

Matematičke osnove dvanaesttonske glazbene ljestvice

Đurinić, Dominik

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:168:234759>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-29**



Repository / Repozitorij:

[FER Repository - University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing repozitory](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 1242

**MATEMATIČKE OSNOVE DVANAESTTONSKE GLAZBENE
LJESTVICE**

Dominik Đurinić

Zagreb, siječanj 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 1242

**MATEMATIČKE OSNOVE DVANAESTTONSKE GLAZBENE
LJESTVICE**

Dominik Đurinić

Zagreb, siječanj 2024.

ZAVRŠNI ZADATAK br. 1242

Pristupnik: **Dominik Đurinić (0036532701)**
Studij: Elektrotehnika i informacijska tehnologija i Računarstvo
Modul: Računarstvo
Mentor: doc. dr. sc. Mate Puljiz

Zadatak: **Matematičke osnove dvanaesttonske glazbene ljestvice**

Opis zadatka:

Rad ima za cilj istražiti matematičke osnove dvanaesttonske glazbene ljestvice, temeljnog elementa zapadne glazbe. Kroz ovaj rad student će istražiti različite aspekte dvanaesttonskog sustava, pružajući uvid u njegov povijesni razvoj, fizikalnu osnovu koja povezuje perceptivnu kvalitetu glazbenih intervala s njihovim matematičkim omjerima, te matematičku pozadinu koja objašnjava univerzalnost pentatonske i dvanaesttonske glazbe u ljudskim društvima. Neke od podtema za istraživanje su: Povijesni Razvoj - Pratite povijesnu evoluciju dvanaesttonskog sustava, od njegovih početaka do široke upotrebe u zapadnoj glazbi. Istražite ključne ličnosti i njihov doprinos razvoju ovog glazbenog sustava. Prirodni intervali - Istražite značaj malih cijelih omjera u glazbi, poput $3/2$ (čista kvinta) i $5/4$ (velika terca), i njihovu povezanost s dvanaesttonskim sustavom. Analizirajte kako se ti prirodni intervali aproksimiraju unutar jednoliko temperirane ljestvice. Iracionalnost broja \log_3/\log_2 i nemogućnost idealne glazbene ljestvice - Istražite razvoj jednoliko temperirane ljestvice i s njim povezan dokaz iracionalnosti broja \log_3/\log_2 . Raspravite inherentne izazove u postizanju savršene distribucije tonova unutar dvanaesttonskog sustava. Koje su početne pretpostavke (aksiomi) koje biste zahtijevali od glazbene ljestvice? Verižni razlomci: pentatonska i dvanaesttonska ljestvica - Istražite koncept verižnih razlomaka i njihovu ulogu u konstrukciji glazbenih ljestvica, uključujući pentatonsku ljestvicu. Analizirajte matematičke odnose unutar pentatonske skale i njezinu upotrebu u različitim glazbenim tradicijama. https://www.youtube.com/watch?v=OPtM9PByK_4 https://www.ted.com/talks/bobby_mcferrin_watch_me_play_the_audience Fourierova analiza - Istražite kako se svaki periodički signal (zvuk, ton) može dekomponirati u čiste sinusne signale s frekvencijama koje su višekratnici osnovne frekvencije početnog signala. Objasnite s tim povezan pojam alikvotnih tonova (pregiba, (viših) harmonika). Krivulja disonancije - Ispitajte matematičku osnovu krivulje disonancije, koja povezuje perceptivnu kvalitetu glazbenih intervala s njihovim matematičkim omjerima. Ograničenja nametnuta fizičkim svojstvima glazbenih instrumenata i materijalima - Ispitajte ograničenja nametnuta fizičkim svojstvima glazbenih instrumenata i materijalima. Raspravite koncept entropijskog ugađanja i kako on utječe na praktičnu realizaciju dvanaesttonskog sustava kod različitih instrumenata. Napomena: Očekuje se da student unutar po volji odabranog programskog paketa predstavi sve istražene koncepte. Reference: Emily Clader, Why Twelve Tones? The Mathematics of Musical Tuning. Zvonimir Šikić, Matematika i muzika. William A. Sethares, Tuning, Timbre, Spectrum, Scale. Lluís L. Trulla, Nicola Di Stefano, and Alessandro Giuliani, Computational Approach to Musical Consonance and Dissonance. Heye Hinrichsen, Entropy-based tuning of musical instruments.

Rok za predaju rada: 26. siječnja 2024.

Zahvaljujem se svojim roditeljima, sestri i maloj nećakinji na velikoj ljubavi, strpljenju, ohrabrivanju i vjeri u mene.

Zahvaljujem se i svim ostalim članovima svoje obitelji te prijateljima na podršci.

Zahvaljujem se mentoru doc.dr.sc. Mati Puljizu na ukazanom povjerenju i razumijevanju te stručnim savjetima pri izradi završnog rada.

SADRŽAJ

| | |
|--|-----------|
| 1. Uvod | 1 |
| 2. Povijesni razvoj dvanaesttonskog sustava | 2 |
| 2.1. Pitagora - veliki doprinos teoriji glazbe | 2 |
| 2.2. Raznolikost skala | 4 |
| 2.3. Napredak ugađanja | 5 |
| 3. Prirodni intervali i ljestvice | 7 |
| 3.1. Zvuk i njegova svojstva | 7 |
| 3.2. Titranje žice i harmonija | 9 |
| 3.3. Prirodni intervali | 13 |
| 3.4. Glazbene ljestvice | 17 |
| 4. Ugađanje tonova glazbene ljestvice | 22 |
| 4.1. Temperiranje glazbenih ljestvica | 22 |
| 4.2. Pitagorino ugađanje | 23 |
| 4.3. Srednjetonsko temperiranje | 26 |
| 4.4. Dobro temperiranje | 27 |
| 4.5. Jednoliko temperiranje | 29 |
| 5. Značaj dvanaesttonske ljestvice | 32 |
| 5.1. Savršenstvo dvanaesttonske raspodjele | 32 |
| 5.2. Verižni razlomci | 34 |
| 5.3. Iracionalnost broja $\log_2 3$ | 37 |
| 5.4. Svojstvo dva koraka | 41 |
| 6. Krivulja disonancije | 43 |
| 6.1. Konsonantnost i disonantnost tonova | 43 |
| 6.2. Plomp i Levelt | 45 |

| | |
|---|-----------|
| 6.3. Izračun krivulje disonancije | 47 |
| 6.4. Svojstva krivulje disonancije | 50 |
| 6.5. Od obojenog tona do optimalne ljestvice | 52 |
| 6.6. Od ljestvice do optimalne boje tona | 54 |
| 7. Ograničenja glazbenih instrumenata i materijala | 58 |
| 7.1. Neharmoničnost glazbenih instrumenata | 58 |
| 7.2. Ugađači glazbenih instrumenata | 62 |
| 7.3. Psihoakustični koncepti | 64 |
| 8. Zaključak | 69 |
| Literatura | 71 |
| A. Audiovizualna aplikacija | 74 |

1. Uvod

Matematika je temelj svake znanosti. Ona nam omogućuje logičko razumijevanje svih pojava koje nas okružuju. Glazbu osim svoje prepoznatljive umjetničke strane, karakterizira uređena struktura i usklađenost tonova. Takav sklad i ljepotu zvuka temelji na matematici. Glazba se mijenjala kroz povijest. Glazbenici su izgradili brojne glazbene ljestvice i koristili razne vrste ugađanja. Pitagora kao jedan od najznačajnijih matematičara, uvelike je doprinio teoriji glazbe svojim zakonom malih brojeva. U teoriji glazbe definiramo intervale i ljestvice. Posebno se ističu prirodni intervale. Razlikujemo četiri značajne vrste ugađanja među kojima se ističe jednoliko temperiranje, danas najčešći oblik ugađanja. Dvanaesttonska raspodjela oktave čini najbolju raspodjelu oktave zbog čega i je najčešće korištena. Ljudi percipiraju intervale konsonantnim ili disonantnim te nam krivulja disonancije pokazuje uzrok disonantnosti različitih tonova. Glazbeni instrumenti zbog materijala od kojih su izgrađeni posjeduju ograničavajuća fizička svojstva koja utječu na neharmoničnost njihova zvuka.

Ovaj završni rad istražuje matematičke osnove na kojima se temelji glazba te njihov učinak i primjenu u stvaranju glazbe. Naglasak je postavljen na dvanaesttonsku glazbenu ljestvicu koja predstavlja najzastupljeniju glazbenu ljestvicu zapadne glazbe. U završnom radu upoznat ćemo povijesni razvoj glazbe od njenih početaka do danas. Proučit ćemo fizička svojstva zvuka i njegov matematički model. Definirat ćemo osnovne elemente u teoriji glazbe: intervale i ljestvice. Objasnit ćemo postupke različitih vrsta ugađanja tonova glazbene ljestvice. Matematički ćemo dokazati značaj raspodjele oktave baš na dvanaest tonova. Razmotrit ćemo krivulju disonancije, njen značaj i primjenu u izgradnji glazbenih ljestvica. Također ćemo upoznati fizička ograničenja glazbenih instrumenata koja uzrokuju neharmoničnost njihova zvuka.

2. Povijesni razvoj dvanaesttorskog sustava

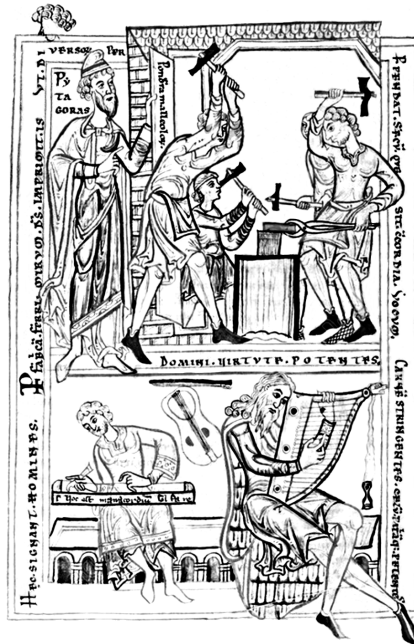
2.1. Pitagora - veliki doprinos teoriji glazbe

Pitagora je grčki filozof i jedan od najznačajnijih matematičara svih vremena. Smatramo ga začetnikom teorijske matematike te su ga kasnije i proglasili filozof-kralj (Platonov pojam). Rođen je početkom 6. st. pr. Kr. na otoku Samosu. Morao je napustiti otok zbog neslaganja s upravom tiranina Polikrata. U Magna Graecia (današnja južna Italija) nastavlja svoje učenje i djelovanje. Uskoro postaje prepoznat svojim rječitim govorom te okuplja veliki broj sljedbenika, tzv. pitagorejci. U Krotonu osniva svoju filozofsko-znanstvenu školu poznatu pod nazivom Pitagorino bratstvo. Kraj svog života dočekaao je izvan Krotona jer je bio proganjan kao i njegovi sljedbenici zbog novonastale političke situacije. Nakon smrti, iza sebe ne ostavlja nikakav pisani trag svojeg genijalnog uma i ideja. Na sreću pojedini sljedbenici odlučuju sastaviti sažetke i komentare Pitagorinih ideja i učenja kako cijela njegova filozofija ne bi bila trajno zaboravljena.

Pitagora je shvaćao kako stvarnost nije u neograničenom i neuređenom načelu materije već u stalno ograničavajućem, posljedično uređenijem načelu matematičke forme [7]. Glavno načelo kojim su se vodili Pitagora i njegovi sljedbenici jest tvrdnja da se sve u stvarnosti može opisati brojevima („*Sve je broj*“). Danas to možemo protumačiti da je matematika osnova za razumijevanje svih pojava u stvarnosti odnosno da je temelj svake znanosti.

Ovakvo shvaćanje proizlazi iz glazbe. Glazbu ne čini neuređeni skup zvukova, već postoji red koji se temelji na usklađenosti oktave, kvinte i kvarte. Ako glazbu možemo opisati brojem onda i cijelu prirodu (svemir) možemo također opisati brojem. „Muzika je broj i svemir je broj, dakle, svemir je muzika“ [7]. Filozofski

koncept koji stoji iza ove tvrdnje nazivamo *muzički univerzum*. Pitagora zavidljen skladom glazbe razlikovao je tri vrste glazbe. Latinski *musica instrumentalis* (uobičajena glazba), *musica humana* (nečujna glazba svakog pojedinca) i *musica mundana* (svemirska glazba) [7].



Slika 2.1: Pitagora u kovačnici¹

Prema predajama, Pitagora je prolazeći pokraj kovačnice razaznao konsonantne intervale oktave, kvinte i kvarte koje su proizveli udarci različitih čekića o nako- vanj. Istraživanjem te pojave došao je do zaključka da težine čekića koje proizvode te tonove su u omjerima 2:1, 3:2 i 4:3. Uskoro je Pitagora proširio svoje istra- živanje na duljine žica te ustanovio da navedeni omjeri primijenjeni na duljine žica pokazuju jednaka svojstva kao i udarci različitih težina čekića. Naknadno je otkriveno da korelacija između težine čekića i duljine žica, koju je Pitagora usta- novio, nije istinita. Ako su duljine žica u spomenutim omjerima 2:1, 3:2 i 4:3 onda omjeri težina čekića moraju biti u omjerima kvadrata duljina žica, tj. u omjerima $2^2 : 1^2$, $3^2 : 2^2$ i $4^2 : 3^2$ kako bi stvorili iste intervale. Razlog su različita fizikalna svojstva čekića i žice. Ipak, ova predaja nam omogućuje jednostavnu predodžbu i objašnjenje poveznice između harmonije i cjelobrojnih omjera u glazbi.

¹Ilustracija „Pitagora u kovačnici“ iz djela „De musica cum tonario“, J. Cotto, https://en.wikibooks.org/wiki/Pythagoras_in_the_Forge

Najznačajniji doprinos Pitagore teoriji glazbe jest spoznaja da su intervali oktave, kvinte i kvarte, na kojima je izgrađena glazba, određeni jednostavnim omjerima 1:2, 2:3 i 3:4 [7]. Na ovome otkriću se temelji cijela matematička pozadina teorije glazbe.

2.2. Raznolikost skala

Kroz povijest razvio se veliki broj skala (ljestvica) koje su obilježile glazbu pojedinih povijesnih razdoblja. Najznačajnija podjela oktave je bila tzv. dijatonska podjela. Podjela koja dijeli oktavu na osam „bijelih“ tonova. Ona je omogućila razvoj septatonskih modusa (modalnih skala). Neki od istaknutih modusa su: jonski, miksolidijski, lidijski, eolski, dorski, frigijski i dr. Osim septatonske skale upotrebljavala se i pentatonska skala, no nije imala jednaki značaj. Većinom se upotrebljavala u narodnoj glazbi širom svijeta.

Oko 300. g. pr. Kr. bilo je razdoblje upotrebe orgulja i lire čiji je glavni ton bio D. Time je došlo do široke primjene dorskog modusa u glazbenoj antici [7]. U srednjem vijeku kršćanska crkva vođena tradicijom nastavlja sa monofonijom, tj. jednoglasjem u raznim antičkim modusima. U 10. st., Guido iz Arezza osmišljava notno crtovlje. Također kako bi laicima olakšao praćenje modusa, osmislio je slogove *ut, re, mi, fa, sol, la, ti*.

U prijelaznom razdoblju iz 10. u 11. st. počinje se javljati veliko zanimanje za polifoniju, tj. višeglasje. U polifoniji su glasovi stalno udaljeni za kvartu odnosno kvintu, no kada glasovi izvode *tritonus* – tri cijel tona H/F to zvuči disonantno i teško je izvesti. Kao rješenje snižava se ton H za jedan poluton te nastaje nota B koja predstavlja prvi „crni“ ton. Snižavanjem tona H u B ukinuta je vodica u prvom glasu. Uskoro se nalazi bolje rješenje koje čini povišenje tona F u F \sharp u drugom glasu. Time se otklanja disonantni tritonus, a ne ukida vodica. Posljedično dolazi do nastanka novih kvinti. Konačno, oktava je podijeljena na dvanaest polutonova te imamo ukupno pet crnih tonova. Ovakvu razdiobu nazivamo *polutonskom*, no njena prava primjena je započela tek u 20. st.

Početakom 17. st. istaknuo se jonski modus (današnji dur), dok su ostali modusi polako napušteni osim prilagođene varijante eolskog (današnji mol). Glavna

karakteristika ovih modusa je velika septima ili *vodica*. Ona je pola tona udaljena od tonike (osnovni ton) te se time postiže razrješenje disonantne napetosti. Kao takvi, jonski i eolski modusi bili su glavni modusi zapadne tonalne glazbe u razdoblju od baroka do romantike.

Skladatelji u 20. st. stvaraju glazbu koja melodijski i harmonijski odstupa od tonalnosti. Traže nove skale bez izražene tonike.

2.3. Napredak ugađanja

Ugađanje ljestvice je postupak kojim dolazimo do točne skale. U 13. st. francuska akademija Notre Dame proglašava da se do točne skale može doći nizom savršenih Pitagorinih kvinti. Omjer frekvencija tonova 3:2, koji predstavlja interval kvinte, smatrali su „božanskim“ omjerom jer 3 predstavlja Sveto Trojstvo, a 2 dualizme (nebo i zemlja, dobro i zlo i dr.) [7]. Ovo ugađanje je prozvano *Pitagorinim ugađanjem*. Nažalost, navedeno ugađanje je imalo veliki nedostatak, a to je prisutnost *vučjih intervala* koje određuju krajnji tonovi u nizu kvinti.

Prirodna intonacija odnosno intonacija s točnim intervalima nije podatna za transponiranje, moduliranje i harmonizaciju stoga se uvodi *temperiranje* – odstupanje od savršenih intervala. Već spomenuto Pitagorino ugađanje je također vrsta temperiranja u kojoj odustajemo od savršenih terci i seksti.

Početak 15. st. renesansni glazbenici traže nova ugađanja koja pridaju veću važnost savršenoj terci. Kako bi ostvarili svoje težnje, uvedeno je *srednjetonsko temperiranje* čija je ideja bila ostvariti što više savršenih terci unatoč narušavanju kvinti. Srednjetonsko temperiranje prisutno je u renesansi i baroku sve do 18. st. Narušavanje kvinti, tzv. vučje kvinte bile su nedostatak ovakvog ugađanja te se u razdoblju od polovice 18. do kraja 19. st. razvija *dobro temperiranje*. Ova vrsta temperiranja uklanja vučje intervale i omogućava slobodne transpozicije i modulacije [7].

Kako je prolazilo vrijeme sve se više javljala potreba i želja za neograničenim transpozicijama, što je dovelo do uvođenja *jednolike skale* u 20. st. Jednoliko temperiranje je bilo poznato još i u razdoblju srednjetonskog temperiranja, ali je

tek u 20. st. prepoznato kao idealno.



Slika 2.2: Radionica lutnji²

Zanimljivost je da u 16. st. pomak u razvoju jednolikog ugađanja nisu učinili glazbeni teoretičari već graditelji glazbenih instrumenata s prečicama (poput današnje gitare) [7]. Naime, graditelji su shvatili kako je za raspodjelu prečica najbolji aritmetički interval s omjerom 18:17. Ponavljanjem intervala dvanaest puta dobivamo približnu oktavu koju uz manje izmjene pretvaramo u točnu oktavu. Polovicom 16. st. glazbeni teoretičari su potvrdili da su takva glazbala uistinu jednoliko ugođena. Već se 1588. godine Roselli u svojoj raspravi o „sfernoj muzici“ zalaže za uvođenje jednolikog ugađanja kao univerzalnog ugađanja svih glazbenih instrumenata [7]. Jednoliko ugađanje je do kraja prihvaćeno tek u 20. st.

²Ilustracija „Radionica za izradu glazbenih instrumenata“ iz 1570., J. Amman, <https://www.meisterdrucke.uk/artist/Jost-Amman.html>

3. Prirodni intervali i ljestvice

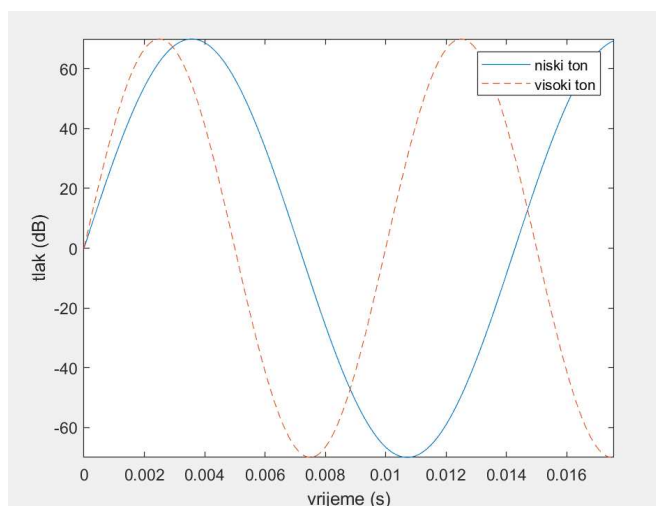
3.1. Zvuk i njegova svojstva

Glazbu čini uređeni skup zvukova. Zvuk je posljedica titranja izvora zvuka. Titranje se širi zrakom ili nekim drugim sredstvom te mijenja tlak sredstva odnosno nastaju oscilacije tlaka. Takve poremećaje u tlaku zraka detektira naš bubnjić unutar uha kao zvukove.

Čisti sinusni ton možemo najjednostavnije prikazati modelom sinusnog vala prema matematičkoj formuli [6]:

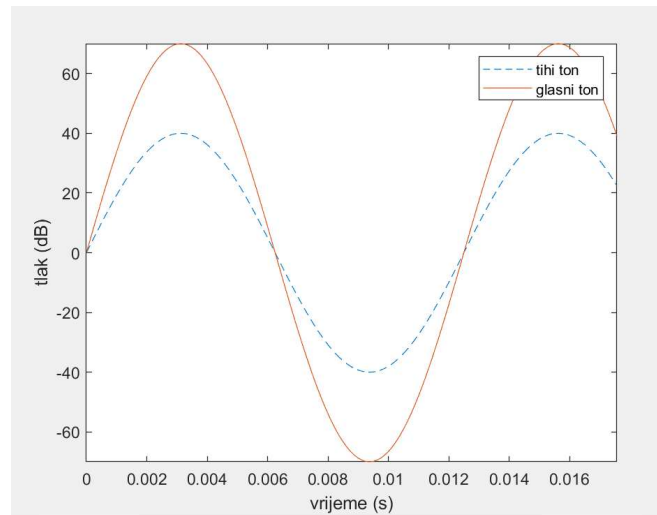
$$p(t) = A \sin(2\pi ft) \quad (3.1)$$

Kod takvog tona razlikujemo dva svojstva: *visinu* i *glasnoću* zvuka.



Slika 3.1: Razlika u visini zvuka - dva tona amplitude $A = 70$ dB s frekvencijama $f_1 = 70$ Hz (niski ton) i $f_2 = 100$ Hz (visoki ton)

Ako promotrimo sliku 3.1 možemo primijetiti da se ova dva grafa razlikuju u frekvenciji. Stoga, visina zvuka odgovara frekvenciji vala iz formule (3.1). Visoki tonovi će imati visoke frekvencije što dovodi do brze promjene u tlaku zraka. S druge strane, niski tonovi će imati niske frekvencije te će biti i sporije promjene u tlaku zraka.



Slika 3.2: Razlika u glasnoći zvuka - dva tona s frekvencijom $f = 80$ Hz i amplitudama $A_1 = 40$ dB (tihi ton) i $A_2 = 70$ dB (glasni ton)

Drugo svojstvo zvuka koje smo spomenuli je glasnoća. Ako ponovno promotrimo formulu (3.1), možemo zaključiti da bi glasnoća zvuka odgovarala amplitudi vala. Glasni tonovi će imati višu, a tihi tonovi nižu amplitudu. Navedeno možemo vidjeti i na slici 3.2.

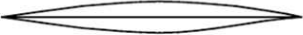
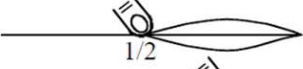


Tlak zraka izražavamo u mjernoj jedinici Pascal (Pa). Kada promatramo zvuk onda nam je pogodnije koristiti mjernu jedinicu decibel (dB). Ova mjerna jedinica je logaritamske prirode i stoga nam omogućuje pregledniji uvid u razlikovanje jačine različitih zvukova. Pretvorbu iz Pa u dB možemo izvršiti sljedećom formulom [6]:

$$L_p = p_{db} = 20 \cdot \log\left(\frac{p_{Pa}}{p_0}\right) \quad (3.2)$$

U formuli (3.2) $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$ predstavlja tlak praga čujnosti odnosno najmanji tlak zraka koje ljudsko uho može osjetiti.

3.2. Titranje žice i harmonija

Zamislimo žicu zategnutu pod konstantnim opterećenjem. Ako prstom trznemo postavljenu žicu, primijetit ćemo da je žica zatitrala i proizvela ton. Titranje žice opisujemo **frekvencijom** – brzinom titranja žice izraženom u Hertzima (Hz).

| Frequency | Diagram of vibrating string |
|----------------------|--|
| $f = 55 \text{ Hz}$ |  |
| $f = 110 \text{ Hz}$ |  |
| $f = 220 \text{ Hz}$ |  |
| $f = 440 \text{ Hz}$ |  |

Slika 3.3: Podjela titrajuće žice na oktave







Pritisnemo li žicu na polovini njene duljine i ponovno trznemo jedan kraj, žica će ponovno zatitrali. U ovom slučaju žica titra brže odnosno dvostruko većom frekvencijom te možemo razaznati viši ton od prethodno proizvedenog. Ova pojava pokazuje da su duljina žice i frekvencija međusobno **obrnuto-proporcionalne** [6]. Novo proizvedeni ton je, prema glazbenoj terminologiji, za oktavu viši od prethodnog tona. Ako bismo nastavili s podjelom žice (na četvrtine, osmine, itd.) primijetili bismo da njihove frekvencije čine *geometrijski niz* – niz u kojem članove niza dobivamo množenjem prethodnog člana s konstantom. Iz svega navedenog možemo zaključiti da frekvencije tonova razmaknutih za oktavu grade geometrijski niz [6].



Slika 3.4: Različiti razmak prečica na gitari¹

Ovaj zaključak se primjenjuje u izradi glazbenih instrumenata. Naime, instrument koji je za oktavu niži od višeg mora biti fizički većih dimenzija. Također, prečice na gitari su na vratu većeg razmaka nego one prečice bliže tijelu gitare.

¹Fotografija Shape of guitar's neck, Fender, <https://www.fender.com/articles/instruments/c-u-v-which-neck-shape-is-for-you>

| Frequency | Harmonic | Diagram of vibrating string |
|----------------------|-------------|--|
| $f = 55 \text{ Hz}$ | fundamental |  |
| $f = 110 \text{ Hz}$ | second |  |
| $f = 165 \text{ Hz}$ | third |  |
| $f = 220 \text{ Hz}$ | fourth |  |
| $f = 275 \text{ Hz}$ | fifth |  |
| $f = 330 \text{ Hz}$ | sixth |  |

Slika 3.5: Harmonici titrajuće žice

Žica titra na različite načine. Osnovni način titranja je titranje **temeljnomo frekvencijom**, tzv. prvi harmonik. On daje tonu specifičnu frekvenciju odnosno određuje visinu tona. Žica može titrati u višim modovima u različito ili isto vrijeme. Ako promotrimo različite harmonike (valove) na žici, primjećujemo da je redoslijed frekvencija koje uzrokuju te harmonike zapravo *aritmetički niz* – niz u kojem članove niza dobivamo dodavanjem konstante prethodnom članu niza. Ovdje možemo zaključiti da frekvencije harmonika grade aritmetički niz [6].

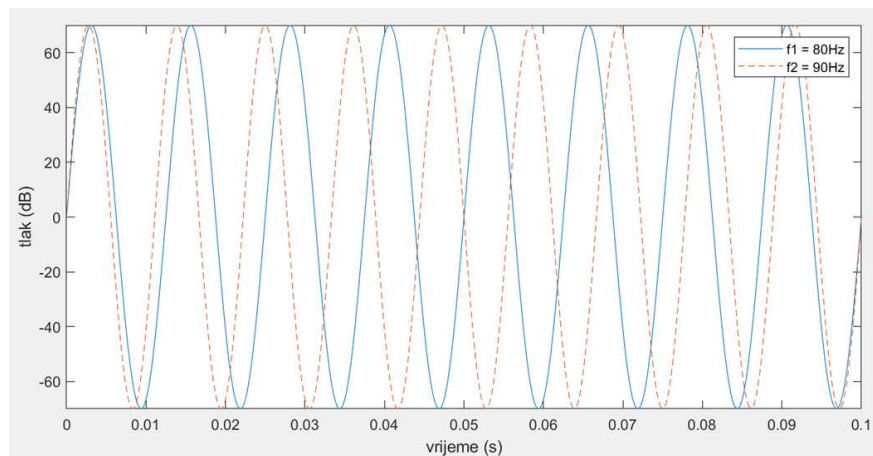
| Aritmetički niz | | | | | | | |
|------------------|----------|----------|----------|-----|-----|-----|------|
| 55 | 110 | 165 | 220 | 275 | 330 | 385 | 440 |
| Geometrijski niz | | | | | | | |
| 55 | 110 | | 220 | | | | 440 |
| Tonovi | | | | | | | |
| A | A' | E | A'' | C♯ | E' | F | A''' |
| Razlika | | | | | | | |
| | 0 | | | | | | |
| | | 1 | | | | | |
| | | | 3 | | | | |

Tablica 3.1: Usporedba aritmetičkog i geometrijskog niza frekvencija

Ako usporedimo aritmetički i geometrijski niz sastavljen od frekvencija titranja žice, u tablici 3.1 možemo primijetiti da je razlika odnosno broj članova aritmetičkog niza između članova geometrijskog niza jednak slijedu 0, 1, 3, ... S druge strane, ako razmotrimo ton A čija je frekvencija jednaka 55 Hz , u tablici 3.1 mo-

žemo vidjeti da se njegovi viši harmonici odnose jednako kao frekvencije titranja žice. Drugim riječima, broj viših harmonika između intervala oktave tona A jednak je broju frekvencija aritmetičkog niza između frekvencija geometrijskog niza titrajuće žice. Iz navedenog zaključujemo da su svi odnosi između harmonika titrajuće žice primjenjivi i na harmonike tonova u glazbi.

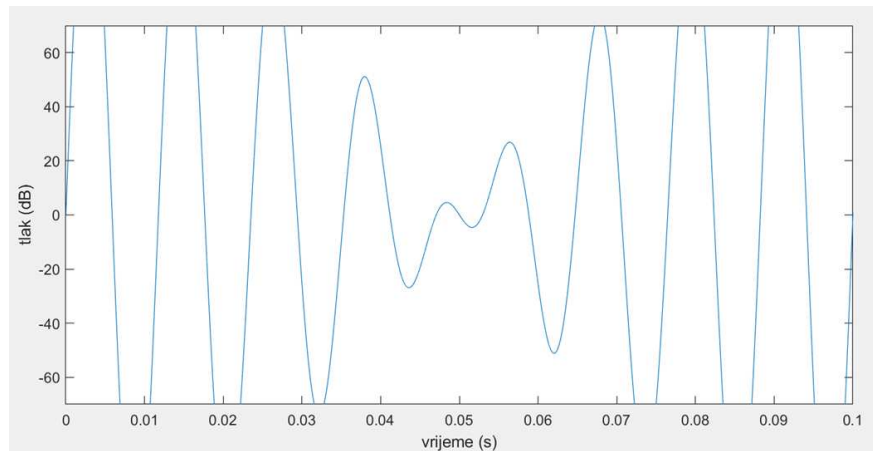
Glazbala titranjem zraka stvaraju zvuk. Titranja osim spomenute temeljne frekvencije sadrže i više frekvencije, ali u sve slabijem intenzitetu. Više frekvencije nazivamo **višim harmonicima** ili **aliquotnim tonovima** [7]. Raspodjela intenziteta viših harmonika određuje **boju** tona. Zvuk pojedinog glazbala upravo razlikujemo prema njihovoj boji. Aliquotni tonovi (popratni tihi tonovi) jednog bogatog tona predstavljaju čitavu skalu tonova. Neka elektronički sintetizirana glazba oponaša glazbala tako da kombinira uvijek iste harmonike. No ona zvuči lažno jer kod prave glazbe ti harmonici nisu konstantni već se mijenjaju tijekom sviranja ovisno o glazbeniku.



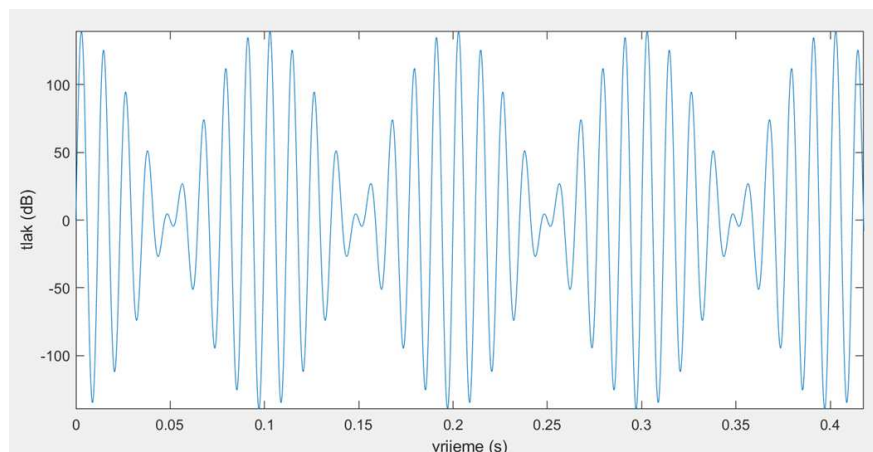
Slika 3.6: Sinusni valovi bliskih frekvencija - $f_1 = 80$ Hz i $f_2 = 90$ Hz

Prisjetimo se definicije zvuka. Zvuk je posljedica titranja izvora zvuka te ga najjednostavnije prikazujemo sinusnim valom. Istovremena reprodukcija sinusnih valova pokazuje zanimljivo svojstvo. Ako dva sinusna vala reproduciramo međusobno jako bliskim frekvencijama, dolazi do pojave tzv. **udara** [6]. Uzrok je **superpozicija** dva vala odnosno valovi koji su poravnati se međusobno zbrajaju, a oni suprotno poravnati se međusobno poništavaju. Pojavu superpozicije dva vala te udare koje pritom čujemo možemo pogledati na grafovima 3.6, 3.7 i 3.8. Čovjeku spomenuti udari nisu ugodni te zaključujemo da frekvencije tonova koje

su po vrijednosti bliske jedna drugoj neće biti konsonantne (skladne).



Slika 3.7: Superpozicija dva vala frekvencija $f_1 = 80$ Hz i $f_2 = 90$ Hz

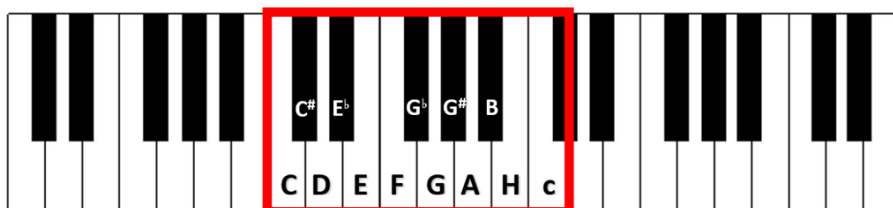


Slika 3.8: Uzorak super-valova koje čujemo kao udare

Pitagora je za sobom ostavio vrlo značajan „**zakon malih brojeva**“ . Ovaj zakon matematički definira konsonantnost tonova – tonova koji zajedno zvuče ugodno našem uhu. Zakon kaže: „*Dva tona zvuče konsonantno, ako im se frekvencije nalaze u omjeru malih prirodnih brojeva.*“ [7]. Omjer malih brojeva možemo najlakše razumjeti na primjeru. Ako promotrimo omjer $\frac{2}{1}$ (oktava), on je omjer manjih brojeva nego omjer $\frac{3}{2}$ (kvinta), koji je opet omjer manjih brojeva nego $\frac{4}{3}$ (kvarta) itd. Zapravo omjer manjih brojeva je razlomak koji u brojniku i nazivniku ima manje prirodne brojeve od drugog razlomka. Zakon možemo jednostavnije interpretirati - tonovi čiji je omjer frekvencija sastavljen od manjih brojeva zvuče ugodnije i ljepše zajedno.

3.3. Prirodni intervali

U poglavlju 2 smo se upoznali s pojmom dijatonske skale. Naime, dijatonska skala je niz od osam „bijelih“ tonova. Naziv „bijeli“ tonovi proizlazi iz bijelih tipki na klaviru. Ovu ćemo skalu iskoristiti kako bismo objasnili intervale u teoriji glazbe.



Slika 3.9: Klavirske tipke sa istaknutim segmentom i tonovima

Na slici 3.9 možemo vidjeti tipični segment klavirskih tipki koji se sastoji od osam bijelih tipki i pet crnih tipki. Prikazani segment predstavlja karakteristični niz od osam tonova prepoznatljive *dur* ljestvice, točnije *C-dur*. Prema teoriji glazbe te tonove označavamo slovima: C, D, E, F, G, A, H, c [7].

Na prvi pogled uočavamo da se prvi i osmi ton označavaju istim slovom C. Razlog tome smo već spomenuli u prethodnom podnaslovu 3.2. Kada bismo poslušali jedan i drugi ton, mogli bismo lako čuti da se radi o istom tonu. No, drugi ton je za oktavu viši odnosno njegova žica u klaviru titra dvostruko brže.

U teoriji glazbe **interval** definiramo kao razliku između dva tona. Interval od tona C do c nazivamo **oktava** jer se sastoji od osam bijelih tonova. Na isti način možemo definirati i nazive preostalih intervala. Primjerice interval od tona C do G nazivamo **kvinta** jer se sastoji od pet bijelih tonova, a interval od tona C do F nazivamo **kvartom** jer se sastoji od četiri bijela tona.

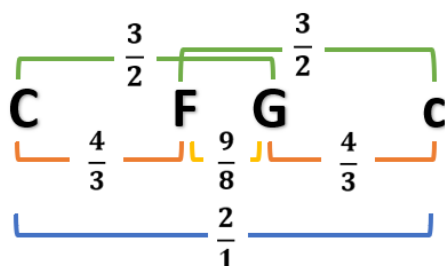
U prethodnom podnaslovu 3.2 smo definirali frekvenciju kao brzinu titranja žice. Klavir je žičano glazbalo s tipkama koje stvara zvuk udarcima batića o žice. Takva građa klavira nam omogućuje da za pojedini ton možemo odrediti frekvenciju titranja njegove žice. Prema dogovoru za početni ton naše C-dur ljestvice C uzimamo da je frekvencija njegova titranja jednaka jedan ($C = 1$) te ga nazivamo **osnovni ton** ili **tonika** [7]. Frekvencija tona c je dvostruko veća ($c =$

2). Za ton c kažemo da je **oktava** tona C. Ton F ima frekvenciju $\frac{4}{3}$ te je **kvarta** (**subdominanta**) na ton C ($F = \frac{4}{3}$), a ton G ima frekvenciju $\frac{3}{2}$ te je **kvinta** (**dominanta**) na ton C ($G = \frac{3}{2}$). Određivanjem frekvencije tonova ustanovili smo da **veličina intervala odgovara omjeru frekvencija dvaju tonova čiji interval tražimo** [7].



Slika 3.10: Građa klavira²

Ako promotrimo omjer tona G i F ($G/F = \frac{3/2}{4/3} = \frac{9}{8}$) onda za vrijednost intervala između ta dva tona dobivamo $\frac{9}{8}$. Izračunati interval nazivamo **cijeli ton**. Na slici 3.11 možemo vidjeti prikaz razdiobe oktave s obzirom na sve do sada navedene intervale.



Slika 3.11: Razdioba oktave na kvarte, kvinte i cijeli ton

Na početku ovog podnaslova 3.3 definirali smo segment klavijature s bijelim i crnim tipkama. Bijele smo naveli, no postavlja se pitanje što je s crnim tipkama? U

²Fotografija Yamaha Pianos, Yamaha, https://usa.yamaha.com/products/musical_instruments/pianos/index.html

prijelaznom razdoblju iz 10. u 11. st. uvođenjem polifonije dolazi potreba za uvođenjem dodatnih tonova kako bismo izbjegli disonantne prizvuke dok se izvode određene kombinacije tonova. Prvo je uveden poluton **B** koji nastaje snižavanjem tona H za jedan poluton. Uskoro se javila potreba i za ostalim polutonovima te su uvedena još četiri (**C♯**, **E♭**, **G♭**, **G♯**). Time smo podijelili oktavu na dvanaest polutonova i dobili **kromatsku skalu** [7].



Slika 3.12: Dvanaesttonska skala

| Naziv | Ton | Vrijednost |
|-------------|-----|---------------|
| Osnovni ton | C | $\frac{1}{1}$ |
| Terca | E | $\frac{5}{4}$ |
| Kvarta | F | $\frac{4}{3}$ |
| Kvinta | G | $\frac{3}{2}$ |
| Oktava | c | $\frac{2}{1}$ |

Tablica 3.2: Pitagorini osnovni intervali

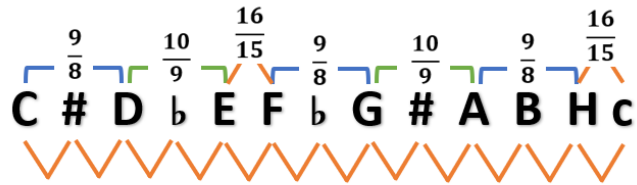
Nakon što smo upoznali cijelu **dvanaesttonska skalu**, konačno možemo odrediti sve točne intervale u toj skali. Za mogućnost određivanja točnih intervala zaslužan je Pitagora i njegova teorija „*zakon malih brojeva*“ [7]. Pitagora je definirao pet osnovnih intervala koje možemo pogledati u tablici 3.2. Na temelju osnovnih intervala možemo izračunati vrijednosti preostalih bijelih tonova.

Izračun preostalih bijelih tonova:

$$\text{Ako } \frac{G}{F} = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{9}{8} \quad \text{onda slijedi} \quad \frac{D}{C} = \frac{9}{8} \quad D = C \cdot \frac{9}{8} = 1 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{8} \quad (3.3)$$

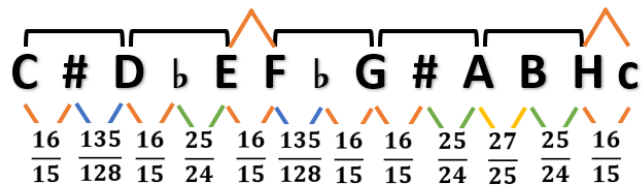
$$\text{Ako } \frac{F}{E} = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{16}{15} \quad \text{onda slijedi} \quad \frac{c}{H} = \frac{16}{15} \quad H = c \cdot \frac{15}{16} = 2 \cdot \frac{15}{16} = \frac{15}{8} \quad (3.4)$$

$$\frac{H}{A} = \frac{9}{8} \quad A = H \cdot \frac{8}{9} = \frac{15}{8} \cdot \frac{8}{9} = \frac{5}{3} \quad (3.5)$$



Slika 3.13: Prikaz cijelih tonova i polutonova

Na ovako dobivenoj skali 3.13 uočavamo različite omjere cijelih tonova ($\frac{9}{8}$ i $\frac{10}{9}$) te duljine intervala $\frac{16}{15}$ koje nazivamo **polutonovima**. Kako bismo pronašli točne intervale „crnih“ tonova, moramo podijeliti intervale cijelih tonova na polutonove. Ovom razdiobom oktave dolazimo do četiri različite vrijednosti intervala polutonova ($\frac{16}{15}$, $\frac{25}{24}$, $\frac{135}{128}$, $\frac{27}{25}$) [7].



Slika 3.14: Prikaz polutonova

Izračun crnih tonova:

$$C\sharp = C \cdot \frac{16}{15} = 1 \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{15} \quad (3.6)$$

$$E^b = C\sharp \cdot \frac{9}{8} = \frac{16}{15} \cdot \frac{9}{8} = \frac{6}{5} \quad (3.7)$$

$$G\sharp = G \cdot \frac{16}{15} = \frac{3}{2} \cdot \frac{16}{15} = \frac{8}{5} \quad (3.8)$$

$$G\flat = \frac{G}{\frac{16}{15}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{16}{15}} = \frac{45}{32} \quad (3.9)$$

$$B = G\sharp \cdot \frac{9}{8} = \frac{8}{5} \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{5} \quad (3.10)$$

| Naziv | Ton | Vrijednost | Naziv | Ton | Vrijednost |
|----------------|------------|-----------------|----------------|------------|----------------|
| Mala sekunda | C \sharp | $\frac{16}{15}$ | Kvinta | G | $\frac{3}{2}$ |
| Velika sekunda | D | $\frac{9}{8}$ | Mala seksta | G \sharp | $\frac{8}{5}$ |
| Mala terca | E \flat | $\frac{6}{5}$ | Velika seksta | A | $\frac{5}{3}$ |
| Velika terca | E | $\frac{5}{4}$ | Mala septima | B | $\frac{9}{5}$ |
| Kvarta | F | $\frac{4}{3}$ | Velika septima | H | $\frac{15}{8}$ |
| Tritonus | G \flat | $\frac{45}{32}$ | Oktava | c | $\frac{2}{1}$ |

Tablica 3.3: Pitagorini točni intervali

| | | | | | | | | | | | | |
|---------------|-----------------|---------------|---------------------------|---------------|---------------|---------------------------|---------------|---------------|---------------|---------------|----------------|---------------|
| C | # | D | \flat | E | F | \flat | G | # | A | B | H | c |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{16}{15}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{6}{5}$ | $\frac{5}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{45}{32}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{8}{5}$ | $\frac{5}{3}$ | $\frac{9}{5}$ | $\frac{15}{8}$ | $\frac{2}{1}$ |

Slika 3.15: Prikaz Pitagorinih točnih intervala

Pitagorini točni intervali, u tablici 3.3, pripadaju tzv. **prirodnoj intonaciji** [7]. Unatoč savršenstvu intervala, različite vrijednosti intervala polutonova one-mogućuju transpozicije. Drugim riječima glazbala koja su ugođena u prirodnoj intonaciji jedne ljestvice neće biti ugođena u nekoj drugoj te neće dobro zvučati.

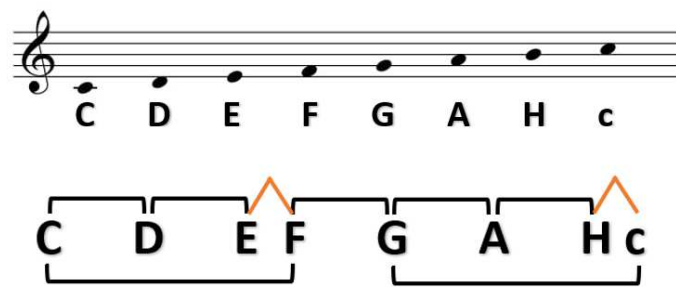
3.4. Glazbene ljestvice

U prethodnom podnaslovu 3.3 upoznali smo intervale i njihove vrijednosti na primjeru dur ljestvice. Dur ljestvica, iako najzastupljenija, nije jedina ljestvica koja

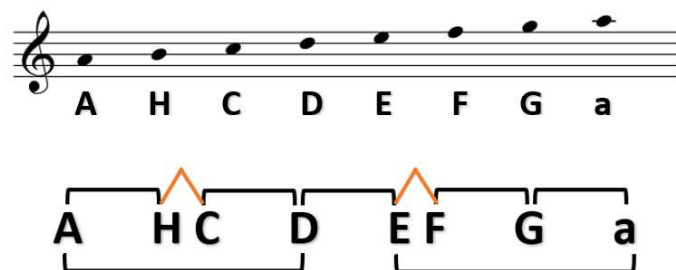
postoji. Kroz povijest su se razvijale brojne ljestvice te skladala brojna djela u njima.

Glazbena ljestvica ili **skala** je sustav tonova poredanih u uzlaznom ili silaznom redoslijedu različite visine. Glavna značajka ljestvica su **modusi** (tonaliteti, *modalne skale*). Oni se međusobno razlikuju u načinu podjele oktave na intervale te rasporedu tonova.

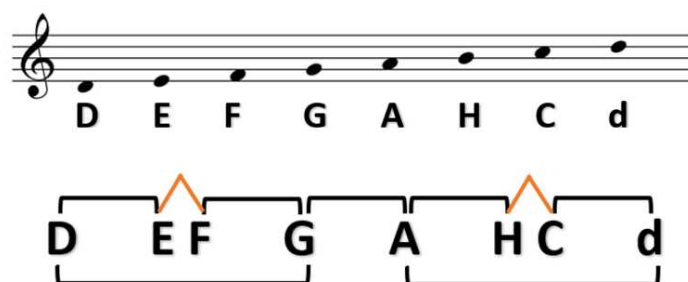
U Europi su se već od antičkog doba ustalile **septatonske skale**, skale koje dijele oktavu na sedam intervala sa sedam tonova. Tijekom povijesti septatonske skale postojalo je niz modusa koji su obilježili pojedina povijesna razdoblja, no samo neki od njih su ostali do danas zastupljeni. Prikazati ćemo tri tzv. „bijele“ modalne skale koje se razlikuju u osnovnom tonu.



Slika 3.16: Jonski modus - današnji *dur*

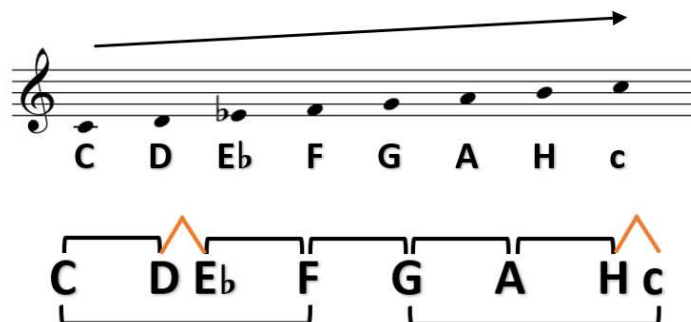


Slika 3.17: Eolski modus - današnji *mol*

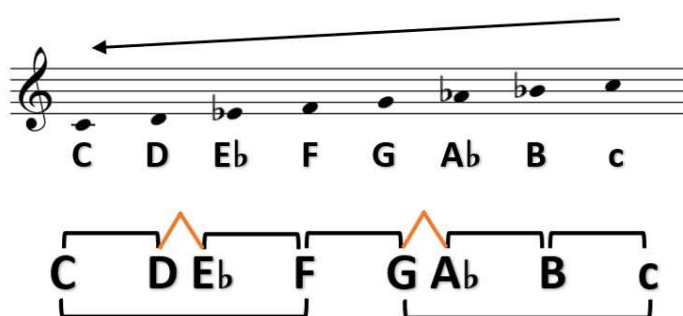


Slika 3.18: Dorski modus

Osim „bijelih“ modalnih skala postoje i skale koje uvode i crne tonove u podjelu oktave. Navodimo uzlazni i silazni *melodijski mol* točnije *C-mol*.



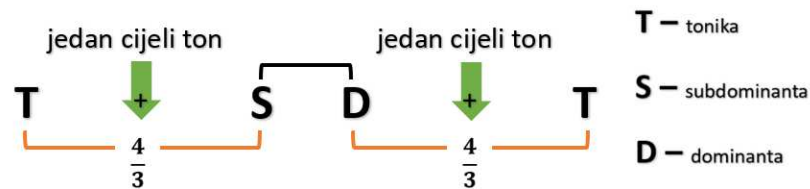
Slika 3.19: Mol - melodijski (uzlazni)



Slika 3.20: Mol - melodijski (silazni)

Unatoč prevlasti septatonskih skala, glazba se sklada i u pentatonskim te sekstatonskim skalama. **Pentatonske skale** dijele oktavu na pet intervala s pet tonova. Ovu vrstu skala dobivamo postavljanjem dodatnog tona u donju i gornju

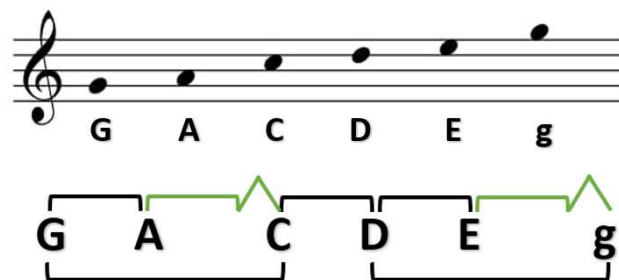
kvartu cijele oktave [7]. Slika 3.21 nam ilustrativno prikazuje ovu podjelu. Dodatni ton možemo postaviti na početak ili kraj kvarte. U početnoj oktavi imamo dvije kvarte (gornja i donja), u svaku od njih dodajemo po jedan cijeli ton na početak ili kraj kvarte (dvije moguće pozicije).



Slika 3.21: Izgradnja pentatonske skale

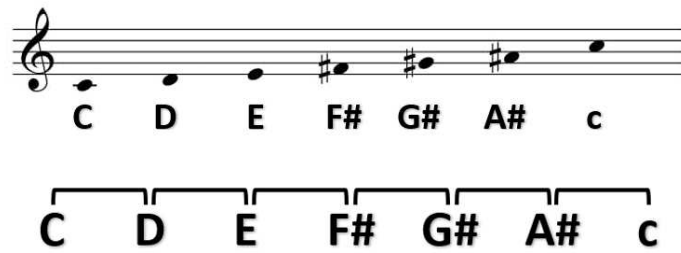
S obzirom na to, postoje četiri načina za dobivanje pentatonskih skala [7]:

1. dodavanje cijelog tona na *početak* svake kvarte
2. dodavanje cijelog tona na *kraj* svake kvarte
3. dodavanje cijelog tona na *početak donje* te cijelog tona na *kraj gornje*
4. dodavanje cijelog tona na *kraj donje* te cijelog tona na *početak gornje*



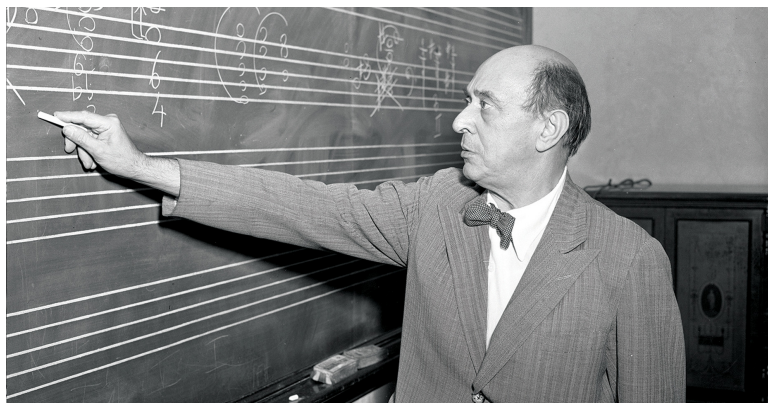
Slika 3.22: Primjer izgradnje pentatonske skale prema načinu 1.

Sekstatonske skale dijele oktavu na šest intervala sa šest tonova. Slika 3.23 nam prikazuje *čjelotonsku skalu*. Ona je prepoznatljiva i jednostavna sekstatonska skala koja dijeli oktavu na šest cijelih tonova [7].



Slika 3.23: Cjelotonska skala

Zanimljivost vezanu uz skale donosi A. Schönberg koji 1911. godine definira skalu kao analizu jednog tona, a akord kao sintezu tonova odnosno njegovih alikvotnih tonova u jedinstven zvuk [7]. Kao što smo već i u prethodnom podnaslovu 3.2 spomenuli, ova tvrdnja uistinu vrijedi jer alikvotni tonovi jednog tona predstavljaju čitavu skalu tonova.



Slika 3.24: Arnold Schönberg - otac dvanaesttonske tehnike u 20. st.³

³Fotografija Arnold Schönberg, <https://musicaenmexico.com.mx/musicomania/schoenberg-y-el-numero-13/>

4. Ugađanje tonova glazbene ljestvice

4.1. Temperiranje glazbenih ljestvica

U prethodnom poglavlju 3 smo spomenuli prirodnu intonaciju s točnim intervalima. Unatoč savršenstvu intervala, ova vrsta ugađanja nije praktična. Razlog je već spomenuta nemogućnost transpozicije tonova. Postupak transpozicije tonova predstavlja pomake određenog skupa tonova s obzirom na visinu tona u više ili niže tonalitete za konstantan interval. Pri pomaku u prirodnoj intonaciji dolazi do određenog broja pogrešnih pomaka u tonalitetu. Navedeno predstavlja ograničenje za glazbene instrumente. Naime, glazbala koja su savršeno ugođena u prirodnoj intonaciji u određenom tonalitetu, neće biti savršena u nekom drugom tonalitetu te će biti potrebno ponovno ugađanje glazbala u novom tonalitetu.

Kroz povijest se razvijaju razne vrste ugađanja. Ugađanja koriste neki oblik temperiranja u svrhu povećanja podatnosti glazbenih ljestvica. **Temperiranje** je postupak odstupanja od točnih vrijednosti određenih intervala kako bismo osigurali što veću podatnost izgrađenih ljestvica [7]. Navedenim postupkom gubimo točnost što narušava konsonantnost, ali s druge strane ono nam osigurava veću slobodu u postupcima transponiranja, modulacije i harmonizacije.

U nastavku poglavlja proći ćemo kroz četiri značajne vrste ugađanja glazbenih ljestvica: Pitagorino ugađanje, srednjjetonsko temperiranje, dobro temperiranje i jednoliko temperiranje.

4.2. Pitagorino ugađanje

Pitagorino ugađanje je u 13. st. proglašeno savršenim ugađanjem kojim dolazimo do točne glazbene ljestvice. Pitagora je uspješno konstruirao potpunu glazbenu ljestvicu uzastopnim pomacima savršene kvinte iznad – ispod određenog tona [2].

| Pitagorino ugađanje | |
|---------------------------|---|
| Pomak | Vrijednost |
| C | $C = 1$ |
| C → G | $G = \frac{3}{2}$ |
| C → G → D | $d = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \Rightarrow D = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{8}$ |
| C → G → D → A | $A = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{16}$ |
| C → G → D → A → E | $e = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{32} \Rightarrow E = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{64}$ |
| C → G → D → A → E → H | $H = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{128}$ |
| F ← C → G → D → A → E → H | $f = \frac{1}{\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{2}{3} \Rightarrow F = 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$ |

Tablica 4.1: Pitagorino ugađanje - bijeli tonovi

Postupak ugađanja provesti ćemo na već dobro poznatoj C-dur ljestvici iz prethodnog poglavlja 3. Započinjemo od tona **C** za kojeg prema dogovoru postavljamo vrijednost frekvencije na 1. Ako se pomaknemo za vrijednost kvinte $\left(\frac{3}{2}\right)$ od početnog C dobivamo ton **G**. Pomaknemo se opet za vrijednost kvinte od G i dobivamo ton **d** čija je vrijednost $\left(\frac{3}{2}\right)^2$. Dobiveni ton d se nalazi izvan osnovnog intervala oktave koji obuhvaća interval od $C = 1$ do $c = 2$, stoga moramo transponirati ton d za oktavu niže. Dijelimo vrijednost tona d s 2 koja je vrijednost oktave i dobivamo traženi ton **D** čija je vrijednost $\frac{9}{8}$. Pomaknemo se ponovno za kvintu iznad tona D i dobivamo ton **A** čija je vrijednost $\frac{27}{16}$. Nastavljamo na isti način, pomaknemo se za kvintu iznad A i dobivamo ton **e** čija je vrijednost $\frac{81}{32}$. Dobivena vrijednost je kao i za prethodni ton d izvan intervala oktave, stoga snižavamo vrijednost za oktavu i dobivamo ton **E** čija je vrijednost $\frac{81}{64}$. Konačno ako se pomaknemo još za jednu kvintu iznad tona E dobivamo ton **H** čija je vrijednost $\frac{243}{128}$. Još nam preostaje jedan bijeli ton F. Ton F ne možemo dobiti dodatnim pomakom kvinte prema gore već se moramo spustiti za kvintu ispod tona C. Time dobivamo ton **f** čija je vrijednost $\frac{2}{3}$, za oktavu niža vrijednost. U ovom slučaju moramo povećati frekvenciju tona za oktavu. Navedeno postizemo

množenjem vrijednosti tona s 2 te konačno dobivamo ton **F** čija je vrijednost $\frac{4}{3}$. Jednostavniji prikaz postupka Pitagorina ugađanja bijelih tonova možemo pogledati u tablici 4.1.

Nakon što smo izgradili bijele tonove, preostali su nam još crni tonovi. Crne tonove dobivamo na jednak način kao i bijele. Pomaknemo se za kvintu ispod tona F i dobivamo ton **b** koji je za dvije oktave niži te ga podižemo za dvije oktave i dobivamo **B** čija je vrijednost $\frac{16}{9}$. Na jednak način dobivamo i **E \flat** čija je vrijednost $\frac{32}{27}$. Preostale crne tonove dobivamo pomakom određenog broja kvinti iznad tona H i odgovarajućeg broja pomaka za oktavu niže. Navedenim pomacima dobivamo **F \sharp** , **C \sharp** i **G \sharp** .

| Pitagorino ugađanje | |
|---|---|
| Pomak | Vrijednost |
| B ← F ← C → ... | $B = 2^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ |
| E\flat ← B ← F ← C → ... | $E\flat = 2^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{27}$ |
| ... ← C → G → D → A → E → H → F\sharp | $F\sharp = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \frac{729}{512}$ |
| ... ← C → G → D → A → E → H → F\sharp → C\sharp | $C\sharp = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7 = \frac{2187}{2048}$ |
| ... ← C → G → D → A → E → H → F\sharp → C\sharp → G\sharp | $G\sharp = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{6561}{4096}$ |

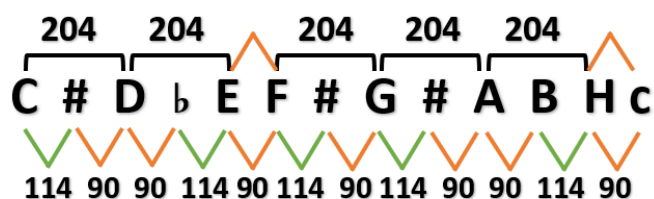
Tablica 4.2: Pitagorino ugađanje - crni tonovi

Zbog preciznijeg i lakšeg određivanja vrijednosti intervala uvodimo mjernu jedinicu **cent**. Ona predstavlja stoti dio polutona i njena vrijednost jednaka je $s = \sqrt[1200]{2}$. Vrijednosti izražene u centima dobivamo sljedećom formulom (4.1):

$$\log_s\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{\log\left(\frac{m}{n}\right)}{\log(s)} = 1200 \cdot \frac{\log\left(\frac{m}{n}\right)}{\log(2)} \quad (4.1)$$

| | | | | | | | | | | | | |
|---------------|---------------------|---------------|-----------------|-----------------|---------------|-------------------|---------------|---------------------|-----------------|----------------|-------------------|---------------|
| 0 | 114 | 204 | 294 | 408 | 498 | 612 | 702 | 816 | 906 | 996 | 1110 | 1200 |
| C | # | D | b | E | F | # | G | # | A | B | H | c |
| $\frac{1}{1}$ | $\frac{2187}{2048}$ | $\frac{9}{8}$ | $\frac{32}{27}$ | $\frac{81}{64}$ | $\frac{4}{3}$ | $\frac{729}{512}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{6561}{4096}$ | $\frac{27}{16}$ | $\frac{16}{9}$ | $\frac{243}{128}$ | $\frac{2}{1}$ |

Slika 4.1: Ugođena glazbena ljestvica s omjerima izraženim u centima



Slika 4.2: Prikaz cijelih tonova i polutonova ugođene glazbene ljestvice

Na slici 4.2 možemo vidjeti da dvanaesttonska skala dobivena ovom vrstom ugađanja ima dvije vrijednosti polutonova: 114 cent i 90 cent. Poluton čija je vrijednost **90 cent** ($\frac{256}{243}$) nazivamo **Pitagorin dijatonski poluton**, a poluton čija je vrijednost **114 cent** ($\frac{2187}{2048}$) nazivamo **Pitagorin apotom** [7].

Pitagorino ugađanje ima određene nedostatke. Naime, kvintu **G \sharp -e \flat** i kvartu **E \flat -G \sharp** koje smo dobili u posljednjem postupku dobivanja crnih tonova ne zvuče dobro. Podsjećaju nas na zavijanje vuka te ih stoga i nazivamo **vučji intervali**. Razlog je vidljiv i u samoj veličini intervala. Kvinte koje smo ugodili su savršene odnosno sastoje se od četiri dijatonska polutona i tri apotoma te iznose 702 cent. Interval vučje kvinte se sastoji od pet dijatonskih polutonova i dva apotoma te iznosi 678 cent. Kvarte dobivene ovim ugađanjem su također savršene i sastoje se od tri dijatonska polutona i dva apotoma te iznose 498 cent. Vučja kvarta se sastoji od dva dijatonska polutona i tri apotoma te iznosi 522 cent. Vučji intervali odstupaju od savršenih za **24 cent**. Tu razliku nazivamo **Pitagorin zarez** [7].

Još jedan nedostatak su nesavršene terce. Vrijednost intervala velike terce dobivene ovim ugađanjem iznosi 408 cent dok vrijednost intervala točne velike terce iznosi 386 cent. Ovo odstupanje iznosi **22 cent**. Ista razlika vrijedi i za malu tercu. Ovu razliku nazivamo **sintonički zarez** [7].

Iako jedna vučja kvinta i jedna vučja kvarta nisu savršene, ostale jesu. Iz tog razloga je Pitagorino ugađanje pogodno za glazbu u kojoj dominiraju kvinte i kvarte kao što je glazba skladana u antici i srednjem vijeku. Pitagorino ugađanje koristi temperiranje pri ugađanju jer odstupa od savršenih terci i seksti kako bi osiguralo savršene kvarte i kvinte.

4.3. Srednjetonsko temperiranje

Promjena povijesnih razdoblja utječe na način razmišljanja ljudi te se tako promijenio i pogled na ljepotu u glazbi. Pitagorino ugađanje, kao što smo već spomenuli, veliča savršene kvinte. U 15. st. glazbenici mijenjanju pogled na glazbenu ljepotu te se počinju sve više zanimati za savršenstvo terci. Pitagorino ugađanje ne može osigurati traženo savršenstvo, stoga se stvaraju nove vrste ugađanja.

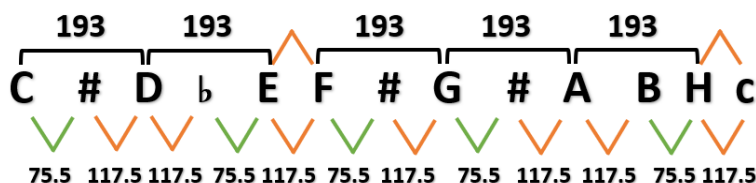
U baroku i renesansi uvedena je nova vrsta ugađanja pod nazivom **srednjetonsko temperiranje**. Osnovno načelo ove vrste ugađanja glasi: „*Sačuvati što više savršenih terci, čak i pod cijenu narušavanja kvinti.*“ [7]. Razlog tome je priroda tona. Tonovi u nesavršenoj terci s bliskim frekvencijama stvaraju vrlo neugodne udare za razliku od onih u nesavršenoj kvinti.

| Srednjetonsko temperiranje | |
|--|--|
| Pomak | Vrijednost |
| C | $C = 0 \text{ cent}$ |
| $C \rightarrow G$ | $G = 0 + 696.5 = 696.5 \text{ cent}$ |
| $C \rightarrow G \rightarrow D$ | $D = 2 \cdot 696.5 - 1200(\text{oktava}) = 193 \text{ cent}$ |
| $C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A$ | $A = 193 + 696.5 = 889.5 \text{ cent}$ |
| $C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E$ | $E = 889.5 + 696.5 - 1200 = 386 \text{ cent}$ |
| $C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H$ | $H = 386 + 696.5 = 1082.5 \text{ cent}$ |
| $F \leftarrow C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H$ | $F = 0 - 696.5 + 1200 = 503.5 \text{ cent}$ |
| $B \leftarrow F \leftarrow \dots$ | $B = 503.5 - 696.5 + 1200 = 1007 \text{ cent}$ |
| $E_b \leftarrow B \leftarrow F \leftarrow \dots$ | $E_b = 1007 - 696.5 = 310.5 \text{ cent}$ |
| $\dots \rightarrow H \rightarrow F\sharp$ | $F\sharp = 1082.5 + 696.5 - 1200 = 579 \text{ cent}$ |
| $\dots \rightarrow H \rightarrow F\sharp \rightarrow C\sharp$ | $C\sharp = 579 + 696.5 - 1200 = 75.5 \text{ cent}$ |
| $\dots \rightarrow H \rightarrow F\sharp \rightarrow C\sharp \rightarrow G\sharp$ | $G\sharp = 75.5 + 696.5 = 772 \text{ cent}$ |

Tablica 4.3: Srednjetonsko temperiranje

Ako se prisjetimo izgradnje glazbene ljestvice u Pitagorinom ugađanju, nakon četiri kvinte dobivamo nesavršenu tercu E. Razlika nesavršene od savršene terce iznosi 22 cent što predstavlja već spomenuti sintonički zarez. Postupak srednjetonskog temperiranja uzima u obzir sintonički zarez te skraćuje vrijednost

intervala kvinte za **5.5 cent** ($\frac{22 \text{ cent}}{4 \text{ kvinte}} = 5.5 \text{ cent}$) što mu omogućuje ostvarenje savršene terce. Postupak ugađanja potpuno je jednak Pitagorinom uz promjenu vrijednosti kvinte sa 702 cent na vrijednost 696.5 cent. Jednostavniji prikaz postupka srednjetskog temperiranja možemo pogledati u tablici 4.3.



Slika 4.3: Prikaz cijelih tonova i polutonova ugođene glazbene ljestvice

Naziv srednjetsko temperiranje izvedeno je iz položaja tona D koji se nalazi točno na sredini između tona C i velike terce E. Na slici 4.3 možemo uočiti dvije različite vrijednosti polutona: 75.5 i 117.5 cent. Poluton čija je vrijednost **117.5 cent** nazivamo **veliki dijatonski poluton**, dok poluton čija je vrijednost **75.5 cent** nazivamo **mali apotom** [7]. U ovom ugađanju također postoji vučja kvinta $G\sharp-e\flat$ koja iznosi 738.5 cent i razlikuje se za 42 cent od ugođene kvinte (696.5 cent, prihvatljiva). Razliku od **42 cent** nazivamo **Pitagorin zarez**.

Durski i molski trozvuk bili su prisutni u svim glazbenim djelima renesanse i baroka. **Durski trozvuk** čine *osnovni ton, velika terca i kvinta*, a **molski trozvuk** čini *osnovni ton, mala terca i kvinta* [7]. Iako srednjetsko temperiranje nastoji ostvariti što više savršenih i velikih i malih terci ipak pojedine terce koje iznose 428 cent odnosno 310.5 cent nisu savršene i ne zvuče ugodno. Ovim ugađanjem dobivamo osam (od dvanaest) ugodnih durskih trozvuka i osam (od dvanaest) ugodnih molskih trozvuka. Vučje kvinte i kvarte te četiri neugodna durska i četiri neugodna molska trozvuka su osnovni nedostaci srednjetskog temperiranja što ograničava transpozicije.

4.4. Dobro temperiranje

Od 17. do 19.st. započinje razvoj dobrih temperiranja. Nedostatak Pitagorina ugađanja i srednjetskog temperiranja bili su vučji intervali. **Dobro temperiranje** nastoji otkloniti ovaj nedostatak te omogućiti veću slobodu u postupcima transpozicije i modulacije.

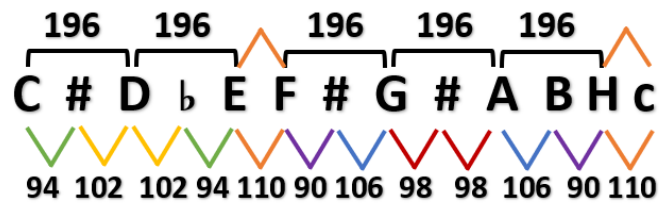
Andreas Werckmeister, njemački orguljaš i glazbeni teoretičar, pronalazi dobro rješenje za izgradnju ljestvica bez vučjih intervala. Kao i u srednjetonskom temperiranju želja je smanjiti vrijednosti intervala kvinte te tako postići veće savršenstvo intervala terce, ali ipak ostaviti pojedine intervale kvinte točnima kako bismo izbjegli stvaranje vučjih intervala.

| Dobro temperiranje | |
|--|--|
| Pomak | Vrijednost |
| C | $C = 0 \text{ cent}$ |
| $C \rightarrow G$ | $G = 0 + 698 = 698 \text{ cent}$ |
| $C \rightarrow G \rightarrow D$ | $D = 2 \cdot 698 - 1200(\text{oktava}) = 196 \text{ cent}$ |
| $C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A$ | $A = 196 + 698 = 894 \text{ cent}$ |
| $C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E$ | $E = 894 + 698 - 1200 = 392 \text{ cent}$ |
| $C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H$ | $H = 392 + 698 = 1090 \text{ cent}$ |
| $F \leftarrow C \rightarrow G \rightarrow D \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow H$ | $F = 0 - 698 + 1200 = 502 \text{ cent}$ |
| $B \leftarrow F \leftarrow \dots$ | $B = 502 - 702 + 1200 = 1000 \text{ cent}$ |
| $E_b \leftarrow B \leftarrow F \leftarrow \dots$ | $E_b = 1000 - 702 = 298 \text{ cent}$ |
| $\dots \rightarrow H \rightarrow F\sharp$ | $F\sharp = 1090 + 702 - 1200 = 592 \text{ cent}$ |
| $\dots \rightarrow H \rightarrow F\sharp \rightarrow C\sharp$ | $C\sharp = 592 + 702 - 1200 = 94 \text{ cent}$ |
| $\dots \rightarrow H \rightarrow F\sharp \rightarrow C\sharp \rightarrow G\sharp$ | $G\sharp = 94 + 702 = 796 \text{ cent}$ |

Tablica 4.4: Dobro temperiranje

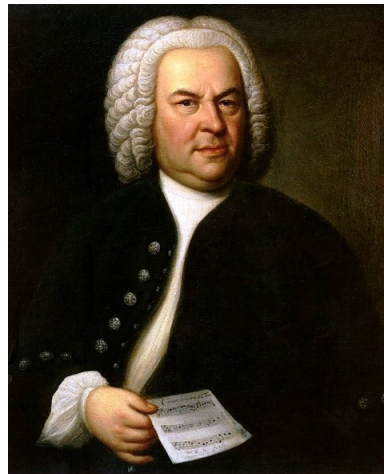
Jedan od postupaka ove vrste ugađanja određuje da vrijednosti intervala kvinte kojima izgrađujemo bijele tonove umanjimo za **4 cent** [7]. Ovo umanjenje proizlazi iz vrijednosti Pitagorina zarez (24 cent) koji kompenziramo odstupanjima u vrijednosti kvinte za dobivanje šest bijelih tonova ($\frac{24 \text{ cent}}{6 \text{ kvinti}} = 4 \text{ cent}$). S druge strane, za dobivanje crnih tonova ostavljamo točne vrijednosti intervala kvinte. Jednostavniji prikaz postupka možemo pogledati u tablici 4.4.

Na slici 4.4 možemo vidjeti glazbenu ljestvicu izgrađenu dobrim temperiranjem sa šest različitih vrijednosti polutonova. Ovako dobivena ljestvica sadrži prihvatljive vrijednosti terce i kvinte te nema vučje intervale.



Slika 4.4: Prikaz cijelih tonova i polutonova ugodene glazbene ljestvice

Već spomenuti trozvuci iz prethodnog podnaslova 4.3 dobiveni ovom vrstom ugađanja su prihvatljivi i međusobno različiti. Ova različitost unosi boju u tonalitete čiju specifičnost i ljepotu iskorištavaju brojni glazbenici u 19. st.



Slika 4.5: Johann Sebastian Bach oduševljen dobrim temperiranjem skladao zbirku preludija i fuga „*Wohltemperiertes Klavier*“¹

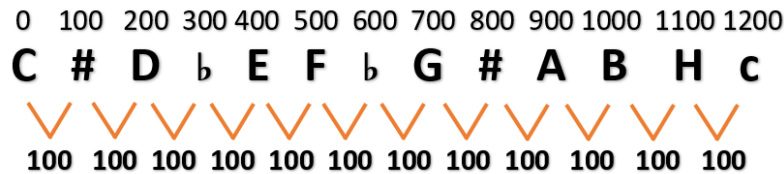
4.5. Jednoliko temperiranje

Jednoliko temperiranje otkriveno je u vrijeme primjene srednjetskog temperiranja. Ova vrsta temperiranja postigla je zavidnu i sveprisutnu primjenu tek u 20. st. zbog različitih težnji i ukusa glazbenika ovog povijesnog razdoblja.

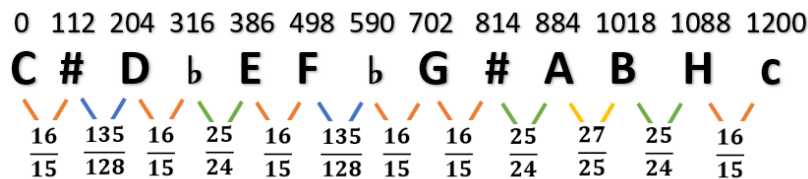
Jednoliko temperiranje je postupak izgradnje glazbene ljestvice u kojoj su vrijednosti intervala polutonova jednake [2]. Ako primijenimo ovaj postupak na

¹Portret J.S. Bach, E. Gottlob Haussmann, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Johann_Sebastian_Bach.jpg

našu dvanaestttonsku ljestvicu, onda slijedi da je oktava podijeljena na 12 jednakih polutonova. Znamo da oktava ima vrijednost 2 prema tome polutonu koji čine jednoliku dvanaestttonsku ljestvicu, imaju vrijednost $p = \sqrt[12]{2} = 1.06$. Kao što smo već ranije spomenuli, cent je stoti dio polutona odnosno vrijedi $s^{100} = p \Rightarrow s^{1200} = p^{12} \Rightarrow s = \sqrt[1200]{2} = 1.00058$. Na slici 4.6 možemo vidjeti ovako dobivenu ljestvicu s istim vrijednostima intervala polutonova od **100 cent**.



Slika 4.6: Jednoliko ugođena glazbena ljestvica s intervalima izraženim u cent



Slika 4.7: Glazbena ljestvica u prirodnoj intonaciji s intervalima izraženim u centima

Ako usporedimo jednoliko temperiranje s prirodnom intonacijom na slici 4.7, vidimo da su vrijednosti intervala sekunde, kvarte i kvinte gotovo jednake jer je odstupanje manje od prihvatljivih 10 cent. Najveća odstupanja od točnih intervala su prisutna u tercama, sekstama i septimama.

Iako se jednolikim ugađanjem narušava točnost pojedinih intervala, ono pokazuje vrlo bitno svojstvo – mogućnost **slobodnih transpozicija bez pogreške** [7]. U tablici 4.5 možemo vidjeti da pri pomaku u jednolikoj ljestvici dobivamo iste intervale polutonova, dok u tablici 4.6 možemo vidjeti da u prirodnoj intonaciji postoje pogreške pri pomaku.

| Jednoliko temperiranje → | | | | | | | |
|--------------------------|------------|------|-----------|-------------------|------------|-----------|-----------|
| C | C \sharp | D | E \flat | E | F | G \flat | G |
| 0 | 100 | 200 | 300 | 400 | 500 | 600 | 700 |
| | | | 0 | $400 - 300 = 100$ | 200 | 300 | 400 |
| → Jednoliko temperiranje | | | | | | | |
| G \sharp | A | B | H | c | c \sharp | d | e \flat |
| 800 | 900 | 1000 | 1100 | 1200 | 1300 | 1400 | 1500 |
| 500 | 600 | 700 | 800 | 900 | 1000 | 1100 | 1200 |

Tablica 4.5: Jednolika glazbena ljestvica - pomak iz C u Eb

| Prirodna intonacija → | | | | | | | |
|-----------------------|------------|------|------------|------------------|------------|------------|-----------|
| C | C \sharp | D | E \flat | E | F | G \flat | G |
| 0 | 112 | 204 | 316 | 386 | 498 | 590 | 702 |
| | | | 0 | $386 - 316 = 70$ | 182 | 274 | 386 |
| → Prirodna intonacija | | | | | | | |
| G \sharp | A | B | H | c | c \sharp | d | e \flat |
| 814 | 884 | 1018 | 1088 | 1200 | 1312 | 1404 | 1516 |
| 498 | 568 | 702 | 772 | 884 | 996 | 1088 | 1200 |

Tablica 4.6: Glazbena ljestvica u prirodnoj intonaciji - pomak iz C u Eb

Harmonici zvuka glazbala koja su jednoliko ugođena ne poklapaju se savršeno već postoje spomenuta odstupanja [6]. Navedena odstupanja može raspoznati određeni glazbeni stručnjak, no običan slušatelj ih ne može raspoznati. Velika podatnost ovako ugođenih ljestvica omogućuje još veće bogatstvo zvuka i ljepotu glazbenih djela. Jednolike ljestvice su danas sveprisutne i imaju veliku primjenu.

5. Značaj dvanaesttonske ljestvice

5.1. Savršenstvo dvanaesttonske raspodjele

U prethodnim poglavljima 3 i 4 govorili smo o intervalima i ugađanju glazbene ljestvice koja oktavu dijeli na dvanaest polutonova. Dvanaesttonska ljestvica je do danas najzastupljenija glazbena ljestvica u kojoj glazbenici skladaju svoja glazbene djela. Dvanaesttonska raspodjela oktave nije slučajno proglašena idealnom raspodjelom oktave, već postoje matematički temelji koji nam potvrđuju njen ideal.

Za početak prisjetimo se trzanja žice iz podnaslova 3.2. Spomenuli smo da napeta žica trzanjem proizvodi ton čiju frekvenciju određujemo kao jediničnu. Kad smo duljinu žice prepolovili i ponovno trznuli, ona je proizvela isti ton, ali za oktavu viši. Vrijednost frekvencije tako proizvedenog tona iznosi 2. Interval **[1,2]** nazivamo **osnovnim intervalom oktave**. Ako podijelimo duljinu žice na trećine, njenim trzanjem dobivamo kvintu čija vrijednost frekvencije iznosi 3. Nastavimo li s uzastopnom podjelom žice na trećine, tonovi koje proizvode trzaji takve žice stvaraju frekvencije oblika 3^b (b nenegativan cijeli broj) [3]. Kako bismo izgradili tonove unutar osnovnog intervala oktave, moramo podijeliti dobivene frekvencije s određenim potencijama broja 2. Potenciju broja 2 određuje broj oktava za koje su dobiveni tonovi viši od istih tonova u osnovnom intervalu.

Navedeni postupak podjele duljine žice na trećine odnosno stvaranje novih tonova može ići u beskonačnost. U stvarnosti ljestvica koja bi imala beskonačno mnogo tonova je nemoguća. Iz tog razloga moramo pronaći granicu koja određuje posljednji ton koji možemo generirati navedenim postupkom. Kao idealna granica nameće se generirani ton koji je jednak osnovnom tonu ($\frac{30}{20}$) od kojeg započinjemo postupak uz određene pomake za oktavu [3].

Navedeni problem određivanja granice možemo matematički postaviti na sljedeći način:

$$\frac{3^b}{2^a} = 1, \quad a, b \neq 0 \quad (5.1)$$

$$2^a = 3^b \quad (5.2)$$

Granica koju tražimo mora biti jednaka omjeru $\frac{a}{b}$ koji možemo izraziti na sljedeći način:

$$\log(2^a) = \log(3^b) \Rightarrow a \cdot \log(2) = b \cdot \log(3) \quad (5.3)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\log(3)}{\log(2)} = \log_2 3 \quad (5.4)$$

Nažalost, vrijednost ovako postavljenog omjera ne možemo točno odrediti jer broj $\log_2 3 \approx 1.584963$ je **iracionalan broj**. Iracionalnost broja $\log_2 3$ možemo provjeriti dokazom koji slijedi.

Dokaz iracionalnosti broja. Za početak pretpostavimo da je broj $\log_2 3$ racionalan broj, $\log_2 3 \in \mathbb{Q}$. Prema definiciji racionalnih brojeva, svaki racionalni broj možemo zapisati u obliku razlomka $\frac{a}{b}$ pri čemu su $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$.

Dakle,

$$\log_2 3 = \frac{a}{b}, \quad a, b \in \mathbb{N} \quad (5.5)$$

Ovu jednakost (5.5) možemo zapisati s pomoću sljedeće ekvivalentne jednakosti:

$$2^a = 3^b \quad (5.6)$$

Nova jednakost (5.6) ne može vrijediti jer je lijeva strana jednakosti uvijek paran broj, dok je desna strana jednakosti uvijek neparan broj. Iz navedenoga slijedi da je naša pretpostavka pogrešna te zaključujemo da je broj $\log_2 3$ iracionalan broj, $\log_2 3 \in \mathbb{I}$, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. ■

5.2. Verižni razlomci

Kako bismo objasnili matematički pojam verižnih razlomaka, uvodimo postupak pod nazivom Eudoksovo mjerenje. Zajednička mjera dviju veličina a_0 i a_1 jednaka je a , ako vrijedi $a_0 = n_0 \cdot a$ i $a_1 = n_1 \cdot a$, gdje su n_0 i n_1 neki cijeli brojevi. Ako zajednička mjera postoji onda omjer $\frac{a_0}{a_1} = \frac{n_0}{n_1}$ je cjelobrojni omjer te za veličine a_0 i a_1 kažemo da su **sumjerljive**. Ako pak s druge strane ne postoji zajednička mjera odnosno omjer veličina a_0 i a_1 je iracionalan broj, onda kažemo da su veličine **nesumjerljive**.

Eudoksovo mjerenje je postupak koji nam omogućuje pronalazak zajedničke mjere te omjera dviju sumjerljivih veličina u konačnom broju koraka [7]. Drugim riječima, ako je Eudoksovo mjerenje konačno, onda za veličine kažemo da su sumjerljive te je njihov omjer racionalan broj. Ako bismo primijenili navedeni postupak na dvije nesumjerljive veličine odnosno veličine čiji je omjer iracionalan broj, postupak nikada ne bi završio [7]. Navedeni postupak započinje oduzimanjem q_0 puta veličine a_1 od veličine a_0 [7]. q_0 je cijeli broj određen brojem umanjenja veličine a_1 od a_0 dok ne ostvarimo ostatak a_2 koji je manji od a_1 . Korak navedenog postupka možemo matematički prikazati na sljedeći način:

$$\begin{aligned} a_0 - q_0 \cdot a_1 &= a_2 \quad \text{odnosno} \\ \mathbf{a_0} &= \mathbf{q_0 \cdot a_1} + \mathbf{a_2}, \quad a_1 > a_2 \end{aligned} \tag{5.7}$$

Navedeni korak ponavljamo s ostvarenim ostacima dok ne ostvarimo a_k i $a_{k+1} = a$ za koje vrijedi:

$$\begin{aligned} a_k - q_k \cdot a_{k+1} &= 0, \quad \text{odnosno} \\ \mathbf{a_k} &= \mathbf{q_k \cdot a}, \quad a_{k+1} = a \end{aligned} \tag{5.8}$$

Cijeli postupak Eudoksova mjerenja koji završava u konačnom broju koraka, možemo pogledati u tablici 5.1. Ako malo bolje razmislimo i promotrimo Eudoksov postupak, onda možemo primijetiti da nas navedeni postupak podsjeća na jedan vrlo značajan algoritam u matematici. Naime, radi se o Euklidovom algoritmu koji nam omogućuje pronalazak najvećeg zajedničkog djelitelja (NZD ili M) dvaju cijelih brojeva (*npr.* $M(96, 56) = ?$ $96 = 1 \cdot 56 + 40 \rightarrow 56 = 1 \cdot 40 + 16 \rightarrow 40 = 2 \cdot 16 + 8 \rightarrow 16 = 2 \cdot 8 + 0 \Rightarrow M(96, 56) = M(56, 40) = M(40, 16) = M(16, 8) = 8$).

| Eudoksovo mjerenje | | |
|-----------------------------------|-------------|------------------|
| $a_0 = q_0 \cdot a_1 + a_2$ | $a_1 > a_2$ | |
| $a_1 = q_1 \cdot a_2 + a_3$ | $a_2 > a_3$ | $q_1 \geq 1$ |
| $a_2 = q_2 \cdot a_3 + a_4$ | $a_3 > a_4$ | $q_2 \geq 1$ |
| . . . | | |
| $a_{k-1} = q_{k-1} \cdot a_k + a$ | $a_k > a$ | $q_{k-1} \geq 1$ |
| $a_k = q_k \cdot a$ | | $q_k \geq 2$ |

Tablica 5.1: Eudoksov postupak s konačnim brojem koraka

Provedbom Eudoksova postupka do kraja možemo lako utvrditi da je a uistinu zajednička mjera početnih veličina a_0 i a_1 . Rezultate mjerenja prikazat ćemo u obliku omjera, što je vidljivo u tablici 5.2.

| Eudoksovo mjerenje | | |
|---|-------------|------------------|
| $\frac{a_0}{a_1} = q_0 + \frac{a_2}{a_1}$ | $a_1 > a_2$ | |
| $\frac{a_1}{a_2} = q_1 + \frac{a_3}{a_2}$ | $a_2 > a_3$ | $q_1 \geq 1$ |
| $\frac{a_2}{a_3} = q_2 + \frac{a_4}{a_3}$ | $a_3 > a_4$ | $q_2 \geq 1$ |
| . . . | | |
| $\frac{a_{k-1}}{a_k} = q_{k-1} + \frac{a}{a_k}$ | $a_k > a$ | $q_{k-1} \geq 1$ |
| $\frac{a_k}{a} = q_k$ | | $q_k \geq 2$ |

Tablica 5.2: Eudoksov postupak s konačnim brojem koraka izraženim u omjerima

Konačno, možemo iskoristiti prikaz u omjerima iz tablice 5.2 te postaviti naš početni problem, određivanja zajedničke mjere veličina a_0 i a_1 , na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 \frac{a_0}{a_1} &= q_0 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}} = \dots = \\
 &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{q_{k-1} + \frac{1}{q_k}}}}}
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Razlomak (5.9) prikazuje tzv. **verižni razlomak** koji je rezultat Eudoksova mjerenja [7]. Ako je omjer $\frac{a_0}{a_1}$ racionalan broj onda kažemo da je *verižni razlomak konačan*. Ako je omjer $\frac{a_0}{a_1}$ iracionalan broj onda kažemo da je *verižni razlomak beskonačan*. Razlomak 5.10 prikazuje beskonačni verižni razlomak.

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{a_1} &= q_0 + \frac{1}{\frac{a_1}{a_2}} = q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{\frac{a_2}{a_3}}} = \dots = \\ &= q_0 + \frac{1}{q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{\ddots}}} \end{aligned} \tag{5.10}$$

q_i iz formule (5.10) nazivamo količnicima te verižne razlomke jednostavnije zapisujemo:

$$x = \frac{a_0}{a_1} = [q_0; q_1, q_2, \dots] \tag{5.11}$$

Ako po dijelovima promatramo verižni razlomak, kako slijedi:

$$x_0 = [q_0], \quad x_1 = [q_0; q_1], \quad x_2 = [q_0; q_1, q_2], \quad \dots \tag{5.12}$$

onda navedene brojeve x_i nazivamo **racionalnim aproksimacijama** broja x . Vrijednosti ovih aproksimacija su jednake:

$$x_0 = \frac{m_0}{n_0} = \frac{q_0}{1}, \quad x_1 = \frac{m_1}{n_1} = \frac{q_1 \cdot q_0 + 1}{q_1}, \quad x_2 = \frac{m_2}{n_2} = \frac{q_2 \cdot (q_1 \cdot q_0 + 1) + q_0}{q_2 \cdot q_1 + 1}, \quad \dots \tag{5.13}$$

Ako uvedemo $x_{-1} = \frac{m_{-1}}{n_{-1}} = \frac{1}{0}$ i $x_{-2} = \frac{m_{-2}}{n_{-2}} = \frac{0}{1}$ onda za iznose aproksimacija vrijedi sljedeće:

$$\frac{m_0}{n_0} = \frac{q_0 \cdot m_{-1} + m_{-2}}{q_0 \cdot n_{-1} + n_{-2}}, \quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{q_1 \cdot m_0 + m_{-1}}{q_1 \cdot n_0 + n_{-1}}, \quad \frac{m_2}{n_2} = \frac{q_2 \cdot m_1 + m_0}{q_2 \cdot n_1 + n_0}, \quad \dots \tag{5.14}$$

U općem slučaju vrijednosti aproksimacija možemo iskazati na sljedeći način:

$$x_k = \frac{m_k}{n_k} = \frac{q_k \cdot m_{k-1} + m_{k-2}}{q_k \cdot n_{k-1} + n_{k-2}} \tag{5.15}$$

5.3. Iracionalnost broja $\log_2 3$

U prethodnom podnaslovu 5.1 zaključili smo da je broj $\log_2 3 \approx 1.584963$ iracionalan broj te da ne možemo odrediti njegovu točnu vrijednost, što nam omogućuje pronalazak točne granice u postupku izgradnje glazbene ljestvice. Kao rješenje ovog problema možemo iskoristiti aproksimaciju vrijednosti broja $\log_2 3$. Verižni razlomci, koje smo prethodno definirali, omogućuju nam najbolju racionalnu aproksimaciju vrijednosti iracionalnog broja.

Iracionalni broj $\log_2 3$ možemo prikazati verižnim razlomkom na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
 \log_2 3 &= \frac{\log(3)}{\log(2)} = \frac{\log(2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3)}{\log(2)} = \frac{\log(2) + \log(\frac{3}{2})}{\log(2)} = 1 + \frac{\log(\frac{3}{2})}{\log(2)} = 1 + \frac{1}{\frac{\log(2)}{\log(\frac{3}{2})}} = \\
 &= 1 + \frac{1}{\frac{\log(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2)}{\log(\frac{3}{2})}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{\log(\frac{4}{3})}{\log(\frac{3}{2})}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\log(\frac{3}{2})}{\log(\frac{4}{3})}}} = \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\log(\frac{4}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2})}{\log(\frac{4}{3})}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{\log(\frac{9}{8})}{\log(\frac{4}{3})}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\log(\frac{4}{3})}{\log(\frac{9}{8})}}}} = \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{\log((\frac{9}{8})^2 \cdot (\frac{8}{9})^2 \cdot \frac{4}{3})}{\log(\frac{9}{8})}}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{\log(\frac{256}{243})}{\log(\frac{9}{8})}}}}} = \dots = \\
 &= 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \dots}}}}}}}
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Verižni razlomak (5.16) je **beskonačan** jer je broj $\log_2 3$ iracionalan broj.

Ovaj verižni razlomak možemo kraće zapisati u sljedećem obliku:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= [1; 1, 1, 2, 2, 3, 1, \dots] \\ x &= [x_0; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots] \end{aligned} \tag{5.17}$$

Ovako dobiveni verižni razlomak rastavljamo na manje racionalne aproksimacije. Izračun vrijednosti pojedinih aproksimacija provodimo pomoću verižnog razlomka uz ograničenje dubine ili pomoću formule (5.15) iz prethodnog podnaslova. Primjerice za vrijednost $x = [1; 1, 1, 2, 2]$ vrijedi sljedeće:

$$\frac{m_2}{n_2} = \frac{3}{2} \quad \frac{m_3}{n_3} = \frac{8}{5} \quad x_4 = \frac{m_4}{n_4} = \frac{2 \cdot 8 + 3}{2 \cdot 5 + 2} = \frac{19}{12} \tag{5.18}$$

Ili pomoću verižnog razlomka s ograničenjem dubine:

$$x_4 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{\frac{12}{7}} = \frac{19}{12} \approx 1.583333 \tag{5.19}$$

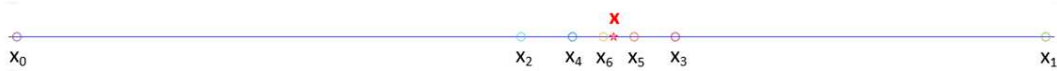
U tablici 5.3 možemo pogledati prvih sedam aproksimacija broja $\log_2 3$.

| Aproksimacije broja $\log_2 3$ | | |
|--------------------------------|-----------------------|-----------------|
| x_0 | [1] | 1 |
| x_1 | [1, 1] | 2 |
| x_2 | [1, 1, 1] | $\frac{3}{2}$ |
| x_3 | [1, 1, 1, 2] | $\frac{8}{5}$ |
| x_4 | [1, 1, 1, 2, 2] | $\frac{19}{12}$ |
| x_5 | [1, 1, 1, 2, 2, 3] | $\frac{65}{41}$ |
| x_6 | [1, 1, 1, 2, 2, 3, 1] | $\frac{84}{53}$ |
| . . . | | |

Tablica 5.3: Prvih sedam aproksimacija broja $\log_2 3$

Sljedeći korak je izabrati najbolju aproksimaciju među dobivenim racionalnim aproksimacijama. Pritom moramo uzeti u obzir i njenu mogućnost primjene u

glazbenoj teoriji. Ako pogledamo poredane aproksimacije broja x prema njihovoj vrijednosti na brojevnom pravcu 5.1, možemo primijetiti dva važna svojstva. Kako rastu parne aproksimacije tako rastu i njihove vrijednosti, dok rastom neparnih aproksimacija pada njihova vrijednost. Drugo važno svojstvo jest općenito povećanje točnosti s povećanjem aproksimacije [7]. Veće aproksimacije se približavaju broju x na brojevnom pravcu.



Slika 5.1: Brojevni pravac sa raspoređenim aproksimacijama oko $x = \log_2 3$

Vodeći se uvjetom izbora najbolje, a ujedno i primjenjive aproksimacije izabiremo aproksimaciju $\frac{19}{12}$ kao optimalnu aproksimaciju broja $\log_2 3 \approx 1.584963$ [3]. Aproksimacija $\frac{65}{41} \approx 1.585366$ je bolja aproksimacija broja x nego izabranih $\frac{19}{12} \approx 1.583333$, no ona sa svojih 41 tonova u oktavi nije prikladna za upotrebu u glazbi.

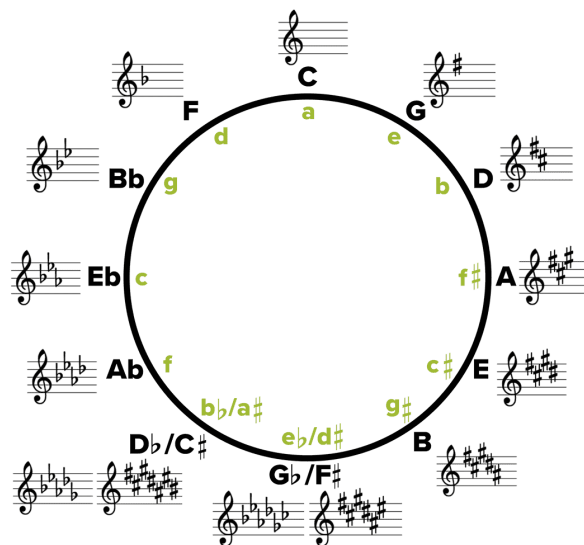
Izabrana aproksimacija $\frac{19}{12}$ izgrađuje ljestvicu s frekvencijama koje su potencije broja 3 te se aproksimacijski gledano nakon 12 koraka vraća na osnovni ton. Ovako izabrana ljestvica predstavlja već dobro poznatu dvanaesttonsku ljestvicu s točnim kvintama i kvartama osim jedne kvinte i kvarte koje odstupaju od točnih vrijednosti intervala. Iz svega navedenoga možemo zaključiti da je dvanaesttonska ljestvica uistinu idealna ljestvica u glazbi. Prikaz izabrane ljestvice s uzlaznim omjerima frekvencija možemo pogledati na slici 5.2.

| | | | | | | | | | | | | |
|-------------------|----------------------|-------------------|----------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|-------------------|----------------------|-------------------|-------------------------|-------------------|----------------------|
| C | # | D | b | E | F | # | G | # | A | B | H | c |
| $\frac{3^0}{2^0}$ | $\frac{3^7}{2^{11}}$ | $\frac{3^2}{2^3}$ | $\frac{3^9}{2^{14}}$ | $\frac{3^4}{2^6}$ | $\frac{3^{11}}{2^{17}}$ | $\frac{3^6}{2^9}$ | $\frac{3^1}{2^1}$ | $\frac{3^8}{2^{12}}$ | $\frac{3^3}{2^4}$ | $\frac{3^{10}}{2^{15}}$ | $\frac{3^5}{2^7}$ | $\frac{3^0}{2^{-1}}$ |

Slika 5.2: Dvanaesttonska ljestvica s omjerima frekvencija

Na slici 5.3 možemo vidjeti tzv. *kvintni krug*. Kvintni krug predstavlja vizualizaciju dvanaesttonske ljestvice pri čemu su tonovi ljestvice organizirani u niz savršenih kvinti. U vizualizaciji koristimo krug jer nizom kvintnih pomaka od

osnovnog tona C ponovno dolazimo do tona C te pritom ostvarujemo sve to-
 nove dvanaesttonske ljestvice. Pomaci u smjeru kazaljke na satu predstavljaju
 povišenje tona za kvintu, a pomaci u smjeru obrnutom od kazaljke na satu pred-
 stavljaju sniženje tona za kvintu. Također ukoliko promotrimo pomak u smjeru
 i u obrnutom smjeru od kazaljke na satu, primjećujemo da se pomak može raz-
 matirati kao sniženje odnosno povišenje tona za kvartu. Uloga kvintnog kruga je
 jednostavno razumijevanje harmonije, mogućnosti transpozicije tonova, odnosa
 između tonova i akorda te prikaz zapisa glazbenih ključeva u durskom (tonovi
 izvan kruga) i molaskom (tonovi unutar kruga) tonalitetu.



Slika 5.3: Kvintni krug

Osim dvanaesttonske ljestvice, među aproksimacijama iz tablice 5.3 možemo
 uočiti još jednu poznatu ljestvicu koja se koristila kroz povijest. Aproksimacija
 $\frac{8}{5} = 1.6$ izgrađuje ljestvicu sastavljenu od pet tonova koju nazivamo pentatonska
 ljestvica [3]. Prikaz pentatonske ljestvice s uzlaznim omjerima frekvencija mo-
 žemo pogledati na slici 5.4.

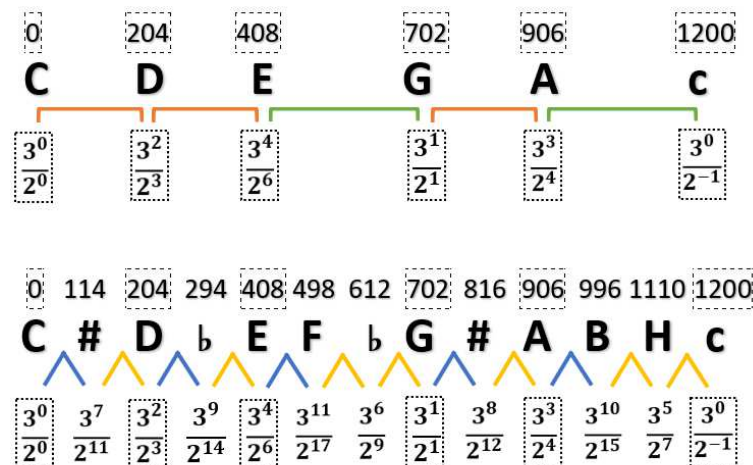
| | | | | | |
|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|----------------------|
| C | D | E | G | A | c |
| $\frac{3^0}{2^0}$ | $\frac{3^2}{2^3}$ | $\frac{3^4}{2^6}$ | $\frac{3^1}{2^1}$ | $\frac{3^3}{2^4}$ | $\frac{3^0}{2^{-1}}$ |

Slika 5.4: Pentatonska ljestvica s omjerima frekvencija

5.4. Svojstvo dva koraka

Važno svojstvo glazbenih ljestvica koje proizlaze iz aproksimacija broja $\log_2 3$ verižnim razlomcima nazivamo „**svojstvo dva koraka**“. Navedeno svojstvo kaže da postoje točno dva različita omjera frekvencija između uzastopnih tonova glazbene ljestvice [3].

Svojstvo dva koraka smatramo prednošću kod ljestvica koje ga posjeduju. Naime, ono im omogućuje slobodne transpozicije tonova gore ili dolje u visini tona bez značajnijeg narušavanja izvorne melodije [3]. Ipak, jednoliko temperirana ljestvica posjeduje savršenije svojstvo, tzv. *svojstvo jednog koraka* koje joj omogućuje potpunu slobodu transpozicije tonova bez narušavanja izvorne melodije. Ljestvice koje ne posjeduju niti jedno od navedenih svojstava odnosno sadrže različite korake između uzastopnih tonova, prilikom transpozicije tonova mogu uvelike promijeniti melodiju i narušiti ljepotu djela.



Slika 5.5: Postupak izgradnje dvanaesttonske ljestvice iz pentatonske ljestvice svojstvom dva koraka

Slika 5.5 ilustrativno prikazuje svojstvo dva koraka na primjeru izgradnje prethodno definirane dvanaesttonske ljestvice sa slike 5.2 iz pentatonske ljestvice sa slike 5.4. Umnoškom omjera frekvencija prethodnog tona dvanaesttonske ljestvice s jednom od vrijednosti $\frac{3^7}{2^{11}}$ (**114 cent**) ili $\frac{3^{-5}}{2^{-8}}$ (**90 cent**) dolazimo do omjera frekvencija sljedećeg tona [3]. Upravo definirane vrijednosti predstavljaju dva moguća koraka između uzastopnih tonova dvanaesttonske ljestvice.

Ovim primjerom pretvorbe ljestvice s pet tonova u ljestvicu s dvanaest tonova koristeći samo dva različita koraka, tj. omjera frekvencija pokazujemo prisutnost svojstva dva koraka kod ovih ljestvica.

6. Krivulja disonancije

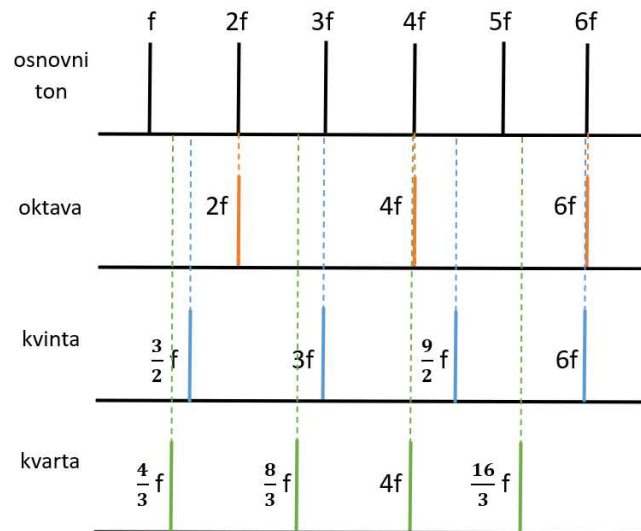
6.1. Konsonantnost i disonantnost tonova

U glazbenoj teoriji za interval kažemo da je **konsonantan** (skladan, suglasan) ako ga čovjek percipira ugodnim i opuštajućim. Također konsonantni intervali gotovo da ne posjeduju glazbenu napetost te nisu skloni promjenama. Suprotnost konsonantnih intervala su **disonantni** intervali. Ove intervale percipiramo kao neugodne i grube intervale. Za razliku od konsonantnih intervala, disonantni intervali su napeti i zvuče kao da su nerazriješeni [1].

U podnaslovu 3.2 spomenuli smo Pitagorin *zakon malih brojeva* („Dva tona zvuče konsonantno, ako im se frekvencije nalaze u omjeru malih prirodnih brojeva.“), no nismo objasnili zašto ovaj zakon uistinu vrijedi.

Galileo Galilei je pokušao u 16. st. objasniti zakon malih brojeva. Slika 6.1 nam prikazuje usporedbu osnovnog tona s oktavom, kvintom i kvartom. Okomite linije predstavljaju više harmonike tonova koji proizlaze iz temeljne frekvencije. Ako usporedimo harmonike osnovnog tona i oktave te njihove frekvencije onda uočavamo da se svi harmonici koje posjeduje oktava međusobno poklapaju s harmonicima koje posjeduje osnovni ton. Oktava ne posjeduje dodatne frekvencije. Navedeno poklapanje percipiramo kao da su oktava i osnovni ton u potpunom suglasju. Kvinta, s druge strane, posjeduje polovicu vlastitih frekvencija, a preostale se poklapaju s osnovnim tonom. Ovakvo poklapanje percipiramo kao da su kvinta i osnovni ton u polu potpunom suglasju. I na kraju, kvarta posjeduje čak dvije trećine vlastitih frekvencija, a ostalih jednu trećinu se poklapa s osnovnim tonom. U ovom slučaju, kvartu i osnovni ton percipiramo kao da se radi o trećini potpunog suglasja. Navedeni slijed mogli bismo nastaviti i s preostalim intervalima. Galileo Galilei je smatrao da upravo navedeno poklapanje harmonika objašnjava Pitagorin zakon malih brojeva [7]. Navedeno objašnjenje ipak nije u

potpunosti primjenjivo jer postoje tzv. jednostavni tonovi koji ne sadrže više harmonike. Jednostavni tonovi bi prema objašnjenju bili međusobno disonantni jer im se frekvencije ne poklapaju, što u stvarnosti nije istina [7].

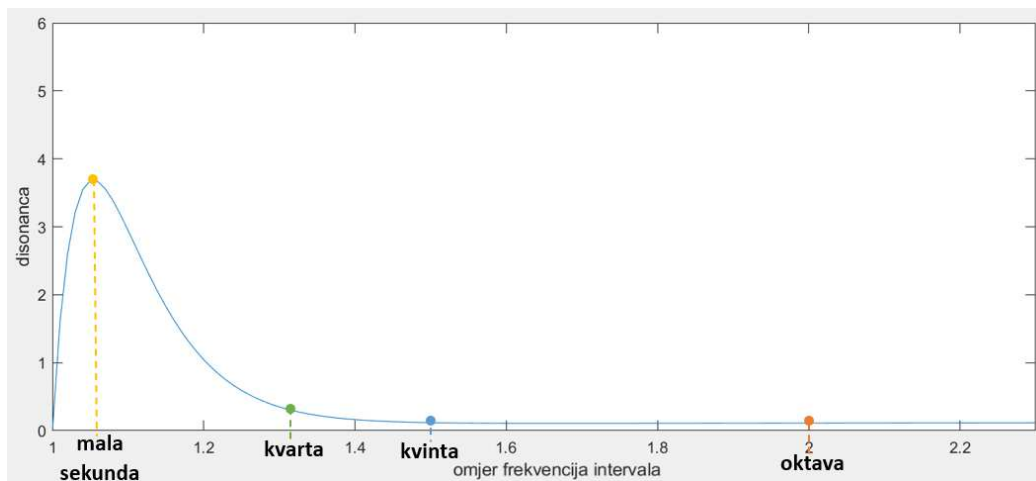


Slika 6.1: Usporedba alikvotnih tonova (harmonika) oktave, kvinte i kvarte s alikvotama osnovnog tona

H. Helmholtz nudi novo fiziološko objašnjenje konsonancije. Svoje objašnjenje temelji na već spomenutoj pojavi udara koji se javljaju pri bliskim frekvencijama dvaju tonova. Udari se usporavaju kako se frekvencije dvaju tonova približavaju. Kada se frekvencije tonova izjednače onda udari nestaju [1]. To je ujedno i razlog zašto spore ritmove percipiramo kao ugodni vibrato dok brže ritmove percipiramo grubima i neugodnima. Iz svega navedenog proizlazi zaključak da je nesuglasje dvaju tonova uzrokovano brzim udarima različitih komponenti sinusnog vala. Drugim riječima, konsonancija je odsutnost disonantnih udara. Ovo objašnjenje također nije bilo u potpunosti primjenjivo jer bi onda moralo vrijediti da su dovoljno udaljeni jednostavni tonovi sigurno konsonantni, što ponovno u stvarnosti ne mora vrijediti. Primjerice, interval tritonus, poznatiji kao „vražji interval“, je interval koji se nalazi točno na polovici savršene oktave te ga percipiramo kao vrlo disonantni interval. Smatra se da je razlog tako visoke disonantnosti njegova pozicija u glazbenoj ljestvici. Naime, smješten je između savršene kvarte i kvinte. S druge strane, interval velike terce koji je bliži osnovnom tonu u glazbenoj ljestvici nego tritonus, percipiramo puno manje disonantnim intervalom.

6.2. Plomp i Levelt

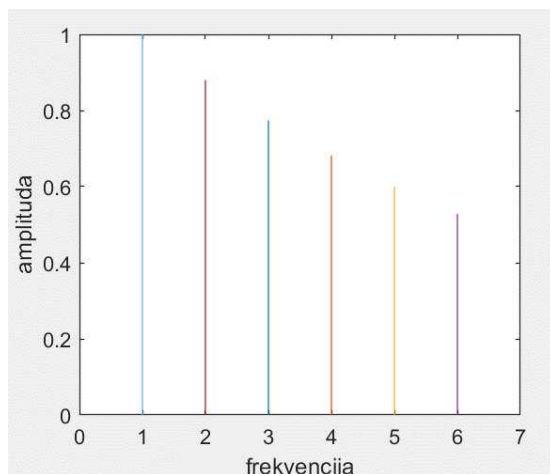
R. Plomp i W. Levelt proveli su eksperimentalno ispitivanje konsonancije. U eksperimentu su sudjelovali ispitanici čiji je zadatak bio ocijeniti konsonantnost generiranih parova sinusnih valova [1]. Iako su rezultati eksperimenta bili varijabilni, ipak se istaknula jasna sklonost. Unisoni tonovi, tj. tonovi s jednakom frekvencijom ocijenjeni su maksimalnom konsonancijom. Povećanjem intervala raste disonantnost odnosno pada konsonantnost intervala dok ne dostigne minimum konsonantnosti. Nakon toga slijedi ponovno povećanje konsonancije, ali nikada ne dostiže vrijednost konsonancije početnih unisonih tonova.



Slika 6.2: Relativna krivulja disonancije s istaknutim intervalima

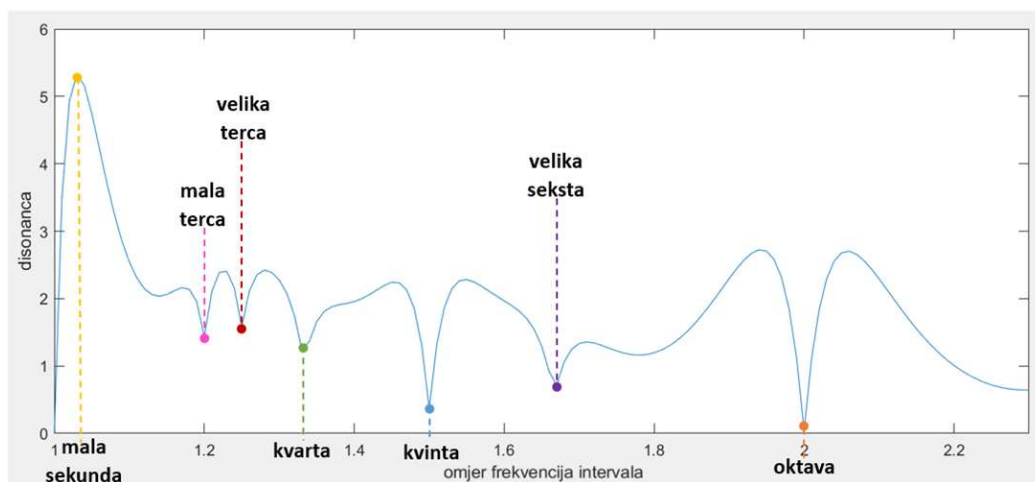
Na slici 6.2 možemo vidjeti relativnu krivulju disonancije. Uočavamo početni nagli rast disonantnosti do maksimuma te zatim nagli pad prema nuli. Također vidljivo je da krivulja više nikada ne dostiže vrijednost nula. Ovakva relativna krivulja disonancije nam prikazuje općeniti odnos konsonantnih i disonantnih intervala, no na krivulji nisu vidljivi nikakvi posebni padovi disonantnosti u određenim intervalima.

Plomp i Levelt nastavljaju s daljnjim istraživanjem. Razmišljaju kako glazbeni tonovi zapravo posjeduju cijeli spektar viših harmonika ili alikvotnih tonova koji se pojavljuju na cjelobrojnim višekratnicima temeljne frekvencije. Taj spektar određuje već spomenutu boju tona.



Slika 6.3: Obojeni ton sa šest viših harmonika

Na slici 6.3 je prikazan ton sa svojih šest viših harmonika. Vidimo da intenziteti viših harmonika padaju s višekratnikom temeljne frekvencije. Ako bismo takav obojeni ton propustili u različitim intervalima, onda izračun disonance intervala možemo provesti zbrajanjem svih disonanci između svih parova viših harmonika. Ovim izračunom dobivamo **krivulju disonancije**. Navedenu krivulju možemo pogledati na slici 6.4.



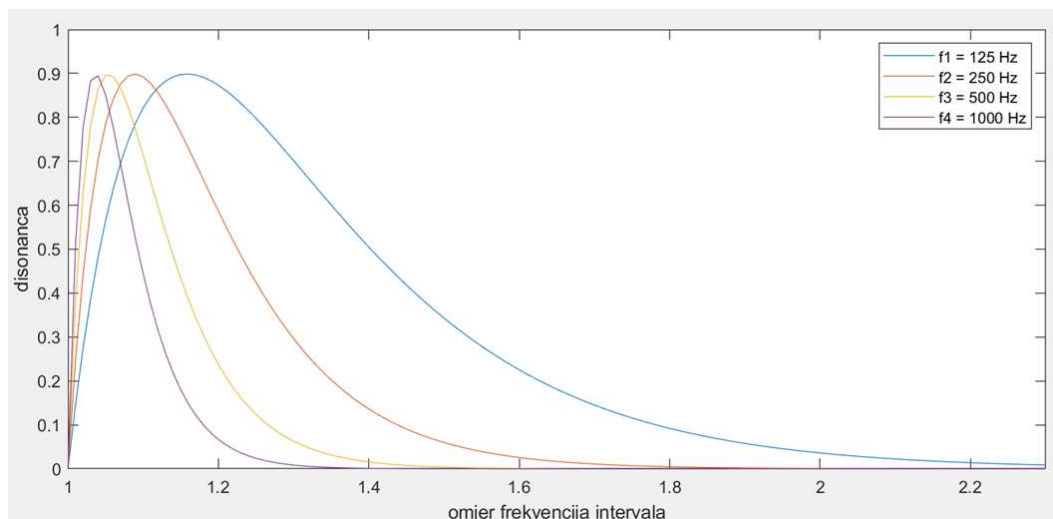
Slika 6.4: Krivulja disonancije s istaknutim intervalima

Krivulja disonancije konačno prikazuje velike padove krivulje u točnim intervalima. Vidimo da je najkonsonantniji interval i dalje unison, a slijede ga oktava, kvinta, kvarta, velika terca, velika seksta i mala terca. Iz konstruirane krivulje disonancije slijedi da ljudsko uho percipira intervale u **točkama lokalnih minimuma** konsonantnim. Iz navedenog zaključka slijedi osnovno načelo lokalne

konsonancije koje kaže: „Za boju tona i ljestvicu kažemo da su povezani ako boja tona stvara krivulju disonancije čiji se lokalni minimumi pojavljuju na točnim intervalima glazbene ljestvice.“ [1]. Ovime je konačno objašnjen Pitagorin zakon malih brojeva.

6.3. Izračun krivulje disonancije

U prethodnom podnaslovu 6.2 prikazali smo relativnu krivulju disonancije tzv. *Plomp-Levelt krivulju*. Iz grafa krivulje zaključili smo kako je krivulja previše općenita i ne ističe konsonantnost određenih intervala. Iz tog je razloga glazbeni stručnjaci nazivaju krivuljom *osjetilne disonancije*. Ipak, Plomp-Levelt krivulja nam je omogućila prepoznavanje točke maksimalne osjetilne disonancije te njenu povezanost s propusnošću našeg uha koja nam je bitna za izračun krivulje disonancije obojenog tona. Na slici 6.5 možemo vidjeti četiri relativne krivulje disonancije s četiri različite temeljne frekvencije. Iz grafa sa slike 6.5 uočavamo da se položaj vrha krivulje disonancije mijenja ovisno o temeljnoj frekvenciji tona. Vrhovi krivulje su širi na nižim temeljnim frekvencijama nego na višim frekvencijama. Navedeno uistinu vrijedi jer intervali koji su donekle konsonantni u visokim frekvencijama, postaju vrlo disonantni na niskim frekvencijama. Ako primjerice odsviramo veliku tercu u visokoj frekvenciji ona će zvučati vrlo jasno i glatko, dok ako istu tercu odsviramo u niskoj frekvenciji ona će zvučati dosta grubo.



Slika 6.5: Relativne krivulje disonancije različitih temeljnih frekvencija

Postoji nekoliko matematičkih modela za izračun krivulje disonancije. U nastavku ćemo pratiti i definirati model krivulje disonancije prema knjizi *W. A. Sethares: Tuning, Timbre, Spectrum, Scale* [2]. Model krivulje disonancije definiran ovom knjigom je najčešće citirani model krivulje disonancije i vrlo je jednostavan za razumijevanje te ga stoga smatramo prikladnim za ovaj završni rad.

Za početak je potrebno modelirati relativnu krivulju disonancije (Plomp-Levelt krivulju). Krivulju možemo matematički modelirati sljedećom formulom [2]:

$$d(x) = e^{-ax} - e^{-bx} \quad (6.1)$$

U formuli (6.1), argument x predstavlja apsolutnu razliku između frekvencija dvaju sinusnih valova. Konstante $a = 3.5$ i $b = 5.75$ definiraju stope pri kojima funkcija disonancije raste i pada [2]. Vrijednosti konstanti su određene uz pomoć gradijenta minimizacije kvadratne razlike prosječnih podataka i krivulje $d(x)$, kako je navedeno u knjizi *W. A. Sethares* [2].

Ako razmatramo dva sinusna vala različitih temeljnih frekvencija, jedan frekvencije f_1 i amplitude A_1 te drugi frekvencije f_2 ($f_1 < f_2$) i amplitude A_2 onda funkciju disonancije možemo definirati na sljedeći način [2]:

$$d(f_1, f_2, A_1, A_2) = A_{12} \cdot [e^{-as(f_2-f_1)} - e^{-bs(f_2-f_1)}] \quad (6.2)$$

Parametar s iz formule (6.2) omogućuje funkciji interpolaciju između krivulja na slici 6.5 tako da se maksimum disonancije poklopi na odgovarajućoj frekvenciji. Parametar s definiramo kao [2]:

$$s = \frac{x_{max}}{s_1 f_1 + s_2} \quad (6.3)$$

$x_{max} = 0.24$ iz formule (6.3) predstavlja točku maksimalne vrijednosti disonancije koju izravno izvodimo iz početne formule (6.1) ($\frac{d}{dx}d(x) = 0 \Rightarrow x_{max} = \frac{\ln(\frac{a}{b})}{a-b}$) [2]. Parametri s_1 i s_2 određeni su metodom najmanjih kvadrata, kako navode u knjizi te su njihove vrijednosti jednake $s_1 = 0.021$ i $s_2 = 19$ [2]. Amplitudu A_{12} iz formule (6.2) računamo kao minimum između dviju amplituda ($A_{12} = \min(A_1, A_2)$) kako bismo osigurali da manje amplitude manje utječu

na ukupnu disonancu nego one veće.

Promotrimo obojeni (složeni) ton T koji osim temeljne frekvencije f_1 posjeduje i niz viših frekvencija koje zajedno čine skup od n sinusnih valova frekvencija $f_1 < f_2 < f_3 < \dots < f_n$ te amplituda A_j za $j = 1, 2, 3, \dots, n$. Općenito, disonancu obojenog tona T možemo izračunati zbrajanjem vrijednosti disonance svih parova harmonika. Općenitu formulu možemo zapisati na sljedeći način (*u formuli množimo s $\frac{1}{2}$ zbog ponovljenih parova frekvencija*) [2]:

$$D_T = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d(f_i, f_j, A_i, A_j) \quad (6.4)$$

Ovu disonancu još nazivamo i **inherentna** ili **intrinzična disonanca** tona T .

Kako bismo odredili krivulju disonancije obojenog tona T koji se proteže kroz sve osnovne intervale, moramo razmotriti jedno svojstvo. Naime, zamislimo dva tona s jednakom bojom kao obojeni ton T odnosno s istim spektrom harmonika, koje sviramo istovremeno u intervalu α . Rezultantni zvuk će imati vrijednost disonance jednaku vrijednosti disonance jednostavnog tona s frekvencijama f_i i αf_i . Iz navedenoga slijedi da vrijednost disonance između intervala možemo izračunati slično kao u formuli (6.4) vrijednost disonance izoliranih tonova. Konačno, ako definiramo ton αT čiji spektar sadrži skup od n frekvencija oblika $\alpha f_1, \dots, \alpha f_n$, vrijednost disonance obojenog tona T na intervalu α možemo izračunati sljedećom formulom [2]:

$$D_T(\alpha) = D_T + D_{\alpha T} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d(f_i, \alpha f_j, A_i, A_j) \quad (6.5)$$

Krivulju disonancije obojenog tona T definiramo prethodnom formulom (6.5) duž svih intervala α koje definiramo [2]. Oblik krivulje disonancije ovisi o frekvencijama i amplitudama komponenti obojenog tona. Njihovom promjenom mijenja se pozicija i dubina lokalnih minimuma. Ove promjene utječu na odabir optimalne ljestvice u kojoj određena boja zvuči ugodno (konsonantno).

6.4. Svojstva krivulje disonancije

Kako bismo istaknuli **pet općenitih svojstava krivulje disonancije**, moramo uvesti neka pojednostavljena. Za sve harmonike definiramo jediničnu amplitudu. Time je formula za inherentnu disonancu jednaka:

$$D_T = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d(f_i, f_j) \quad (6.6)$$

Također pojednostavljena formula krivulje disonancije jednaka je:

$$D_T(\alpha) = D_T + D_{\alpha T} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d(f_i, \alpha f_j) \quad (6.7)$$

U nastavku ćemo navesti i ukratko opisati pet važnih svojstava krivulje disonancije. Detaljni postupak dokaza svih pet svojstava krivulje disonancije, moguće je pronaći u knjizi *W. A. Sethares: Tuning, Timbre, Spectrum, Scale u Appendices F.* na stranici 349. [2].

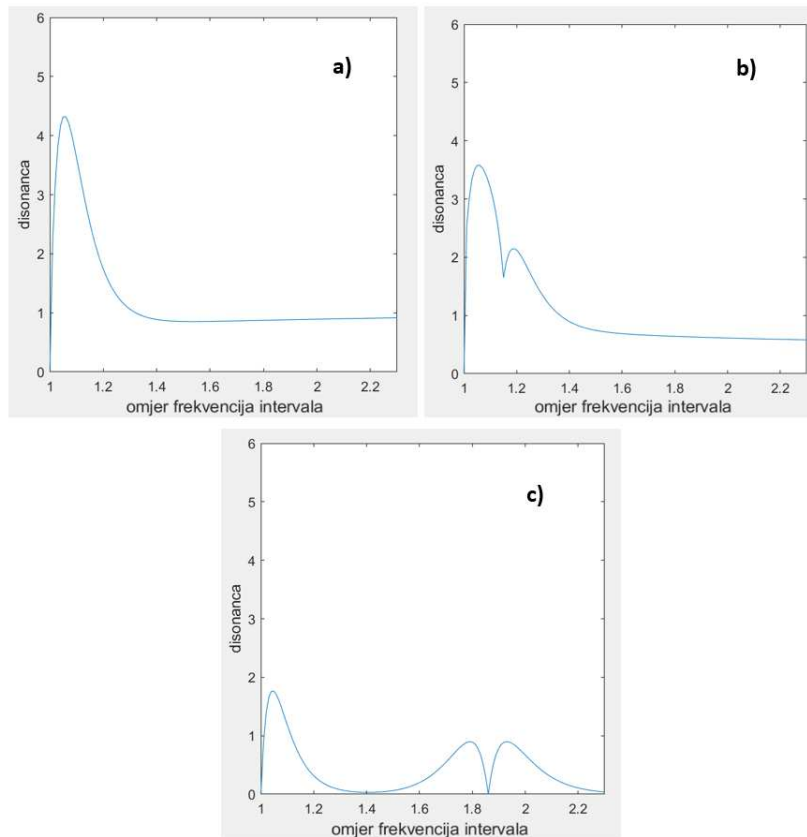
Prvo svojstvo: *Za svaki obojeni ton T čiji se spektar sastoji od harmonika s frekvencijama f_1, \dots, f_n vrijedi [1]:*

- $\alpha = 1$ je globalni minimum krivulje disonancije $D_T(\alpha)$ – Ovim svojstvom je potvrđeno da je unison uistinu najkonsonantniji interval.
- $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} D_T(\alpha) = D_T + D_{\alpha T}$ – Ovim svojstvom pokazano je da se vrijednost disonance smanjuje kako alfa raste, te se približava vrijednosti koja nije veća od samih vrijednosti disonance D_T i $D_{\alpha T}$.

Drugo svojstvo: *Zamislimo obojeni ton T koji ima harmonike frekvencija f_1 i f_2 za koje vrijedi $f_2 - f_1 > x_{max}$. Tada će postojati lokalni minimum krivulje disonancije u $\alpha = \frac{f_2}{f_1}$ [1]. Iz svojstva slijedi $D_T(\alpha - \epsilon) > D_T(\alpha)$ i $D_T(\alpha + \epsilon) > D_T(\alpha)$ za neki mali ϵ . Jednostavnije rečeno manji pomaci gore ili dolje u frekvencijama povećavaju disonantnost u odnosu na početne frekvencije (ako $\alpha f_1 \neq f_2$ onda je disonanca između harmonika veća).*

Treće svojstvo: *Zamislimo obojeni ton T koji ima harmonike frekvencija f_1 i f_2 . Tada će postojati $\epsilon > 0$ takav da za $|f_2 - f_1| < \epsilon$, $\alpha = \frac{f_2}{f_1}$ nije točka lokalnog minimuma funkcije $D_T(\alpha)$ [1]. Jednostavnije rečeno, ako su harmonici vrlo bli-*

skih frekvencija f_1 i f_2 , onda točka lokalne konsonance $\frac{f_2}{f_1}$ nestaje. Svojevremeno smo izrekli da se poklapanjem harmonika (frekvencija) pojavljuje lokalni minimum. Također lokalni minimum se pojavljuje ako su frekvencije harmonika jako udaljene. Na slici 6.6 možemo vidjeti tri moguće krivulje disonancije za obojene tonove od dva harmonika. Na slici 6.6 graf c) prikazuje krivulju disonancije na kojoj se lokalni minimum javlja u točki $\alpha = \frac{f_2}{f_1}$. Također vidimo i izduženi minimum između $\alpha_L = \frac{f_1 + x_{max}}{f_1}$ i $\alpha_H = \frac{f_2 - x_{max}}{f_2}$.



Slika 6.6: Tri moguće krivulje disonancije: a) krivulja disonancije za jako bliske frekvencije ($f, 1.01f$), b) krivulja disonancije za frekvencije ($f, 1.15f$), c) krivulja disonancije za frekvencije ($f, 1.86f$)

Četvrto svojstvo: Zamislimo obojeni ton T koji ima harmonike frekvencija f_1 , f_2 i f_3 . Tada će postojati $c_1 > 0$ i $c_2 > 0$ takvi da se za $f_2 - f_1 > x_{max} + c_1$ i $f_3 - f_2 > x_{max} + c_2$, lokalni minimumi krivulje disonancije pojavljuju u točkama $\alpha_1 = \frac{f_2}{f_1}$, $\alpha_2 = \frac{f_3}{f_1}$ i $\alpha_3 = \frac{f_3}{f_2}$ [1]. Jednostavnije rečeno, lokalni minimumi se pojavljuju kada se dva harmonika poklapaju.

Peto svojstvo i možda najznačajnije svojstvo: *Zamislimo obojeni ton T koji ima harmonike frekvencija $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$. Krivulja disonancije tona T imat će najviše $2n(n-1)$ lokalnih minimuma [1].* Lokalni minimumi su simetrično raspoređeni tako da se polovica minimuma pojavljuje za $0 < \alpha < 1$ te druga polovica za $1 < \alpha < \infty$. Što se tiče njihova oblika, polovica su izduženog oblika, a druga polovica su strmiji. U glazbenoj teoriji većinom razmatramo vrijednosti minimuma za α između 1 i 2, također izduženi minimumi teže ka nestajanju te se mnogi minimumi poništavaju kada su harmonici gusto raspoređeni. Iz svega navedenog proizlazi da krivulja disonancije koju mi promatramo ima puno manje lokalnih minimuma od broja navedenih svojstvom pet. U našoj krivulji disonance na slici 6.4 možemo vidjeti da postoji ukupno šest lokalnih minimuma u oktavi, za razliku od $6 \cdot 5 = 30$ minimuma prema svojstvu pet.

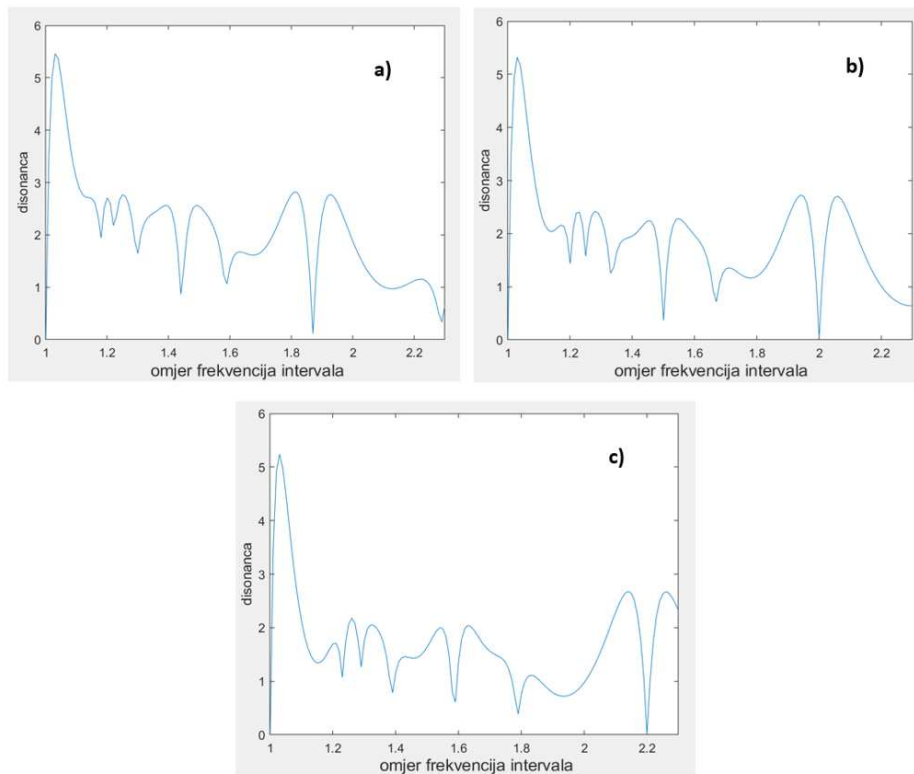
6.5. Od obojenog tona do optimalne ljestvice

Na početku ovog poglavlja 6 spomenuli smo osnovno načelo lokalne konsonancije. Načelo lokalne konsonancije definira povezanost između boje tona i glazbene ljestvice. Boju zvuka određuje spektar sastavljen od viših harmonika ili alikvotnih tonova. Ona je zaslužna za prepoznatljivost zvuka pojedinog glazbala.

Cilj u glazbi je pronaći optimalnu ljestvicu koja odgovara određenoj boji tona odnosno onu u kojoj taj ton zvuči najkonsonantnije. Prethodno definirana krivulja disonancije upravo nam omogućuje pronalaženje takve ljestvice. Naime, harmonijski ton s višim harmonicima čije se frekvencije odnose kao cjelobrojni višekratnici temeljne frekvencije određuju krivulju disonancije. Moguće točke lokalne konsonancije, tj. minimumi disonancije se nalaze u intervalima oblika $f_i = \alpha f_j$. Intervale α određuje omjer cijelih brojeva jer su frekvencije cjelobrojni višekratnici temeljne frekvencije. Prema već spomenutom načelu lokalne konsonancije, upravo su lokalni minimumi mjesta gdje se nalaze najkonsonantniji tonovi određene boje.

Značajan doprinos odabiru ljestvice osigurali su **Slymaker**, **Mathews** i **Pierce** istraživanjem boje tonova s frekvencijama viših harmonika oblika $f_j = f A^{\log_2(j)}$ [1]. Ako je $A < 2$ onda su frekvencije viših harmonika komprimirane u odnosu na obojeni ton čije su frekvencije viših harmonika cjelobrojni višekratnici temeljne frekvencije (kada je $A = 2$). Ako je $A > 2$ onda su frekvencije viših harmonika

rastegnute u odnosu na spomenuti obojeni ton (kada je $A = 2$). Izračunom krivulja disonancije za navedene oblike frekvencija uočili su zanimljiv detalj. Naime, lokalni minimumi za oktavu ne nalaze se na vrijednosti 2 koja predstavlja točan interval oktave. Takve nepravne oktave prozvali su *pseudo oktavama* i one zvuče konsonantno (kada je $A \neq 2$) za razliku od pravih oktava koje zvuče disonantno. Lokalni minimumi drugih intervala također se ne nalaze na točnim vrijednostima intervalima već u blizini te su njih također prozvali *pseudo-intervalima*. Na slici 6.7 možemo vidjeti tri različita tipa krivulja disonancije s obzirom na vrijednost parametra A . Ovim istraživanjem je zapravo otkriveno da se sva načela glazbene teorije mogu primijeniti i na komprimirane te rastegnute tonove ako se sviraju u odgovarajućoj komprimiranoj odnosno rastegnutoj ljestvici.



Slika 6.7: Tri moguće krivulje disonancije s obzirom na A : a) krivulja disonancije za komprimirani spektar ($A = 1.87$), b) krivulja disonancije za standardni spektar ($A = 2$), c) krivulja disonancije za rastegnuti spektar ($A = 2.2$)

Postoji zanimljivost vezana uz ksilofon i sva glazbala koja se sastoje od pločica sa slobodnim krajem. Takva glazbala nemaju harmonijsku razdiobu alikvotnih tonova, stoga nisu usklađeni s kromatskom ljestvicom [1]. Za takva glazbala potrebno je odrediti odgovarajuću ljestvicu u kojoj će oni zvučati najkonsonantnije.

Navedeno vrijedi i za ostale udaraljke te zvona.



Slika 6.8: Ksilofon s drvenim pločicama¹

6.6. Od ljestvice do optimalne boje tona

Skladanje glazbenog djela u n -tonskoj, povijesnoj, narodnoj ili proizvoljno određenoj ljestvici zahtjeva poznavanje odgovarajuće boje tona. Usklađena boja tona s ljestvicom omogućuje veću slobodu u kontroli konsonancije i disonancije djela koje skladamo ili izvodimo. Prethodni postupak pronalaženja optimalne ljestvice za određenu boju tona jednostavan je u usporedbi s problemom pronalaženja odgovarajuće boje tona za odabranu ljestvicu. Naime, ne postoji jedna savršena boja za izabranu ljestvicu, no moguće je pronaći lokalno najbolje boje tona kao rješenje određenog problema ograničene optimizacije. Za učinkovito rješavanje ovog problema iskoristit ćemo svojstva krivulje disonancije koja smo naveli u prethodnom podnaslovu 6.4.

Iz definicije intervala (razlika između dva tona) proizlazi da ljestvica sastavljena od m tonova sadrži skup od $m - 1$ intervala $\alpha_1, \dots, \alpha_{m-1}$. Problem traženja odgovarajuće boje je odabir skupa od n harmonika frekvencija f_1, \dots, f_n i amplituda A_1, \dots, A_n kako bismo minimizirali zbroj svih vrijednosti disonance po svim $m - 1$ intervalima. Ovu minimizaciju možemo zapisati na sljedeći način [1]:

$$J_d = \min_{f_1, \dots, f_n, A_1, \dots, A_n} \sum_{i=1}^{m-1} D_T(\alpha_i) \quad (6.8)$$

¹Fotografija ksilofona s drvenim pločicama YX-135, Yamaha, https://usa.yamaha.com/products/musical_instruments/percussion/xylophones/

$D_T(\alpha_i)$ predstavlja vrijednost disonance za neku kandidatsku boju tona T na intervalu α_i . D_T i posljedično J_d su nenegativni za bilo koji ton T i interval α .

Boju koju izaberemo kao kandidata minimizacije može na dva načina postići da vrijednost njene disonance bude jednaka nuli. Ako smo izabrali boju čije su vrijednosti amplituda svih harmonika jednake 0, tada će i $D_T(\alpha_i) = 0$ za sve α_i . Drugi način se temelji na svojstvu jedan iz podnaslova 6.4. Ako unaprijed zadamo amplitude $A_i \neq 0$, vrijednosti disonance će biti male odabirom dovoljno velikih intervala α_i . Navedeno dovodi do trivijalnih rješenja minimizacije (6.8), stoga moramo uvesti određena ograničenja [1]:

1. Onemogućiti promjene amplituda A_i odnosno fiksirati njihove vrijednosti na početku
2. Ograničiti sve intervale α_i te pripadajuće frekvencije viših harmonika na unaprijed definirani konačan skup

Primjenom navedenih ograničenja izbjegavamo trivijalna rješenja, no ono i dalje nije dovoljno za pronalaženje kvalitetnih rješenja. Iako ljestvice pokušavaju osigurati male vrijednosti disonance svojih tonova, njihovi tonovi se obično ne nalaze točno na lokalnim minimumima krivulje disonancije. Možemo definirati broj intervala α_i koji nisu minimumi na krivulji disonancije pomoću sljedeće formule [1]:

$$J_m = \sum_{i=1}^{m-1} M_T(\alpha_i) \quad (6.9)$$

$$M_T(\alpha_i) = \begin{cases} 0, & \text{ako } D_T(\alpha_i + \epsilon) > D_T(\alpha_i) \\ & \text{i } D_T(\alpha_i - \epsilon) > D_T(\alpha_i), \epsilon > 0, \\ 1, & \text{inače} \end{cases} \quad (6.10)$$

$M_T(\alpha_i)$ jednak je 0 ako su intervali α_i točke lokalnih minimuma, inače je jednak 1. Formula (6.9) nije dovoljna za minimizaciju jer ona govori samo o broju minimuma, ali ne i o njihovoj stvarnoj vrijednosti. Iz svega navedenog možemo izraziti težinsku sumu J_m i J_d , koja pokušava smjestiti tonove na lokalne minimume i minimizirati vrijednost krivulje disonancije pomoću sljedeće formule [1]:

$$\mathbf{J} = \min_{f_1, \dots, f_n} \lambda_1 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} D_T(\alpha_i) + \lambda_2 \cdot \sum_{i=1}^{m-1} M_T(\alpha_i) \quad (6.11)$$

Eksperimentalno je otkriveno metodom pokušaja i pogreške da težine $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \approx \frac{1000}{1}$ daju korektne rezultate [1].

Minimizacija \mathbf{J} iz formule (6.11) je vrlo složen n -dimenzionalan optimizacijski problem. Za rješavanje ovog problema možemo se poslužiti prirodom inspiriranim **genetskim algoritmom (GA)** [1]. Kako bismo iskoristili ovaj algoritam, moramo frekvencije harmonika pretvoriti u binarnu reprezentaciju koju nazivamo gen. Također moramo izračunati *funkciju dobrote* (engl. *fitness*) iz formule (6.11). One boje tonova koje imaju manju vrijednost J smatramo boljima odnosno prikladnijima.

Genetski algoritam pretražuje n -dimenzionalni prostor pritom računajući funkciju dobrote različitih boja tonova. One boje koje su najprikladnije kombiniraju se i tvore tzv. *boje djeca* za sljedeću generaciju. Kako se generacije izmjenjuju tako algoritam sve više konvergira i najprikladnija boja je kandidat za minimizaciju J . Genetski algoritam na kraju zaista vraća boje koje su usklađene s početno odabranom ljestvicom te se tonovi ljestvice za tu boju uistinu poklapaju u lokalnim minimumima.

Jednoliko temperirane ljestvice sastavljene od m tonova imaju prednost nad drugim ljestvicama. Ova vrsta ljestvice omogućuje nam da iskoristimo svojstva krivulje disonancije koja smo definirali u podnaslovu 6.4 i odredimo odgovarajuće boje te time izbjegnemo potrebu za iterativnim rješavanjem optimizacijskog problema.

Ako se prisjetimo definicije jednoliko temperiranih ljestvica onda znamo da su vrijednosti omjera između dva tona uvijek jednake i iznose $\beta = \sqrt[m]{2}$. Zamislimo obojene tonove čiji su viši harmonici raspoređeni u omjerima β^i , za $i = 1, 2, 3, \dots, n$ (npr. $(f, \beta^1 f, \beta^3 f)$). Ovako obojeni tonovi nakon transponiranja u osnovnu oktavu, pozicioniraju se na točnim tonovima ljestvice. Za njih kažemo da su *inducirani* od m -tonske jednoliko temperirane ljestvice [1].

Prisjetimo se svojstva četiri iz podnaslova 6.4. Uočili smo da se lokalni minimumi

krivulje disonancije pojavljuju u intervalima $\alpha = \frac{f_j}{f_i}$ gdje su f_i i f_j frekvencije viših harmonika obojenog tona T odnosno pojavljuju se kada se dva harmonika međusobno poklapaju. **Inducirani obojeni tonovi** sadrže više harmonike gdje omjeri između njihovih frekvencija iznose β^k za neki $k \in \mathbb{Z}$ te će krivulja disonancije upravo u tim omjerima imati minimume koji se poklapaju s točnim tonovima ljestvice [2]. Takvi obojeni tonovi minimiziraju J iz formule (6.11) jer vrijedi $M_T(\beta^k) = 0$ kada se poklapa točka lokalnog minimuma i ton ljestvice.

Prednost jednolikih ljestvica možemo iskoristiti tako da smanjimo prostor pretraživanja na samo inducirane obojene tonove. Drugim riječima, ovaj optimizacijski problem može biti riješen pažljivim odabirom induciranih obojenih tonova.

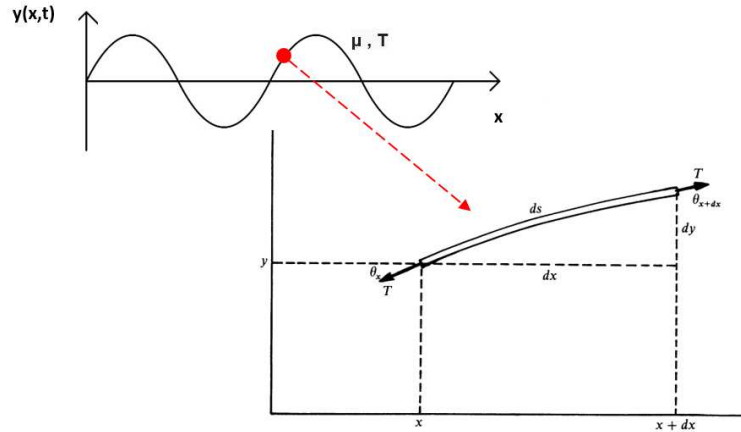
7. Ograničenja glazbenih instrumenata i materijala

7.1. Neharmoničnost glazbenih instrumenata

U prethodnim podnaslovima spominjali smo spektar viših harmonika tona koji određuje boju zvuka. Ako se vratimo na titranje žice i njezine frekvencije, onda možemo definirati spektar frekvencija viših harmonika za idealnu žicu. Naime, kod idealne žice su frekvencije viših harmonika cjelobrojni višekratnici temeljne frekvencije ($f_i = if_0$, za $i = 1, 2, 3, \dots$). Ovakav linearni spektar viših harmonika nazivamo **harmonijski spektar**.

U stvarnosti, glazbeni instrumenti zbog vlastitih fizičkih svojstava odstupaju iz harmonijskog spektra. Takva odstupanja dovode do tzv. **neharmoničnosti**. Razina neharmoničnosti glazbenih instrumenata karakteristična je za pojedini instrument te utječe na boju njegova zvuka.

Primjerice, razmotrimo žičana glazbala te njihovu neharmoničnost zvuka. Uzrok neharmoničnosti zvuka kod žičanih glazbala krije se u samim svojstvima žice. Žica u žičanim glazbalima nije idealna žica već je prijelazni oblik između idealne žice i krute žice. Kako bismo objasnili razliku između titranja idealne žice i krute žice, moramo se poslužiti fizikalnim jednadžbama koje opisuju transverzalne valove uzrokovane titranjem žice. U nastavku ćemo navesti i ukratko objasniti diferencijalne jednadžbe transverzalnih valova s obzirom na vrstu žice prema definicijama iz knjige *N. H. Fletcher i T. D. Rossing: The Physics of Musical Instruments* [4]. Također, u knjizi je moguće pronaći i detaljan izvod svih jednadžbi koje ćemo navesti.



Slika 7.1: Titranje idealne žice s linijskom gustoćom μ i istaknuti segment žice pod napetosti T

Na slici 7.1 možemo vidjeti prikaz idealne žice koja titra. Žicu možemo zamisliti kao niz malih segmenata koji izvide valno gibanje kako žica titra. Valno gibanje u kojem se segment nekog sredstva giba okomito na smjer u kojem putuje nazivamo transverzalni val. Otklon svakog segmenta žice iz ravnotežnog položaja, kao istaknuti segment na slici 7.1, možemo opisati pomoću funkcije $y(x, t)$. x predstavlja koordinatu položaja na žici, a t vremenski trenutak. Razlaganjem sila koje djeluju na segment žice dobivamo ukupnu silu dF_y koja vraća segment žice u njegov ravnotežni položaj. Ukupnu silu možemo zapisati kao razliku y komponenti sila T na sljedeći način:

$$dF_y = (T \sin \theta)_{x+dx} - (T \sin \theta)_x \quad (7.1)$$

Ako y komponentu $(T \sin \theta)_{x+dx}$ zapišemo pomoću *Taylorova reda* oblika $f(x + dx) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} dx^n = f(x) + \frac{\partial(f(x))}{\partial x} dx + \dots$ onda dobivamo sljedeći oblik:

$$dF_y = [(T \sin \theta)_x + \frac{\partial(T \sin \theta)}{\partial x} dx] - (T \sin \theta)_x = \frac{\partial(T \sin \theta)}{\partial x} dx \quad (7.2)$$

Također ako uzmemo u obzir da su kutovi θ koje sile T zatvaraju s x -osi maleni, onda možemo zamijeniti sinuse tih kutova s tangensima tih kutova. Tangens kuta θ možemo zapisati kao $\frac{\partial y}{\partial x}$ te nam ukupna sila dF_y izgleda ovako:

$$dF_y = \frac{\partial(T \frac{\partial y}{\partial x})}{\partial x} dx = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad (7.3)$$

Primjenom *Drugog Newtonova zakona* ($F = m \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$), gdje je masa segmenta ds jednaka $m = \mu ds$ dobivamo sljedeću jednadžbu:

$$T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = (\mu ds) \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.4)$$

Konačno na kraju ako znamo da je pomak dy mali, onda je i $ds \simeq dx$ te dolazimo do dobro poznate valne jednadžbe gibanja [4]:

$$\frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (7.5)$$

Diferencijalnu jednadžbu valnog gibanja (7.5) možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\ddot{y} - c^2 y'' = 0, \quad c^2 = \frac{T}{\mu}, \quad \mu = \frac{\Delta m}{dx} \quad (7.6)$$

T iz formule (7.5) predstavlja napetost žice koja djeluje na promatrani segment s jedne i druge strane ostatka žice. μ nazivamo linijskom gustoćom mase žice i definiramo je prema izrazu iz (7.6). c razmatramo kao brzinu kojom valni poremećaj putuje žicom.

Opće rješenje valne jednadžbe (7.6) je bilo koja funkcija koordinate položaja x i vremena t koju možemo zapisati u obliku:

$$y(x, t) = f(x \pm ct) \quad (7.7)$$

f je funkcija jedne varijable. Ako uzmemo pozitivan predznak u argumentu funkcije f onda se valni poremećaj kreće ulijevo brzinom c , a ako odaberemo negativan predznak onda se kreće udesno. Valjanost ovog rješenja dokazujemo uvrštavanjem (7.7) u (7.6).

S druge strane, krutu žicu određuje svojstvo krutosti. Iz tog razloga potrebno je izmijeniti valnu jednadžbu gibanja koju smo definirali jednadžbom (7.5) i pritom uvrstiti izraze koji određuju krutost žice. Valnu jednadžbu gibanja za krutu žicu možemo izraziti na sljedeći način [4]:

$$\mu \frac{\partial^2 \mathbf{y}(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \mathbf{y}(x, t)}{\partial x^2} - ESK^2 \frac{\partial^4 \mathbf{y}(x, t)}{\partial x^4} \quad (7.8)$$

$$\mu \ddot{y} - Ty'' + ESK^2 y'''' = 0, \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad (7.9)$$

E iz jednadžbe (7.8) nazivamo *Youngov modul* koji predstavlja svojstvo materijala koliko se lako materijal može istežati i deformirati. Izražavamo ga kao omjer vlačnog naprezanja i vlačne deformacije (izduženja). S je površina poprečnog presjeka žice, a K je polovica radijusa žice.

Rješavanjem jednadžbe (7.8) pokazat će se da je spektar viših frekvencija za krutu žicu definiran na sljedeći način [5]:

$$f_i = i f_1^0 \cdot \sqrt{1 + B i^2}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (7.10)$$

f_1^0 je temeljna frekvencija idealne žice duljine L i nju možemo izraziti na sljedeći način:

$$f_1^0 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad (7.11)$$

Parametar B iz formule (7.10) nazivamo *koeficijent neharmoničnosti*. Vrijednost ovog koeficijenta možemo izračunati pomoću sljedeće formule:

$$B = \frac{\pi^2 ESK^2}{TL^2} \quad (7.12)$$

Iz formule (7.12) možemo uočiti da se neharmoničnost može smanjiti povećanjem napetosti ili duljine žice odnosno može se povećati ako povećamo krutost ili promjer žice. Primjerice, kod klavira se vrijednost koeficijenta B kreće u rasponu od 0.0002 za dublje tonove (deblje žice) do 0.4 za visoke tonove (tanje žice) [5]. Jaku neharmoničnost percipiramo vrlo neugodnom, tj. disonantnom. Unatoč tomu, kod klavira nastojimo donekle zadržati neharmoničnost, ali u vrlo maloj mjeri.

7.2. Ugađači glazbenih instrumenata

Ljudi slušanjem mogu prepoznati konsonantni zvuk. Kada se sviraju dva različita tona istovremeno, čovjek ne može prepoznati omjere njihovih frekvencija. Ono što čovjek prepoznaje su već spomenuta poklapanja viših harmonika tih tonova.

U prethodnom podnaslovu 7.1 definirali smo neharmoničnost spektra. Ako su spektri neharmonijski, onda više ne postoje potpuna poklapanja viših harmonika, već ljudske uši traže najbolji kompromis pritom smanjujući razliku frekvencija bliskih harmonika. Smanjenje razlike frekvencija bliskih harmonika postizemo tzv. **metodom rastezanja** koja lagano povisuje frekvencije određenih tonova i tako omogućuje poklapanje tonova [5]. Jednostavnije rečeno, tonove ćemo doživjeti konsonantnima ako su blago neugodeni. Tehniku ugađanja glazbenih instrumenata koja se oslanja na sluh nazivamo **ugađanje po sluhu**.

U današnje doba ulogu ugađanja glazbenih instrumenata preuzimaju precizniji **elektronički ugađači** (engl. *tuner*). Ovi elektronički uređaji automatski prepoznaju ton, mjere njegovu frekvenciju i prikazuju stvarna odstupanja od teorijskih vrijednosti.



Slika 7.2: Elektronički ugađač¹

Postoje jako skupi elektronički ugađači koji uzimaju u obzir neharmoničnost instrumenata te računaju odgovarajuća rastezanja odnosno odstupanja u frekvencijama. Njihov rad započinje snimanjem tonova i procjenom koeficijenta neharmoničnosti za žicu koja stvara ton. Procjenu koeficijenta vrše identificiranjem odgovarajućeg spektara viših harmonika. Sljedeći korak je izračun potrebnog rastezanja. Za izračun rastezanja postoji nekoliko mogućih načina. Jedan od

¹Fotografija elektroničkog ugađača, Korg TM60BK, https://www.korg.com/us/products/tuners/tm_60/

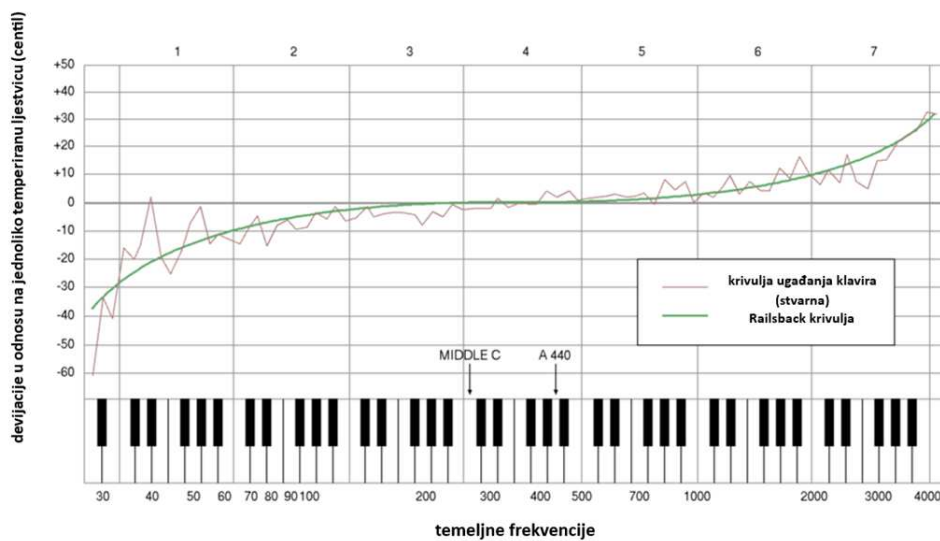
poznatijih je *4:2-ugađanje*. Odaberemo fragment naše oktave i rastežemo ga tako da se četvrti harmonik nižeg tona poklapa s drugim harmonikom višeg tona. Ovo možemo matematički zapisati tako da s $k = 1, \dots, K$ označimo žice i s $f_i^{(k)}$ frekvenciju i -tog harmonika k -te žice. Metoda *4:2* stvara $K - 12$ jednadžbi za rastezanje oktave sljedećeg oblika [5]:

$$\frac{f_0^{(k+12)}}{f_0^{(k)}} = \frac{r_4^{(k)}}{r_2^{(k+12)}} \quad (7.13)$$

U formuli (7.13), $r_i^{(k)} = \frac{f_i^{(k)}}{f_0^{(k)}}$ predstavlja omjer frekvencije i -tog harmonika s temeljnom frekvencijom. Ako uvedemo logaritamsku reprezentaciju onda dobivamo sustav od $K - 12$ linearnih jednadžbi za K nepoznatih temeljnih frekvencija $f_0^{(k)}$. Preostalih 12 nepoznanica određeno je referentnom visinom tona A (440 Hz) te izborom načina temperiranja. Rješavanjem ovih jednadžbi možemo odrediti krivulju ugađanja. Ovakvim izračunom koji se temelji na izravnoj usporedbi viših harmonika dobivamo krivulju ugađanja po dijelovima.

Klavir i čembalo pokazuju zanimljivo svojstvo prilikom ugađanja. Ugađanjem pomoću elektroničkih ugađača, njihove će žice biti ispravno ugođene na odgovarajuće frekvencije, no ovi instrumenti u cjelini ne će zvučati ugođeno.

O.L. Railsback je 1938. godine otkrio kako je ovo svojstvo posljedica neharmonijskih korekcija u spektrima viših harmonika [5]. Ako grafički pratimo ugađanje klavira po sluhu, onda krivulja koja pritom nastaje, sadrži izražene fluktuacije duž cijelog rastezanja. Navedene fluktuacije krivulje možemo vidjeti na slici 7.3. **Railsbackova krivulja** izražava razliku između klavira ugođenog po sluhu i jednoliko temperirane ljestvice. Ugađanje klavira započinje na sredini odnosno na tonovima središnjih frekvencija. Na grafu sa slike 7.3 možemo vidjeti da u navedenom području Railsbackova krivulja ima vrlo blagi nagib. Kako se ugađanje klavira nastavlja na niže odnosno više frekvencije tako se oktave sve više rastežu zbog kompenzacije neharmoničnosti. Railsbackova krivulja je na krajevima puno izraženija što možemo vidjeti na grafu te poprilično odstupa od jednoliko temperirane ljestvice.



Slika 7.3: Prikaz odstupanja karakteristične krivulje ugođenog klavira od onog ugođenog u jednoliko temperiranoj ljestvici

Smatra se kako spomenute fluktuacije krivulje ugađanja nisu slučajne, već su bitne za kvalitetno ugađanje glazbenih instrumenata. Iz navedenog razloga brojni glazbenici smatraju kako se elektronički ugađači ne mogu mjeriti s glazbenim tehničarima koji ugađaju po sluhu. Razlozi ovih fluktuacija su brojni. Jedan od razloga je to što se svaki harmonik drugačije povezuje s rezonatorom instrumenta što dovodi do dodatnih pomaka frekvencija u neharmonijskom spektru. Drugi razlog je nepravilan intenzitet harmonika. Ovi razlozi ukazuju na činjenicu da kod ugađanja nije dovoljno ugoditi frekvencije harmonika, već i njihove amplitude kako bi instrument u cjelini zvučao skladno [5].

7.3. Psihoakustični koncepti

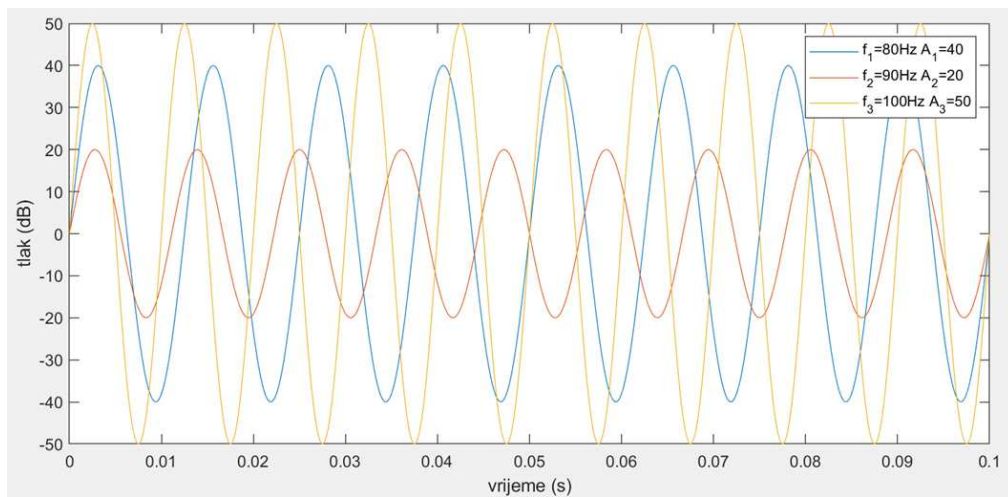
Psihoakustika je interdisciplinarno područje znanosti koje obuhvaća matematiku, psihologiju, biologiju, fiziku i informatiku. Osnovni zadatak psihoakustike je proučiti kako čovjek opaža zvuka i koje su čovjekove posljedične psihološke reakcije na taj zvuk (buka, govor ili glazba). Brojna istraživanja koja su provedena u ovom području znanosti, omogućila su nam brojne spoznaje te jednostavniji i formalniji prikaz perceptivnih svojstava zvuka.

U podnaslovu 3.1 prikazali smo čisti sinusni ton modelom sinusnog vala u ko-

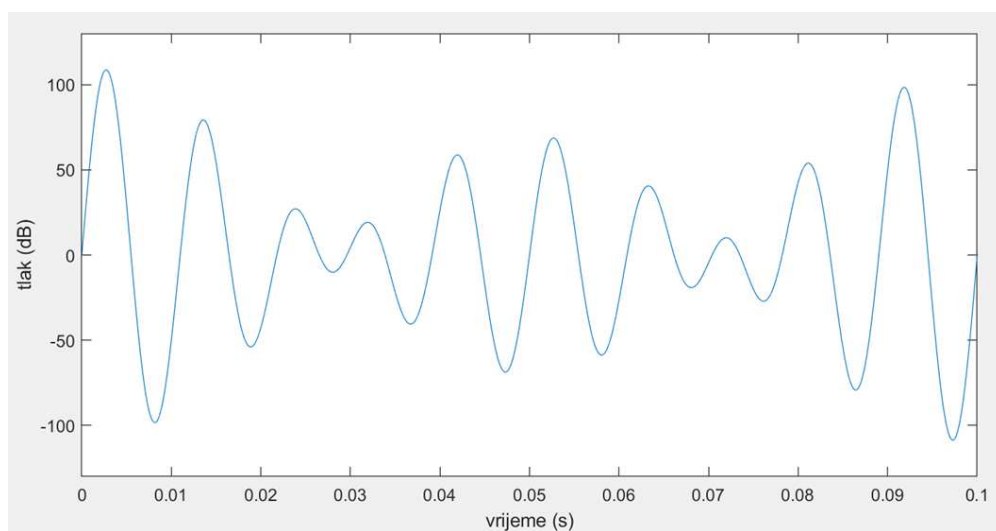
jem definiramo vremenski ovisnu promjenu tlaka $p(t)$ formulom:

$$p(t) = A \sin(2\pi ft) \quad (7.14)$$

Čisti sinusni ton prikazan formulom (7.14) predstavlja savršene sinusoide koje karakteriziraju jednostavne tonove. No, u dosadašnjim razmatranjima mogli smo vidjeti kako tonovi u stvarnosti nisu jednostavni, već složeni. Složeni tonovi nastaju superpozicijom pojedinačnih sinusnih valova različitih frekvencija i amplituda. Primjer pojedinačnih valova možemo vidjeti na slici 7.4



Slika 7.4: Tri sinusna vala različitih frekvencija i amplituda

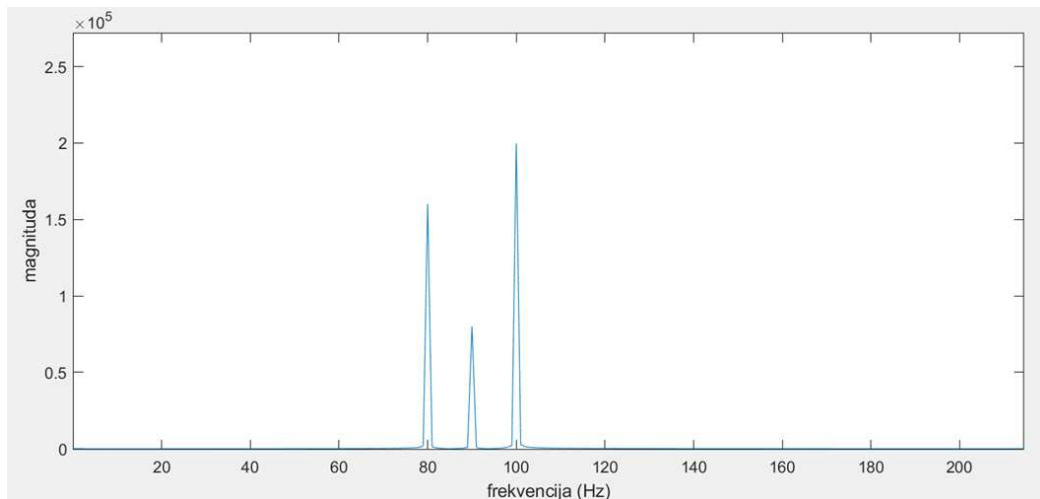


Slika 7.5: Superpozicija tri vala sa slike 7.4

Slika 7.5 prikazuje superponirani val odnosno složeni ton koji nastaje superpozicijom tri vala sa slike 7.4.

Pri analizi složenog tona, grafički prikaz superponiranog vala kao ovisnost tlaka o vremenu ne govori nam mnogo o pojedinačnim komponentama koje čine taj složeni ton. Kako bismo uspješno proveli dublju analizu snimljenog složenog tona koristimo **Fourierovu transformaciju**. Ona nam omogućuje pretvorbu vremenski ovisnog tlaka u frekvencijsku domenu. Fourierovu transformaciju zapisujemo na sljedeći način [5]:

$$p(f) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t)e^{-2\pi ift} dt \quad (7.15)$$



Slika 7.6: Fourierova transformacija superponiranog vala sa slike 7.5

Na slici 7.6 možemo vidjeti prikaz krivulje nastale Fourierovom transformacijom prethodno superponiranog vala sa slike 7.5. Iz grafa je vidljivo da se šiljci dobivene krivulje nalaze u početno definiranim frekvencijama pojedinačnih valova sa slike 7.4. Ako malo bolje pogledamo visine šiljka dobivene krivulje, onda možemo uočiti da se njihove visine odnose kao amplitude pojedinačnih valova. Dakle, analizom grafa sa slike 7.6 možemo saznati broj pojedinačnih valova koji čine komponente ovog složenog tona, njihove točne frekvencija te odnos njihovih amplitude.

Nova ovisnost tlaka o frekvenciji, omogućuje nam izračun intenziteta zvuka. In-

tenzitet zvuka možemo izračunati prema sljedećoj formuli [5]:

$$I(f) = |p(f)|^2 \quad (7.16)$$

U analizi zvuka dodatno koristimo mjeru jačine zvuka tzv. **razinu zvučnog tlaka** (engl. *sound pressure level*, **SPL**) koja uzima u obzir osjetljivost ljudskog uha te ju izražavamo u mjernoj jedinici decibel **dB**. Formulu za izračun mjere jačine zvuka zapisujemo na sljedeći način [5]:

$$L_I(f) = 10 \log\left(\frac{I(f)}{I_0}\right) \quad (7.17)$$

U formuli (7.17), $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ predstavlja prag čujnosti odnosno najmanji intenzitet zvuka koje ljudsko uho može čuti. Ako se prisjetimo formule (3.2) iz podnaslova 3.1 onda uočavam da smo i tamo definirali jačinu zvuka s mjernom jedinicom dB. Naime, govorimo o istoj mjeri jačine zvuka. Jedina razlika je u načinu izražavanja. U formuli (3.2) jačinu zvuka izrazili smo pomoću tlaka zraka, a u formuli (7.17) pomoću intenziteta zvuka.

Na početku ovog podnaslova govorili smo o analizi snimljenog složenog tona, stoga bi bilo dobro spomenuti još jednu zanimljivost na koju moramo pripaziti tijekom snimanja i obrade zvuka. Ljudski sluh nije jednako osjetljiv na različite frekvencije zvuka. Prosječan raspon frekvencija zvuka koje čovjek može čuti je raspon od 20 Hz do $20\,000 \text{ Hz}$. Ipak, ljudski sluh je najviše osjetljiv na frekvencije zvukova u rasponu od 250 Hz do $5\,000 \text{ Hz}$. Prilikom snimanja i obrade zvuka, uređaji poput mikrofona „osjetljivi“ su na sve frekvencije jednako za razliku od našeg uha. Iz tog razloga uvodimo **A-ponderiranje** (engl. *A-weighting*) koje predstavlja težinsku funkciju. Ono daje veću vrijednost frekvencijama na koje je naše uho više osjetljivo odnosno manju vrijednost onim frekvencijama na koje je naše uho manje osjetljivo. Matematički zapis funkcije „*filtra*“ za A-ponderiranje snimljenog zvuka definiramo na sljedeći način [5]:

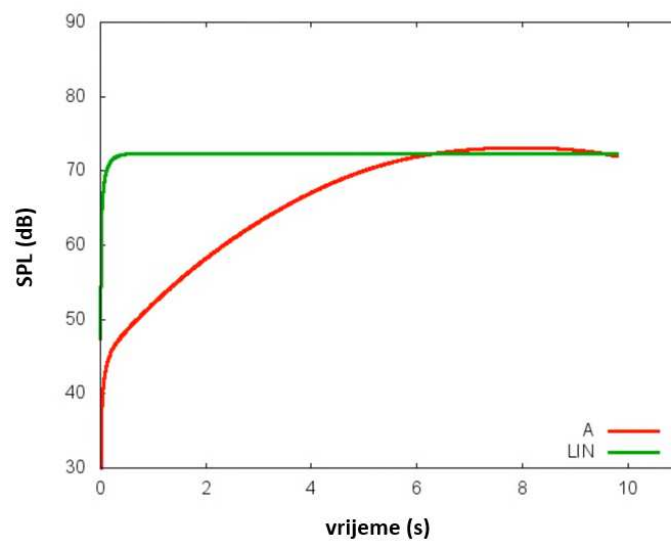
$$R_A(f) = \frac{12200^2 f^4}{(f^2 + 20.6^2)(f^2 + 12200^2)\sqrt{(f^2 + 107.7^2)(f^2 + 737.9^2)}} \quad (7.18)$$

Ako uzmemo u obzir prethodno definiranu smanjenu osjetljivost našeg uha i izve-

deno A-ponderiranje, onda možemo definirati i **A-ponderiranu razinu zvučnog tlaka (SPLA)** koja uzima u obzir sve navedeno. Izračun SPLA zapisujemo pomoću sljedeće formule [5]:

$$L_A(f) = [2 + 20 \log(R_A(f))] \cdot L_I(f) \quad (7.19)$$

Mjerna jedinica u kojoj izražavamo A-ponderiranu razinu zvučnog tlaka nazivamo A-ponderirani decibel **dB(A)**.



Slika 7.7: A-ponderirani zvuk u odnosu na linearni zvuk bez filtra

Na grafu sa slike 7.7 možemo vidjeti kako se razlikuje krivulja razine zvučnog tlaka (L_I) kod snimljenog zvuka bez filtriranja od krivulje razine zvučnog tlaka (L_A) kod snimljenog zvuka uz primjenu A-ponderiranja.

8. Zaključak

Upoznali smo veliki doprinos Pitagore teoriji glazbe njegovim zakonom malih brojeva. Zakon definira da su dva tona konsonantna ako su im omjeri frekvencija mali prirodni brojevi. Glazbu promatramo kao skup zvukova koji nastaju titranjem izvora zvuka. Prikazali smo ih s pomoću modela sinusnog vala. Razlikujemo dva svojstva zvuka, njegovu glasnoću i visinu. Izvor zvuka osim temeljne frekvencije titra i u višim frekvencijama, ali slabijeg intenziteta. Više frekvencije nazvali smo višim harmonicima te oni određuju boju zvuka. Zanimljivu pojavu čine udari koji su posljedica titranja valova bliskih frekvencija i njih percipiramo neugodnima. Definirali smo interval kao razliku između dvaju tonova. Njihove vrijednost određujemo kao omjer frekvencija tonova. S obzirom na broj tonova za koje se razlikuju promatrani tonovi, odredili smo nazive intervala. Neki od najznačajnijih intervala koje smo spomenuli su oktava, kvinta, kvarta te velika i mala terca. Postoje različite vrste glazbenih ljestvica među kojima smo istaknuli septatonske ljestvice dur i mol. Ugađanje koristi neki oblik temperiranja da bi omogućilo slobodne transpozicije skladbi. Spomenuli smo četiri značajne vrste ugađanja. Pitagorino ugađanje temelji se na savršenstvu kvinte, ali glavni nedostatak su vučji intervali. Srednjetonsko temperiranje veliča savršene terce, no nedostatak su i dalje vučji intervali te neugodni durski i molski trozvuci. Dobro temperiranje uklanja vučje intervale i unosi boju u tonalitete. Konačno, definirali smo jednoliko temperiranje, danas najčešće korišteni oblik ugađanja. Ono izgrađuje ljestvice u kojima su vrijednosti intervala polutonova jednake i time omogućuje slobodne transpozicije bez pogreške. Dvanaesttonsku ljestvicu smatramo najzastupljenijom glazbenom ljestvicom. Raspodjela oktave na dvanaest tonova je idealna raspodjela oktave. Ona se nakon dvanaest koraka vraća na osnovni ton (za oktavu viši) te posjeduje savršene oktave, kvinte i kvarte. Intervale smatramo konsonantnim ako ih naše uho percipira ugodnim. Suprotno od njih doživljavamo disonantne intervale. Prikazali smo eksperimentalno ispitivanje konsonancije koje su proveli Plomp i Levelt. Na temelju rezultata ispitivanja

odredili su relativnu krivulju disonancije. Uzevši u obzir i spektar viših harmonika izgradili su krivulju disonancije s velikim padovima u točnim intervalima koje percipiramo konsonantnima. Krivulja disonancije omogućuje nam pronalazak odgovarajuće ljestvice s obzirom na boju tonu i obrnuto. Istaknuli smo kako glazbeni instrumenti zbog fizičkih svojstava materijala od kojih su izrađeni posjeduju određena odstupanja iz harmonijskog spektra. Takva neharmoničnost specifična je za svaki instrument i utječe na njegovu boju. Objasnili smo razliku između ugađanja po sluhu i elektroničkih ugađača. Većina se glazbenih instrumenata danas ugađa pomoću elektroničkih ugađača. Ipak, istaknuli smo kako se klavir i čembalo ne mogu ugoditi pomoću elektroničkih ugađača već isključivo ugađanjem po sluhu. Vidjeli smo da njihova krivulja ugađanja sadrži određene fluktuacije.

Završni rad prikazuje čvrstu poveznicu glazbe i matematike. Za početak smo modelirali zvuk pomoću sinusnog vala i definirali dva osnovna svojstva zvuka. Također smo grafički prikazali i objasnili značaj udara. Izravno smo primijenili Pitagorin zakon malih brojeva (cjelobrojni omjeri frekvencija) i tako izgradili savršeno točne intervale. Objasnili smo i dokazali savršenstvo dvanaestttonske ljestvice pomoću iracionalnosti broja i verižnih razlomaka. Izveli smo jednadžbu koja nam omogućuje izračun i grafički prikaz krivulje disonancije. Sve navedeno smo ostvarili uz pomoć matematike i pritom smo dokazali uvodnu tvrdnju da je matematika uistinu temelj glazbe uz njenu umjetničku stranu.

LITERATURA

- [1] William A. Sethares. Local consonance and the relationship between timbre and scale. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 94:1218–1228, 1993. ISSN 0001-4966. doi: 10.1121/1.408175.
- [2] William A. Sethares. *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*. Springer, 2005.
- [3] Emily Clader. Why twelve tones? the mathematics of musical tuning. *The Mathematical Intelligencer*, 40:32–36, 2018. ISSN 0343-6993. doi: 10.1007/s00283-017-9759-1.
- [4] Neville H. Fletcher i Thomas D. Rossing. *The Physics of Musical Instruments*. Springer, 1991.
- [5] Haye Hinrichsen. Entropy-based tuning of musical instruments. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, 34:2301–1–2301–8, 2012. ISSN 1806-1117. doi: 10.1590/S1806-11172012000200004.
- [6] Mark Petersen. Mathematical harmonies. <https://amath.colorado.edu/pub/matlab/music/MathMusic.pdf>. 2001.
- [7] Zvonimir Šikić. *Matematika i muzika*. Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 1999.

Matematičke osnove dvanaesttonske glazbene ljestvice

Sažetak

Glazbom dominira uređena struktura i sklad tonova koje temelji na matematičkim osnovama. Matematika nam omogućuje logičko razumijevanje elemenata i pojava u glazbi. Zvuk, kao osnovnu sastavnicu glazbe, modeliramo s pomoću sinusnog vala. Iz jednadžbe vala iščitavamo visinu i glasnoću zvuka. Pitagora za sobom ostavlja zakon malih brojeva koji definira konsonantnost tonova malih cjelobrojnih omjera frekvencija. Intervale koji izravno slijede iz zakona nazivamo prirodni intervali. Ugađanje glazbene ljestvice uključuje neki oblik temperiranja zbog povećanja njene podatnosti. Jednoliko temperiranje se ističe svojom jednostavnošću i slobodom transpozicija. Dvanaesttonska ljestvica je najzastupljenija glazbena ljestvica zapadne glazbe i njenu raspodjelu oktave na dvanaest polutona smatramo optimalnom raspodjelom. Ljudi percipiraju zvukove ugodnim ili neugodnim. Fiziološku podlogu takve percepcije temeljimo na krivulji disonancije.

Ključne riječi: Pitagora, prirodni intervali, ugađanje, iracionalnost broja, krivulja disonancije

Mathematical foundations of the twelve-tone musical scale

Abstract

The music is dominated by an ordered structure and harmony of tones based on mathematical foundations. Mathematics allows us to logically understand the elements and phenomena in music. Sound, as a basic component of music, is modeled using a sine wave. We read the height and volume of the sound from the equation of that wave. Pythagoras left behind the law of small numbers, which defines the consonance of tones with small integer frequency ratios. Intervals that follow directly from the law are called natural intervals. Tuning a musical scale involves some form of tempering to increase its flexibility. Equal tempering stands out for its simplicity and freedom of transpositions. The twelve-tone scale is the most represented musical scale in Western music, and we consider its division of the octave into twelve semitones to be the optimal division. People perceive sounds as pleasant or unpleasant. The physiological basis of such perception is based on the dissonance curve.

Keywords: Pythagoras, natural intervals, tuning, irrationality of number, dissonance curve

Dodatak A

Audiovizualna aplikacija

Kao dodatak završnom rad izrađena je desktop aplikacija naziva „Matematičke osnove dvanaestttonskog sustava“. Aplikacija omogućuje grafičke prikaze elementa obrađenih završnim radom, kao i njihove zvukovne interpretacije. Korisnik ima mogućnost proizvoljnog odabira dimenzija kao što su frekvencija i amplituda sinusnih valova te broja harmonika obojenog tona. Također korisnik može izabrati među ponuđenim opcijama željene grafičke i zvukovne interpretacije. Cilj aplikacije je korisniku dodatno približiti i upotpuniti sadržaj završnog rada.

Aplikacija je izrađena u MATLAB-u, preciznije u njenom razvojnom okruženju MATLAB App Designer. **MATLAB**¹ je prepoznatljiva programska i numerička računalna platforma utemeljena na istoimenom programskom jeziku, koja omogućuje analizu podataka, vizualizaciju podataka kroz grafičke prikaze, izradu programskih skripti, funkcija i klasa te izradu jednostavnih desktop aplikacija. MATLAB je razvila američka tvrtka *MathWorks* koja je specijalizirana za izradu matematičkih računalnih programa.

Sadržaj aplikacije prati sadržaj završnog rada i podijeljen je na osam kartica (engl. *tab*):

1. Uvod
2. Zvuk i njegova svojstva
3. Udari
4. Prirodni intervali i ljestvice

¹<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>

5. Ugađanje glazbene ljestvice
6. Usporedba ugađanja glazbenih ljestvica
7. Konsonantnost i disonantnost intervala
8. Krivulja disonancije

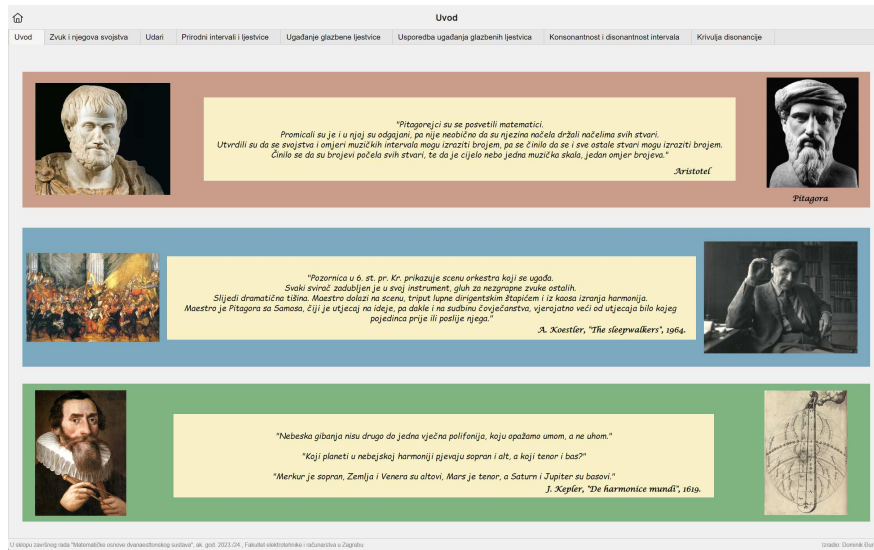
U nastavku ćemo prikazati i ukratko objasniti navedene kartice ove aplikacije.



Slika A.1: Naslovna stranica aplikacije

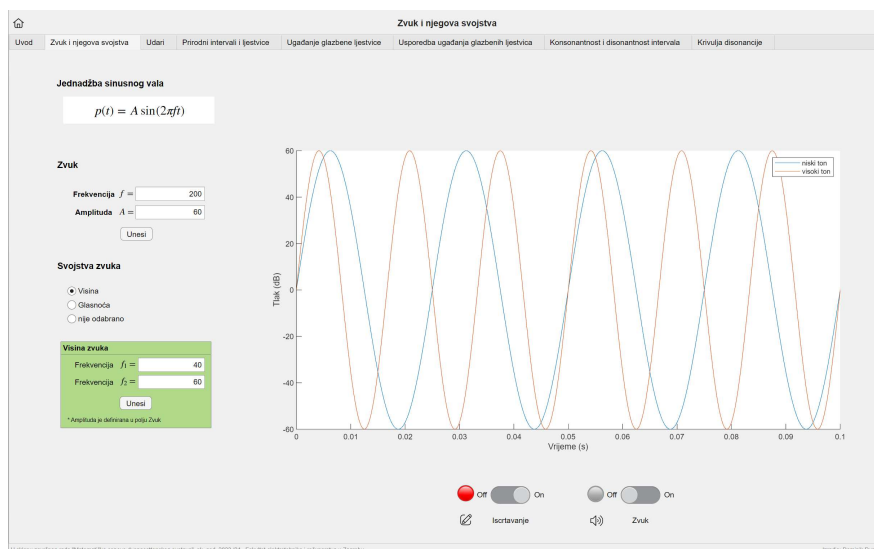
Slika A.1 prikazuje naslovnu stranicu aplikacije koja se pojavljuje nakon pokretanja aplikacije na računalu. Za ulazak u aplikaciju potrebno je odabrati gumb „Početak“ koji nas vodi na prvu karticu „Uvod“.

Na slici A.2 možemo vidjeti karticu „Uvod“ s tri zanimljiva citata vrlo značajnih povijesnih ličnosti. Citati najbolje opisuju poveznicu matematike i glazbe te ističu važnost Pitagore i njegove ostavštine.

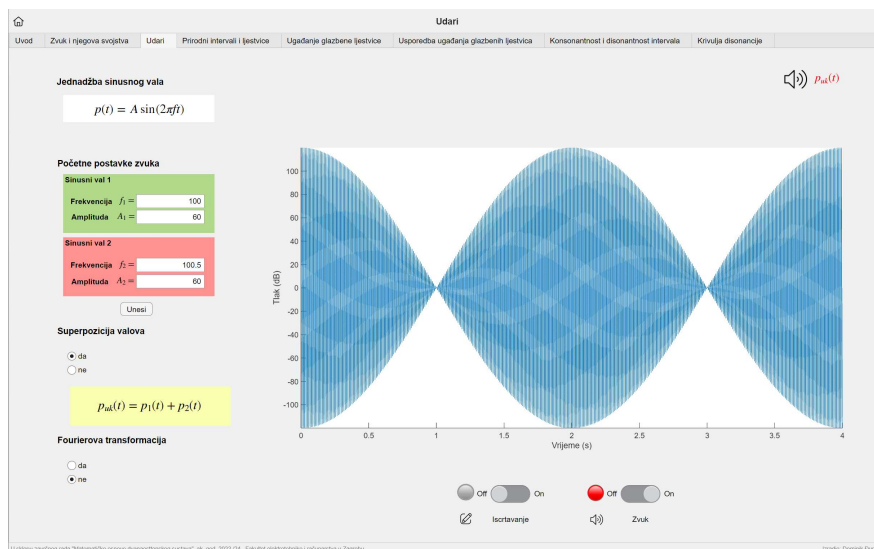


Slika A.2: Kartica „Uvod“

Karticu „Zvuk i njegova svojstva“ možemo vidjeti na slici A.3. Ova kartica omogućuje korisniku proizvoljan odabir frekvencije i amplitude sinusnog vala, grafički prikaz proizvoljnog sinusnog vala odabirom opcije *Iscrtavanje* te zvukovnu interpretaciju čistog sinusnog vala odabirom opcije *Zvuk*. Također moguće je vidjeti i poslušati usporedbu dvaju valova s obzirom na visinu odnosno glasnoću zvuka odabirom jedne od dviju opcija iz svojstva zvuka koje smo definirali u podnaslovu 3.1.

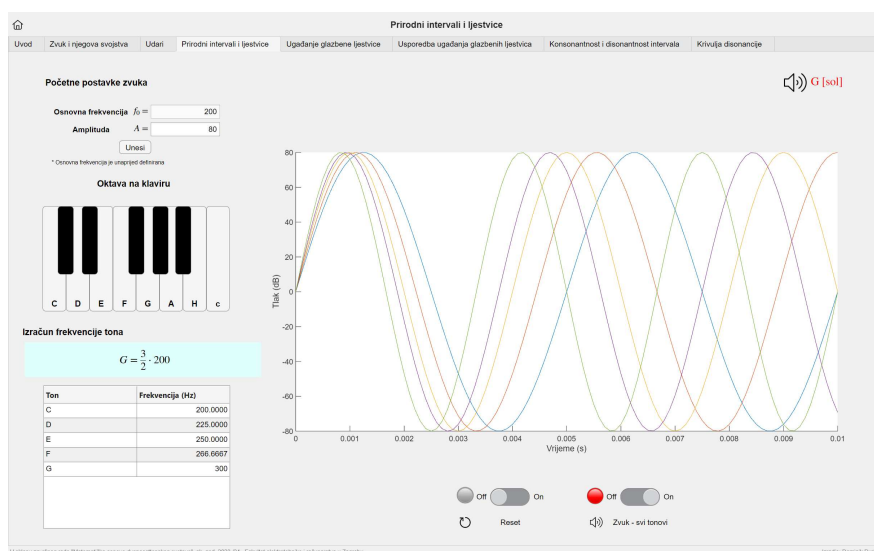


Slika A.3: Kartica „Zvuk i njegova svojstva“



Slika A.4: Kartica „Udari“

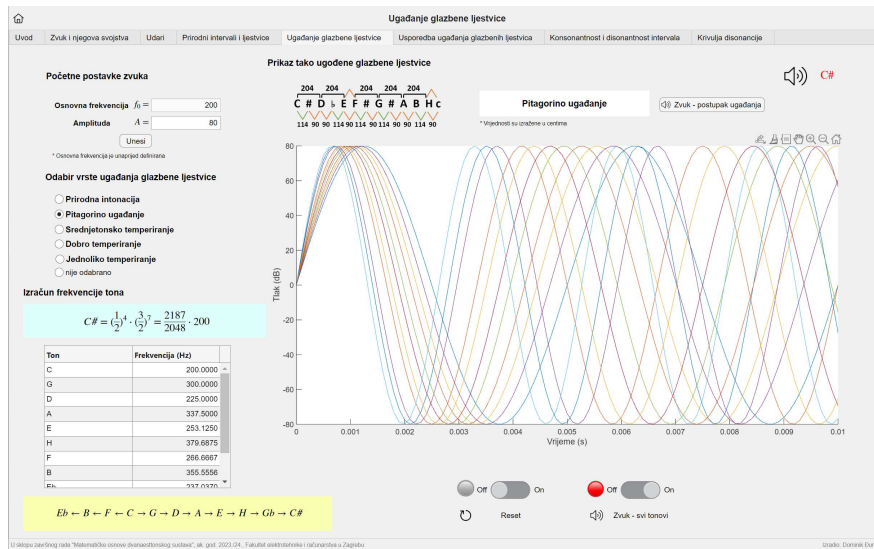
Slika A.4 nam prikazuje karticu „Udari“. Ova kartica omogućuje korisniku proizvoljan odabir dvaju sinusnih valova bliskih frekvencija te mogućnost superpozicije odabranih valova kako bi korisnik mogao grafički vidjeti pojavu udara koju smo spomenuli u podnaslovu 3.2. Uz grafički prikaz udara moguće je i poslušati superponirani val te se uvjeriti da on doista zvuči kao udari. Također moguće je odabrati opciju Fourierove transformacije superponiranog vala kako bi istaknuli komponente od kojih je sastavljen superponirani val.



Slika A.5: Kartica „Prirodni intervali i ljestvice“

Na kartici „Prirodni intervali i ljestvice“ na slici A.5, korisnik može pritisnuti

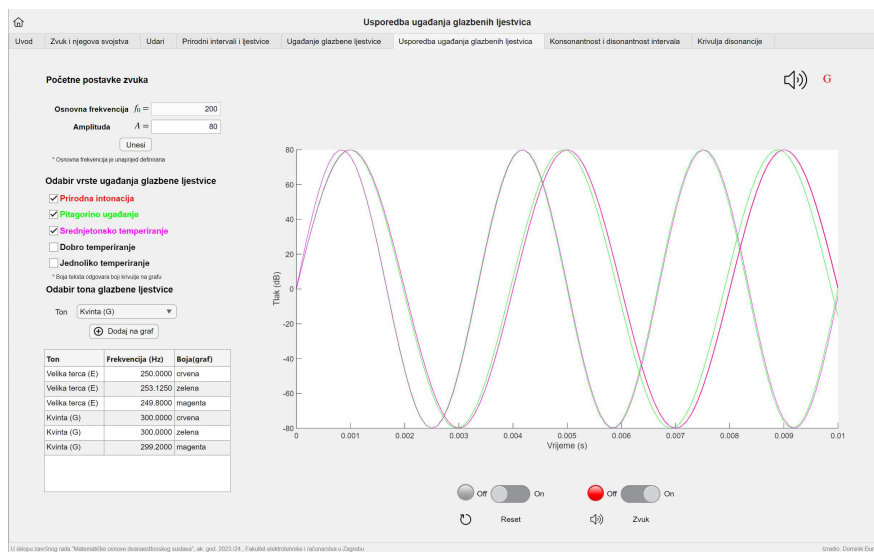
tipke koje predstavljaju osnovnu oktavu na klaviru te pogledati grafički prikaz i zvukovnu interpretaciju sinusnih valova koje proizvode pritisnute tipke odnosno tonovi. Odabirom opcije *Zvuk – svi tonovi* moguće je pogledati i poslušati sve tonove koji čine oktavu. U tablici se ispisuju odabrani tonovi te njihove frekvencije izračunate prema izračunima iz plavog pravokutnika.



Slika A.6: Kartica „Ugađanje glazbene ljestvice“

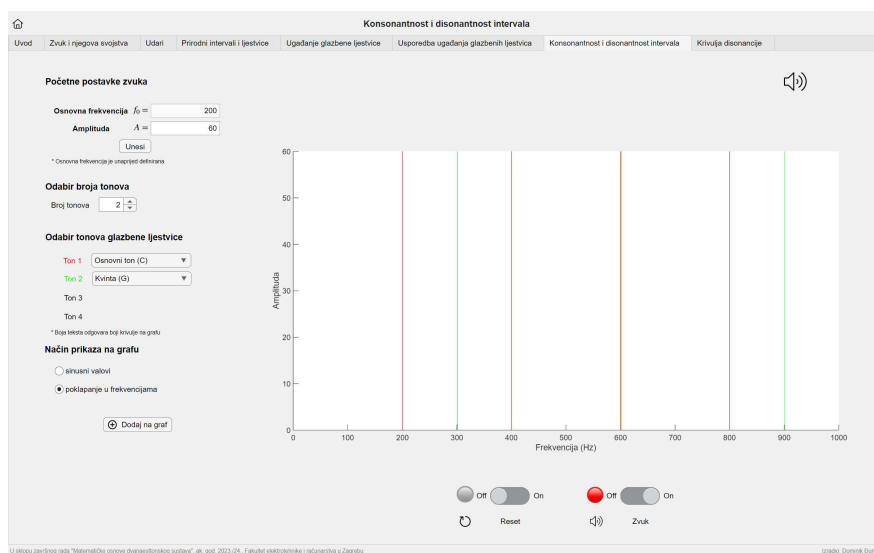
U kartici „Ugađanje glazbene ljestvice“ na slici A.6 , moguće je odabrati jednu vrstu ugađanja među ponuđenim vrstama ugađanja koja smo obradili u poglavlju 4. Za svaku vrstu ugađanja moguće je grafički prikazati te zvukovno interpretirati sve tonove glazbene ljestvice nastale odabranom vrstom ugađanja. Izračunate frekvencije tonova određene vrste ugađanja moguće je vidjeti u tablici. Osim izračuna frekvencije, možemo vidjeti i ilustrativni prikaz raspodjele tonova u glazbenoj ljestvici ugođenoj prema odabranoj vrsti ugađanja. Također možemo i pratiti korake ugađanja na dnu kartice.

Sljedeća kartica „Usporedba ugađanja glazbenih ljestvica“ prikazuje tonove u odabranoj vrsti ugađanja na jednak način kao i u prethodnoj kartici, ali dodatno omogućuje izbor tonova te vrste ugađanja koje korisnik želi usporediti. Navedenu karticu možemo vidjeti na slici A.7.



Slika A.7: Kartica „Usporedba ugađanja glazbenih ljestvice“

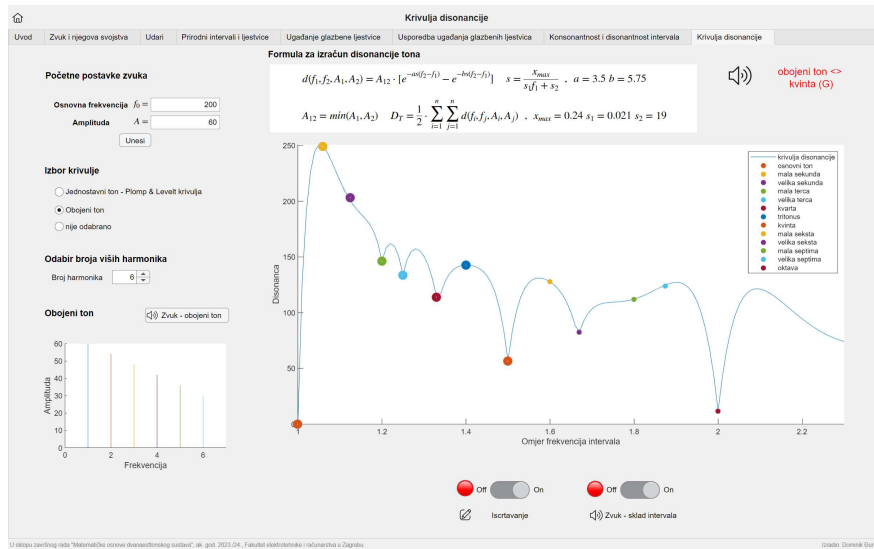
Kartica „Konsonantnost i disonantnost intervala“ na slici A.8 omogućuje korisniku harmonijsku usporedbu dvaju ili više odabranih tonova. Moguće je grafički prikazati tonove kao sinusne valove ili kao preklapanja u frekvencijama. Također moguće je poslušati kako odabrani tonovi zvuče zajedno te po sluhu potvrditi njihovu konsonantnost odnosno disonantnost.



Slika A.8: Kartica „Konsonantnost i disonantnost intervala“

Posljednja kartica „Krivulja disonancije“ omogućuje korisniku izračun i prikaz krivulje disonancije za jednostavan ili obojeni ton. Frekvenciju, amplitudu te broj viših harmonika obojenog tona korisnik proizvoljno odabire. Na vrhu kar-

tice moguće je vidjeti formule za izračun krivulje disonancije. Također moguće je poslušati skladnost odabranog jednostavnog odnosno obojenog tona s istim tonom, ali u različitim intervalima te pratiti njihov prikaz na krivulji disonancije. Ovu karticu možemo vidjeti na slici A.9.



Slika A.9: Kartica „Krivulja disonancije“

Aplikaciju „Matematičke osnove dvanaesttonskog sustava“ moguće je preuzeti na vlastito računalo preko linka <https://github.com/dominikDurinic/MatematikeOsnoveDvanaesttonskogSustava.git>. U nastavku slijede upute za instalaciju aplikacije na vlastito računalo.

Postupak preuzimanja i instalacije aplikacije na vlastito računalo:

1. Preuzmite .exe datoteku `MatOsnDvanSus1_2_AppInstaller.exe` s linka na Github repozitorij <https://github.com/dominikDurinic/MatematikeOsnoveDvanaesttonskogSustava.git> na Vaše računalo
2. Nakon preuzimanja spomenute datoteke, dvoklikom na preuzetu datoteku pokreće se instalacija aplikacije
3. Slijedite upute koje Vam instalacijski program navodi i odaberite mjesto za pohranu aplikacije
4. Nakon što instalacija završi, pronađite i odaberite instaliranu aplikaciju te ju dvoklikom pokrenite

Za kraj ćemo prikazati izvorne kôdove pet osnovnih funkcija koje su korištene u izradi aplikacije.

Prva funkcija `playAudio` predstavlja funkciju za reprodukciju zvuka. Pomoću objekta `audioplayer` postavlja se element koji je potrebno reproducirati. U našem slučaju radi se o zvukovnim interpretacijama sinusnih valova. Pokretanje zvukovne interpretacije vrši se uz pomoć već ugrađene funkcije `play(audioplayer)`. Izvorni kôd ove funkcije možemo pogledati u nastavku.

```
%Funkcija playAudio
%zvukovna interpretacija vala

function playAudio(app,p,pauza,labela,tekstLabele,prekidac,lampa,slika)
    prekidac.Value = 'On';
    lampa.Color = 'red';
    slika.Visible = true;

    app.player = audioplayer(p, 8192);           %postavljanje audioplayera
                                                %s 8192 sample rate
    play(app.player);                           %pokretanje audioplayera

    labela.Text = tekstLabele;
    labela.Interpreter = "latex";

    pause(pauza);
    stop(app.player);                           %zaustavljanje audioplayera

    prekidac.Value = 'Off';
    lampa.Color = [0.65,0.65,0.65];
    slika.Visible = false;
    labela.Text = "";
end
```

Druga funkcija `izracunFrekvencije` omogućuje izračun frekvencije tonova s obzirom na zadani omjer frekvencija te ispis izračunate frekvencije u tablicu. Izvorni kôd ove funkcije možemo pogledati u nastavku.

```
%Funkcija izracunFrekvencije
%izracunavanje frekvencija i ispis u tablici

function izracunFrekvencije(app,ton,omjer,tablica)
    app.izrFrek = omjer * app.F;           %izracun frekvencije tona

    nr = {ton app.izrFrek};
    tablica.Data = [tablica.Data; nr];    %unos novog retka u tablicu
end
```

Treća funkcija `iscrtajZvukTon` je funkcija koja izračunava sinusni val prema proizvoljno odabranoj frekvenciji i amplitudi te iscrtava krivulju izračunatog vala na grafu. Izvorni kôd ove funkcije možemo pogledati u nastavku.

```
%Funkcija iscrtajZvukTon
%iscrtavanje sinusnog vala na grafu

function iscrtajZvukTon(app,ton,axes,labelaZvuka, sklopka, lampa, slika)
    app.t=(0:1/(100*100):1);               %vrijeme
    app.P=app.A*sin(2*pi*app.izrFrek*app.t); %tlak - jednadzba sinusnog vala

    if strcmp(app.color, '')
        plot(axes, app.t,app.P);          %iscrtavanje izracunatog sinusnog vala
    else
        plot(axes, app.t,app.P,app.color);
    end

    axes.XLim = [0 0.01];                 %postavljanje granica x i y osi grafa
```

```

if app.A>0
    axes.YLim = [-app.A app.A];
end

hold(axes, 'on')

%poziv funkcije za zvukovnu interpretaciju vala
playAudio(app,app.P,1,labelaZvuka,ton,sklopka,lampa,slika);
end

```

Četvrta funkcija `disonancaIzracun` predstavlja funkciju za izračun vrijednosti disonance prema formulama koje smo naveli u podnaslovu 6.3. Izvorni kôd ove funkcije možemo pogledati u nastavku.

```

%Funkcija disonancaIzracun
%izracun vrijednosti disonance

function d = disonancaIzracun(app, frekvencije, amplitude)
    xMax=0.24;                %konstante
    s1=0.0207;
    s2=18.96;
    c1=5;
    c2=-5;
    a=-3.51;
    b=-5.75;

    n=length(frekvencije);
    [frekvencije,ind]=sort(frekvencije);
    amp=amplitude(ind);
    D=0;

    %glavni izracun disonance izmedu svih parova frekvencija
    for i=2:n

```

```

    Fmin=frekvencije(1:n-i+1);
    s=xMax./(s1*Fmin+s2);
    Fraz=frekvencije(i:n)-frekvencije(1:n-i+1);
    AMP=min(amp(i:n),amp(1:n-i+1));
    Dnova=AMP.*(c1*exp(a*s.*Fraz)+c2*exp(b*s.*Fraz));
    D=D+Dnova*ones(size(Dnova))';
end
d=D;
end

```

Posljednja funkcija koju ćemo navesti je funkcija `krivuljaDisonancije`. Ova funkcija priprema odabrane vrijednosti frekvencije, amplitude i broja harmonika za izračun vrijednosti disonance nad izabranim intervalima. Poziva prethodno definiranu funkciju `disonancaIzracun` nad izabranim intervalima te nakon dobivenih vrijednosti disonance, iscrtava krivulju disonancije na grafu. Izvorni kôd ove funkcije možemo pogledati u nastavku.

```

%Funkcija krivuljaDisonancije
%priprema i poziv funkcije za izračun disonance za svaki interval

function krivuljaDisonancije(app, brHarmoinika)
    %osnovni intervali za markere - npr.3/2=1,5 => (1,5-1)/0.01 = 50
    osnIntervali = [1,6+1,13,21,26,34,41,51,61,68,81,88,101];
    xvrijedOsnIntervali = [1,1.06,1.12,1.2,1.25,1.33,1.4,1.5, ...
                           1.6,1.67,1.8,1.87,2];
    if brHarmoinika == 0
        %Jednostavni ton
        freq = [app.F];
        amp = [app.A];
        disonanca=0;
        dMax=0;

        for i=1+0.01:0.01:2.3
            %petlja po svakom intervalu
            frekvencije=[freq i*freq];

```

```

    amplitude=[amp, amp];
    %poziv funkcije za izracun disonance
    d=disonancaIzracun(app,frekvencije,amplitude);
    if(d>dMax)
        dMax=d;
    end
    disonanca=[disonanca d];
end

app.diss = disonanca;

%iscrtavanje krivulje disonancije na grafu
plot(app.UIAxes_7,1:0.01:2.3,disonanca);
hold(app.UIAxes_7,'on');
app.UIAxes_7.XLim = [1 2.3]; %postavljanje granica x i y osi grafa
app.UIAxes_7.YLim = [0 dMax];

%označavanje markera za odabrane intervale na grafu
for i=1:numel(osnIntervali)
    plot(app.UIAxes_7,xvrijedOsnIntervali(1,i), ...
        disonanca(1,osnIntervali(1,i)),'*', 'LineWidth',2);
end
legend(app.UIAxes_7,'krivulja disonancije','osnovni ton', ...
    'mala sekunda','velika sekunda','mala terca', ...
    'velika terca','kvarta','tritonus','kvinta','mala seksta', ...
    'velika seksta','mala septima','velika septima','oktava');
else
    %Obojeni ton
    amp=[];
    freq=[];
    disonanca=[0];
    dMax=0;
    omjeri = [1,0.9,0.8,0.7,0.6,0.5,0.4,0.3,0.2,0.1];

    %polje s amplitudama i frekvencijama visih harmonika
    for j=1:brHarmoinika
        amp(1,end+1)=app.A*omjeri(1,j);
    end
end

```

```

    freq(1,end+1) = app.F*j;
end

for i=1+0.01:0.01:2.3
    frekvencije=[freq i*freq];
    amplitude=[amp, amp];
    d=disonancaIzracun(app,frekvencije,amplitude);
    if(d>dMax)
        dMax=d;
    end
    disonanca=[disonanca d];
end

app.diss = disonanca;

plot(app.UIAxes_7,1:0.01:2.3,disonanca);
hold(app.UIAxes_7,'on');
app.UIAxes_7.XLim = [1 2.3];
app.UIAxes_7.YLim = [0 dMax];

%označavanje markera za odabrane intervale na grafu
for i=1:numel(osnIntervali)
    plot(app.UIAxes_7,xvrijedOsnIntervali(1,i), ...
        disonanca(1,osnIntervali(1,i)),'*', 'LineWidth',2);
end
legend(app.UIAxes_7,'krivulja disonancije','osnovni ton', ...
    'mala sekunda','velika sekunda','mala terca', ...
    'velika terca','kvarta','tritonus','kvinta','mala seksta', ...
    'velika seksta','mala septima','velika septima','oktava');
end
end

```
