sustava te red tog sustava N, pomoću kojega se onda rade matrice upravljivog kanoničkog oblika  $A_{CCF}$  i  $B_{CCF}$  (3.16). Potom se računaju matrice upravljivosti  $P$  i  $P_{CCF}$ , te se računa matrica transformacije  $T_{CCF}$ . Zadaju se željeni polovi, kako bi preko njihovih vlastitih vrijednosti te vlastitih vrijednosti originalnog diskretiziranog sustava dobili  $K_{CCF}$ , koji se onda množi s inverzom  $T_{CCF}$  kako bi se dobio izlazni K (3.21).

## 5. Pojednostavljeni bicikl model

Kao početni model za ovaj diplomski rad korišten je model pod nazivom “Pojednostavljeni\_model.slx”, prikazan na slici 5.1.



Slika 5.1: Pojednostavljeni bicikl model u Simulinku

Unutar State-space bloka u ovome modelu nalazi se izračunati pojednostavljeni bicikl model automobila iz poglavlja 2. Željena pobuda u pokusima koji će se izvoditi s ovim modelom iznosi  $\dot{\psi}_{des} = 0.03 \text{ rad/s}$ , a dobivena je po uzoru na pokuse iz [11].

Ta referenca ulazi u ulaz modela i blok za predupravljanje, koji računa korektivni zakret kuta volana  $\delta_{ff}$  te se zbraja sa signalom koji dolazi iz negativne povratne veze zadane kao  $-Kx$ .

Zajedno, ta dva signala daju upravljački signal koji će se u simulacijskom modelu slati na upravljač vozila. Povratna veza ima dvije grane, jednu u slučaju da se koristi LQR/pojačanje dobiveno naredbom Place, a drugu za slučajeve kada se koristi pojačanje regulatora dobiveno Bass-Gura metodom. Regulator se bira ručno, klikom na sklopku. U slučaju promjene, potrebno je otkomentirati ispravno pojačanje  $k_3$  u sklopu Delta\_ff bloka. Izlaz

modela daje greške  $e_1, \dot{e}_1, e_2, \dot{e}_2$ , dok se na izlazu iz sustava nalazi blok Scope korišten za prikaz izlaznih varijabli.

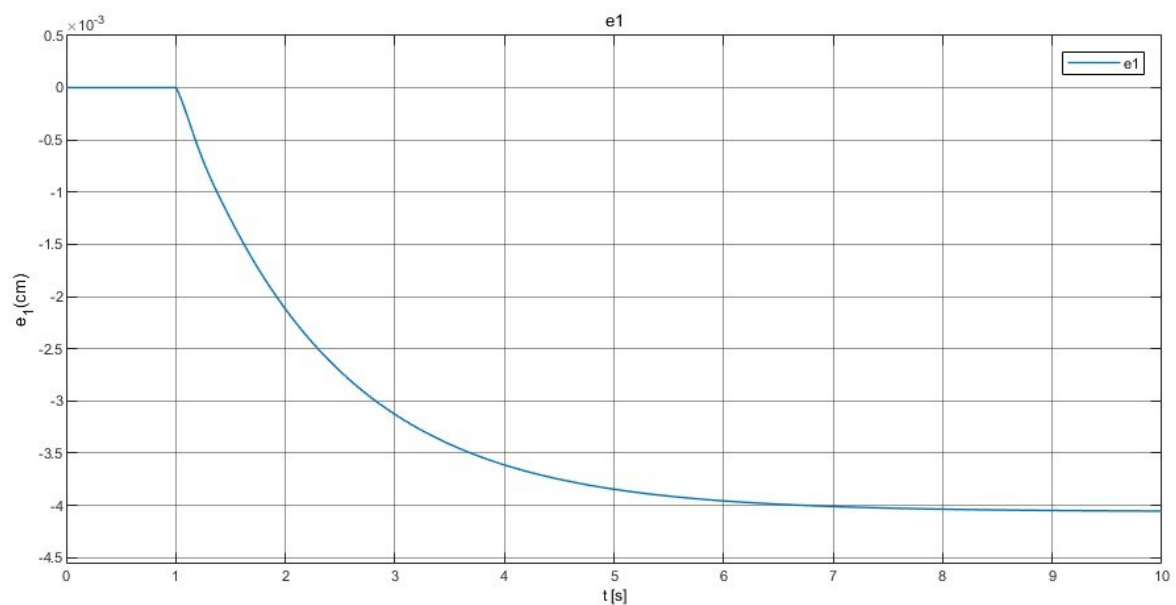
## 6. Rezultati s pojednostavljenim bicikl modelom

U ovom poglavlju testirat će se sintetizirani regulatori na pojednostavljenom bicikl modelu unutar Pojednostavljeni\_model.slx. Pobuda je željena brzina skretanja iznosa  $\psi_{des} = 0.03 \text{ rad/s}$ , te kreće u 1. sekundi izvođenja simulacije.

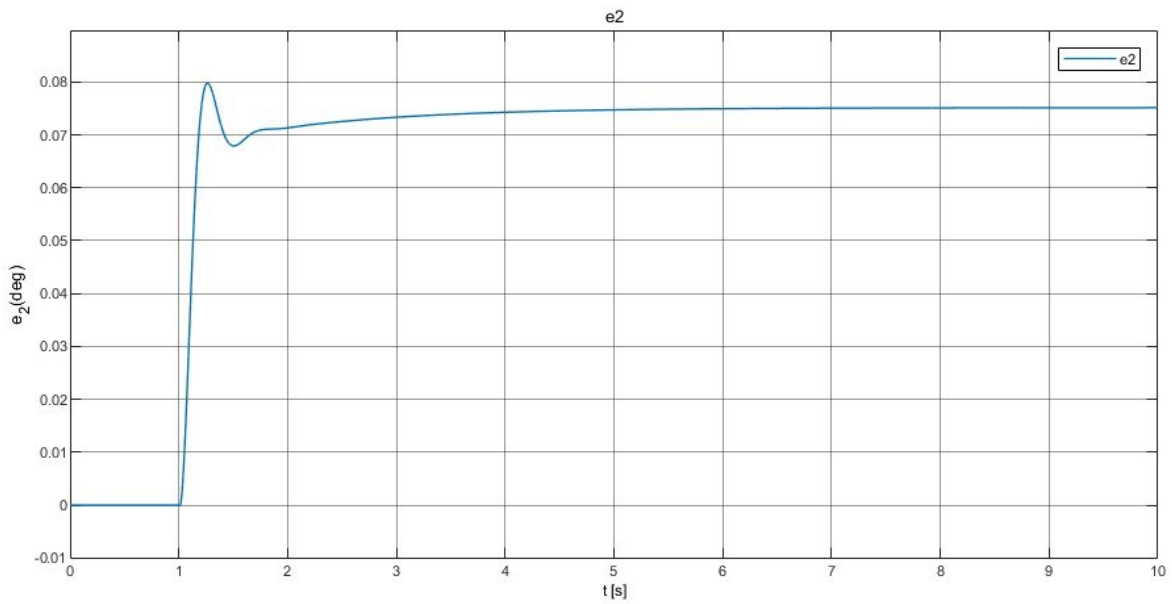
### 6.1 LQR regulator bez predupravljačke veze

Kao prvi pokus koristeći model s pojednostavljenim bicikl modelom, koristi se regulator izračunat LQR metodom, a predupravljačka veza je odspojena.

Iz slike 6.1 vidljivo je da postoji greška vozila u ustaljenom stanju, dok se iz slike 6.2 vidi da postoji i pogreška u kutu skretanja kod ustaljenog stanja.



Slika 6.1: Pogreška pozicije vozila s LQR regulatorom

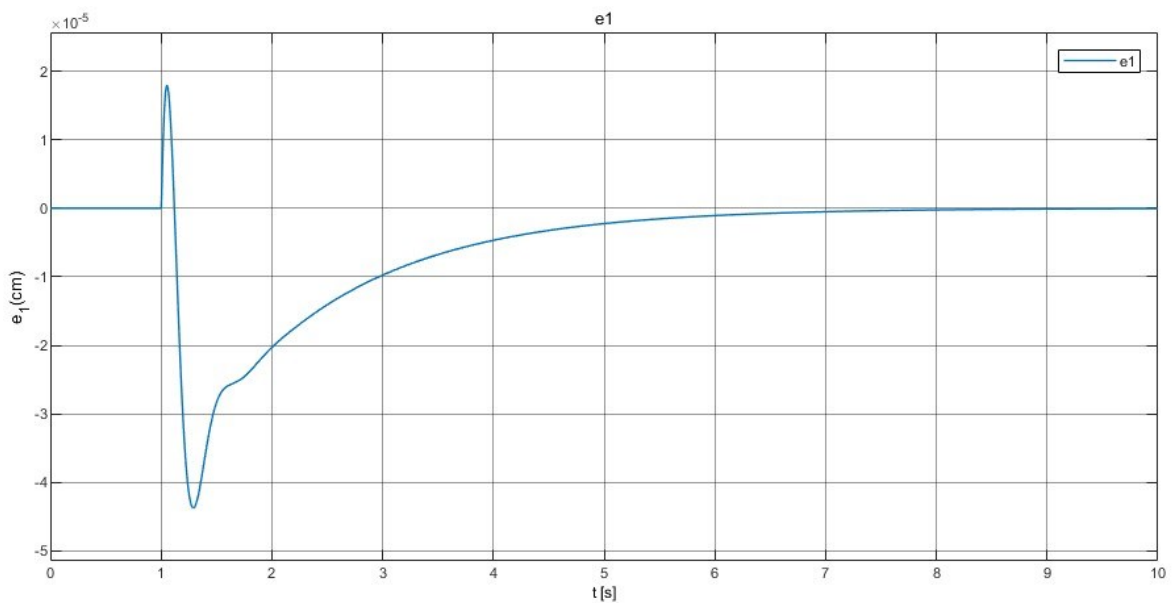


Slika 6.2: Pogreška brzine skretanja vozila s LQR regulatorom

Kod računa pojačanja pomoću naredbe Place, kada koristi polove  $PI$  koji se dobiju preko LQR naredbe daje jednako pojačanje  $K$  kao i LQR, dakle odziv je identičan.

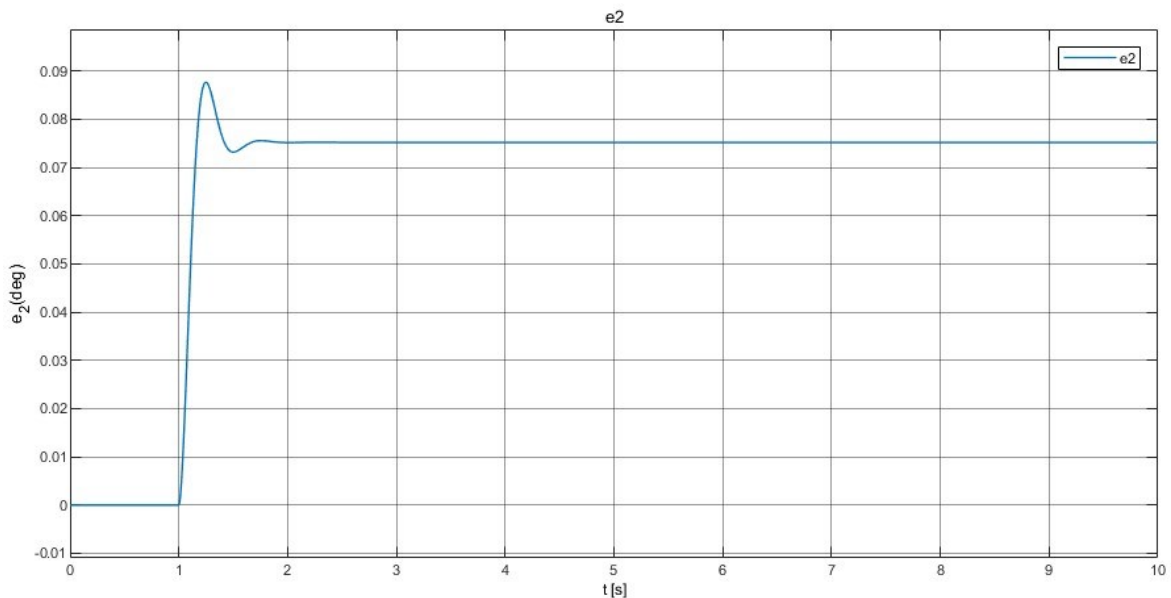
## 6.2 LQR regulator s predupravljačkom vezom

Dodavanjem predupravljačke veze pogreška pozicije vozila u stacionarnom stanju nestaje, što je prikazano slici 6.3.



Slika 6.3: Greška pozicije vozila s predupravljanjem i LQR regulatorom

dok je greška kuta skretanja jednaka (Slika 6.4). Obje greške su u prvim trenutcima pobude veće nego u slučaju bez predupravljanja, no razlika nije velika te je pogreška pozicije kasnije ispravljena u potpunosti. Od ovog pokusa predupravljачka veza ostaje uključena te se to neće posebno naglašavati.



Slika 6.4: Pogreška brzine skretanja vozila s predupravljanjem i LQR regulatorom

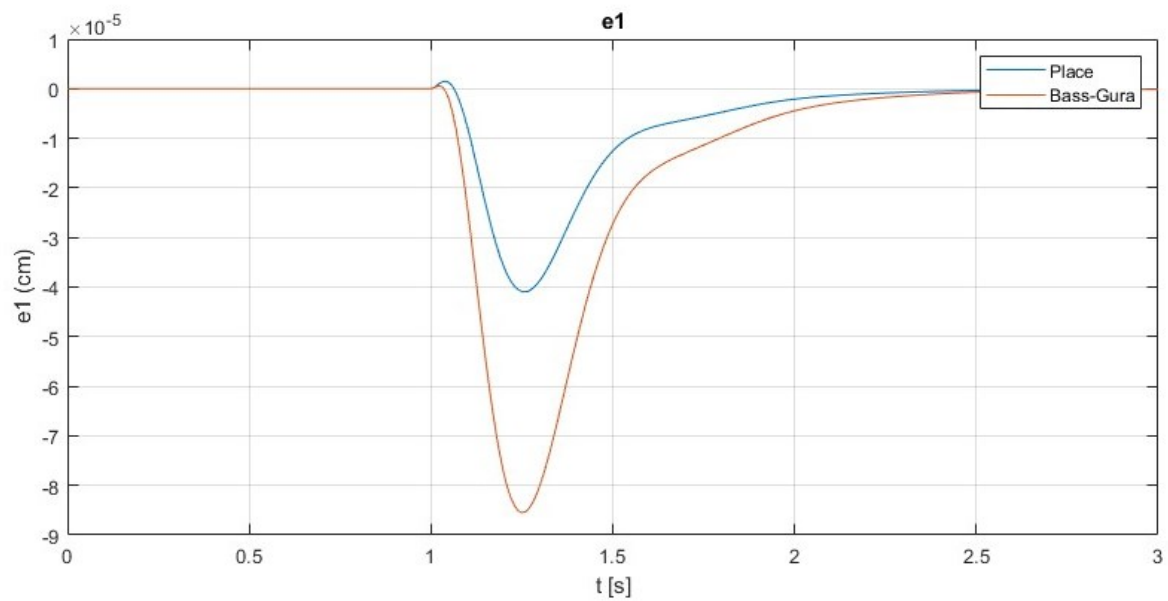
### 6.3 Bass-Gura metoda

Kako bi simulirali računanje pojačanja Bass-Gura metodom, potrebno je prebaciti sklopku te u Delta\_ff bloku zakomentirati pojačanje  $k_3$  pored kojeg piše “LQR” i otkomentirati pojačanje pored kojeg piše “diskretni Bass-Gura”.

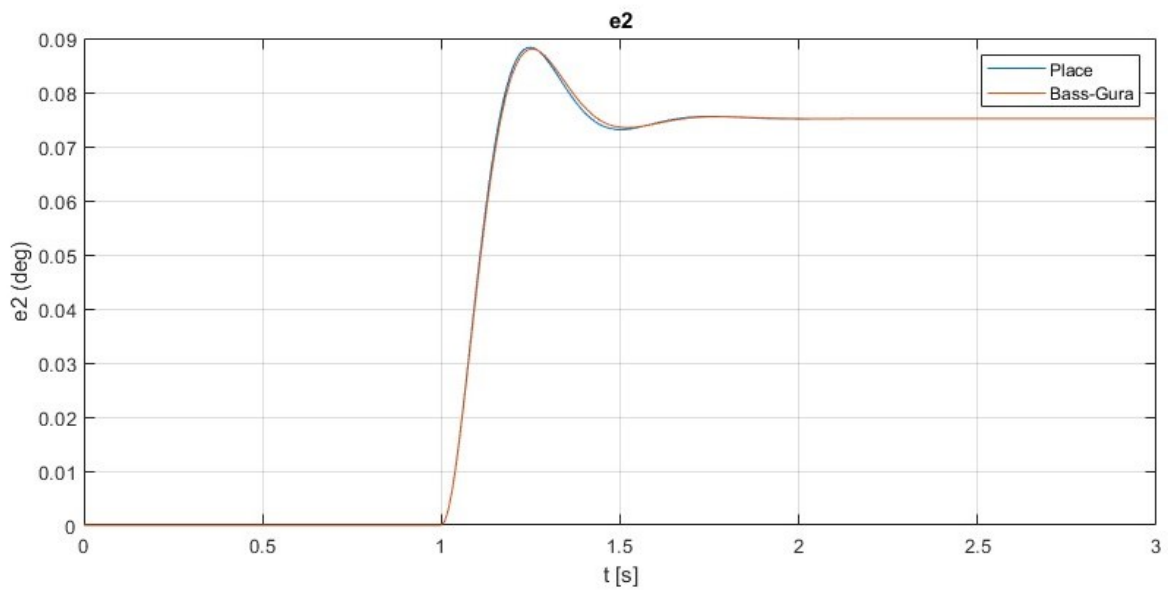
Koristeći Bass-Gura regulator, odstupanje u prvim trenutcima pobude je veće, no vrijeme smirivanja se jako smanjilo (Slika 6.5, Slika 6.6). Dok je LQR regulatoru trebalo preko 6s od pobude da pogreška pozicije postane nula, kod Bass-Gura regulatora to se dogodilo u manje od 1s. Također, na slikama se vidi i usporedni odziv dobiven naredbom Place koristeći iste



željene polove. Vidljivo je da su odzivi gotovo identični, s time da odziv koji koristi pojačanje dobiven naredbom Place ima manje odstupanje pozicije.



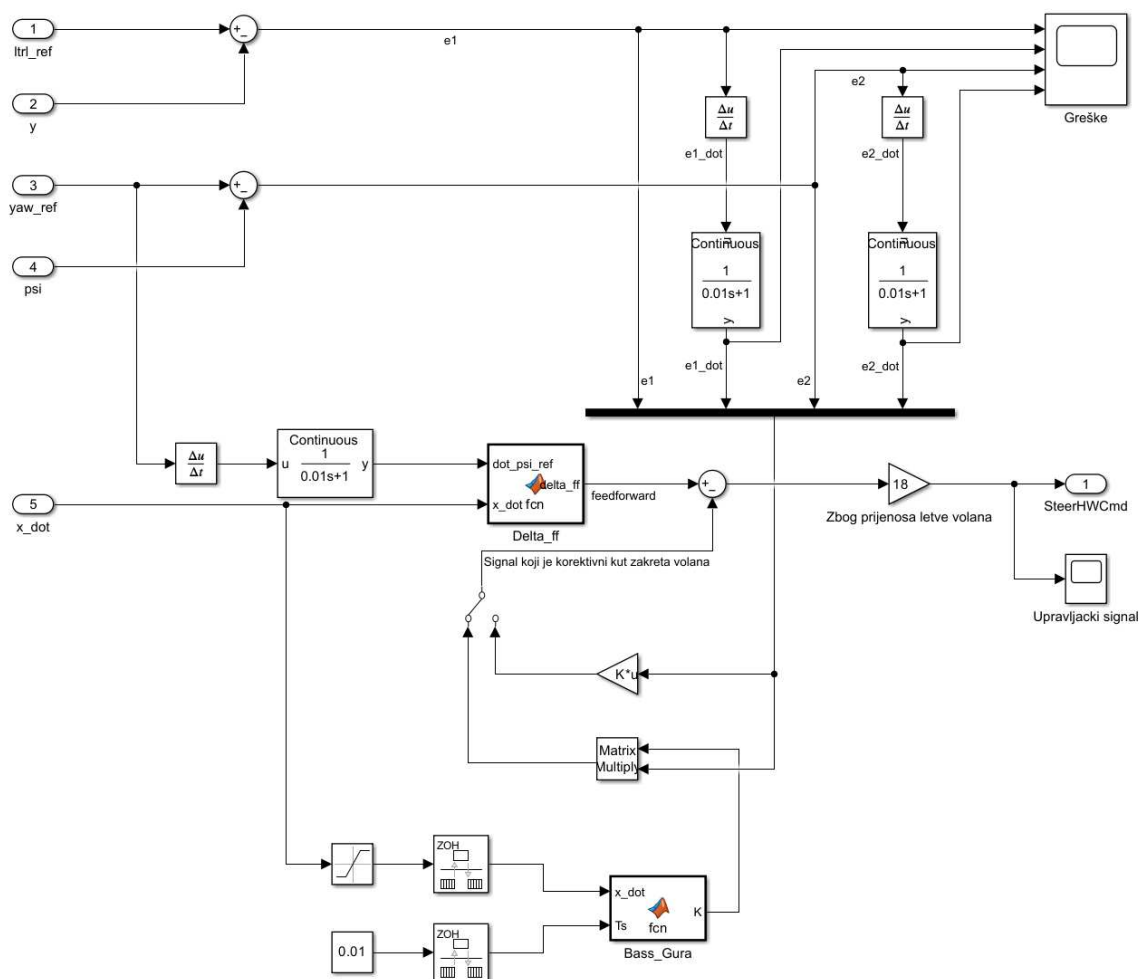
Slika 6.5: Pogreška pozicije vozila s pojačanjem dobivenim Bass-Gura metodom



Slika 6.6: Pogreška brzine skretanja vozila s pojačanjem dobivenim Bass-Gura metodom

## 7. Simulacijski model

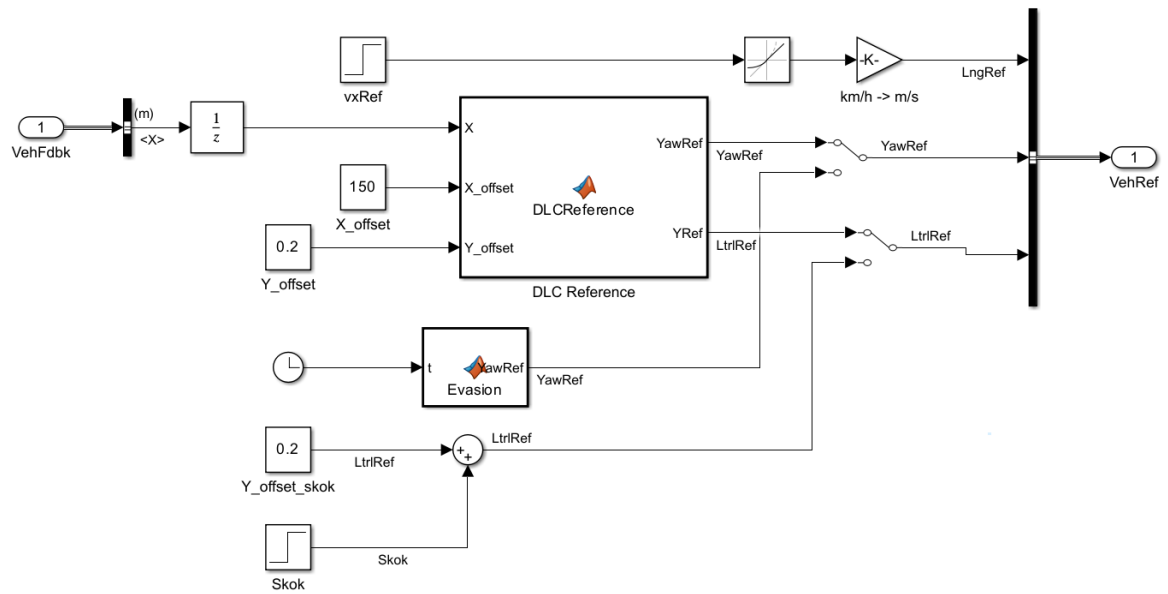
Simulacijski model “MUDV\_projekt.slx” korišten u sklopu ovog diplomskog rada preinačeni je model koji se koristi na FER-u u sklopu projekta na kolegiju “Modeliranje i upravljanje dinamikom vozila” [17]. Model je unaprijed korišten na projektu te već ima integrirane funkcionalnosti poput tempomata za održavanje brzine vozila. Parametri vozila jednaki su onima s projekta, a promjene se nalaze unutar bloka Controller gdje su implementirani regulatori (Slika 7.1),



Slika 7.1: Prikaz Controller/LKA bloka u Simulinku

te unutar Reference Generatora (Slika 7.2), gdje je brzina povećana na 75km/h (20.83m/s) te su promijenjeni parametri manevara izbjegavanja prepreke (Double Lane Change, DLC) kako bi se približili stvarnim parametrima testiranja koji su određeni sa standardom ISO 3888-1 [18]. Jedina razlika je da u pokusima, automobil ima konstantnu brzinu, to jest nema

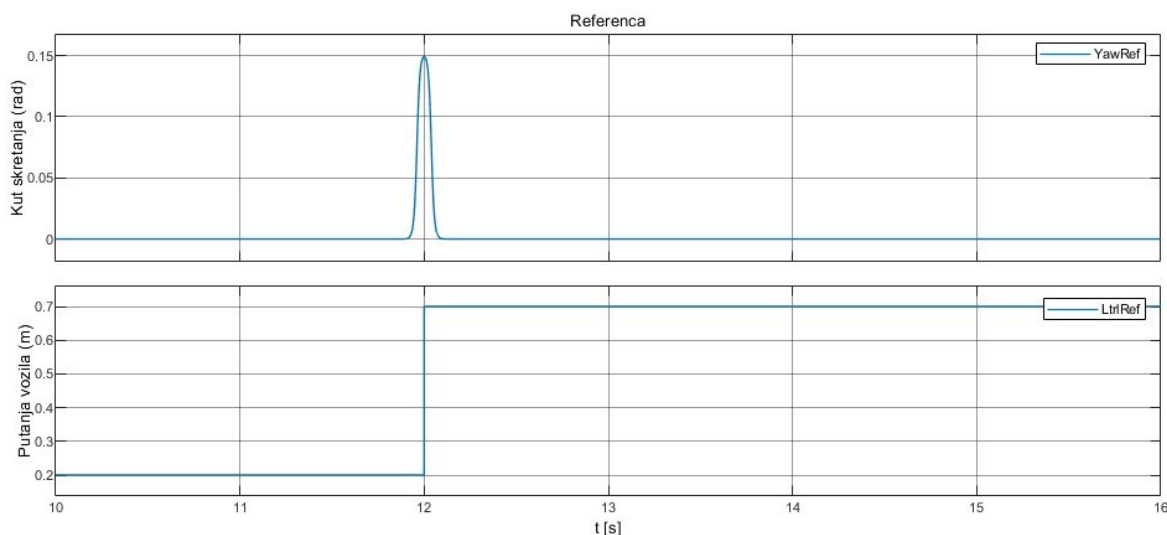
“popuštanja gasa”. Posljednja promjena u tom bloku je da su dodani blokovi za slučaj kada se testira odziv sustava na skok.



Slika 7.2: Prikaz bloka za generiranje referenca u Simulinku

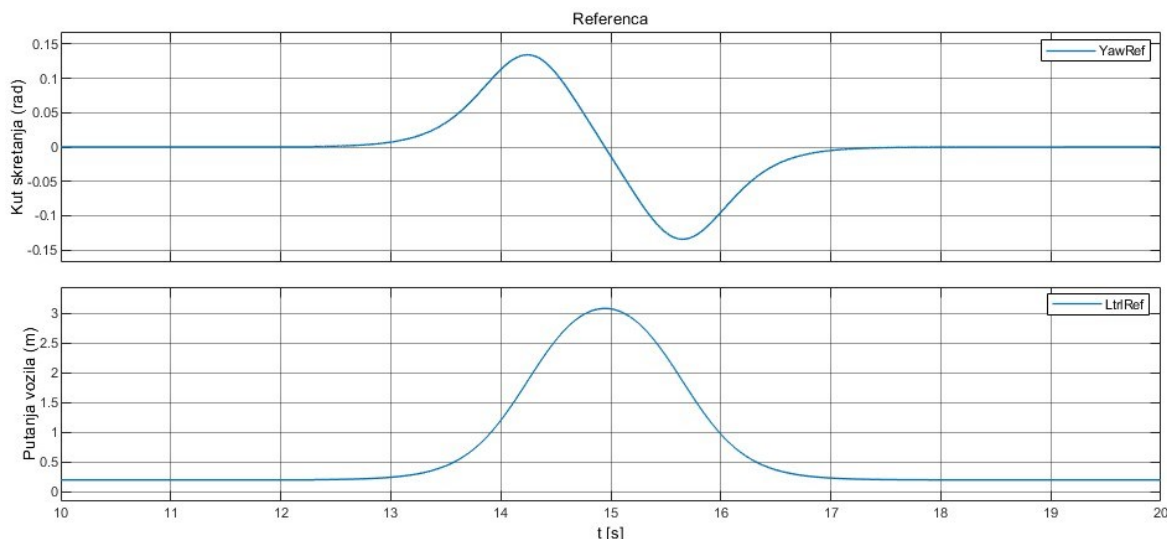
## 8. Rezultati eksperimenta

Koristeći MUDV\_projekt.slx testirat će se više slučajeva pobude. U prva dva slučaja, pobuda će biti iznenadni skok reference u 12.s izvođenja simulacije te će se zbog toga graf ograničiti na period između desete i šesnaeste sekunde, kako bi se prijelazna pojava bolje uočila. Pobuda je prikazana slikom 8.1,



Slika 8.1: Referenca kuta skretanja i putanja vozila za slučaj odziva na skok

dok će u ostalim slučajevima referenca biti putanja manevra izbjegavanja prepreke (engl. *Double Lane Change*, DLC, Slika 8.2). Kod ovih odziva, prvih deset sekundi tijekom kojih vozilo samo ubrzava neće se prikazivati, jer se u tom vremenu ništa ne događa.



Slika 8.2: Referenca kuta skretanja i putanja vozila za slučaj odziva na DLC manevar

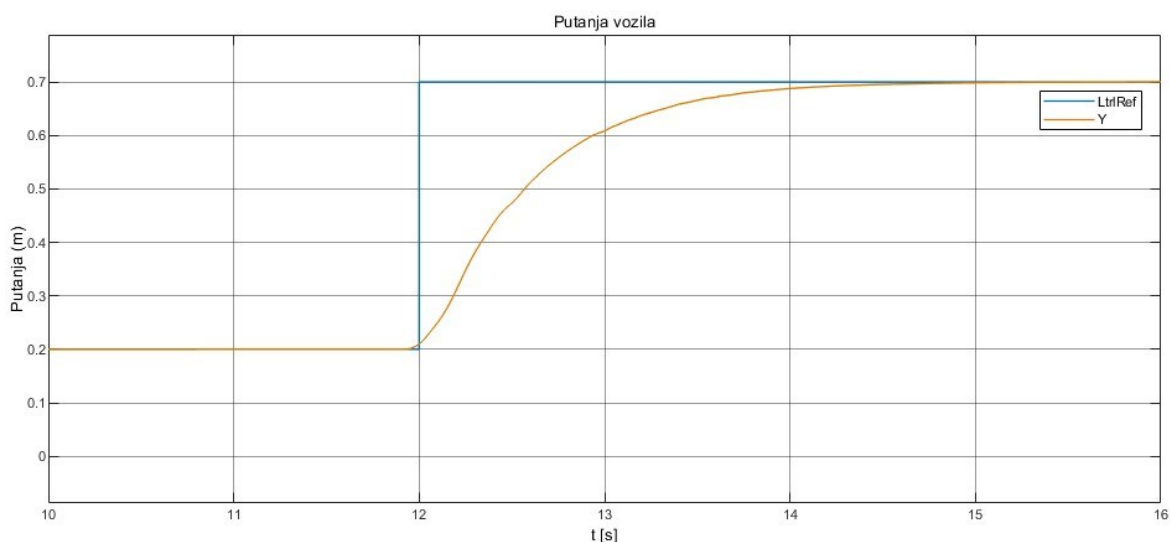
Promjena reference radi se u bloku Reference Generator tako da se obje sklopke prebace u identičan položaj (svi gore za DLC ili svi dolje za skok pobudu).

## 8.1 Odziv LQR regulatora na skok pobudu

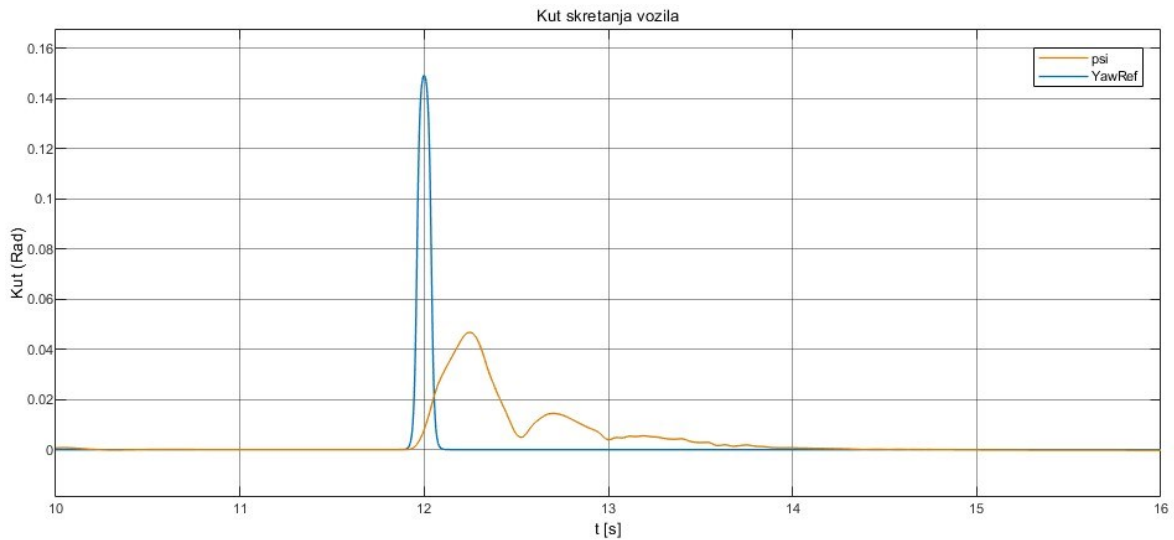
U prvom slučaju koristeći simulacijski model, testira se odziv LQR regulatora uz skokovitu pobudu. Prije izvođenja pokusa potrebno je provjeriti da je u Delta\_ff bloku ispravno postavljeno pojačanje  $k_3$ .

Zbog ekstremnih uvjeta, to jest impulsnog skoka pobude, dodano je ograničenje na kut zakreta jer regulator inače ima skok na par trenutaka na kut zakreta od 5000 stupnjeva. Kvaliteta odziva se ne mijenja dodavanjem ograničenja.

Iz slike 8.3 vidljivo je da korištenjem LQR regulatora u odzivu pozicije vozila nema nadvišenja, dok je vrijeme dolaska na zadanu putanju 3s od početka manevra. U slučaju kuta skretanja vozila (Slika 8.4), izmjerene vrijednosti su jako male te se vidi da se u jednom trenu vozilo previše zakrenulo, to jest prešlo je preko željenog kuta zakreta te se moralo ispravljati.

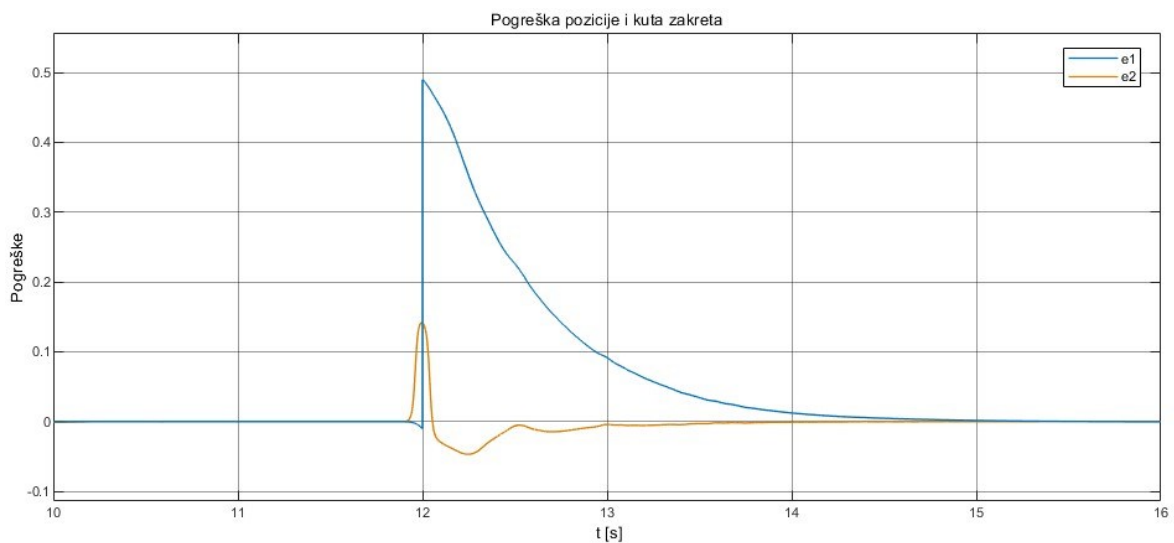


Slika 8.3: Praćenje referentne putanje pomoću LQR regulatora

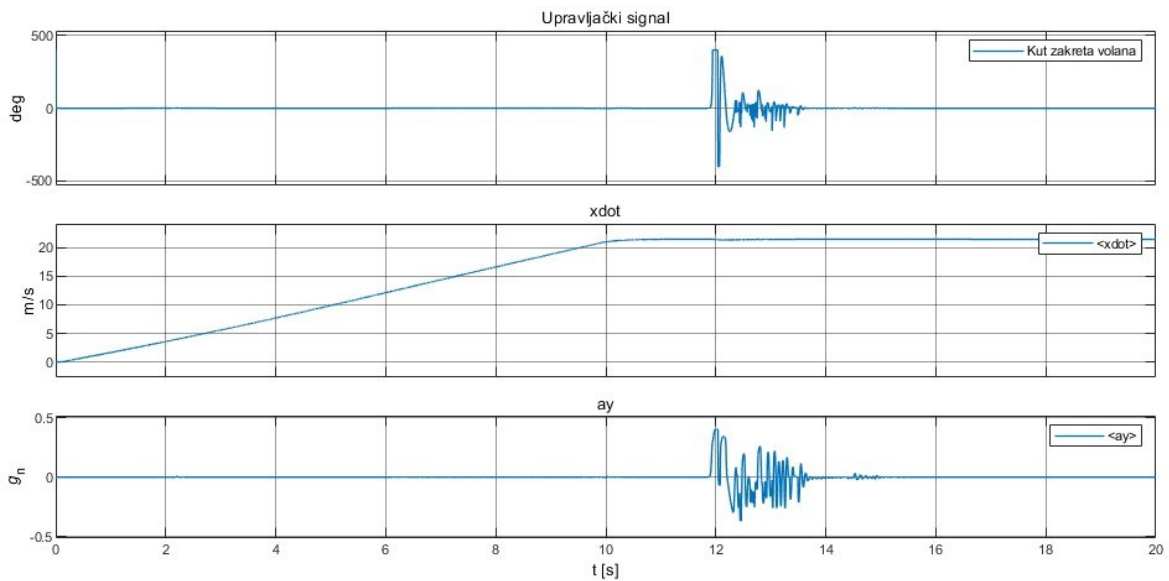


Slika 8.4: Praćenje referentnog kuta zakreta vozila pomoću LQR regulatora

Na slici 8.5 nalaze se pogreške pozicije (metri) te orijentacije (radijani). Na posljednjem grafu (Slika 8.6) poglavlja nalaze se bočna akceleracija, prikaz brzine vozila te kuta zakreta volana, iz kojeg je vidljivo da je kut zakreta promjenjiv no ne pretjeran zahvaljujući bloku za zasićenje.



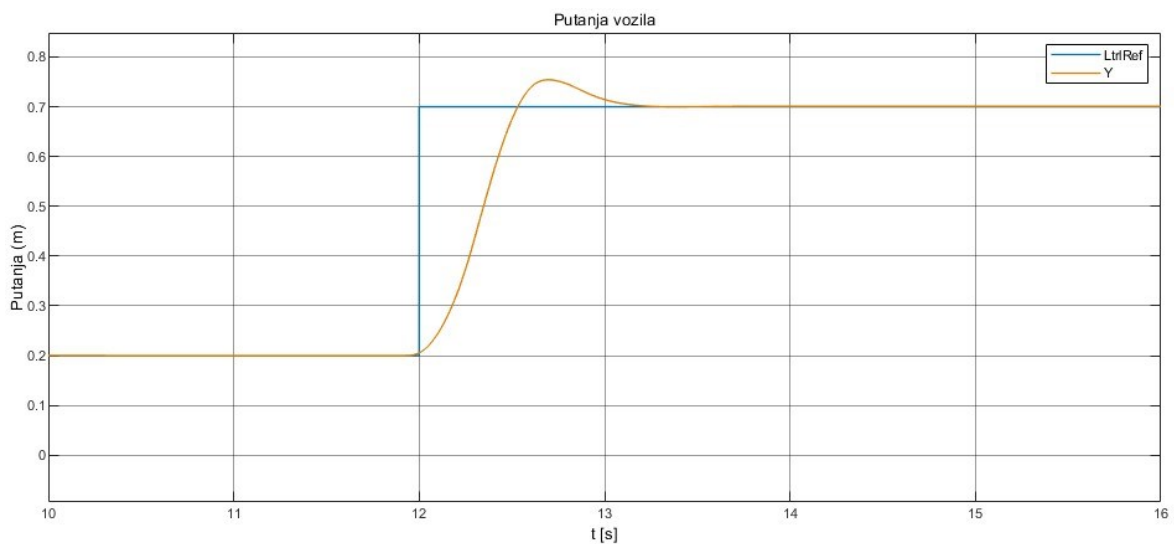
Slika 8.5: Pogreške praćenja bočne pozicije i kuta zakreta pomoću LQR regulatora



Slika 8.6: Upravljački signal, brzina i bočna akceleracija kod LQR regulatora

## 8.2 Odziv regulatora dobivenog Bass-Gura metodom na skokovitu pobudu

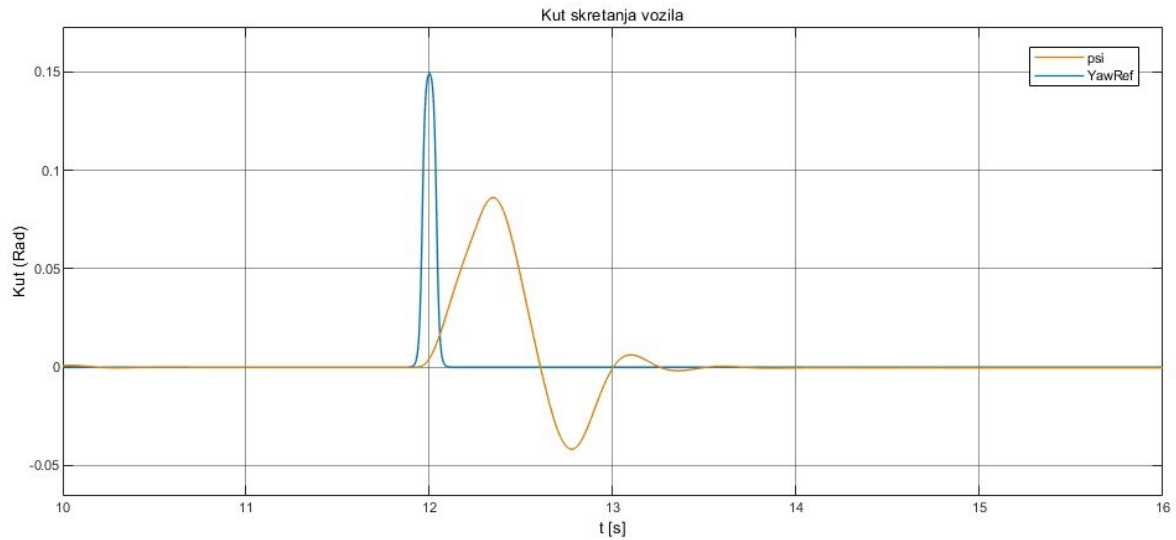
Koristeći pojačanje dobiveno Bass-Gura metodom dobiveno praćenje pozicije prikazano je slikom 8.7.



Slika 8.7: Praćenje referentne putanje pomoću pojačanja dobivenog Bass-Gura metodom

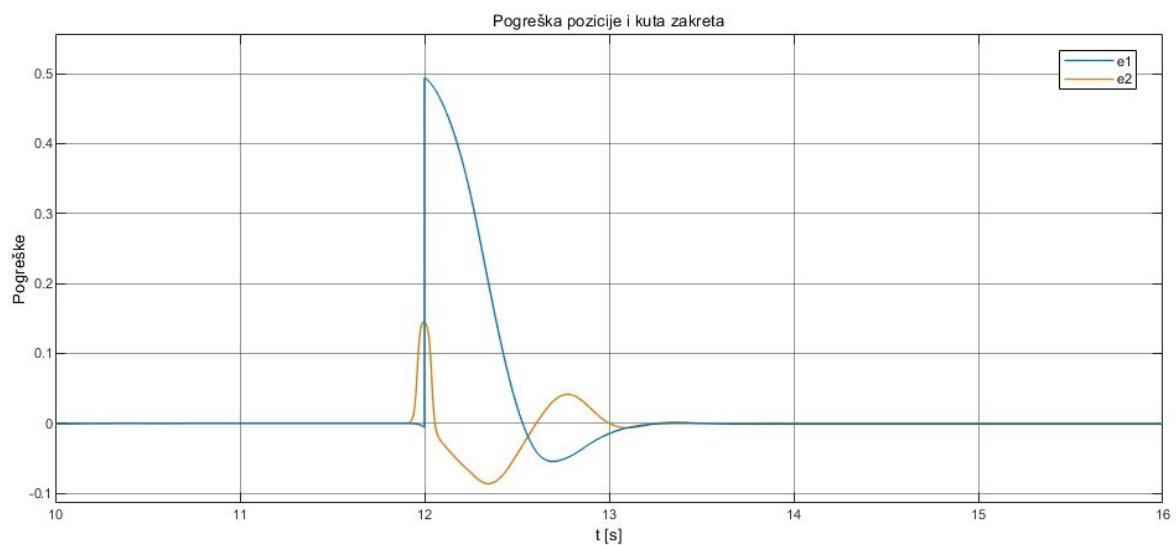
Vidljivo je da je odziv brži nego u slučaju LQR regulatora, uz vrijeme smirivanja od otprilike jedne sekunde, no također je vidljivo da se pojavilo nadvišenje koje kod LQR regulatora nije

postojalo. Kao i kod praćenja putanje, kod kuta zakreta (Slika 8.8) se također vidi da je odstupanje veće, no da je odziv puno brži, što je posebno istaknuto na slici 8.9.



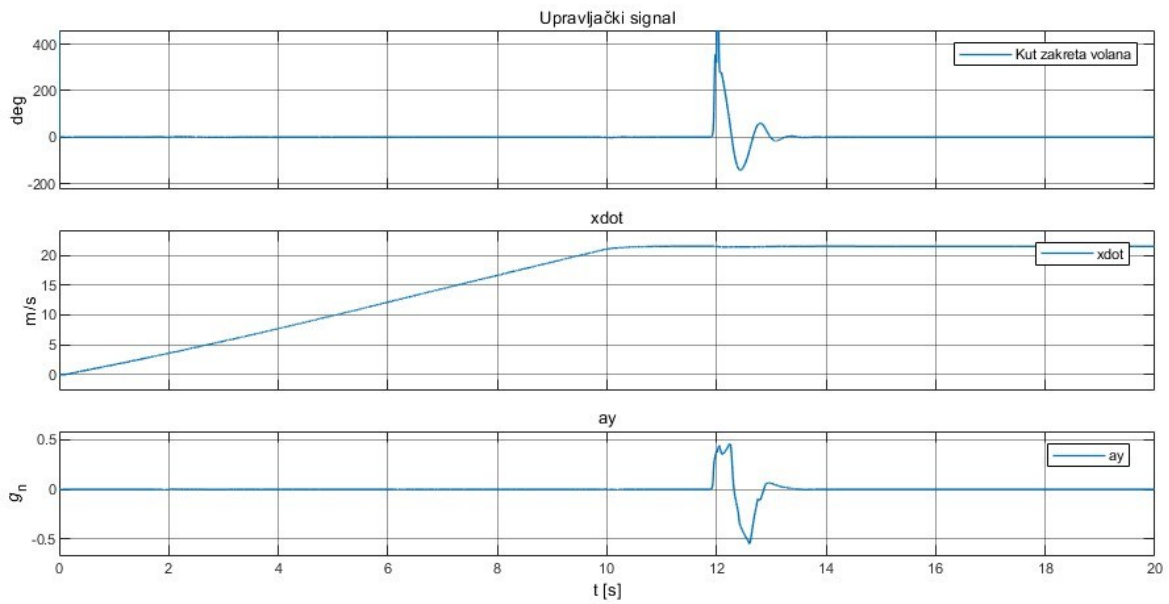
Slika 8.8: Praćenje kuta skretanja pomoću pojačanja dobivenog Bass-Gura metodom

Upravljački signal (Slika 8.10) je stabilan te nema oscilacije kakve postoje kod odziva LQR regulatora na step pobudu.



Slika 8.9: Pogreške s pojačanjem dobivenim Bass-Gura metodom



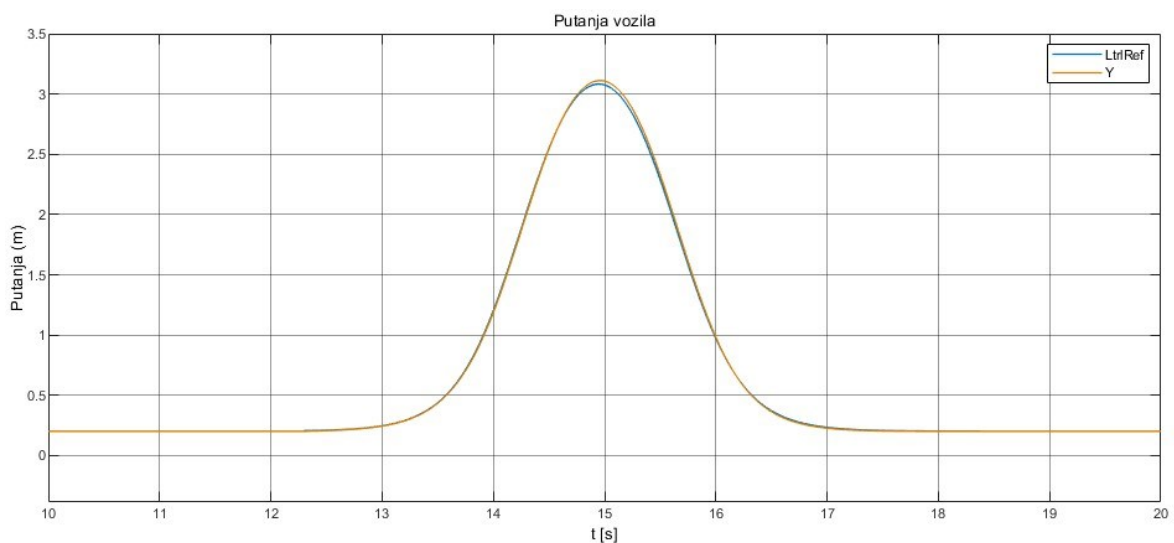


Slika 8.10: Upravljački signal, brzina i bočna akceleracija kod pomoću pojačanja dobivenog Bass-Gura metodom

### 8.3 Odziv LQR regulatora na DLC manevar

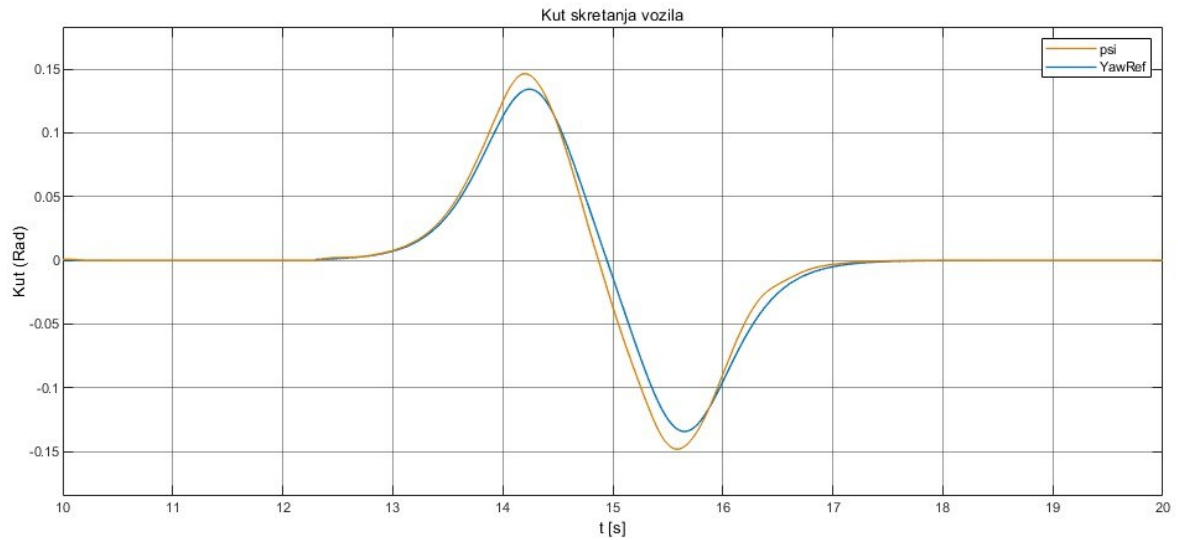
Kod manevara izbjegavanja prepreke (engl. Double Lane Change, DLC), postavljenog po uzoru na stvarni test, vidljivi su rezultati koji odgovaraju stvarnom vozilu.

Iz slike 8.11 vidljivo je da je praćenje putanje gotovo idealno, što se posebno vidi na slici 8.13 gdje su prikazana odstupanja od reference kod kuta skretanja i putanje.

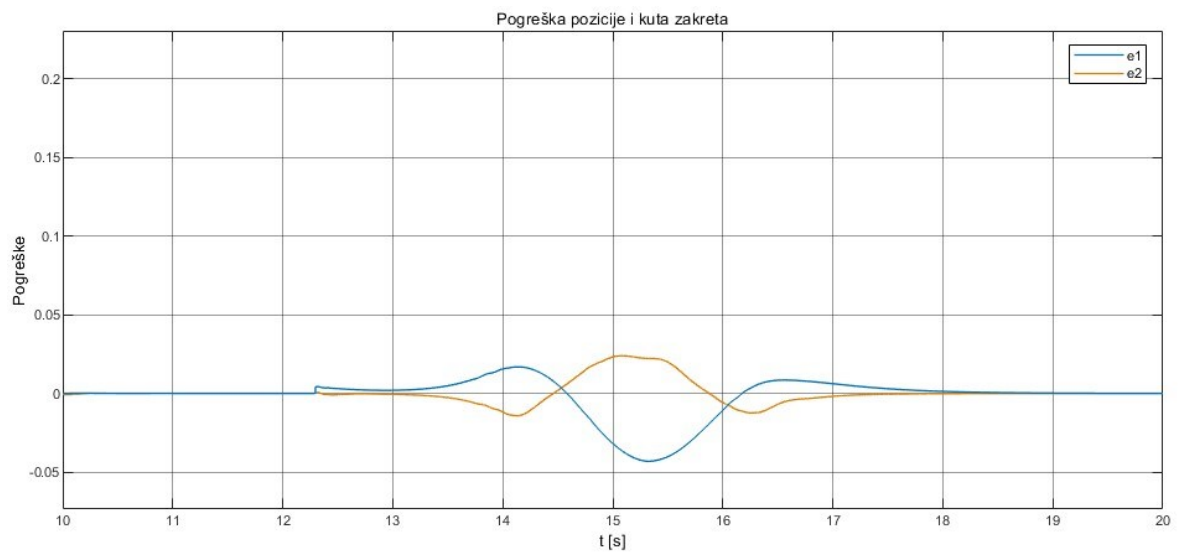


Slika 8.11: Praćenje referentne putanje kod DLC manevara pomoću LQR regulatora

Vidljivo je da je maksimalna pogreška putanje manja od 0.05m, odnosno 5cm, dok je maksimalno odstupanje od zadanog kuta skretanja manje od 0.025 radijana (Slika 8.12).

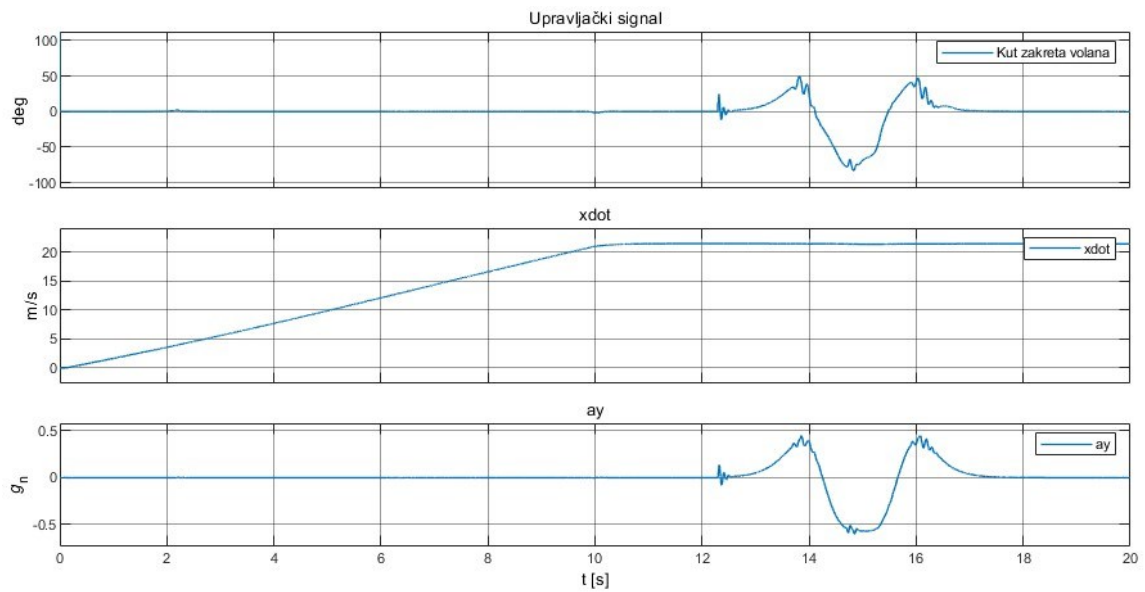


Slika 8.12: Praćenje kuta skretanja kod DLC manevara pomoću LQR regulatora



Slika 8.13: Pogreške sa LQR regulatorom kod DLC manevara

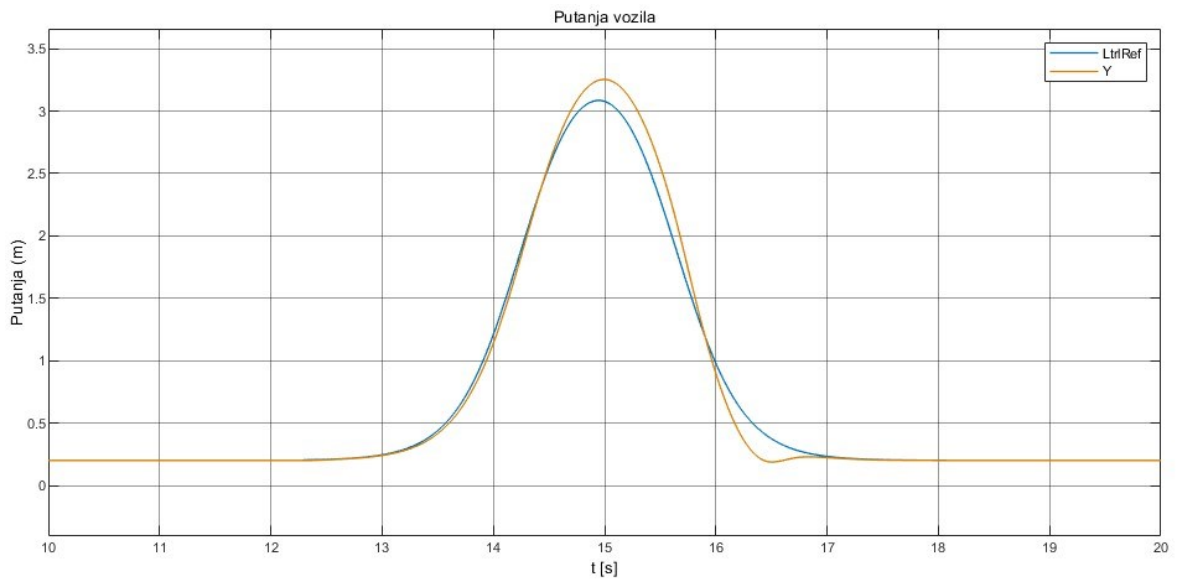
Na slici 8.14 vidi se da je maksimalni kut zakreta volana manji od  $50^\circ$ , što otprilike odgovara realnoj situaciji u stvarnom svijetu.



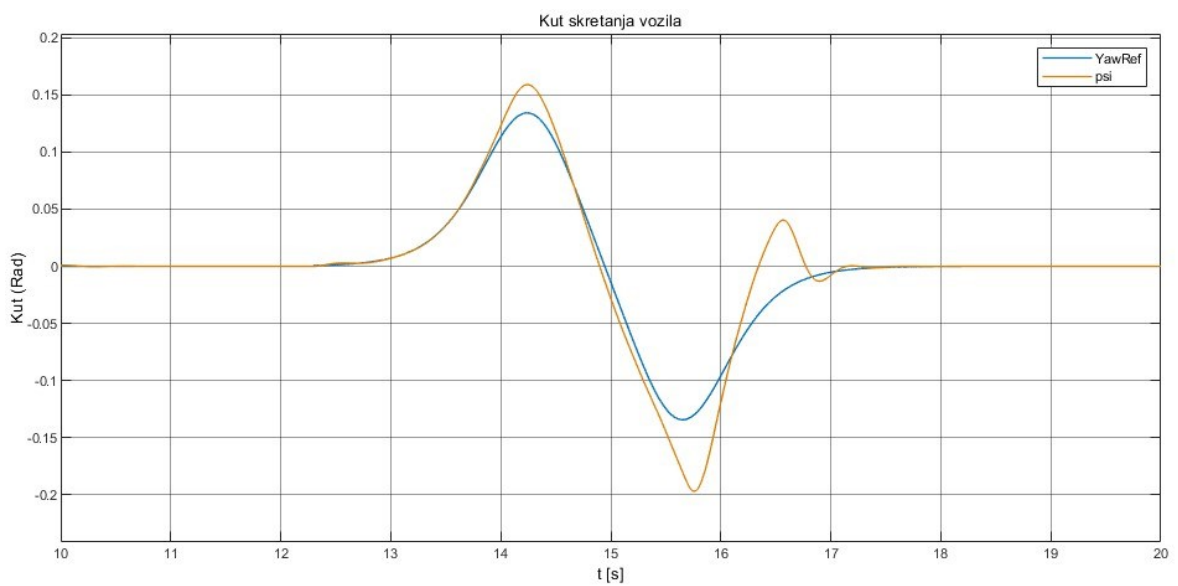
Slika 8.14: Upravljački signal, brzina i bočna akceleracija kod DLC manevara s LQR regulatorom

## 8.4 Odziv regulatora dobivenog Bass-Gura metodom na DLC manevar

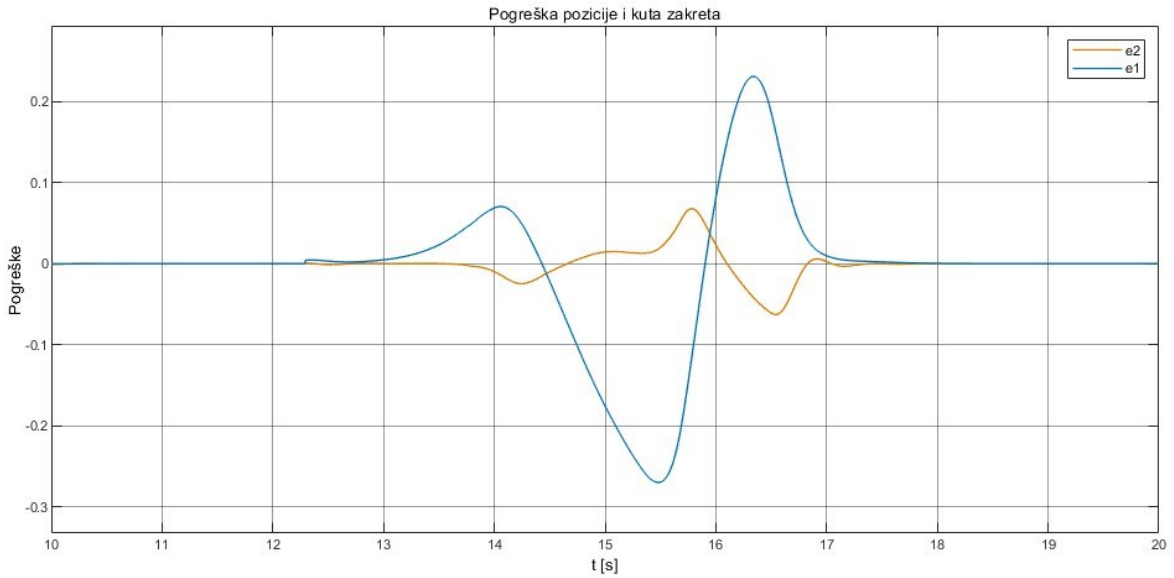
U slučaju odziva Bass-Gura regulatora na DLC manevar, praćenje referenci inferiorno je u odnosu na LQR regulator, s ponašanjem sličnim onome kod odziva na skokovitu pobudu. Brzina odziva je dobra, no postoji nadvišenje u oba smjera (Slika 8.15, Slika 8.16). Maksimalne pogreške su puno veće što je vidljivo na slici 8.17, te je odziv vozila agresivniji.



Slika 8.15: Praćenje referentne putanje kod DLC *manevra* pomoću pojačanja dobivenog Bass-Gura metodom

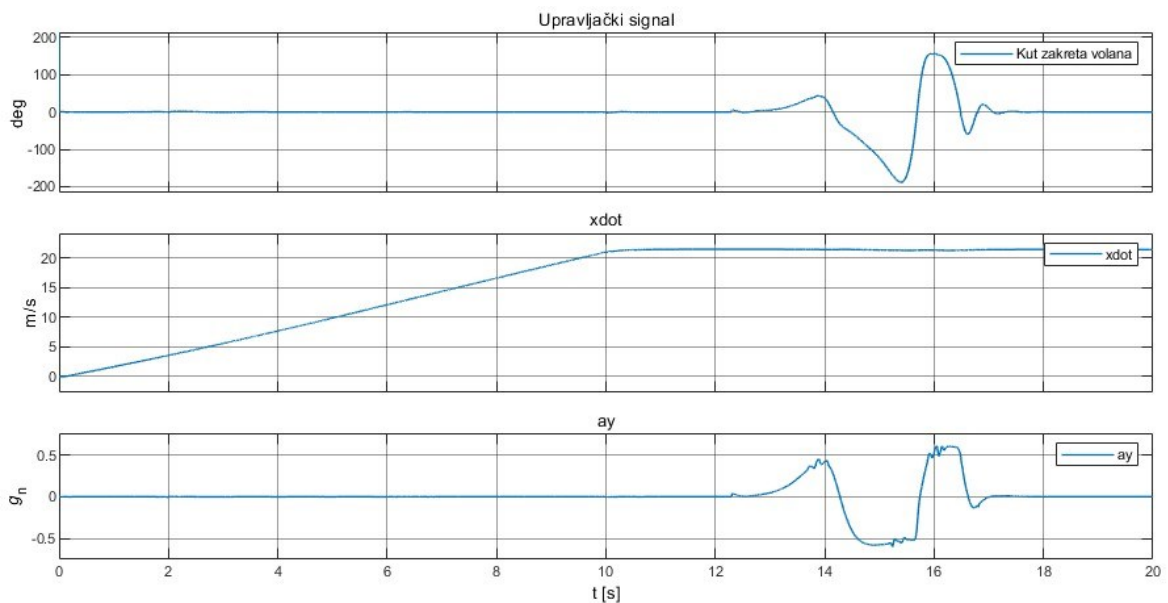


Slika 8.16: Praćenje kuta skretanja kod DLC pomoću Bass-Gura regulatora



Slika 8.17: Pogreške s pojačanjem dobivenim Bass-Gura metodom kod DLC manevara

Sa slike 8.18 vidi se da je kut zakreta volana 2x veći od onoga kod LQR regulatora (Slika 8.14), te da njegova promjena puno brža i samim time agresivnija, dok se iz zadnjeg grafa koji prikazuje bočnu akceleraciju  $a_y$  vidi jednako ponašanje.



Slika 8.18: Praćenje referentne putanje kod DLC pomoću pojačanja dobivenog Bass-Gura metodom

## 9. Zaključak

U ovom radu predstavljena je sinteza i izračun regulatora za bočnu dinamiku bicikl modela vozila za upravljanje ponašanjem vozila. Kroz odvojene eksperimente, regulatori dobiveni LQR i Bass-Gura metodama testirali su se prvo na Pojednostavljenom bicikl modelu vozila, te kasnije na Simulacijskom modelu preuzetom s projekta iz predmeta “Modeliranje i upravljanje dinamikom vozila”.

LQR regulator sintetiziran je s pomoću matrica  $R$  i  $Q$  čije su težine pažljivo odabrane kako bi se osiguralo optimalno smanjenje pogreške i minimalizacija upotrebe upravljačkog signala. Iz provedenih pokusa, vidljivo je da je LQR regulator uspješno sintetiziran te da uspješno stabilizira sustav, iako u tom procesu postoji kašnjenje u praćenju putanje, pogotovo u agresivnom manevru poput odziva na skokovitu pobudu.

Bass-Gura regulator, korišten za preostala testiranja, sintetiziran je s pomoću kanoničkog upravljivog oblika (CCF) te ručno postavljenih željenih polova, za čiju su osnovu uzeti polovi dobiveni sintezom LQR regulatora te su potom prilagođeni kako bi se postigao što bolji odziv sustava. Uspješno prati referencu te je vidljivo da je njegov odziv brži od odziva LQR regulatora, no ta brzina dolazi s cijenom smanjene preciznosti odziva, koji ima veće greške nego u slučajevima gdje je korišten LQR regulator. Također, pokazano je da se uporabom jednakih željenih polova kao u Bass-Gura metodi, metodom dobivanja pojačanja regulatora naredbom Place dobiju jednaki odzivi sustava.

Konačno, iz provedenih pokusa može se zaključiti da je sinteza svih regulatora uspješno provedena. Svi korišteni regulatori imaju svoje prednosti i mane, na primjer LQR s matricama  $Q$  i  $R$  korištenima u sklopu ovog rada ima bolji balans između minimalizacije stanja i korištenog upravljačkog signala ali je sporiji, dok se Bass-Gura sa željenim polovima korištenima u sklopu ovog diplomskog rada ističe većom brzinom odziva (manjim kašnjenjem), iako to uvodi veća odstupanja te agresivnije upravljačke akcije.

## Literatura

- [1] Forkenbrock, Flick, Garrot, A comprehensive Light Vehicle Antilock Brake System Test Track Performance Evaluation (1998)., <https://www.nhtsa.gov/sites/nhtsa.gov/files/sae1999-01-1287.pdf>, pristupljeno 2.1.2025.
- [2] Gagan Modi, ABS as Essential Safety Feature. Why is ABS Important for Every Car Buyer (14.7.2018)., [https://www.mycarhelpline.com/index.php?option=com\\_easyblog&view=entry&id=770&Itemid=91](https://www.mycarhelpline.com/index.php?option=com_easyblog&view=entry&id=770&Itemid=91), pristupljeno 2.1.2025.
- [3] Safety Research & Strategies, (1.7.2004)., <https://www.safetyresearch.net/a-brief-history-of-electronic-stability-controls-and-their-applications/>, pristupljeno 2.1.2025.
- [4] ACDelco Technoconnect, <https://www.techconnectcanada.com/blog/2017/07/lane-keep-assist-a-helpful-intervention>, pristupljeno 3.1.2025.
- [5] [https://en.wikipedia.org/wiki/Lane\\_departure\\_warning\\_system](https://en.wikipedia.org/wiki/Lane_departure_warning_system), pristupljeno 3.1.2025.
- [6] <https://www.tesla.com/support/autopilot>, pristupljeno 5.1.2025.
- [7] [https://www.tesla.com/ownersmanual/modely/en\\_us/GUID-20F2262F-CDF6-408E-A752-2AD9B0CC2FD6.html](https://www.tesla.com/ownersmanual/modely/en_us/GUID-20F2262F-CDF6-408E-A752-2AD9B0CC2FD6.html), pristupljeno 5.1.2025.
- [8] <https://www.volkswagen.hr/novi-golf/travel-assist>, pristupljeno 5.1.2025.
- [9] [https://www.kia.com/content/dam/kia2/in/en/content/ev6-manual/topics/chapter6\\_27.html](https://www.kia.com/content/dam/kia2/in/en/content/ev6-manual/topics/chapter6_27.html), pristupljeno 5.1.2025.
- [10] Š. Ileš, Modeliranje i upravljanje dinamikom vozila (29.5.2024)., [https://www.fer.unizg.hr/download/repository/predavanje\\_11\[1\].pdf](https://www.fer.unizg.hr/download/repository/predavanje_11[1].pdf), pristupljeno 10.1.2025.
- [11] Rajamani, R. (2006). Vehicle Dynamics and Control. 10.1007/0-387-28823-6.
- [12] Banušić, Gregor Boris. "LQR i LQG kontrola - teorija i primjene." Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, 2017. <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:975484>, pristupljeno 16.1.2025.
- [13] R. M. Murray, Lecture 2 - LQR Control, 11 January 2006, <https://www.cds.caltech.edu/~murray/courses/cds110/wi06/lqr.pdf>, , pristupljeno 16.1.2025.
- [14] <https://instrumentationtools.com/feedforward-vs-feedback-control/>, pristupljeno 18.1.2025.
- [15] Š. Ileš, J. Matuško, *Upravljanje po varijablama stanja* (13.11.2024)., [https://www.fer.unizg.hr/download/repository/TUUM\\_predavanje5%20\(2\).pdf](https://www.fer.unizg.hr/download/repository/TUUM_predavanje5%20(2).pdf), pristupljeno 19.1.2025.
- [16] <https://www.mathworks.com/help/control/ref/lti.lqr.html>, pristupljeno 19.1.2025.
- [17] <https://www.fer.unizg.hr/predmet/mudv>, pristupljeno 1.2.2025.
- [18] ISO 3888-1:2018 Passenger cars - Test track for a severe lane-change manoeuvre - Part 1: Double lane-change (Edition 2, 2018)., <https://www.iso.org/standard/67973.html>, pristupljeno 1.2.2025.

# SUSTAV ASISTENCIJE VOZAČU ZA ZADRŽAVANJE VOZILA U PROMETNOJ TRACI

## Sažetak

U ovom diplomskom radu predstavljeni su razvoj i testiranje regulatora za zadržavanje vozila u traci. Prilikom izrade rada, prvi korak bio je razvoj kontinuiranog modela bočne dinamike, temeljenog na bicikl modelu automobila u ovisnosti o brzini. Model je opisan u prostoru stanja, a varijable stanja su pogreška pozicije i orijentacije u odnosu na cestu.

Sljedeći korak je sinteza regulatora. Prvi sintetizirani regulator bio je LQR (engl. *Linear Quadratic Regulator*), čije su matrice  $Q$  i  $R$  podešene zahtjevima konkretnog modela. Nakon njega, sintetiziran je regulator pomoću naredbe Place, koristeći polove dobivene LQR regulatorom, koji je dao isto pojačanje kao i LQR. S obzirom da su odzivi imali pogrešku u stacionarnom stanju, dodan je predupravljački signal koji je uspješno poništio pogrešku pozicije, no ne i pogrešku kuta zakreta vozila. Posljednji korišteni regulator je diskretni Bass-Gura, temeljen na pretvorbi kontinuiranog modela u kanonički upravljivi oblik (CCF). Ovom metodom izravno se postavljaju željeni polovi zatvorenog sustava, dok se pojačanje prvo računa u kanonički upravljivom obliku, pa se onda pretvara nazad u originalni koordinatni sustav.

Preko odziva prvo jednostavnog bicikl modela vozila, a kasnije i pravog simulacijskog modela, pokazano je da svi regulatori funkcioniraju, te su demonstrirane specifične prednosti i mane sinteze regulatora pomoću LQR i Bass-Gura regulatora.

Ključne riječi: sustav za zadržavanje vozila u traci, LKA, LQR, Place, predupravljanje, Bass-Gura, MATLAB, Simulink



# DRIVER ASSISTANCE SYSTEM FOR LANE KEEPING

## Abstract

In this master's thesis, a regulator has been developed and tested for a lane keeping system (LKA) in a vehicle model. During the development, the first step was the creation of a continuous lateral dynamics model based on the bicycle model of a car, in which the dynamics depend on the vehicle's speed. The model was formulated in state-space form, where the state variables represent the position error and orientation error with respect to the road.

The next step was the synthesis of controllers. The first synthesized controller was an LQR (Linear Quadratic Regulator), with the weighting matrices  $Q$  and  $R$  tuned to suit the specific model requirements. After the LQR, the next controller was synthesized using the Place command in MATLAB, employing the poles generated by the LQR which yielded identical gains. Since simulations of the system produced responses with a steady-state error, a Feedforward controller was added that successfully eliminated the position error, although the steering angle error was not fully compensated. Lastly, a discrete Bass-Gura regulator was implemented, based on the transformation of the continuous model into the controllable canonical form (CCF). This method allows the desired poles of the closed-loop system to be set manually, after which the gain is first calculated in the CCF and then transformed back into the original coordinate system.

Experimental results from both the simple bicycle model and the full simulation model demonstrated the correct functioning of all controllers, with their specific advantages and disadvantages clearly illustrated.

Keywords: Lane Keeping Assist, LKA, LQR, Place, Feedforward, Bass-Gura, MATLAB, Simulink

# Privitak

U privitku se nalazi Matlab kod korišten u sklopu diplomskog rada.

## Matlab funkcija Racun\_pojacanja.m

```
% Parametri sustava
Cf = 72705; % bočna krutost prednjih guma u N/rad
Cr = 72705; % bočna krutost stražnjih guma u N/rad
m = 1341; % masa vozila u kg
Iz = 2066; % moment inercije u kg*m^2
a = 1.732; % udaljenost od središta mase do prednjih kotača u m
b = 1.343; % udaljenost od središta mase do stražnjih kotača u m
v = 20.83; % brzina vozila u m/s

[A, B, C, D] = model_vozila(Cf, Cr, m, Iz, a, b, v);
B1 = [0; -(a * 2*Cf - b * 2*Cr) / (m * v) - v; 0; -(a^2 * 2*Cf + b^2 * 2*Cr)/(Iz * v)];

% Matrice težina za LQR
Q = diag([7, 13, 6, 1]);
R = 1.5;

% LQR izračun
[K, S, P1] = lqr(A, B, Q, R);

% Place metoda - jednostavni model
P_zeljani = [-3.733 -7.1457+12.4525i -7.1457-12.4525i -25.468]';

% Place
K1 = place(A, B, P1); % koristeći polove iz LQR
K2 = place(A, B, P_zeljani);
disp('K matrix iz lqr:');
disp(K);
disp('K1 matrix iz place:');
disp(K1);
disp('K2 matrix iz Bass:');
disp(K2);
```

## Matlab funkcija model\_vozila.m

```
function [A, B, B1, C, D] = model_vozila(Cf, Cr, m, Iz, a, b, v)
%% Matrice sustava
    A = [0, 1, 0,
0;
        0, -(2*Cf + 2*Cr)/(m * v), (2*Cf + 2*Cr)/m, -(a *
2*Cf - b * 2*Cr) / (m * v);
        0, 0, 0,
1;
        0, -(a * 2*Cf - b * 2*Cr) / (v * Iz), (a * 2*Cf - b * 2*Cr)/Iz, -(a^2 *
2*Cf + b^2 * 2*Cr)/(Iz * v)];

    B = [0; 2*Cf/m; 0; a*2*Cf/Iz];

    C = [1; 0; 0; 0];

    D = [0; 0];

    B1 = [0; -(a * 2*Cf - b * 2*Cr) / (m * v) - v; 0; -(a^2 * 2*Cf + b^2 *
2*Cr)/(Iz * v)];

%% Provjera upravljivosti
    controllability_matrix = ctrb(A, B);
    rank_controllability = rank(controllability_matrix);

    if rank_controllability < size(A, 1)
        error('Sustav nije upravljiv! Promijeni parametre.');
```

```
    end
```

```
end
```

## Implementacija izračuna predupravljačkog signala unutar simulink bloka MUDV\_projekt/Controller/LKA/Delta\_ff:

```
function delta_ff = fcn(dot_psi_ref, x_dot)

    m = 1341;           % kg
    lf = 1.732;        % m
    lr = 1.343;        % m
    L = lf + lr;       % m

    Caf = 72705;
    Car = 72705;
    k_3 = 3.8661;      % lqr
    %k_3 = -2.1114;    % bass
    R = x_dot/dot_psi_ref;
    if abs(R) < 1e-9
        R = max(R, 1e-9);
    end
    R = min(R, 1e9);

    mr = m*lf/L;
    mf = m*lr/L;
    e2_ss = -lr/R+lf/(2*Car*(lf+lr))*(m*x_dot^2)/R;
    Kv = mf/(2*Caf)-mr/(2*Car);
    a_y = x_dot^2/R;

    delta_ff = L/R + Kv*a_y + k_3*e2_ss;
```

## Implementacija izračuna pojačanja Bass-Gura metodom unutar simulink bloka MUDV\_projekt/Controller/LKA Bass\_Gura:

```
function K = fcn(x_dot, Ts)

    % Parametri vozila

    Cf = 72705;

    Cr = 72705;

    m = 1341;      % masa vozila u kg
    Iz = 2066;    % moment inercije u kg*m^2
    a = 1.732;    % udaljenost od središta mase do prednjih kotača u m
    b = 1.343;    % udaljenost od središta mase do stražnjih kotača u m

    % Matrice stanja (kontinuirani model)

    A = [0, 1, 0, 0;

         0, -(2*Cf + 2*Cr)/(m * x_dot), (2*Cf + 2*Cr)/m, -(a * 2*Cf - b * 2*Cr) /
(m * x_dot);

         0, 0, 0, 1;

         0, -(a * 2*Cf - b * 2*Cr) / (x_dot * Iz), (a * 2*Cf - b * 2*Cr)/Iz, -
(a^2 * 2*Cf + b^2 * 2*Cr)/(Iz * x_dot)];

    B = [0; 2*Cf/m; 0; a*2*Cf/Iz];

    n = size(A,1);

    I_n = eye(n);

    Ad = pinv(I_n - (Ts/2)*A) * (I_n + (Ts/2)*A);

    Bd = pinv(I_n - (Ts/2)*A) * Ts * B;

    a_d = poly(Ad);

    N = length(a_d) - 1;

    A_CCF = zeros(N);

    A_CCF(1:end-1, 2:end) = eye(N-1);

    A_CCF(end, :) = -a_d(end:-1:2);

    disp('Svojstvene vrijednosti Ad:');

    disp(eig(Ad));

    disp('Svojstvene vrijednosti A_CCF:');

    disp(eig(A_CCF));

    B_CCF = [zeros(N-1,1); 1];

    % **RUČNO RAČUNANJE MATRICE UPRAVLJIVOSTI P**

    P_orig = zeros(N);

    for i = 1:N
```

```

        P_orig(:, i) = Ad^(i-1) * Bd;
    end
    % **RUČNO RAČUNANJE MATRICE UPRAVLJIVOSTI P_CCF**
    P_CCF = zeros(N);
    for i = 1:N
        P_CCF(:, i) = A_CCF^(i-1) * B_CCF;
    end
    T_CCF = P_orig*pinv(P_CCF);%^( -1);
    P_zeljjeni = [-3.733 -7.1457+12.4525i -7.1457-12.4525i -25.468]';
    P_zeljjeni_d = (2 + P_zeljjeni*Ts) ./ (2 - P_zeljjeni*Ts);
    disp('P_zeljjeni_d');
    disp(P_zeljjeni_d)
    alpha = poly(P_zeljjeni_d);
    a_d = a_d(end:-1:2);
    alpha = alpha(end:-1:2);

    K_CCF = [a_d(1)-alpha(1) a_d(2)-alpha(2) a_d(3)-alpha(3) a_d(4)-alpha(4)];
    K = real(K_CCF*pinv(T_CCF));%^( -1);
    disp('Konačni K:');
    disp(K)
end

```