

# Skriveni Markovljevi modeli za određivanje režima tržišta

---

Milković, Jura

Master's thesis / Diplomski rad

2024

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:168:391741>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-04-01**



*Repository / Repozitorij:*

[FER Repository - University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing repository](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 541

**SKRIVENI MARKOVLJEVI MODELI ZA ODREĐIVANJE  
REŽIMA TRŽIŠTA**

Jura Milković

Zagreb, lipanj 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

DIPLOMSKI RAD br. 541

**SKRIVENI MARKOVLJEVI MODELI ZA ODREĐIVANJE  
REŽIMA TRŽIŠTA**

Jura Milković

Zagreb, lipanj 2024.

## DIPLOMSKI ZADATAK br. 541

Pristupnik: **Jura Milković (0036522563)**  
Studij: Računarstvo  
Profil: Računarska znanost  
Mentor: prof. dr. sc. Zvonko Kostanjčar

Zadatak: **Skriveni Markovljevi modeli za određivanje režima tržišta**

### Opis zadatka:

Financijska tržišta su vrlo promjenjiva i dinamična. Dok neke promjene mogu biti prolazne, npr. nagli skokovi u cijeni, često promijenjeni obrasci kretanja cijena traju dulje vremenske periode. Mogućnost pravovremenog određivanja takvih razdoblja predstavlja veliki izazov, no i prednost za učinkovito upravljanje rizikom i ulaganje imovine. U tu svrhu koriste se modeli za određivanje režima. U okviru diplomskog rada potrebno je proučiti modele za određivanje tržišnih režima s naglaskom na skrivene Markovljeve modele. Modele je potrebno razviti, testirati na povijesnim podacima te usporediti. Pri izradi modela bitno je istražiti broj režima kao hiperparametar te analizirati specifične karakteristike kretanja cijena u svakom režimu. Također, promjene u širim ekonomskim uvjetima, kao što su odluke centralne banke o promjeni kamatne stope, mogu znatno utjecati na dinamiku tržišta. U sklopu rada potrebno je istražiti koje varijable su, uz same povijesne cijene, značajne za određivanje i predviđanje režima.

Rok za predaju rada: 28. lipnja 2024.



# Sadržaj

1.	Uvod .....	1
1.1.	Važnost razumijevanja tržišnih režima.....	2
1.2.	Skriptivni Markovljevi modeli u kontekstu tržišta kapitala.....	3
1.3.	Struktura rada .....	4
2.	Skriptivni Markovljevi modeli.....	5
2.1.	Definicija skriptivnih Markovljevih modela.....	5
2.2.	Pregled primjene u različitim područjima .....	7
2.3.	Osnovni koncepti .....	8
2.4.	Baum-Welch algoritam.....	12
2.5.	Viterbi algoritam .....	14
2.6.	Algoritam naprijed-nazad .....	16
2.7.	Hiperparametri u HMM-u .....	19
3.	Podaci .....	23
3.1.	Tehnički indikatori .....	25
4.	Metodologija rada.....	27
4.1.	Prikupljanje i obrada podataka .....	27
4.2.	Postavljanje hiperparametara.....	28
4.3.	Treniranje modela.....	29
4.4.	Evaluacija modela.....	30
5.	Rezultati eksperimentalnog rada .....	32
5.1.	Rezultati za S&P 500 indeks .....	32
4.2.	Rezultati za DAX indeks .....	34
6.	Zaključak .....	37
	Literatura .....	39

Sažetak.....	40
Summary.....	41

# 1. Uvod

Financijska tržišta predstavljaju ključnu komponentu suvremene ekonomske infrastrukture, čineći osnovu za efikasnu distribuciju kapitala kroz različite sektore gospodarstva. Ona omogućuju korporacijama, vladama i drugim institucijama da prikupe neophodna sredstva za razvoj, ekspanziju i modernizaciju svojih operacija kroz izdavanje dionica, obveznica i drugih vrijednosnih papira. Za investitore, tržišta kapitala predstavljaju vitalnu platformu za kupoprodaju finansijskih instrumenata, omogućavajući im da ostvare profit i upravljaju svojim investicijskim portfeljima u skladu s osobnim finansijskim ciljevima i tolerancijom prema riziku.

Dinamičnost tržišta kapitala određena je širokim spektrom faktora, uključujući ekonomske indikatore poput stopa inflacije, razine zaposlenosti i rasta bruto domaćeg proizvoda (BDP). Osim toga, tržišta su izuzetno osjetljiva na promjene u političkim i monetarnim politikama koje provode centralne banke, kao i na geopolitičke događaje, prirodne katastrofe i druge izvanredne situacije koje mogu dramatično utjecati na cijene i tržišne uvjete. Ovi faktori često rezultiraju značajnim fluktuacijama koje mogu stvoriti rizike, ali i prilike za profit za one koji imaju sposobnost da adekvatno analiziraju i predvide tržišne trendove.

Osim ekonomskih i političkih faktora, tržišta kapitala također reagiraju na širok raspon međunarodnih događaja, uključujući trgovinske sporove, terorističke napade, tehnološke inovacije i promjene u globalnim lancima opskrbe. Ove promjene mogu brzo izmijeniti percepciju rizika i potražnje za različitim vrstama vrijednosnih papira. U tom kontekstu, sposobnost za brzu i točnu analizu postaje ključna za uspješno investiranje i upravljanje portfeljem.

U konačnici, tržišta kapitala nisu samo odraz trenutnih ekonomskih i finansijskih uvjeta, već i indikator budućih ekonomskih trendova. Investitori koji razumiju kako se različiti faktori međusobno povezuju i utječu na tržište imaju bolju šansu za ostvarivanje uspjeha u svojim finansijskim poduhvatima. Iako ova tržišta mogu biti izuzetno volatilna, nude izvrsne prilike za one koji su sposobni efikasno upravljati njihovom kompleksnošću uz adekvatno znanje i stručnost.



## 1.1. Važnost razumijevanja tržišnih režima

Koncept "tržišnog režima" odnosi se na različita fundamentalna stanja tržišta koja se manifestiraju kroz varijacije u volatiliteti, likvidnosti, tržišnim sentimentima i trendovima. Prepoznavanje i razumijevanje različitih tržišnih režima su od ključne važnosti za investitore i menadžere portfelja, jer svaki režim zahtijeva specifične prilagodbe u strategijama ulaganja. Na primjer, tijekom izrazito volatilnih perioda, investitori se mogu odlučiti za opreznije ulaganje ili čak povlačenje iz tržišta kako bi izbjegli potencijalne gubitke. Nasuprot tome, stabilni i rastući trendovi često potiču na agresivnije ulaganje s ciljem maksimiziranja dobiti.

Identifikacija tržišnih režima, međutim, predstavlja značajan izazov zbog nepredvidivosti tržišnih kretanja. Tradicionalni analitički modeli, koji se često oslanjaju na povijesne podatke, obično su ograničeni u svojoj prediktivnoj moći. Ovi modeli mogu pružiti uvid u prošle tržišne uzorke, ali često nedostaje njihova sposobnost pouzdanog signaliziranja nadolazećih promjena u tržišnim režimima. To stvara rizik od odgođenog odgovora na tržišne promjene, što može rezultirati manje optimalnim investicijskim odlukama i propuštenim prilikama.

U tom kontekstu, postoji očita potreba za razvojem i primjenom naprednijih statističkih modela koji mogu efektivnije detektirati i predvidjeti promjene u tržišnim režimima. Metode poput skrivenih Markovljevih modela, strojnog učenja i algoritama za detekciju anomalija postaju sve važnije u modernim financijskim analitičkim alatima. Te sofisticirane tehnike omogućuju investorima i menadžerima portfelja da bolje interpretiraju tržišne signale i prilagode svoje strategije kako bi iskoristili tržišne prilike i minimizirali rizike. Razvojem i integracijom ovih naprednih alata, financijski stručnjaci mogu ostvariti dublji i precizniji uvid u dinamiku tržišta, što je presudno za uspjeh u brzo mijenjajućem svijetu financija.

## 1.2. Skriveni Markovljevi modeli u kontekstu tržišta kapitala

Skriveni Markovljevi modeli (engl. *Hidden Markov Models* - HMM) su se pokazali kao izuzetno korisni u analizi vremenskih nizova gdje su promjene stanja inherentno skrivene i nisu direktno vidljive iz dostupnih podataka. U financijskom kontekstu, HMM omogućuju efikasno modeliranje tržišnih režima koristeći promatrane nizove podataka poput cijena dionica, indeksa ili ekonomskih pokazatelja. Ovi modeli mogu identificirati latentne tržišne režime i predvidjeti tranzicije između stabilnih i nestabilnih tržišnih perioda, što pruža investitorima ključne informacije potrebne za prilagodbu investicijskih strategija u skladu s promjenjivim tržišnim uvjetima.

Primjerice, analiza podataka pomoću HMM-a može otkriti prijelaze između tržišnih režima u usponu i tržišnih režima u padu, omogućujući time bolje razumijevanje tržišnih ciklusa i ponašanja. Investitori i menadžeri portfelja mogu koristiti ove informacije za optimizaciju svojih strategija ulaganja, povećavajući potencijal za ostvarivanje dobiti dok minimiziraju izloženost riziku.

Dodatno, HMM omogućuju detekciju signala unutar tržišnih podataka koji mogu ukazivati na rane faze promjena tržišnih režima. To uključuje prepoznavanje uzoraka koji nisu odmah očiti, kao što su neobične fluktuacije u cijenama ili promjene u volumenu trgovanja, koje bi mogle signalizirati početak tržišnog preokreta ili korekcije. Takve prediktivne sposobnosti HMM-a čine ih nezamjenjivim alatom u arsenalu sofisticiranih investitora koji teže maksimizirati svoje prinose prilagođavajući se dinamičnom tržišnom okruženju.

HMM pomažu u izgradnji robusnih investicijskih modela koji mogu sistematično reagirati na promjene, čime se smanjuje emocionalni utjecaj na odluke o ulaganju i potiče racionalno, informirano donošenje odluka. Ova metodologija, stoga, nije samo tehnički alat, već i strateški resurs koji doprinosi sofisticiranijem, informiranijem i, konačno, uspješnijem pristupu upravljanju investicijama.

### 1.3. Struktura rada

U sljedećim poglavljima biti će prikazane teorijske osnove skrivenih Markovljevih modela, metodologiju njihove implementacije u analizi tržišnih podataka, te primjer koji demonstrira kako se HMM mogu primijeniti u predviđanju i upravljanju tržišnim režimima.

Drugo poglavlje će detaljno obraditi teorijsku osnovu skrivenih Markovljevih modela, uključujući njihovu matematičku strukturu i osnovne pretpostavke koje su ključne za njihovo razumijevanje i primjenu. Osim toga, razmatrat će se različiti algoritmi koji se koriste za učenje u HMM, kao što su Baum-Welch algoritam za treniranje modela i Viterbi algoritam za dekodiranje najvjerojatnijih stanja.

Treće poglavlje fokusirat će se na podatke koji su korišteni u analizi, S&P 500 i DAX indeks. Ovo poglavlje pružit će uvid kako su podaci prikupljeni, obrađeni i pripremljeni za daljnju analizu korištenjem HMM-a. Detaljno će se opisati kako su podaci transformirani i koje su značajke izvedene za potrebe modeliranja.

Četvrto poglavlje objasnit će kako su HMM modeli implementirani i testirani, uključujući opis eksperimentalnih postavki i metodologije korištene za analizu tržišta. Bit će predstavljeni konkretni primjeri korištenja HMM-a u predviđanju tržišnih kretanja, uključujući kako modeli mogu prepoznati prijelaze između tržišta u porastu i tržišta u padu.

Peto poglavlje predstaviti će eksperimentalne rezultate za svaki indeks i prikazati najbolje rezultate (HMM hiperparametre) koji su dobiveni. Analizirat će se predikcije stanja HMM modela i usporediti performanse investicijske strategije zasnovane na HMM-u s osnovnom strategijom kupi i drži.

## 2. Skriveni Markovljevi modeli

Ovo poglavlje detaljno će istražiti teorijske osnove i matematičke koncepte skrivenih Markovljevih modela, koji su ključni za razumijevanje njihove primjene u analizi financijskih tržišta. Pogledat ćemo kako HMM funkcionira, njegove osnovne karakteristike i važnost hiperparametara.

### 2.1. Definicija skrivenih Markovljevih modela

Skriveni Markovljevi modeli su klase statističkih modela koji omogućuju modeliranje vremenskih nizova gdje se stanja sustava ne mogu direktno promatrati (skrivena su). Umjesto toga, ova stanja se mogu izvesti iz sekvenca promatranja koja su indirektno povezana s tim stanjima. HMM su posebno korisni u situacijama gdje se proces koji želimo analizirati sastoji od unutarnjih faktora ili stanja koja nisu direktno dostupna ili vidljiva promatraču.

Skriveni Markovljev model je matematički model koji se sastoji od sljedećih ključnih komponenti:

- **Skup stanja modela:** U kontekstu HMM-a, svaki model ima definirani skup stanja. Ova stanja su skrivena, odnosno ne mogu se direktno promatrati. Svako stanje u modelu može predstavljati određeni režim ili uvjet unutar procesa koji se modelira. Skup stanja modela prikazan je izrazom (1):

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \quad (1)$$

- **Skup promatranja:** Iako su stanja skrivena, možemo promatrati ishode koji su povezani s tim stanjima. Na primjer, u financijskom modeliranju, promatrana vrijednost može biti cijena dionice, koja je rezultat nevidljivih ekonomskih stanja ili tržišnih uvjeta. Skup promatranja prikazan je izrazom (2):

$$O = \{o_1, o_2, \dots, o_k\} \quad (2)$$

- **Prijelazne vjerojatnosti:** Matrica prijelaznih vjerojatnosti  $A$  sadrži vjerojatnosti prelaska iz jednog stanja u drugo. Element  $a_{ij}$  matrice  $A$  predstavlja vjerojatnost prelaska iz stanja  $s_i$  u stanje  $s_j$ . Matematički, prijelazne vjerojatnosti definiraju se izrazom (3) kao:

$$a_{ij} = P(q_{t+1} = s_j \mid q_t = s_i), \quad (3)$$

gdje  $q_t$  označava stanje u vremenskom koraku  $t$ . Ova matrica mora zadovoljavati uvjet da je suma svakog reda jednaka jedan,  $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1$  za svaki  $i$ .

- **Emisijske vjerojatnosti:** Matrica emisijskih vjerojatnosti  $B$  opisuje vjerojatnost promatranja svakog mogućeg izlaza iz svakog mogućeg stanja. Za HMM koji generira promatranja iz skupa s  $M$  mogućih promatranja,  $B$  je matrica dimenzija  $N \times M$ , gdje element  $b_{jk}$  matrice  $B$  označava vjerojatnost opažanja simbola  $o_k$  iz stanja  $s_j$ . Emisijske vjerojatnosti definirane su izrazom (4) kao:

$$b_{jk} = P(o_k \mid q_t = s_j), \quad (4)$$

gdje  $o_k$  predstavlja promatranje u vremenskom koraku  $t$ .

- **Raspodjela početnih stanja:** Vektor  $\pi$  definira početnu vjerojatnost svakog stanja, odnosno vjerojatnost da će Markovljev lanac započeti u određenom stanju. Vektor  $\pi$  sadrži  $N$  elemenata, gdje je  $\pi_i$  vjerojatnost da je početno stanje  $s_i$ . Raspodjela početnih stanja prikazana je izrazom (5):

$$\pi_i = P(q_1 = s_i) \quad (5)$$

## 2.2. Pregled primjene u različitim područjima

Skriveni Markovljevi modeli su se pokazali iznimno svestranima u širokom spektru primjena zbog svoje sposobnosti modeliranja vremenskih nizova s latentnim (skrivenim) stanjima. Njihova primjena seže od prirodnih znanosti do inženjeringa i financija, što ih čini jednim od ključnih alata u statističkom modeliranju. U nastavku je prikazano nekoliko ključnih područja gdje se HMM koriste.

1. **Prepoznavanje govora:** HMM su temelj mnogih modernih sustava za prepoznavanje govora. U ovom kontekstu, modeli se koriste za predviđanje riječi ili fonema na temelju zvučnih signala. Svako stanje u modelu može predstavljati određeni fonem, a promatranja su akustičke značajke izvučene iz govornog signala. Emisijske vjerojatnosti u ovom slučaju opisuju koliko je vjerojatno čuti određene akustičke značajke kada je govornik u određenom fonemskom stanju. Ova primjena je detaljno opisana u studijama poput one od Rabinera i Juanga [1].
2. **Bioinformatika:** U bioinformatici, HMM se koriste za analizu bioloških sekvenca, kao što su DNA, RNA ili proteinski nizovi. Modeli mogu identificirati regije s određenim funkcionalnim ili strukturalnim karakteristikama, poput kodirajućih regija u genomu. HMM omogućuju efikasno upravljanje i interpretaciju složenih bioloških informacija i koriste se za predviđanje strukturalnih motiva ili za genotipizaciju. Primjerice, Durbin i suradnici u svom radu [2] detaljno opisuju primjenu HMM-a u bioinformatici.
3. **Financijska analiza:** U financijskom sektoru, HMM se primjenjuju za modeliranje i predviđanje tržišnih režima, kao što su rastuća i padajuća tržišna stanja. Ovi modeli pomažu u identifikaciji i predviđanju promjena u tržišnim uvjetima, što je ključno za upravljanje rizicima i odlučivanje o investicijama. HMM se također koriste za detekciju prijevara, gdje se stanja modela mogu koristiti za predstavljanje normalnog i prevarantskog ponašanja. Radovi kao što su oni koje je objavio Hamilton [3] pružaju uvid u primjenu HMM-a u ekonomskim i financijskim analizama.

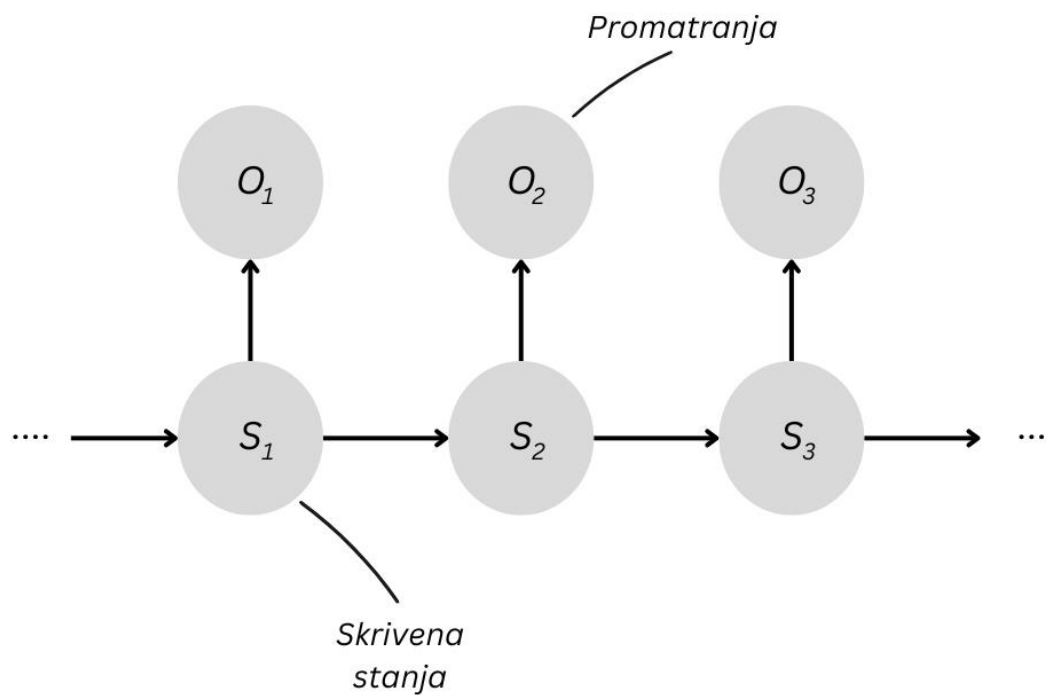
4. **Računalni vid i obrada slika:** U računalnom vidu, HMM se koriste za prepoznavanje i klasifikaciju objekata u slikama i videima. Modeli mogu biti primijenjeni za praćenje objekata u pokretu ili za prepoznavanje gesta na temelju video podataka, gdje svako stanje modela predstavlja određenu poziciju ili pokret. Primjene u računalnom vidu detaljno su istražene u radovima koji raspravljaju o korištenju HMM-a za praćenje i analizu ponašanja. Primjer takvog rada je [4].

Ovi primjeri predstavljaju tek mali dio širokog spektra primjena HMM-a. Njihova sposobnost da efikasno modeliraju složene procese čini ih nezaobilaznim alatom u mnogim znanstvenim i tehničkim disciplinama. Kroz sljedeće podpoglavlje, produbiti ćemo razumijevanje osnovnih koncepta HMM-a, što će dodatno objasniti kako se ovi modeli mogu specifično primijeniti u analizi financijskih tržišta.

## 2.3. Osnovni koncepti

Skriveni Markovljevi modeli (HMM) se sastoje od dva temeljna elementa: stanja i promatranja. Stanja i promatranja ilustrativno su prikazana na Slici 1. Razumijevanje ovih komponenata je ključno za primjenu HMM-a u različitim područjima.

- **Stanja:** U kontekstu HMM-a, stanja predstavljaju različite faze ili konfiguracije kroz koje sustav može proći. Ova stanja su "skrivena", što znači da nisu izravno promatrana ili mjerena. Umjesto toga, stanja se zaključuju na temelju promatranja koja su rezultat tih stanja. Na primjer, u modeliranju financijskog tržišta, stanja bi mogla predstavljati različite tržišne režime kao što su tržište u usponu ili tržište u padu, dok se u bioinformatički stanja mogu odnositi na različite biološke uvjete ili sekvence.
- **Promatranja:** Promatranja su vidljivi izlazi ili podaci koji se mogu izravno mjeriti ili opaziti. U HMM-u, promatranja su rezultat skrivenih stanja i pružaju informacije koje se koriste za zaključivanje o stanjima sustava. Na primjer, u aplikacijama prepoznavanja govora, promatranja mogu biti zvučni signali koji se zapisuju tijekom govora. U financijskoj analizi, promatranja mogu uključivati cijene dionica, indekse ili druge financijske indikatore koji se koriste za procjenu trenutnog tržišnog režima.



Slika 1. Jednostavni prikaz skrivenih stanja i promatranja u HMM-u.

Interakcija između stanja i promatranja je ključna: stanja generiraju promatranja, a analiza promatranja omogućuje zaključivanje o stanjima. Da bi se modelirali ovi odnosi, HMM koristi dvije glavne vrste vjerojatnosti:

- Prijelazne vjerojatnosti, koje određuju vjerojatnost prelaska iz jednog stanja u drugo.
- Emisijske vjerojatnosti, koje određuju vjerojatnost opažanja određenog promatranja iz bilo kojeg skrivenog stanja.



U svrhu bolje ilustracije interakcije između stanja i promatranja u skrivenim Markovljevim modelima (HMM), razmotrit ćemo jednostavan primjer s financijskog tržišta. U ovom primjeru, pretpostavit ćemo tri skrivena stanja koja predstavljaju različite tržišne režime: tržište u usponu, tržište u padu i tržište u konsolidaciji. Također, promatranja će se sastojati od različitih razina volatilnosti: niska volatilnost i visoka volatilnost. Brojevi u ovom primjeru generirani su proizvoljno i ne predstavljaju stvarne podatke s tržišta.

Sljedeće tablice prikazuju prijelazne i emisijske vjerojatnosti za ovaj primjer. Tablica 1. prikazuje prijelazne vjerojatnosti između različitih tržišnih stanja, dok Tablica 2. prikazuje emisijske vjerojatnosti za različite razine volatilnosti u svakom stanju. Ove vjerojatnosti omogućuju modeliranje složenih tržišnih kretanja i pružaju osnovu za analizu i predviđanje tržišnih režima.

Tablica 1. Prijelazne vjerojatnosti.

Stanje	Tržište u usponu	Tržište u padu	Tržište u konsolidaciji
Tržište u usponu	0.7	0.1	0.2
Tržište u padu	0.1	0.6	0.3
Tržište u konsolidaciji	0.3	0.2	0.5

Tablica 2. Emisijske vjerojatnosti.

Stanje	Promatranje	Vjerojatnost
Tržište u usponu	Niska volatilnost	0.3
Tržište u usponu	Visoka volatilnost	0.7
Tržište u padu	Niska volatilnost	0.6
Tržište u padu	Visoka volatilnost	0.4
Tržište u konsolidaciji	Niska volatilnost	0.5
Tržište u konsolidaciji	Visoka volatilnost	0.5

Skriveni Markovljevi modeli se temelje na nekoliko ključnih pretpostavki koje omogućuju njihovu primjenu u analizi vremenskih nizova i drugim sekvencijalnim podacima. Razumijevanje ovih pretpostavki ključno je za efikasno korištenje modela u praktičnim primjenama. Osnovne pretpostavke koje karakteriziraju HMM:

- **Markovljevo svojstvo** - ova pretpostavka navodi da je buduće stanje sustava uvjetovano isključivo trenutnim stanjem, a ne prethodnim stanjima. Drugim riječima, sustav "nema memoriju" dalje od trenutnog stanja. Matematički, to se definira izrazom (6) kao:

$$P(q_{t+1} | q_t, q_{t-1}, \dots, q_1) = P(q_{t+1} | q_t), \quad (6)$$

gdje  $q_t$  predstavlja stanje sustava u vremenskom trenutku  $t$ .

- **Pretpostavka o stacionarnosti prijelaznih vjerojatnosti** - prema ovoj pretpostavci, vjerojatnosti prijelaza između stanja su konstantne kroz vrijeme. To znači da se prijelazna matrica  $A$  ne mijenja tijekom vremena, što pojednostavljuje model i računanje.
- **Pretpostavka o neovisnosti promatranja** - pretpostavlja se da je svako promatranje uvjetovano isključivo trenutnim stanjem, neovisno o prethodnim stanjima ili promatranjima. To omogućava da se emisijske vjerojatnosti modeliraju zasebno za svako stanje, bez potrebe za uzimanjem u obzir povijesti promatranja. Matematički, ovo se može prikazati izrazom (7) kao:

$$P(o_t | q_1, \dots, q_t, o_1, \dots, o_{t-1}) = P(o_t | q_t), \quad (7)$$

gdje je  $o_t$  promatranje, a  $q_t$  stanje u vremenskom trenutku  $t$ .

- **Pretpostavka o homogenosti vremena** - slično pretpostavci o stacionarnosti prijelaznih vjerojatnosti, pretpostavka o homogenosti vremena navodi da su vjerojatnosti emitiranja promatranja iz određenog stanja konstantne kroz vrijeme. Ovo znači da matrica emisijskih vjerojatnosti  $B$  ostaje nepromijenjena tijekom procesa.

## 2.4. Baum-Welch algoritam

Algoritmi koji se koriste u kontekstu skrivenih Markovljevih modela (HMM) su ključni za efikasno modeliranje i analizu sekvencijalnih podataka. Među njima, Baum-Welch algoritam je posebno važan zbog svoje sposobnosti da procjenjuje parametre modela na temelju dostupnih promatranja, čak i kada su stvarna stanja sustava skrivena. Ovaj algoritam spada u kategoriju algoritama maksimizacije očekivanja (EM), koji iterativno traže optimalne parametre modela, povećavajući vjerojatnost promatranih podataka.

Baum-Welch algoritam se sastoji od dva glavna koraka: korak očekivanja (E-korak) i korak maksimizacije (M-korak). Kroz ove korake, algoritam efikasno rješava problem nepoznatih parametara u HMM-u, omogućujući procjenu prijelaznih i emisijskih vjerojatnosti te početnih stanja.

### 1. Korak očekivanja (engl. *Expectation step*, E-korak):

Tijekom E-koraka, algoritam izračunava očekivane vrijednosti za svaku moguću tranziciju između stanja i za svaku emisiju promatranja iz stanja, koristeći trenutne procjene parametara. U ovom koraku koriste se dvije ključne komponente:

- $\alpha_t(i)$  – predstavlja vjerojatnost djelomičnog niza promatranja od početka do trenutka  $t$ , pod uvjetom da se nalazi u stanju  $i$  u trenutku  $t$ .
- $\beta_t(i)$  - predstavlja vjerojatnost generiranja preostalog niza promatranja od trenutka  $t+1$  do kraja, pod uvjetom da se nalazi u stanju  $i$  u trenutku  $t$ .

2. **Korak maksimizacije** (engl. *Maximization step*, M-korak):

Na temelju izračunatih vjerojatnosti, M-korak ažurira procjene modela kako bi maksimizirao ukupnu vjerojatnost promatrane sekvence. To uključuje ažuriranje prijelaznih vjerojatnosti, emisijskih vjerojatnosti i vjerojatnosti početnih stanja:

- Ažuriranje prijelaznih vjerojatnosti prikazano je izrazom (8):

$$a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} \alpha_t(i) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \beta_{t+1}(j)}{\sum_{t=1}^{T-1} \alpha_t(i) \beta_t(i)}, \quad (8)$$

gdje  $\alpha_t(i)$  predstavlja vjerojatnost djelomičnog niza promatranja do trenutka  $t$  u stanju  $i$ ,  $a_{ij}$  je trenutna procjena prijelazne vjerojatnosti iz stanja  $i$  u stanje  $j$ ,  $b_j(o_{t+1})$  predstavlja vjerojatnost promatranja  $o_{t+1}$  iz stanja  $j$ ,  $\beta_{t+1}(j)$  je vjerojatnost generiranja preostalog niza promatranja od trenutka  $t+1$  iz stanja  $j$ .

- Ažuriranje emisijskih vjerojatnosti prikazano je izrazom (9):

$$b_{jk} = \frac{\sum_{t=1}^T \alpha_t(j) \beta_t(j) [o_t = k]}{\sum_{t=1}^T \alpha_t(j) \beta_t(j)}, \quad (9)$$

gdje  $\alpha_t(j)$  predstavlja vjerojatnost djelomičnog niza promatranja do trenutka  $t$  u stanju  $j$ ,  $\beta_t(j)$  je vjerojatnost generiranja preostalog niza promatranja od trenutka  $t$  iz stanja  $j$ , i  $[o_t = k]$  je funkcija koja je 1 ako je promatranje  $o_t$  jednako  $k$ , a 0 inače.

- Ažuriranje početnih vjerojatnosti prikazano je izrazom (10):

$$\pi_i = a_1(i) \beta_1(i), \quad (10)$$

gdje  $a_1(i)$  predstavlja vjerojatnost promatranja prvog elementa niza u stanju  $i$ , a  $\beta_1(i)$  je vjerojatnost generiranja preostalog niza promatranja od trenutka  $t = 1$  iz stanja  $i$ .

Baum-Welch algoritam se ponavlja dok se ne postigne konvergencija, što znači da se promjene u parametrima modela između iteracija minimiziraju do zadovoljavajuće razine.

Korištenje Baum-Welch algoritma omogućava efikasnu procjenu parametara HMM-a bez potrebe za direktnim promatranjem skrivenih stanja, što ga čini izuzetno korisnim u situacijama gdje su stvarna stanja nedostupna ili nepoznata.

## 2.5. Viterbi algoritam

Algoritam Viterbi je ključan algoritam za dekodiranje u kontekstu skrivenih Markovljevih modela, koji se koristi za pronalaženje najvjerojatnijeg niza skrivenih stanja na temelju promatranih podataka. Ovaj algoritam omogućuje efikasno i točno dekodiranje sekvencijalnih podataka, što je korisno u primjenama kao što su prepoznavanje govora, bioinformatika i obrada govora.

Viterbi algoritam koristi dinamičko programiranje za optimizaciju sekvence skrivenih stanja tako da maksimizira ukupnu vjerojatnost putanje kroz model. Algoritam se sastoji od nekoliko ključnih koraka koji omogućuju precizno dekodiranje:

1. **Inicijalizacija:** Algoritam započinje postavljanjem početnih vrijednosti za vjerojatnosti najvjerojatnijeg puta do svakog stanja na temelju početnih vjerojatnosti i vjerojatnosti promatranja. Inicijalizacija se može prikazati izrazom (11) kao:

$$\begin{aligned}\delta_1(i) &= \pi_i b_i(o_1) \\ \psi_1(i) &= 0,\end{aligned}\tag{11}$$

gdje je  $\pi_i$  početna vjerojatnost stanja  $i$ ,  $b_i(o_1)$  je vjerojatnost promatranja prvog simbola  $o_1$  iz stanja  $i$ , a  $\psi_1(i)$  je pokazatelj prethodnog stanja.

2. **Rekurzija:** Za svaki trenutak vremena  $t$  od 2 do  $T$  (gdje je  $T$  ukupan broj promatranja), algoritam ažurira vjerojatnosti najvjerojatnijih puteva i putanje koje su dovele do svakog stanja. Korak rekurzije prikazan je izrazom (12):

$$\begin{aligned}\delta_t(j) &= \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_{t-1}(i) \cdot a_{ij}] \cdot b_j(o_t) \\ \psi_t(j) &= \arg \max_{1 \leq i \leq N} [\delta_{t-1}(i) \cdot a_{ij}],\end{aligned}\tag{12}$$

gdje je  $N$  ukupan broj stanja u modelu,  $a_{ij}$  je vjerojatnost prijelaza iz stanja  $i$  u stanje  $j$ , a  $b_j(o_t)$  je vjerojatnost da stanje  $j$  generira promatranje  $o_t$  u vremenskom koraku  $t$ .

3. **Prekid:**

Nakon što su obrađena sva promatranja, algoritam određuje vjerojatnost i putanju najvjerojatnijeg niza stanja. Korak prekida prikazan je izrazom (13):

$$\begin{aligned}P^* &= \max_{1 \leq i \leq N} \delta_T(i) \\ q_T^* &= \arg \max_{1 \leq i \leq N} \delta_T(i),\end{aligned}\tag{13}$$

gdje je  $N$  ukupan broj stanja u modelu,  $\delta_T(i)$  je vjerojatnost najvjerojatnije puta koji završava u stanju  $i$ .  $q_T^*$  predstavlja najvjerojatnije završno stanje.

#### 4. **Izlaz** (engl. *Backtracking*):

Počevši od najvjerojatnijeg krajnjeg stanja, algoritam koristi pokazatelje  $\psi_t(j)$  za praćenje unatrag do početnog stanja kako bi rekonstruirao najvjerojatniji niz stanja. Izlaz je prikazan izrazom (14):

$$q_t^* = \psi_{t+1}(q_{t+1}^*) \quad (14)$$

za  $t = T - 1$  do 1.

Algoritam Viterbi je izuzetno efikasan u kontekstu HMM-a zato što koristi optimalno podstrukturiranje i preklapanje podproblema, što su ključne karakteristike dinamičkog programiranja. Njegova primjena omogućava da se iz velikog broja mogućih sekvencija stanja izabere ona s najvećom vjerojatnošću, čime se pruža jasan i točan uvid u skrivene procese koji upravljaju generiranim promatranjima. Algoritam Viterbi pobliže je opisan u radu [5].

## 2.6. Algoritam naprijed-nazad

Algoritam naprijed-nazad (engl. *forward-backward algorithm*) je temeljni algoritam u teoriji skrivenih Markovljevih modela koji se koristi za izračunavanje vjerojatnosti stanja u svakom trenutku vremena, na temelju cijelog niza promatranja. Ovaj algoritam kombinira dva procesa - unaprijedni i unazadni prolazak kroz podatke - kako bi se efikasno procijenile vjerojatnosti stanja i omogućila glatka estimacija modela. Algoritam je ključan za EM (algoritam maksimizacije očekivanja, engl. *Expectation maximization algorithm*) optimizaciju u Baum-Welch algoritmu i često se koristi za ažuriranje vjerojatnosti stanja u realnom vremenu u različitim primjenama.

Prolaz unaprijed računa akumulirane distribucije vjerojatnosti stanja u svakom trenutku  $t$ , poznate kao unaprijedne vjerojatnosti. Te vjerojatnosti, označene kao  $\alpha_t(i)$ , predstavljaju vjerojatnost da se HMM nalazi u stanju  $i$  u trenutku  $t$  nakon opažanja prvih  $t$  simbola u sekvenci.

- **Inicijalizacija** je prikazana izrazom (15):

$$\alpha_1(i) = \pi_i b_i(o_1), \quad (15)$$

gdje je  $\pi_i$  početna vjerojatnost stanja  $i$ , a  $b_i(o_1)$  je vjerojatnost promatranja  $o_1$  iz stanja  $i$ .

- **Rekurzija** je prikazana izrazom (16):

$$\alpha_t(j) = \left( \sum_{i=1}^N \alpha_{t-1}(i) a_{ij} \right) b_j(o_t) \quad (16)$$

za  $t = 2, 3, \dots, T$ , gdje  $a_{ij}$  predstavlja vjerojatnost prijelaza iz stanja  $i$  u stanje  $j$ , a  $b_j(o_t)$  vjerojatnost opažanja  $o_t$  iz stanja  $j$ .

Prolaz unatrag računa distribucije vjerojatnosti stanja u trenutku  $t$ , uzimajući u obzir sva buduća promatranja od  $t + 1$  do  $T$ . Unazadne vjerojatnosti, označene kao  $\beta_t(i)$ , pomažu u izračunavanju vjerojatnosti cijele sekvence pod uvjetom stanja u bilo kojem trenutku.

- **Inicijalizacija** je prikazana izrazom (17):

$$\beta_T(i) = 1 \quad (17)$$

za sva stanja  $i$ .

- **Rekurzija** je prikazana izrazom (18):

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^N \beta_{t+1}(j) a_{ij} b_j(o_{t+1}) \quad (18)$$



za  $t = T - 1, T - 2, \dots, 1$ .

Kombinacija unaprijednih i unazadnih vjerojatnosti koristi se za izračunavanje marginalnih vjerojatnosti stanja u svakom trenutku i za estimaciju parametara HMM-a. Ove vjerojatnosti također omogućavaju izračunavanje vjerojatnosti promatranja cijele sekvence. Marginalna vjerojatnost stanja  $i$  u trenutku  $t$  prikazana je izrazom (19):

$$P(q_t = i | O, \lambda) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^N \alpha_t(j)\beta_t(j)}, \quad (19)$$

gdje je  $O$  promatrana sekvenca,  $\lambda$  je model,  $\alpha_t(i)$  je unaprijedna vjerojatnost da je sustav u stanju  $i$  u trenutku  $t$ ,  $\beta_t(i)$  je unazadna vjerojatnost da će sustav proizvesti promatranja od trenutka  $t + 1$  do kraja sekvence s obzirom na to da je trenutno u stanju  $i$  u trenutku  $t$ .  $\sum_{j=1}^N \alpha_t(j)\beta_t(j)$  je normalizacijska konstanta koja osigurava da su vjerojatnosti ispravno skalirane.

## 2.7. Hiperparametri u HMM-u

Hiperparametri igraju ključnu ulogu u definiranju strukture modela, kao i u regulaciji procesa učenja. Njihov pravilan odabir može značajno utjecati na performanse i efikasnost modela. U ovom radu korištena je `hmmlearn` biblioteka [6] za implementaciju skrivenih Markovljevih modela.

Hiperparametri u HMM-u uključuju, ali nisu ograničeni na, sljedeće:

### 1. Broj stanja

- Definicija: Broj skrivenih stanja u modelu.
- Važnost: Temeljni hiperparametar koji određuje kompleksnost modela. Veći broj stanja omogućava modelu da uhvati složenije obrasce u podacima, ali također može izazvati prenaučenosť (engl. *overfitting*) ako podaci nisu dovoljno kompleksni, odnosno raznoliki.

### 2. Tip kovarijance

- Opcije: sferna, dijagonalna, puna, vezana
- Važnost: Određuje tip kovarijacijskih parametara koji se koriste:
  - sferna – jednostavan pristup gdje svako stanje koristi istu vrijednost varijance za sve značajke, što zahtjeva manje parametara za procjenu i osigurava bržu konvergenciju tijekom treniranja modela
  - dijagonalna – svako stanje koristi dijagonalnu kovarijacijsku matricu uz pretpostavku da su značajke unutar svakog stanja neovisne, što pojednostavljuje model jer se međusobne korelacije između značajki ne uzimaju u obzir
  - puna – svako stanje koristi punu kovarijacijsku matricu
  - vezana – sva stanja koriste istu punu kovarijacijsku matricu

### 3. Minimalna kovarijanca

- Definicija: Donja granica na dijagonali kovarijacijske matrice za sprečavanje prenaučenosťi. Standardna vrijednost je  $1e-3$ .

#### 4. Početne vjerojatnosti stanja

- Definicija: Parametri Dirichletove apriorne distribucije za početne vjerojatnosti stanja.

#### 5. Matrica prijelaznih vjerojatnosti

- Definicija: Parametri Dirichletove apriorne distribucije za svaki red prijelaznih vjerojatnosti.

#### 6. Srednje vrijednosti

- Definicija: Srednja vrijednost i preciznost normalne apriorne distribucije.

#### 7. Apriorna kovarijanca

- Definicija: Parametri apriorne distribucije za kovarijacijsku matricu.

#### 8. Algoritam

- Opcije: Viterbi algoritam i algoritam naprijed-nazad.
- Važnost: Određuje algoritam dekodiranja:
  - Viterbi algoritam - pronalazi najvjerojatniji slijed stanja s obzirom na sva promatranja.
  - Algoritam naprijed-nazad - pronalazi slijed pojedinačno najvjerojatnijih stanja s obzirom na sva promatranja.

#### 9. Generator slučajnih brojeva

- Definicija: Instanca generatora slučajnih brojeva na temelju početnih uvjeta, odnosno „sjemena”.

#### 10. Broj iteracija

- Definicija: Maksimalni broj iteracija za izvođenje.

#### 11. Prag konvergencije

- Definicija: Prag zaustavljanja EM algoritma ako je dobitak u log-vjerojatnosti ispod ove vrijednosti.

## 12. Parametri za ažuriranje

- Definicija: Parametri koji se ažuriraju tijekom treniranja ili inicijaliziraju prije treniranja.

Odabir i optimizacija hiperparametara su ključni koraci u procesu konfiguriranja skrivenih Markovljevih modela kako bi se osiguralo optimalno funkcioniranje modela u specifičnim primjenama. Pravilna konfiguracija ovih parametara može značajno utjecati na sposobnost modela da točno i efikasno modelira podatke.

Proces odabira i optimizacije hiperparametara za potrebe ovog diplomskog rada uključivao je sljedeće korake:

1. Definiranje prostora hiperparametara - Prvi korak u optimizaciji hiperparametara je definiranje skupa mogućih vrijednosti za svaki hiperparametar. Ovo može uključivati raspon broja stanja, različite konfiguracije prijelaznih matrica, ili različite algoritme dekodiranja.
2. Evaluacija modela: Da bi se odredilo koje vrijednosti hiperparametara najbolje funkcioniraju, model se testirao na relevantnim podacima opisanim u Poglavlju 3. Ovo se uobičajeno provodilo koristeći tehniku unakrsne provjere, gdje se podaci dijele na trening i testni skup, a model se trenira i evaluira na različitim podskupovima kako bi se osigurala njegova generalizacija.
3. Korištenje algoritama za optimizaciju: Za pronalaženje optimalnih vrijednosti hiperparametara često se koriste algoritmi optimizacije kao što su:
  - Mrežno pretraživanje (engl. *Grid Search*): Sistematsko testiranje kombinacija hiperparametara unutar definiranog prostora. Ova metoda korištena je za potrebe ovog diplomskog rada.
  - Nasumično pretraživanje (eng. *Random Search*): Nasumičan odabir kombinacija hiperparametara, što može biti učinkovitije u većim prostorima parametara.
  - Bayesova optimizacija: Sofisticiranija metoda koja koristi probabilistički model za predviđanje performansi modela temeljem prethodnih evaluacija i usmjerava pretraživanje prema najperspektivnijim kombinacijama.

4. Validacija i testiranje: Nakon što se optimalne vrijednosti hiperparametara odrede, važno je provjeriti performanse modela na nezavisnom testnom skupu kako bi se potvrdila njegova sposobnost generalizacije na novim podacima.
5. Iterativno poboljšanje: Optimizacija hiperparametara često je iterativni proces, gdje se na temelju dobivenih rezultata i uvida može prilagođavati prostor hiperparametara i metode optimizacije.

Kroz ovaj proces, moguće je značajno poboljšati kvalitetu i performanse HMM-a, osiguravajući da model adekvatno odgovara na zahtjeve postavljene pred njega u različitim primjenama, od obrade prirodnog jezika do financijske analize. Primjena ovakvih metoda u optimizaciji hiperparametara omogućava razvoj robusnih i pouzdanih modela koji mogu učinkovito analizirati složene podatke.

### 3. Podaci

Odabrani financijski instrumenti za potrebe ovog diplomskog rada su S&P 500 indeks i njemački DAX indeks. Ovi indeksi predstavljaju ključne pokazatelje tržišta dionica u Sjedinjenim Američkim Državama i Njemačkoj, te pružaju širok spektar informacija potrebnih za analizu tržišnih trendova i predviđanje budućih kretanja. Podaci za ova dva financijska instrumenta preuzeti su sa Yahoo! Finance [7].

S&P 500 indeks je sastavljen od 500 vodećih tvrtki koje su javno trgovane u SAD-u. On predstavlja ključni pokazatelj američkog tržišta dionica i obuhvaća tvrtke iz različitih sektora ekonomije, uključujući tehnologiju, financije, zdravstvo i industriju. Zbog širokog opsega koji pokriva u američkoj ekonomiji, S&P 500 indeks se redovito koristi kao indikator za procjenu ekonomskog stanja. S&P 500 je izabran za ovaj projekt zbog njegove sveobuhvatnosti, što ga čini izvrsnim izborom za analizu trendova na tržištu i predviđanje budućih kretanja. Graf kretanja cijene S&P 500 indeksa prikazan je na Slici 2.



Slika 2. Cijena S&P 500 indeksa u periodu od 1997. do 2024. godine.

Njemački DAX indeks (njem. *Deutscher Aktienindex*) prati 30 najvećih i najlikvidnijih njemačkih kompanija koje kotiraju na Frankfurtskoj burzi. DAX indeks je ključni pokazatelj njemačkog gospodarstva i često se koristi za mjerenje ukupne ekonomske aktivnosti u zemlji. Zbog svoje reprezentativnosti njemačke ekonomije, DAX indeks je također odabran za ovaj projekt kako bi se omogućila komparativna analiza s američkim S&P 500 indeksom. Graf kretanja cijene DAX indeksa prikazan je na Slici 3.



Slika 3. Cijena DAX indeksa u periodu od 1997. do 2024. godine.

Kod oba indeksa, za potrebe analize korištena je prilagođena cijena zatvaranja (engl. *Adjusted Close*) koja uzima u obzir sve što bi moglo utjecati na cijenu dionica nakon zatvaranja tržišta, kao što su npr. dividende. Prilagođena cijena zatvaranja predstavlja jednu od najbitnijih financijskih varijabli jer reflektira konačnu procjenu vrijednosti tržišta za taj dan i služi kao osnova za tehničku analizu tržišnih kretanja.

### 3.1. Tehnički indikatori

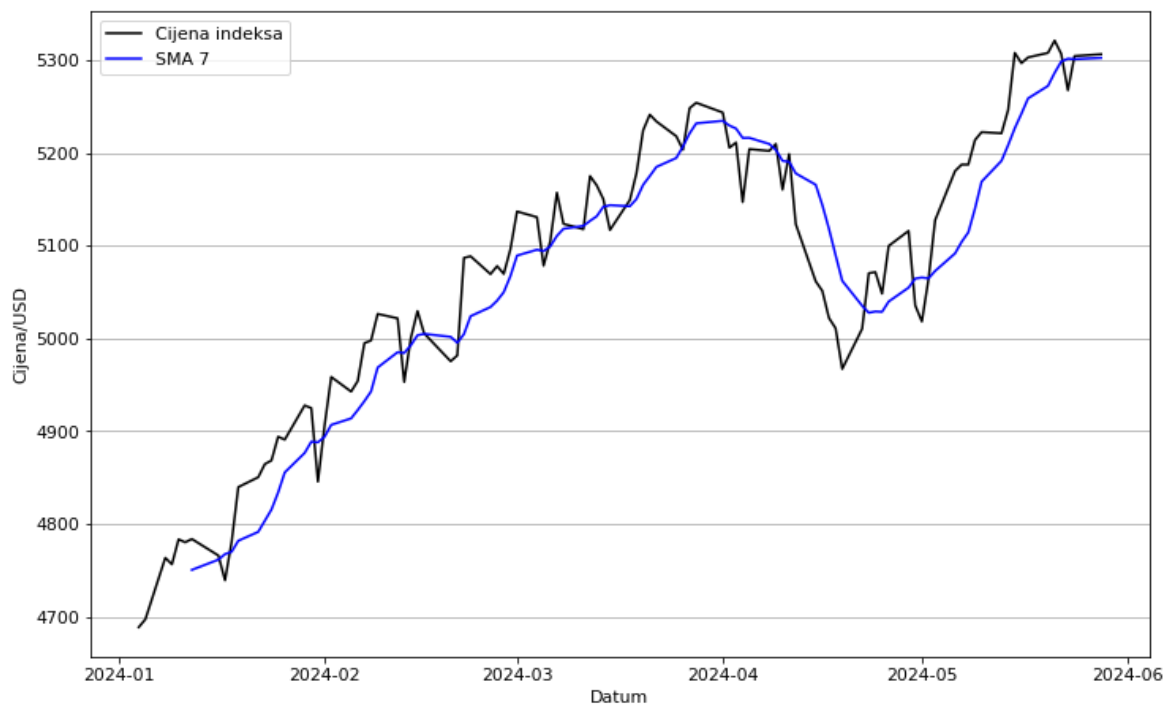
Tehnički indikatori su alati koji se koriste za analizu tržišnih trendova i pomažu u donošenju odluka o trgovanju. Oni omogućuju investitorima da interpretiraju tržišne signale i identificiraju moguće prilike za ulaganje. Indikatori kao što su pomični prosjeci (engl. *Moving Averages*) služe za izgladivanje dnevnih cijena i pružanje jasnijeg prikaza trendova bez šuma koji mogu proizaći iz kratkoročnih fluktuacija cijena.

Za modeliranje tržišnih režima, odabran je prirodni logaritam povrata jednostavnog pomičnog prosjeka (engl. *Simple Moving Average – SMA*) zatvarajućih cijena. Ovaj pristup je izabran kako bi se izgladile eventualne kratkoročne oscilacije cijena, čime se olakšava identifikacija dugoročnijih trendova. Pomični prosjek pruža stabilnost koja bolje predstavlja opći trend cijena. Primjer jednostavnog pomičnog prosjeka prikazan je Slikom 4.

SMA je definiran izrazom (20):

$$SMA_t = \frac{A_1 + A_2 + \dots + A_n}{n}, \quad (20)$$

gdje je  $SMA_t$  jednostavni pomični prosjek u trenutku  $t$ ,  $A_n$  je cijena financijskog instrumenta prije  $n$  dana, dok je  $n$  veličina povijesnog vremenskog prozora.



Slika 4. Primjer SMA indikatora za veličinu prozora od 7 dana, primijenjenog na S&P 500 indeksu u periodu od siječnja 2024. do lipnja 2024.



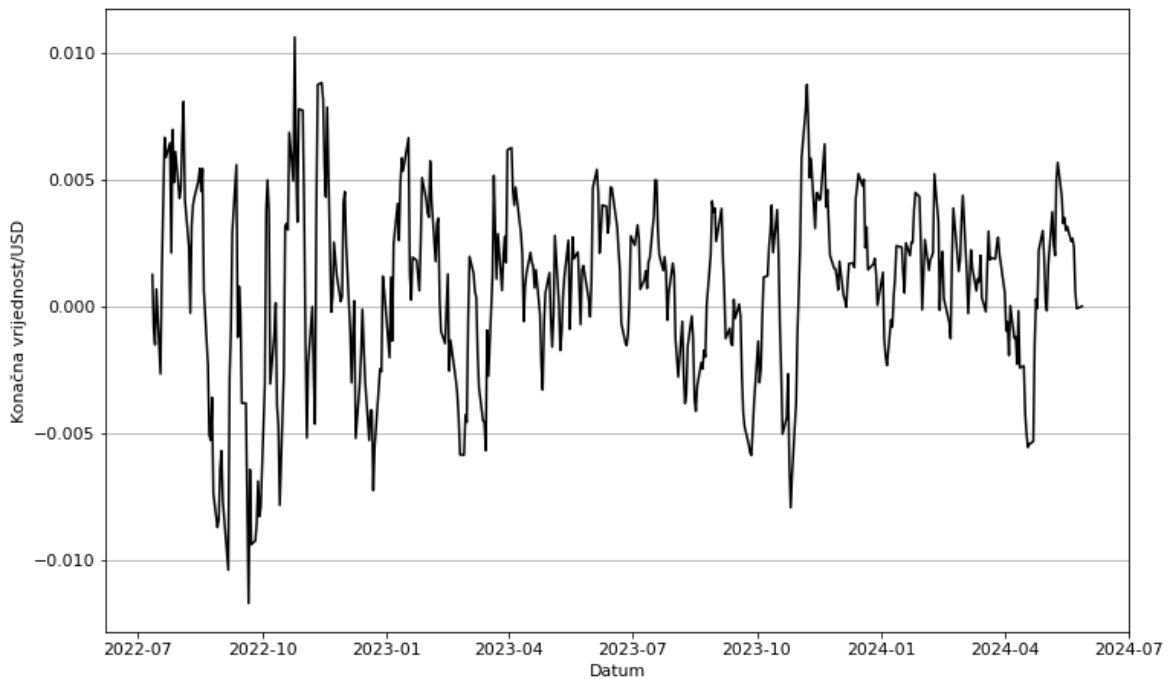
Nakon izračuna SMA, uzima se prirodni logaritam ovog prosjeka kako bi se dalje normalizirale vrijednosti, smanjili potencijalni šumovi u podacima i izbjegle prevelike numeričke vrijednosti koje bi mogle utjecati na performanse modela. Ova metoda omogućava modelu da efikasno procijeni i predvidi tržišne režime koristeći glatke i normalizirane podatke.

Konačni izračun logaritma pomičnog prosjeka prikazan je izrazom (21):

$$\ln(SMA)_t = \ln\left(\frac{SMA_t}{SMA_{t-1}}\right), \quad (21)$$

gdje je  $\ln(SMA)_t$  prirodni logaritam povrata jednostavnog pomičnog prosjeka u trenutku  $t$ ,  $SMA_t$  je jednostavni pomični prosjek u trenutku  $t$ , a  $SMA_{t-1}$  je jednostavni pomični prosjek u prethodnom trenutku  $t - 1$ .

Konačni izračun prikazan je Slikom 5.



Slika 5. Graf logaritmiranih prinosa sedmodnevnog pomičnog prosjeka indeksa S&P 500 u periodu od srpnja 2022. do lipnja 2024.

## 4. Metodologija rada

U ovom poglavlju detaljno se razmatraju eksperimentalni rezultati dobiveni primjenom skrivenih Markovljevih modela na podatke S&P 500 indeksa i njemačkog DAX indeksa. Analiza je usmjerena na identifikaciju i interpretaciju različitih tržišnih režima, kao i na evaluaciju učinkovitosti predloženih modela u predviđanju tržišnih kretanja. Eksperimenti su strukturirani tako da istraže kako različite konfiguracije modela i odabrane značajke podataka utječu na performanse modela.

### 4.1. Prikupljanje i obrada podataka

Proces prikupljanja i pripreme podataka ključan je za uspjeh svakog eksperimenta u analizi tržišnih režima. Ovaj korak osigurava da su podaci koji se koriste u analizi točni, relevantni i prikladni za modeliranje.

Kao što je pokazano u Poglavlju 3, za potrebe ovog diplomskog rada podaci su prikupljeni s platforme Yahoo! Finance, koja pruža pristup povijesnim tržišnim podacima, uključujući cijene otvaranja, najvišu, najnižu i zatvarajuću cijenu, te volumen trgovanja za S&P 500 indeks.

Nakon prikupljanja, podaci su prošli kroz fazu pripreme koja uključuje nekoliko ključnih koraka:

1. Čišćenje podataka: Uklanjanje svih nepotpunih ili netočnih zapisa koji bi mogli utjecati na kvalitetu eksperimenta.
2. Izračun tehničkih indikatora: Izračunavanje jednostavnog pokretnog prosjeka za vremenski period od 7 dana (kako bi se izgladile dnevne fluktuacije cijena i olakšalo identificiranje dugoročnijih trendova).
3. Transformacija podataka: Konverzija podataka iz prethodnog koraka u logaritamske povrate, što je uobičajena praksa u financijskoj analizi. Logaritamski povrati su korisni jer su simetričniji i stabilniji kroz vrijeme, što omogućava bolje usporedbe kroz različite periode.

Ovi koraci osiguravaju da su podaci koji ulaze u model čisti, točni i formatirani na način koji je prikladniji za analizu i modeliranje.

## 4.2. Postavljanje hiperparametara

Za optimizaciju performansi skrivenih Markovljevih modela u ovom diplomskom radu korišten je pristup mrežnog pretraživanja (engl. *Grid Search*). Mrežno pretraživanje omogućava sistematsko ispitivanje svih mogućih kombinacija hiperparametara unutar definiranog prostora kako bi se pronašla optimalna konfiguracija za model.

Kako bi modelirali režime tržišta da detektira samo uzlazne i silazne trendove ili režime visoke i normalne volatilnosti, broj skrivenih stanja u svim kombinacijama je postavljen na 2. Hiperparametri u HMM-u su detaljno objašnjeni u Poglavlju 2.7.

Tijekom procesa mrežnog pretraživanja, ispitane su sljedeće kombinacije hiperparametara prikazane Tablicom 3.

Tablica 3. Ispitane kombinacije hiperparametara.

Hiperparametar	Kombinacije
Tip kovarijance	sferna, dijagonalna, puna, vezana
Algoritam	Viterbi algoritam i algoritam naprijed-nazad
Sjeme (engl. <i>Seed</i> )	0, 42, 100
Maksimalan broj iteracija	10, 50, 100, 200

Sve kombinacije ovih hiperparametara korištene su u sljedećim podpoglavljima kako bi se postigli najbolji rezultati. Cilj ovog pristupa bio je identificirati optimalne vrijednosti koje maksimiziraju točnost i generalizacijsku sposobnost modela.

### 4.3. Treniranje modela

Za treniranje modela korišteno je online učenje (engl. *Online Learning*) s periodičnim ponovnim treniranjem modela. Ova metoda omogućava modelu da ostane ažuriran i prilagodljiv promjenjivim uvjetima na tržištu. Podaci su podijeljeni na inicijalni trening skup i testni skup na sljedeći način:

- Inicijalni trening skup – podaci od 1.1.1997 do 1.1.2017 godine
- Testni skup – podaci od 1.1.2017 do 1.6.2024

Proces online učenja s periodičnim ponovnim treniranjem uključuje inicijalno treniranje modela na trening skupu podataka, predviđanje stanja sljedećeg promatranja, te periodično ponovno treniranje modela nakon određenog broja promatranja. U ovom radu, ponovno treniranje modela vrši se svakih 20 promatranja (dana). Proces online učenja s periodičnim ponovnim treniranjem prikazan je Pseudokodom 1.

---

#### Pseudokod 1: Online učenja s periodičnim ponovnim treniranjem

---

$I$  = indeks za podjelu podataka na trening i test skup

$N$  = veličina testnog skupa podataka

$P$  = skup predviđanja

1. Podjeli podatke na skup za treniranje i skup za testiranje
2. Inicijalno treniraj HMM model
3. **Za**  $k = 1$  do  $N$ :

Uvećaj  $I$  za 1

Predvidi skriveno stanje za iduće promatranje

Dodaj predviđeno skriveno stanje u  $P$

**Ako** je korak  $k \% 20 = 0$  **onda**

Ponovno treniraj model na svim podacima do  $I$

**kraj**

## 4.4. Evaluacija modela

Kako bismo procijenili učinkovitost skrivenih Markovljevih modela u predviđanju tržišnih režima, kreirana je jednostavna investicijska strategija koja se uspoređuje s osnovnom strategijom „kupi i drži“ (engl. *Buy and Hold* - BaH). Ova evaluacija omogućava nam da kvantificiramo performanse HMM modela u stvarnim tržišnim uvjetima.

Investicijska strategija osmišljena je na temelju predviđenih stanja HMM modela. Cilj je bio identificirati tržišne režime koji ukazuju na tržište u porastu i tržište u padu te prilagoditi investicijsku poziciju u skladu s tim stanjima. Strategija je implementirana na sljedeći način:

### 1. Predviđanje stanja

Metodom prikazanom u Poglavlju 4.3., koristeći HMM model, predviđena su stanja za svako promatranje u testnom skupu podataka.

### 2. Izračun dobitaka i gubitaka

Izračunati su dnevni povrati, a zatim je nad njima primijenjen prirodni logaritam. Na taj način, sve vrijednosti manje od 1, poput 0.9 (što odgovara padu tržišta za 10%), postale su negativne, dok su sve vrijednosti veće od 1 ostale pozitivne.

### 3. Postavljanje pozicija

- ako je predviđeno stanje tržište u porastu, pozicija je postavljena na 1
- ako je predviđeno stanje tržište u padu, pozicija je postavljena na -1

### 4. Izračun dnevnih i kumulativnih rezultata

Dnevni ishodi izračunati su kao umnožak pozicije s dnevnim dobitkom/gubitkom, odnosno množenjem vrijednosti iz koraka 2 i 3. Kumulativni rezultat za HMM strategiju izračunat je zbrajanjem svih dnevnih ishoda.

Ova investicijska strategija korištena je za evaluaciju modela i usporedbu s osnovnom „kupi i drži“ strategijom. Strategija kupi i drži podrazumijeva jednostavno držanje investicije kroz cijelo razdoblje bez aktivnog trgovanja, čime se investitor izlaže svim usponima i padovima tržišta. S druge strane, HMM strategija koristi predviđene tržišne režime za prilagođavanje pozicija, omogućavajući dinamično upravljanje portfeljem temeljem promjenjivih tržišnih uvjeta.

Kumulativni ishodi za obje strategije izračunati su i uspoređeni kako bi se procijenila učinkovitost HMM modela u stvarnim tržišnim uvjetima. Ova evaluacija omogućava nam kvantifikaciju poboljšanja koja HMM model može donijeti u usporedbi s pasivnom investicijskom strategijom, pružajući uvid u potencijalne prednosti aktivnog upravljanja portfeljem. Analizom ovih kumulativnih rezultata možemo identificirati razdoblja u kojima HMM strategija nadmašuje strategiju kupi i drži, kao i razdoblja u kojima možda ne donosi očekivane prednosti.

## 5. Rezultati eksperimentalnog rada

U ovom poglavlju prikazani su rezultati primjene metodologije opisane u Poglavlju 4 nad podacima objašnjenim u Poglavlju 3. Analiza je provedena na indeksima S&P 500 i njemačkom DAX indeksu, a rezultati uključuju predikcije stanja pomoću HMM modela te usporedbu kumulativnih ishoda investicijske strategije zasnovane na HMM-u s osnovnom strategijom kupi i drži.

### 5.1. Rezultati za S&P 500 indeks

Najbolji rezultati za S&P 500 indeks dobiveni su korištenjem sljedećih hiperparametara:

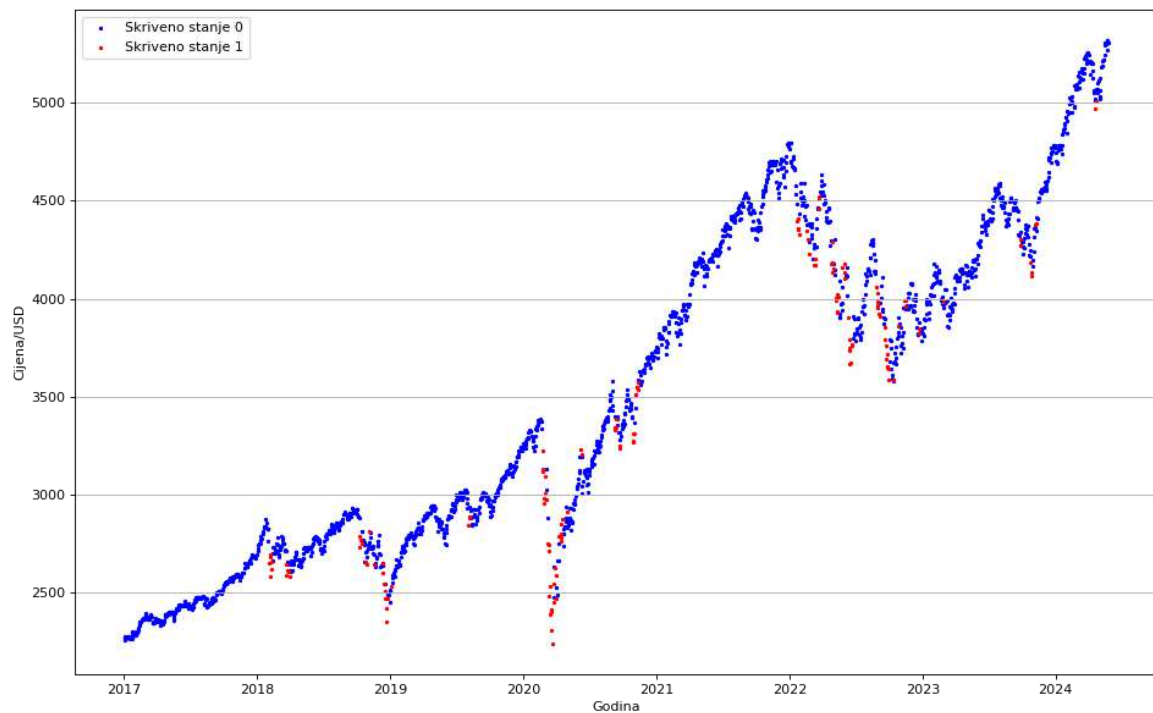
- Broj stanja: 2
- Tip kovarijance: Sferna
- Sjeme: 0
- Algoritam: Viterbi
- Maksimalan broj iteracija: 10

Graf predviđenih skrivenih stanja HMM modela na cijelom skupu podataka prikazan je Slikom 6.



Slika 6. Predviđanja skrivenih stanja HMM modela na cijelom skupu podataka za S&P 500 indeks.

Graf predviđenih skrivenih stanja HMM modela na testnom skupu podataka prikazan je Slikom 7.

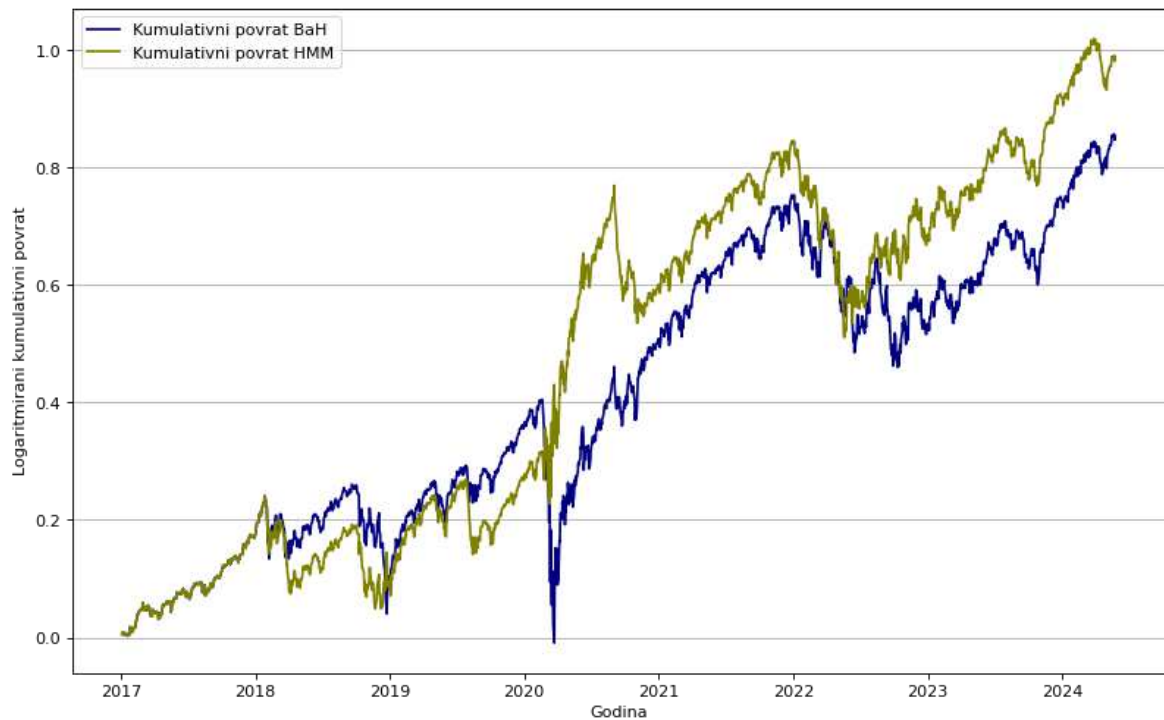


Slika 7. Predviđanja skrivenih stanja HMM modela na testnom skupu podataka za S&P 500 indeks.

Na grafu prikazanom Slikom 7. jasno se vidi kako HMM uspješno identificira tržište u padu tijekom razdoblja COVID-19 krize.

Na Slici 8. prikazan je graf usporedbe kumulativnih ishoda HMM strategije i strategije kupi i drži na testnom skupu podataka. Logaritmirani kumulativni povrat u zadnjem trenutku (zadnjem danu u testnom skupu) za HMM iznosi 0.9882, dok je za strategiju kupi i drži 0.8542.





Slika 8. Usporedba kumulativnih ishoda HMM investicijske strategije i strategije kupi i drži na testnom skupu podataka za S&P 500 indeks.

## 5.2. Rezultati za DAX indeks

Najbolji rezultati za DAX indeks dobiveni su korištenjem sljedećih hiperparametara:

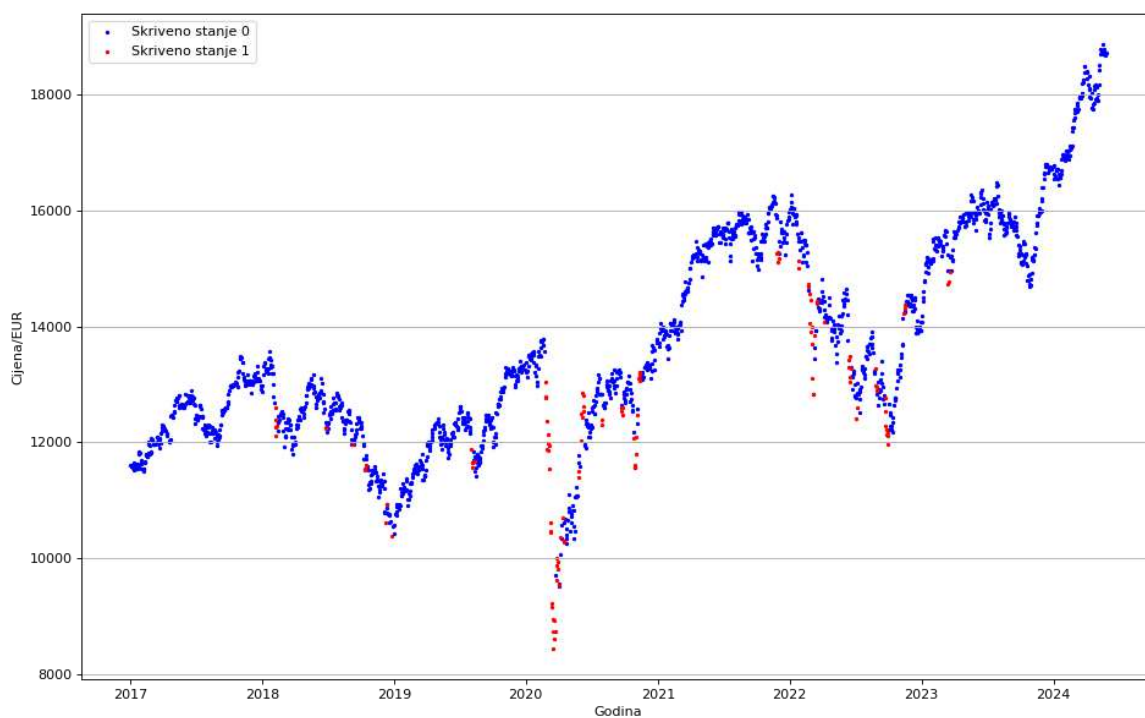
- Broj stanja: 2
- Tip kovarijance: Sferna
- Sjeme: 0
- Algoritam: naprijed-nazad
- Maksimalan broj iteracija: 10

Graf predviđenih skrivenih stanja HMM modela na cijelom skupu podataka prikazan je Slikom 9.



Slika 9. Predviđanja skrivenih stanja HMM modela na cijelom skupu podataka za DAX indeks.

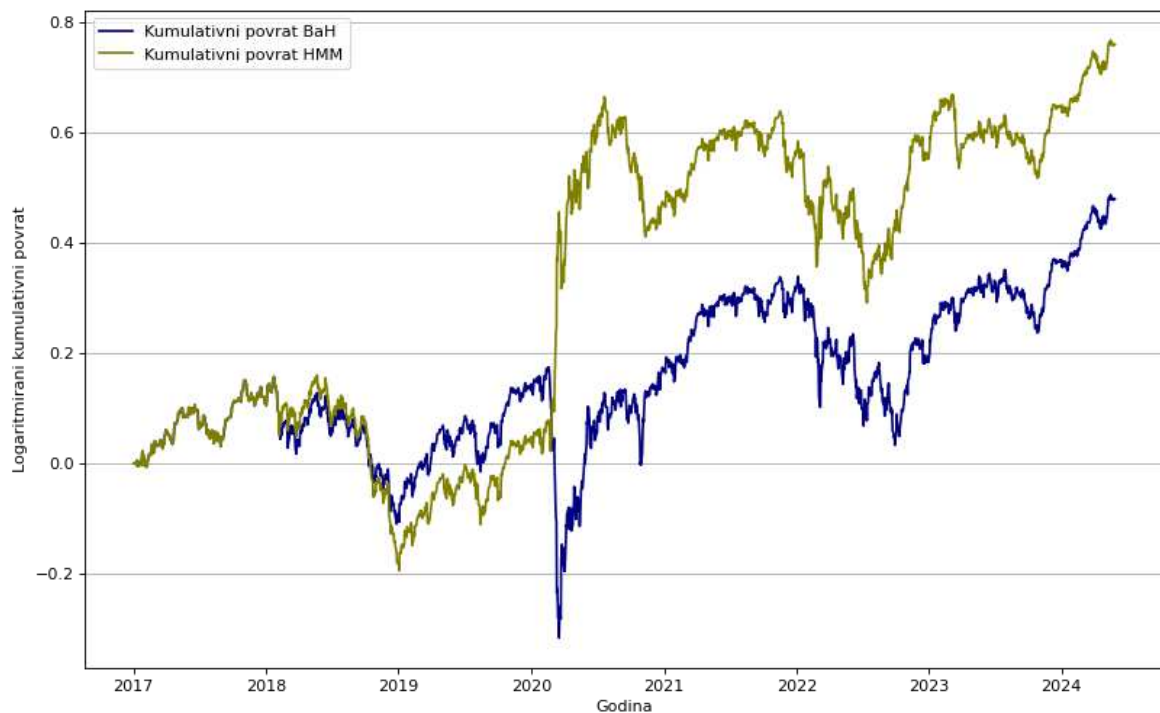
Graf predviđenih skrivenih stanja HMM modela na testnom skupu podataka prikazan je Slikom 10.



Slika 10. Predviđanja skrivenih stanja HMM modela na testnom skupu podataka za DAX indeks.

Kao i kod predviđanja skrivenih stanja HMM modela za S&P 500 indeks, na grafu za DAX indeks prikazanom Slikom 10. također se jasno vidi uspješno identificiranje tržišta u padu tijekom razdoblja COVID-19 krize.

Na Slici 11. prikazan je graf usporedbe kumulativnih ishoda HMM strategije i strategije kupi i drži na testnom skupu podataka. Logaritmirani kumulativni povrat u zadnjem trenutku (zadnjem danu u testnom skupu) za HMM iznosi 0.7589, dok je za strategiju kupi i drži 0.4784.



Slika 11. Usporedba kumulativnih ishoda HMM investicijske strategije i strategije kupi i drži na testnom skupu podataka za DAX indeks.

## 6. Zaključak

Predviđanje tržišnih režima ključno je za učinkovito upravljanje investicijama i minimiziranje rizika u dinamičnim i volatilnim financijskim tržištima. Tržišni režimi, kao što su tržišta u porastu i tržišta u padu, mogu značajno utjecati na strategije ulaganja i performanse portfelja. Stoga je identificiranje i predviđanje ovih režima važno za investitore i financijske analitičare.

U ovom radu, primijenjeni su skriveni Markovljevi modeli (HMM) za analizu tržišnih podataka S&P 500 i njemačkog DAX indeksa. Korištenjem HMM-a uspješno su identificirani različiti tržišni režimi, te su predviđene njihove promjene. Rezultati pokazuju da HMM model može efikasno predviđati prijelaze između režima, što je vidljivo iz predikcija tržišnog pada tijekom razdoblja epidemije COVID-19. Oba modela za S&P 500 i DAX pokazala su sposobnost da prepoznaju tržišni pad u tom razdoblju, što potvrđuje njihovu korisnost u realnim tržišnim uvjetima.

Implementacija jednostavne investicijske strategije zasnovane na predikcijama HMM modela pokazala je bolje performanse u usporedbi s osnovnom strategijom „kupi i drži“. Korištenjem informacija o tržišnim režimima, strategija je omogućila prilagodbu pozicija (kupnja ili prodaja) u skladu s trenutnim tržišnim uvjetima, što je rezultiralo boljim kumulativnim ishodima.

Iako su postignuti rezultati obećavajući, postoji prostor za daljnje poboljšanje modela. Prvo, daljnja optimizacija modela uključujući dublju analizu hiperparametara i ispitivanje različitih struktura HMM modela može dodatno unaprijediti performanse. Drugo, proširenje skupa podataka na druge financijske instrumente i tržišta omogućilo bi šire testiranje modela i procjenu njegove univerzalnosti. Također, dodavanje drugih značajki poput makroekonomskih pokazatelja, analize sentimenta i drugih financijskih indikatora moglo bi poboljšati predikcijsku moć HMM modela. Konačno, implementacija HMM modela u složenije investicijske strategije koje uzimaju u obzir troškove transakcija, likvidnost i rizik, mogla bi pružiti dublji uvid u praktičnu primjenu modela u stvarnim uvjetima tržišta.

Skriveni Markovljevi modeli pokazali su se kao moćan alat za analizu financijskih tržišta i identifikaciju tržišnih režima. Njihova primjena u predikciji tržišnih kretanja i prilagodbi investicijskih strategija rezultirala je značajnim poboljšanjima u usporedbi s tradicionalnim pristupima. Daljnja istraživanja i optimizacije mogu dodatno unaprijediti performanse HMM

modela i proširiti njihovu primjenjivost na širi spektar financijskih instrumenata i tržišta. Ovaj rad doprinosi boljem razumijevanju primjene skrivenih Markovljevih modela u financijskoj analizi te postavlja temelj za buduće studije i praktične primjene u području financija.

# Literatura

- [1] Rabiner, Lawrence, and Biinghwang Juang. "An introduction to hidden Markov models." *ieee assp magazine* 3.1, 1986.
- [2] Durbin, Richard, et al. *Biological sequence analysis: probabilistic models of proteins and nucleic acids*. Cambridge university press, 1998.
- [3] Hamilton, James D. "A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle." *Econometrica: Journal of the econometric society* (1989): 357-384.
- [4] Yamato, Junji, Jun Ohya, and Kenichiro Ishii. "Recognizing human action in time-sequential images using hidden Markov model." *CVPR*. Vol. 92. 1992.
- [5] Khademi, Abdolvahab. "Hidden Markov Models for Time Series: An Introduction Using R." *Journal of Statistical Software* 80 (2017): 89-92.
- [6] *Hmmlearn*, Poveznica: <https://hmmlearn.readthedocs.io/en/latest/>
- [7] *Yahoo Finance*, Poveznica: <https://finance.yahoo.com/>

# Sažetak

Naslov: Skriveni Markovljevi modeli za određivanje režima tržišta

Predviđanje tržišnih režima ključno je za učinkovito upravljanje investicijama i minimiziranje rizika u dinamičnim i volatilnim financijskim tržištima. Tržišni režimi, kao što su tržišta u porastu i tržišta u padu, mogu značajno utjecati na strategije ulaganja i performanse portfelja. U ovom radu istražuje se primjena skrivenih Markovljevih modela (HMM) za identifikaciju i predviđanje tržišnih režima na financijskim podacima indeksa S&P 500 i njemačkog DAX indeksa. Cilj je bio analizirati kako HMM može identificirati različite tržišne režime te evaluirati učinkovitost ovih modela u predviđanju tržišnih kretanja i implementaciji investicijskih strategija. Rezultati pokazuju da HMM model može efikasno prepoznati prijelaze između tržišnih režima, posebno tijekom razdoblja naglih promjena kao što je COVID-19 kriza. Implementacija jednostavne investicijske strategije zasnovane na HMM predikcijama rezultirala je boljim performansama u usporedbi s osnovnom strategijom kupi i drži.

Ključne riječi: skriveni Markovljevi modeli, HMM, tržišni režimi, investicijska strategija

# Summary

Title: Hidden Markov models for market regime detection

Predicting market regimes is crucial for effective investment management and risk minimization in dynamic and volatile financial markets. Market regimes, such as bull and bear markets, can significantly impact investment strategies and portfolio performance. This paper explores the application of Hidden Markov Models (HMM) for identifying and predicting market regimes using financial data from the S&P 500 and German DAX indices. The goal was to analyze how HMM can identify different market regimes and evaluate the effectiveness of these models in predicting market movements and implementing investment strategies. The results show that the HMM model can efficiently detect regime shifts, especially during periods of sudden changes like the COVID-19 crisis. Implementing a simple investment strategy based on HMM predictions resulted in better performance compared to the basic buy and hold strategy.

Keywords: Hidden Markov Models, HMM, market regimes, investment strategy