

Izračun napona kratkoga spoja transformatora primjenom konformnih preslikavanja

Jurković, Mario

Doctoral thesis / Disertacija

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:168:903743>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-14**



Repository / Repozitorij:

[FER Repository - University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing repository](#)





Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Mario Jurković

**IZRAČUN NAPONA KRATKOGA SPOJA
TRANSFORMATORA PRIMJENOM KONFORMNIH
PRESLIKAVANJA**

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2021.



Sveučilište u Zagrebu

FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Mario Jurković

**IZRAČUN NAPONA KRATKOGA SPOJA
TRANSFORMATORA PRIMJENOM KONFORMNIH
PRESLIKAVANJA**

DOKTORSKI RAD

Mentor: Prof. dr. sc. Damir Žarko

Zagreb, 2021.



University of Zagreb

FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING AND COMPUTING

Mario Jurković

**CALCULATION OF TRANSFORMER
SHORT-CIRCUIT VOLTAGE USING CONFORMAL
MAPPINGS**

DOCTORAL THESIS

Supervisor: Professor Damir Žarko, PhD

Zagreb, 2021

Doktorski rad izrađen je na Sveučilištu u Zagrebu Fakultetu elektrotehnike i računarstva, Zavodu za elektrostrojarstvo i automatizaciju i u tvornici transformatora Končar D&ST

Mentor: Prof. dr. sc. Damir Žarko

Doktorski rad ima 95 stranica

Doktorski rad br.:

Mojoj voljenoj Mireli.

O MENTORU

Damir Žarko rođen je u Zagrebu 1972. godine. Diplomirao je i magistrirao u polju elektrotehnike na Fakultetu elektrotehnike i računarstva (FER) Sveučilišta u Zagrebu 1995. i 1999. godine. Doktorirao je 2004. godine na University of Wisconsin-Madison, SAD.

Od siječnja 1996. godine zaposlen je na Zavodu za elektrostrojarstvo i automatizaciju FER-a. Sudjelovao je na pet projekata Ministarstva znanosti, obrazovanja i sporta Republike Hrvatske, jednom projektu koji je financirao HAMAG BICRO, jednom projektu koji je financirao Office of Naval Research, SAD, jednom projektu koji je financirao National Renewable Energy Laboratory, SAD i jednom projektu financiranom iz Fonda za ulaganje i znanost i inovacije u okviru Operativnog programa "Regionalna konkurentnost 2007.-2013." Trenutno je voditelj znanstvenog projekta „Napredni elektromotorni pogoni za primjene u vuči“ koji financira Hrvatska zaklada za znanost.

Objavio je više od 60 radova u časopisima i zbornicima konferencija u području električnih strojeva i elektromotornih pogona.

Član je IEEE-a, HRO CIGRÉ i Hrvatskog klastera konkurentnosti sektora elektro-energetskih i proizvodnih strojeva i tehnologija. Sudjelovao je u 10 programskih odbora međunarodnih znanstvenih skupova te je bio recenzent u šest međunarodnih znanstvenih časopisa. Dobitnik je nagrade Hrvatske sekcije IEEE-a za izniman inženjerski doprinos u 2015. godini.

ABOUT THE SUPERVISOR

Damir Žarko was born in Zagreb in 1972. He received his B.Sc. and M.Sc. degrees in the field of electrical engineering from the University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing (FER) in 1995 and 1999 respectively. He received his Ph.D. degree from the University of Wisconsin-Madison, USA in 2004.

Since January 1996 he has been employed at the Department of Electric Machines, Drives and Automation at FER. He participated in five projects financed by the Ministry of Science, Education and Sports of the Republic of Croatia, one project financed by HAMAG BICRO, one project financed by the Office of Naval Research, USA, one project financed by the National Renewable Energy Laboratory, USA, and one project financed from the Science and Innovation Investment Fund within the operational program “Regional Competitiveness 2007-2013“. He is currently the principal investigator of the project “Advanced Electric Drives for Traction Applications” financed by the Croatian Science Foundation.

He published more than 60 papers in journals and conference proceedings in the field of electric machines and drives.

He is a member of IEEE, HRO CIGRÉ and Croatian Cluster of Competitiveness of the Sector of Electric Power and Manufacturing Machines and Technology. He participated in programs committees of ten international scientific conferences and served as a reviewer for six international journals. He received the IEEE Croatian Section award for outstanding engineering contributions in the year 2015.

ZAHVALA

*Dobar sam boj bio, trku završio, vjeru sačuvaao.
Stoga, pripravljen mi je vijenac pravednosti kojim će mi u onaj Dan uzvratiti Gospodin, pravedan sudac; ne samo meni, nego i svima koji s ljubavlju čekaju njegov pojavak.*

— Sveti Pavao

Hvala mentoru prof. dr. sc. Damiru Žarku na velikoj podršci, nesebičnoj pomoći, inspiraciji, dugim razgovorima i korisnim savjetima tijekom mog doktorskog istraživanja. Puno sam naučio od Vas.

Hvala bivšoj i sadašnjoj upravi Končar D&ST-a, dragim prijateljima iz tehničkog ureda, ispitnoj stanici i svim ostalim končarevcima koji su mi pružili pomoć, podršku i savjete kad god je trebalo.

Hvala Ani na korisnim jezičnim savjetima tijekom pisanja ove disertacije te Heleni na lektoriranju i velikoj pomoći da jezični dio disertacije ostane vjeran pravilima i duhu hrvatskoga jezika.

Hvala mojoj obitelji, posebno mojim roditeljima Dijani i Jozi te sestri Josipi na velikoj podršci od samog početka školovanja. Posebno hvala bratu Zvonimiru, na podršci i nadasve korisnim dubokim raspravama i pomoći prilikom doktorskog istraživanja.

Hvala mojim kćerima Emi i Sari, na svim sretnim trenucima koji su me u pravo vrijeme razveselili, odmaknuli od raznih znanstvenih i poslovnih briga, i vratili mi vjeru u bolje sutra. Hvala na strpljivosti, koliko je to dječja razigranost dopuštala, sad će tata imati više vremena za igru.

I na kraju, najveće hvala mojoj Mireli. Hvala na strpljenju i nesebičnoj ljubavi. Najbolja si!

Mario Jurković
Zagreb, Listopad 2021



SAŽETAK

Napon kratkog spoja transformatora vrijednost je primarnog napona kod kojeg kroz kratko spojeni sekundar teče nazivna struja, a izražava se u postocima nazivnog primarnog napona. Pomoću njega računa se struja kratkog spoja, što je značajan podatak za projektiranje zaštite transformatora. Zbog toga je napon kratkog spoja jedna od bitnih karakteristika transformatora i potrebno ga je što točnije izračunati. U literaturi se mogu pronaći razne analitičke metode za izračun napona kratkog spoja koje imaju različita ograničenja po pitanju relativnog položaja namota na jezgri i samog broja namota. Postojeće analitičke metode mogu se primijeniti samo kada se namoti transformatora nalaze na istom stupu.

U ovom radu predstavljena je analitičko-numerička metoda za izračun napona kratkog spoja transformatora primjenom konformnih preslikavanja. Prostor unutar prozora jezgre transformatora i prostor izvan jezgre transformatora u uzdužnom presjeku te prostor izvan jezgre transformatora u poprečnom presjeku preslikavaju se u prostor unutar kruga jediničnog radijusa u kojemu je moguće analitički izračunati komponente magnetske indukcije u x -osi i y -osi. Rješenje magnetske indukcije nakon toga preslikava se iz kruga jediničnog radijusa u originalnu domenu. Namoti transformatora prikazani su nizom točkastih vodiča koji se preslikavaju na krug jediničnog radijusa te se za pojedinu točku u prostoru računa magnetska indukcija u toj točki kao zbroj rješenja svih točkastih vodiča. Nakon toga integracijom energije rasipnog polja po volumenu zraka koji okružuje jezgru transformatora (u namotima i prostoru oko namota, isključujući jezgru) izračunava se napon kratkog spoja transformatora. Ova metoda uzima u obzir namote različitih visina, efekt skošenja silnica polja na krajevima namota te bilo koji relativni položaj namota koji se mogu nalaziti na istom ili različitim stupovima. Osim toga, moguće je izračunati napon kratkog spoja višenamotnog transformatora.

Kod transformatora koji imaju namote koji se sastoje od dva ili više paralelno spojenih svitaka, kao što je transformator za električnu vuču, potrebno je poznavati raspodjelu struja kroz svitke da bi se izračunao napon kratkog spoja. Predložena metoda može se koristiti za izračun raspodjele struje u slučaju asimetrične raspodjele magnetskog polja kod namota koji se sastoje od dvaju ili više paralelno spojenih svitaka.

U konačnici, metoda je testirana na većem broju distribucijskih trofaznih transformatora, energetskih trofaznih transformatora i specijalnih jednofaznih transformatora te daje odlična slaganja s mjerenim vrijednostima napona kratkog spoja. Osim toga, metoda je testirana na transformatorima za električnu vuču te također daje odlična slaganja s mjerenim vrijednostima raspodjele struja po paralelno spojenim svicima visokonaponskog namota.

KLJUČNE RIJEČI: transformator, napon kratkog spoja, raspodjela struja kroz paralelno spojene svitke, konformno preslikavanje, Schwarz-Christoffelova transformacija

ABSTRACT

CALCULATION OF TRANSFORMER SHORT-CIRCUIT VOLTAGE USING CONFORMAL MAPPINGS

The short-circuit voltage is one of the most important characteristics of the transformer. It is defined as the value of the primary voltage at which the rated current flows through the shorted secondary, and is expressed as a percentage of the rated primary voltage. This parameter is very important for the calculation of short-circuit currents in power systems used for transformer protection design. Therefore, the short-circuit voltage is one of the essential characteristics of a transformer and must be calculated as accurately as possible. Various analytical and combined analytical-numerical methods for calculating the short-circuit voltage can be found in the literature. However, these methods have been developed for transformers where the windings are on the same limb and often have limitations in terms of the number of windings, the requirements for symmetry of the windings with respect to the core window of the transformer, or the requirements for equal heights or widths of the windings.

The limitations of analytical methods can be circumvented using computer software based on the finite element method (FEM). The FEM allows accurate calculation of the short-circuit voltage of different types of transformers. The design phase of a transformer usually requires a considerable number of geometrical variations to achieve the required short-circuit voltage and to ensure proper spacing for the placement of conductor and insulating layers, as well as additional radial and axial cooling ducts. In this case, the proposed method can be a good alternative to FEM as it allows a simple modelling with only a few geometrical and electrical parameters of the transformer to be varied.

The biggest problem in calculating the short-circuit voltage, where the windings are on different limbs, is the transformer core. Consideration must be given to how the core affects the leakage field when the sum of the ampere-turns of all the windings is equal to zero. Conformal mappings that convert complex geometric shapes into simple shapes for which magnetic field solutions can be easily found offer great potential for solving this problem.

For most types of transformers, existing analytical methods of analysis are adequate. However, for special transformers with complex geometry (e.g. traction transformers), where several windings are located on different limbs and parallel-connected sections of a high-voltage winding are located on different limbs with asymmetrical distribution of the magnetic field in short-circuit tests, these analytical methods cannot be used and the designer must rely on experience and measurements on similar transformers. Practice has shown that transformer manufacturers use computer programs based on the FEM method for research and development and for the analysis of special designs, but not for the everyday design of transformers used for offers to customers. It is therefore necessary to develop a method for rapid calculation of short-circuit voltage with sufficient accuracy, i.e. a method that is reliable and ensures good agreement with the measured values within the guaranteed tolerances and that can be easily integrated into existing transformer design programs.

This thesis describes a combined analytical-numerical method for calculating the short-circuit voltage of a transformer using conformal mappings. The space inside the transformer core window and the space outside the transformer core in longitudinal cross-section, as well as the space outside the transformer core in transverse cross-section, are mapped onto a unit disk where magnetic flux density is calculated using known analytical solutions. The magnetic flux density is then mapped from the unit disk to the original domain. The transformer windings are modeled with many point wires in the original domain, which are mapped onto a unit disk. The magnetic flux density at a single point in space is calculated as the sum of the solutions of all the point wires. The short-circuit voltage of the transformer is calculated by integrating the magnetic energy of the leakage field in the windings and the space around the windings, excluding the core. This method takes into account windings of different heights, the fringing effect at the ends of the windings, and any relative position of windings located on the same or different limbs. It is also possible to calculate the short-circuit voltage for multiple windings. The proposed method does not consider the saturation of the transformer core. However, assuming that the transformer core is not saturated during the short-circuit test, the proposed solution can be used to calculate the short-circuit voltage.

In this thesis, an algorithm for calculating the asymmetric current distribution in parallel-connected high-voltage winding sections of a transformer during a short-circuit test caused by an asymmetric magnetic field distribution is described. This calculation is important for transformers with multiple windings, such as traction transformers and rectifier transformers, which have a high-voltage winding consisting of sections connected in parallel, where the number of sections is equal to the number of low-voltage windings and only one low-voltage winding is shorted during the short-circuit test.

An optimization method, combined with a semi-analytical transformer model based on conformal mapping, is used to calculate the magnetic field and find a combination of currents in parallel connected sections, assuming equal induced voltages, i.e. flux linkages, in each section. The solution of the magnetic field is based on the Schwarz-Christoffel (SC) transformation of a standard region (unit disk) to the problem region (rectangular cross-section of a transformer), followed by the calculation of the magnetic vector potential and flux linkage in the windings using analytical solutions from the book *The Principles of Electromagnetism Applied to Electrical Machines* by B. Hague. Once the current distribution is known, the magnetic field and short-circuit voltage can be calculated using the proposed method or other methods applicable to multi-winding transformers. The algorithm can deal with different types of asymmetries in the transformer geometry: windings with different heights and relative distances to the top and bottom yoke, high voltage and low voltage windings located on the same or different limbs, and multiple windings such as tertiary and/or voltage regulation windings. This flexibility is possible because the windings are modelled with a large number of point wires in the problem domain, which can be easily distributed to follow the shape and location of the windings. The implementation is simple since only a few geometrical and electrical parameters are required.

The method has been tested on a number of three-phase distribution transformers, power transformers, special single-phase transformers and single-phase traction transformers. The results show good agreement with the measured values of short-circuit voltage. In addition, the method was tested on special single-phase transformers and single-phase traction transformers. The results show good agreement with the measured values of current distribution through the parallel connected sections of the high voltage winding. The scientific contributions of this thesis can be used in the design of special transformers where, due to the specific geometry, it is not possible to use existing analytical methods and special programs based on these methods. In addition to transformers, the scientific contributions of this work can also be applied to the design of reactors with magnetic

frames. Some suggestions for further research and development of the method are:

- code optimization and solution of the problem of nested *for* loops to reduce the time needed for computation,
- investigation of the influence of the tank on the calculation of the short-circuit voltage and current distribution, since at the moment the method takes into account only the geometry of the active part of the transformer (core and windings),
- study of the possibility of applying the proposed method for the calculation of inductance of reactors with magnetic frame.

Compared to the methods described in the literature, the transformer short-circuit voltage calculation method developed in this thesis uses a new approach in which the 3D solution is approximated by extrapolating several 2D solutions. The following items are the original scientific contributions of this work:

1. Method for calculation of transformer leakage field and short-circuit voltage using conformal mappings in longitudinal and transverse cross-sections of core and transformer windings

This scientific contribution includes a method for calculating the leakage field, i.e. the short-circuit voltage of a transformer. The geometries of the longitudinal and transverse cross-sections of the transformer core and winding (physical domain) are mapped onto a unit disk (canonical domain) using conformal mapping, where the magnetic flux density solution is known and this solution is mapped back onto the physical domain. The energy of the leakage field is calculated from the magnetic flux density, and the leakage inductance, i.e. the leakage reactance, is calculated from the energy. The winding resistance and the leakage reactance form the short-circuit impedance, from which the short-circuit voltage is obtained. The equation for the analytical solution of the magnetic vector potential is derived assuming an infinitely permeable iron core, whereas in reality the iron has a finite permeability. Considering that this analytical solution is used in situations where the transformer core is not saturated, the assumption of an infinitely permeable iron core is valid and does not significantly affect the accuracy of the short-circuit voltage calculation.

2. Numerical procedure for calculating the energy of the transformer leakage field in three-dimensional space by extrapolating two-dimensional field solutions in longitudinal and transverse cross-sections obtained using conformal mappings

The short-circuit voltage of the transformer can be calculated from the energy of the leakage field in the space outside the windings and in the windings. The methods available in the literature using this method to calculate the short-circuit voltage are based on the calculation of spatial energy by integrating a single two-dimensional solution in the cross-section of the transformer core window in a cylindrical coordinate system with an angular range from 0 to 2π . This scientific contribution includes an algorithm which describes the extrapolation of two-dimensional solutions from three different cross sections, obtained by applying conformal mappings, into three-dimensional space. The total volume energy around a core limb can be expressed as the sum of the surface energies from 0 to 2π . The surface energies for angles 0, $\pi/2$, π and $3\pi/2$ are calculated from three different cross-sections and then extrapolated to several angles, e.g. for angles 0 to 2π with steps $\pi/360$. The total volume energy is then obtained by numerical integration of the surface energies from 0 to 2π .

3. An algorithm for calculating the current distribution through parallel-connected sections of a transformer high-voltage winding with an asymmetrical arrangement of shorted low-voltage windings in a transformer window and an asymmetrical magnetic field distribution during short-circuit tests

For multi-winding transformers, such as traction or rectifier transformers, the current distribution through the parallel-connected sections of the high-voltage winding must first be calculated to accurately determine the short-circuit voltage. This scientific contribution includes an algorithm which describes the calculation of the currents through the parallel-connected sections of the high-voltage winding in the case of an asymmetric magnetic field distribution during short-circuit tests. These currents are used to calculate the leakage field and short-circuit voltage using the method described in the thesis. These currents are also used for the calculation of the correct short-circuit losses.

This thesis consists of eight chapters, divided into three parts: Part (I) "General Considerations" consists of three chapters: Chapter 1. "Introduction", Chapter 2. "An overview of transformer short-circuit voltage calculation methods" and Chapter 3. "An overview of conformal mapping application"; Part (II) "Theoretical background" consists of two chapters: Chapter 4. "Theory of Conformal Mappings" and Chapter 5. "Calculation of Magnetic Field Using Conformal Mappings"; Part (III) "Application of Conformal Mappings in Transformers" consists of three chapters: Chapter 6. "Calculation of Short-Circuit Voltage", Chapter 7. "Calculation of Current Distribution in Parallel-Connected Winding Sections" and Chapter 8 "Conclusion".

- × CHAPTER 1. In this chapter, the definition of short-circuit voltage is given. It is explained why it is one of the most important parameters of the transformer. Also, the aim and motivation of the research are explained. The original scientific contributions and the structure of the thesis are listed and described, i.e. a list of chapters with a brief description of each chapter.
- × CHAPTER 2. This chapter reviews the methods available in the literature for calculating transformer short-circuit voltage. These methods were developed for transformers that have windings on the same limb. They are usually limited by the number of windings for which a short-circuit voltage can be calculated, require symmetrically placed windings relative to the transformer core window, and equal winding heights or widths. In addition to analytical methods, numerical methods are also available in the literature, of which the most commonly used is the finite element method, which eliminates the shortcomings of analytical methods. The drawbacks of the finite element method are described in chapter 1. It is also described how the method proposed in this thesis can be a good alternative to the finite element method.
- × CHAPTER 3. This chapter gives an overview of the application of conformal mapping in transformers. Conformal mapping is used to calculate the magnetic field inside the transformer core and the magnetic field near the air gap in a transformer with a gapped core. In another example, conformal mapping is used to calculate the electric field in the region between the core yoke and the windings. In addition, the application of conformal mapping in a rotating machine is briefly described, using a similar principle as in this thesis.
- × CHAPTER 4. In this chapter, a general description of conformal mapping is given and a conformal mapping from a two-dimensional cross-section of space inside and outside the transformer core window to a unit disk and vice versa is explained in detail. This conformal mapping is used to map the magnetic flux density solution from a unit disk to three different cross-sections of the transformer,

i.e. to a longitudinal cross-section of the space inside the transformer core window, to a longitudinal cross-section of the space outside the transformer core, and to a transverse cross-section of the space outside the transformer core. In the case of a single-phase transformer with a two-limb core and in the case of an asymmetrical field distribution during short-circuit tests, it is necessary to use a transverse cross-section of the space outside the transformer core for both limbs.

- × CHAPTER 5. This chapter describes the calculation of the magnetic field in an air tunnel surrounded by iron. The unit disk was chosen as the canonical domain because the solution of the magnetic scalar potential for point current in an air tunnel surrounded by iron is available in the literature. The magnetic field of many point currents is obtained by summing the contributions of all point currents. The magnetic flux density and the magnetic vector potential are obtained from the magnetic scalar potential.
- × CHAPTER 6. This chapter describes the application of the conformal mapping from the chapter 4 to calculate the energy of the leakage field from the solution of the magnetic flux density. Furthermore, the leakage inductance is calculated from the energy of the leakage field. The reactive part of the short-circuit voltage can then be calculated from the leakage inductance. The active part of the short-circuit voltage is calculated from the total ohmic losses in the short-circuit test. Finally, the short-circuit voltage is calculated from the active and reactive parts.
- × CHAPTER 7. This chapter describes an algorithm for calculating the current distribution through parallel-connected sections of the high-voltage winding of a transformer. In a multi-winding transformer with a high-voltage winding, which usually consists of several sections connected in parallel and located on the same or on different core limbs, an asymmetric distribution of the magnetic field during short-circuit tests occurs for certain combinations of windings. To calculate the short-circuit voltage, it is necessary to calculate the current distribution. A correct current distribution is an essential input variable for the correct calculation of the short-circuit voltage and also for the correct ohmic losses in the windings.
- × CHAPTER 8. In this chapter a brief analysis of the results obtained is given, conclusions are drawn on the basis of the application of the presented method to several examples of three-phase and single-phase transformers, and a suggestion is made for the further development of the method.

KEY WORDS: transformer, short-circuit voltage, current distribution through parallel-connected winding sections, conformal mapping, Schwarz-Christoffel transformation

SADRŽAJ

I	Općenita razmatranja	1
1	Uvod	2
1.1	Napon kratkog spoja transformatora	2
1.2	Cilj istraživanja	2
1.3	Izvorni znanstveni doprinosi	3
1.4	Struktura rada	4
2	Pregled metoda za izračun napona kratkog spoja transformatora	5
2.1	Analitičke metode	5
2.2	Numeričke metode	6
3	Pregled primjene konformnih preslikavanja	8
II	Teoretska podloga	11
4	Teorija konformnih preslikavanja	12
4.1	Geometrijska interpretacija i definicija	12
4.2	Schwarz-Christoffelova transformacija	14
4.3	Schwarz-Christoffel Toolbox	15
4.4	Preslikavanje jediničnog diska na površinu unutar pravokutnika	16
4.5	Preslikavanje jediničnog diska na površinu izvan pravokutnika	16
4.6	Preslikavanje tri različita presjeka transformatora na jedinični disk	16
5	Izračun magnetskog polja primjenom konformnog preslikavanja	20
5.1	Analitičko rješenje skalarnog magnetskog potencijala	20
5.2	Magnetska indukcija u kanonskoj domeni	21
5.2.1	Izračun B_r i B_t za $r < r_v$	22
5.2.2	Izračun B_r i B_t za $r > r_v$	22
5.2.3	Izračun B_r i B_t za $r = r_v$	23
5.3	Magnetska indukcija u fizičkoj domeni	23
5.4	Model prozora jezgre transformatora	25
5.5	Vektorski magnetski potencijal u kanonskoj domeni	31
5.5.1	Izračun A_z za $r < r_v$	31
5.5.2	Izračun A_z za $r > r_v$	31
5.5.3	Izračun A_z za $r = r_v$	32
5.6	Vektorski magnetski potencijal u fizičkoj domeni	32

III Primjena konformnih preslikavanja kod transformatora	33
6 Izračun napona kratkog spoja	34
6.1 Energija rasipnog polja u 2D prostoru	34
6.2 Energija rasipnog polja u 3D prostoru	35
6.2.1 Usporedba ekstrapoliranog rješenja u Matlabu s rješenjem 3D modela u MagNetu	37
6.3 Primjer izračuna napona kratkog spoja za trofazne transformatore	39
6.4 Primjer izračuna napona kratkog spoja za jednofazne transformatore	40
6.5 Analiza točnosti i vremena izračuna	43
7 Izračun raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke namota	47
7.1 Izračun raspodjele struja u 2D modelu transformatora	49
7.2 Izračun raspodjele struja u kvazi 3D modelu transformatora	52
7.3 Izračun raspodjele struja između dvaju paralelnih svitka	54
7.4 Utjecaj centra konformnog preslikavanja na izračun ulančenog toka	58
7.5 Rješenje vektorskog magnetskog potencijala prema Knoepfelu	61
7.6 Usporedba rezultata izračuna i mjerenja	64
8 Zaključak	72
Literatura	74
Popis slika	78
Popis tablica	81
Prilog - Rabinsova metoda za izračun napona kratkog spoja	82
Životopis	93
Popis radova	94
Curriculum vitae	95

AKRONIMI

UNIZG	University of Zagreb
FER	Fakultet elektrotehnike i računarstva
MKE	Metoda konačnih elemenata
FEM	Finite element method
SC	Schwarz-Christoffel
IEC	International Electrotechnical Commission
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
HRO CIGRÉ	Hrvatski ogranak Međunarodnog vijeća za velike elektroenergetske sustave
HAMAG BICRO	Hrvatska agencija za malo gospodarstvo, inovacije i investicije

Dio I

Općenita razmatranja

1.1 Napon kratkog spoja transformatora

Napon kratkog spoja transformatora je napon kod kojega, uz kratko spojeni sekundarni namot, kroz primarni namot teče nazivna struja. Izražava se u postocima u odnosu na nazivni napon, te za jednofazni transformator vrijedi

$$u_{k\%1f} = 100 \cdot \frac{I_n \cdot Z_k}{U_n} = 100 \cdot \frac{S_n \cdot Z_k}{U_n^2} \quad (1.1)$$

gdje je I_n nazivna struja, Z_k impedancija kratkog spoja, U_n nazivni napon te S_n nazivna snaga jednofaznog transformatora. Za trofazni transformator vrijedi

$$u_{k\%3f} = 100 \cdot \frac{I_{fn} \cdot Z_k}{U_{fn}} = 100 \cdot \frac{S_n \cdot Z_k}{U_n^2} \quad (1.2)$$

gdje je I_{fn} nazivna fazna struja, Z_k impedancija kratkog spoja, U_{fn} nazivni fazni napon, U_n nazivni linijski napon te S_n nazivna snaga trofaznog transformatora. Drugi dio jednadžbe 1.2, izražen preko nazivne snage transformatora, vrijedi za spoj nadomjesne zvijezde. Navedene jednadžbe računaju se na osnovu mjerenih vrijednosti struja i napona u pokusu kratkog spoja, iz kojih se računa impedancija kratkog spoja Z_k .

Napon kratkog spoja jedan je od bitnih parametara transformatora koji se koristi za izračun struje kratkog spoja. Zbog toga je potrebno relativno točno, unutar granica tolerancije određenih normom ili zahtjevima kupca, izračunati napon kratkog spoja transformatora. Najčešće granice tolerancije, definirane IEC normama [1, 2], su $\pm 10\%$, a ponekad kupci zahtijevaju i manje tolerancije.

Postoje razni analitički izračuni napona kratkog spoja koji uvode razna pojednostavljenja zbog kojih je relativno jednostavno moguće doći do rezultata koji su zadovoljavajuće točnosti u nekim slučajevima. Međutim, u pojedinim slučajevima zadovoljavajuće točni izračuni mogu se dobiti jedino korištenjem računala i nekih od programa koji se temelje na metodi konačnih elemenata, odnosno MKE metodi (engl. *Finite Element Method, FEM*). Međutim, MKE programi u pravilu zahtijevaju veći utrošak vremena od analitičkih metoda, teže ih je integrirati u postojeće specijalne programe za projektiranje transformatora koje su razvili proizvođači, pa ih je nepraktično koristiti u fazi izrade ponude za kupca transformatora.

1.2 Cilj istraživanja

Napon kratkog spoja relativno je jednostavno izračunati kod dvonamotnog transformatora s namotima na istom stupu zbog jednostavne osnosimetrične geometrije. Najčešće se koristi Rabinsova metoda koja se temelji na izračunu vektorskog magnetskog potencijala u područjima unutar namota i izvan namota. Osim Rabinsove metode u literaturi se mogu pronaći i druge analitičke metode za izračun napona kratkog spoja, međutim, sve te metode ograničene su raznim uvjetima, odnosno

moгу se koristiti samo za namote koji se nalaze na istom stupu te namoti ne mogu biti u bilo kojem relativnom međusobnom položaju u prostoru.

Za većinu tipova transformatora dovoljne su postojeće analitičke metode, međutim, kod specijalnih transformatora s kompleksnom geometrijom (npr. transformator za električnu vuču) koji imaju više namota, kojima se namoti nalaze na različitim stupovima i imaju paralelne grane na različitim stupovima, gdje se javlja asimetrična raspodjela magnetskog polja u pokusima kratkog spoja, te analitičke metode nije moguće koristiti te se projektant mora osloniti na iskustvo i prijašnja mjerenja. Praksa je pokazala da se u tvornicama transformatora koriste računalni programi koji se temelje na MKE metodi u odjelima razvoja za svrhe analize ili specijalnog projekta, ali ne i kod svakodnevnog projektiranja transformatora za ponude kupcima. Zbog toga je potrebno razviti metodu pomoću koje bi se napon kratkog spoja mogao izračunati relativno brzo uz dovoljnu točnost, tj. metodu koja bi bila pouzdana i koja bi osigurala podudaranje s rezultatima mjerenja u pokusu kratkog spoja unutar garantiranih tolerancija te bi se mogla jednostavno integrirati u postojeće programe za projektiranje transformatora.

1.3 Izvorni znanstveni doprinosi

U ovom istraživanju razvijena je nova metoda za analitičko-numerički izračun rasipnog polja transformatora u pokusu kratkog spoja primjenom konformnih preslikavanja te izračun napona kratkog spoja transformatora. U nastavku su navedeni izvorni znanstveni doprinosi.

× **Metoda za izračun rasipnog polja i napona kratkog spoja transformatora primjenom konformnih preslikavanja u ravninama uzdužnog i poprečnog presjeka jezgre i namota transformatora**

Ovaj doprinos sadrži metodu za izračun rasipnog polja, odnosno napona kratkog spoja transformatora. Konformnim preslikavanjem geometrija uzdužnog i poprečnog presjeka jezgre i namota (fizička domena) preslikava se na jedinični krug (kanonska domena) gdje je rješenje magnetske indukcije poznato te se to rješenje preslikava natrag u fizičku domenu. Iz magnetske indukcije računa se energija rasipnog polja, a iz energije se računa rasipni induktivitet, odnosno rasipna reaktancija. Otpor namota i rasipna reaktancija čine impedanciju kratkog spoja iz koje slijedi napon kratkog spoja.

× **Numerički postupak za izračun energije rasipnog polja transformatora u trodimenzionalnom prostoru ekstrapolacijom dvodimenzionalnih rješenja polja u uzdužnom i poprečnom presjeku dobivenih primjenom konformnih preslikavanja**

Napon kratkog spoja transformatora može se izračunati iz energije rasipnog polja u prostoru izvan namota i u namotima. Metode dostupne u literaturi, koje koriste ovaj način računanja napona kratkog spoja, zasnivaju se na izračunu prostorne energije tako da dvodimenzionalno rješenje u presjeku prozora jezgre transformatora integriraju kružno od 0 do 2π . Ovaj doprinos sadrži algoritam kojim se dvodimenzionalna rješenja iz tri različita presjeka, dobivena primjenom konformnih preslikavanja, ekstrapoliraju na trodimenzionalni prostor.

× **Algoritam za izračun raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke visokonaponskog namota transformatora s asimetričnim rasporedom kratkospojenih niskonaponskih namota u prozoru transformatora te asimetričnom raspodjelom magnetskog polja u pokusima kratkog spoja**

U slučajevima kada se visokonaponski namot sastoji od paralelno spojenih svitaka, raspodjela magnetskog polja u pokusu kratkog spoja, kada je kratkospojen samo jedan niskonaponski namot, je asimetrična pa je time asimetrična i raspodjela struja kroz svitke. Da bi se napon kratkog spoja u tom

slučaju mogao izračunati, potrebno je poznavati struje kroz pojedine svitke. Ovaj doprinos sadrži algoritam kojim se računaju struje kroz pojedine svitke, a pomoću kojih se dalje računa rasipno polje i napon kratkog spoja primjenom konformnih preslikavanja.

1.4 Struktura rada

Disertacija je podijeljena u osam poglavlja organiziranih u tri dijela: (I) dio "Općenita razmatranja" sastoji se od tri poglavlja: Poglavlje 1. "Uvod", Poglavlje 2. "Pregled metoda za izračun napona kratkog spoja transformatora" i Poglavlje 3. "Pregled primjene konformnih preslikavanja"; (II) dio "Teoretska podloga" sastoji se od dva poglavlja: Poglavlje 4. "Teorija konformnih preslikavanja" i Poglavlje 5. "Izračun magnetskog polja primjenom konformnog preslikavanja"; (III) dio "Primjena konformnih preslikavanja kod transformatora" sastoji se od tri poglavlja: Poglavlje 6. "Izračun napona kratkog spoja", Poglavlje 7. "Izračun raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke namota" i Poglavlje 8. "Zaključak".

- × **POGLAVLJE 1.** U ovom poglavlju definiran je napon kratkog spoja kao jedan od bitnih parametara transformatora te cilj istraživanja. Nabrojani su i opisani izvorni znanstveni doprinosi te struktura rada, odnosno popis poglavlja s kratkim opisom svakog poglavlja.
- × **POGLAVLJE 2.** U ovom poglavlju dan je pregled metoda za izračun napona kratkog spoja transformatora koje su dostupne u literaturi.
- × **POGLAVLJE 3.** U ovom poglavlju dan je pregled primjene konformnih preslikavanja kod transformatora te je ukratko opisana primjena konformnog preslikavanja kod rotacijskog stroja gdje je korišten sličan princip kao u ovom radu.
- × **POGLAVLJE 4.** U ovom poglavlju dan je općeniti opis konformnih preslikavanja te je detaljno objašnjeno konformno preslikavanje iz dvodimenzionalnog presjeka prostora unutar i izvan prozora jezgre transformatora u jedinični krug i obratno. To konformno preslikavanje koristit će se za preslikavanje rješenja magnetske indukcije iz jediničnog kruga u dvodimenzionalni presjek prostora unutar i izvan prozora jezgre transformatora.
- × **POGLAVLJE 5.** U ovom poglavlju opisan je izračun magnetskog polja u zračnom tunelu okruženom željezom za koji je u literaturi dostupno rješenje skalarnog magnetskog potencijala.
- × **POGLAVLJE 6.** U ovom poglavlju opisana je primjena konformnog preslikavanja iz poglavlja 4 za izračun energije rasipnog polja iz rješenja indukcije. Dalje se napon kratkog spoja jednostavno izračuna iz energije rasipnog polja.
- × **POGLAVLJE 7.** U ovom poglavlju opisan je algoritam za izračun raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke visokonaponskog namota transformatora. U slučaju višenamotnog transformatora čiji se visokonaponski namot obično sastoji od više paralelno spojenih svitaka, koji se nalaze na istom ili različitim stupovima, dolazi do asimetrične raspodjele magnetskog polja u pokusima kratkog spoja za određene kombinacije namota te je potrebno poznavati raspodjelu struja kroz paralelno spojene svitke da bi se napon kratkog spoja mogao izračunati.
- × **POGLAVLJE 8.** U ovom poglavlju dana je kratka analiza dobivenih rezultata, izvedeni su zaključci na temelju primjene predstavljene metode na nekoliko primjera konkretnih transformatora te je dan prijedlog daljnjeg razvoja metode.

Pregled metoda za izračun napona kratkog spoja transformatora

U literaturi su dostupne razne analitičke metode za izračun napona kratkog spoja transformatora. Međutim, ove metode razvijene su za transformatore koji imaju namote na istom stupu jezgre, obično su ograničene brojem namota za koje se može računati napon kratkog spoja, zahtijevaju simetrično postavljene namote u odnosu na prozor jezgre transformatora te jednake visine ili širine namota. Osim analitičkih metoda u literaturi su dostupne i numeričke metode, od kojih se najčešće koristi metoda konačnih elemenata, s kojom se eliminiraju nedostaci analitičkih metoda. Međutim, kao što je u poglavlju 1 opisano, i metoda konačnih elemenata ima svoje nedostatke koje se nastoji eliminirati metodom prikazanom u ovom radu.

2.1 Analitičke metode

Otkako su se transformatori pojavili krajem 19. stoljeća, počele su se razvijati metode za izračun napona kratkog spoja transformatora, odnosno rasipne reaktancije koja je u postotnom iznosu jednaka reaktivnom dijelu napona kratkog spoja i zajedno s radnim dijelom, koji se računa iz radnih gubitaka transformatora, čini napon kratkog spoja. U početku su to bile analitičke metode koje su se mogle jednostavno koristiti bez računala, a razvojem računala počeo će se koristiti i numeričke metode.

U osnovi postoje dva pristupa za izračun napona kratkog spoja odnosno rasipne reaktancije. Prvi pristup temelji se na osnovnoj definiciji induktiviteta, gdje je induktivitet definiran kao omjer ukupnog toka koji ulančuje namot i struje kroz namot, odnosno

$$L = \frac{\Psi}{I} = \frac{N\phi}{I} \quad (2.1)$$

Drugi pristup temelji se na definiciji induktiviteta sa stajališta energije, odnosno

$$L_{\sigma} = \frac{2W_{\sigma}}{I^2} \quad (2.2)$$

gdje je W_{σ} magnetska energija rasipnog polja, a I struja referentnog namota [3].

Jednostavne analitičke metode pretpostavljaju da je rasipno polje u aksijalnom smjeru, amperzavoji u namotu jednoliko raspoređeni te da je relativna magnetska permeabilnost jezgre beskonačna [4, 5]. Rasipno polje u dvonamotnom transformatoru većinom je u aksijalnom smjeru, osim na krajevima namota gdje silnice rasipnog polja pronalaze kraći povratni put i dominantnije je rasipno polje u radijalnom smjeru. Prema tome, izračun rasipne reaktancije mora uzeti u obzir i aksijalnu i radijalnu komponentu magnetskog polja [3, 4, 6].

Rješenja za uzimanje u obzir radijalne komponente magnetskog polja na krajevima namota dali su Rogowski i Roth, a temelje se na izračunu vektorskog magnetskog potencijala pomoću Fourierova reda [5]. Bez obzira što daju dobre rezultate, ove su napredne analitičke metode komplicirane,

posebno ako su visine namota različite. Osim toga, može se koristiti jednostavna metoda Rogowskog, koja jednostavnoj analitičkoj metodi dodaje koeficijent koji se zove faktor Rogowskog s kojim se dijeli visina namota da bi se dobila korigirana visina namota, koja uzima u obzir radijalnu komponentu rasipnog polja time što se računa s nešto većom duljinom puta silnica kroz zrak [3, 7, 8]. Međutim, ovaj pristup dobar je jedino u slučaju ako su visine namota jednake. Za različite visine namota Stephens koristi analitički pristup s faktorom Rogowskog, ali tako da odvojeno računa aksijalno i radijalno polje [6, 9, 10]. Još jedna od naprednijih analitičkih metoda jest i Rabinsova metoda, koja se koristi za osnosimetričnu geometriju i uzima u obzir zakrivljenost namota [3, 4, 11, 12]. U vremenu kada računala nisu bila dostupna bila je popularna metoda odslikavanja, gdje su rubni uvjeti na granicama jezgre zamijenjeni slikama vodiča namota i u pravilu je više slojeva slika značilo veću točnost, a pojavom računala omogućeno je korištenje velikog broja slojeva slika koji je potreban za točnost pri izračunu kompleksnih geometrija [3, 5, 6, 13, 14]. Analitičke metode tijekom vremena su razvijane i usavršavane tako da se povećavala točnost, brzina ili jednostavnost izračuna, uz postojeća ograničenja [15–21].

U [22–25] dana je jednodimenzionalna analitička metoda i pojednostavljena dvodimenzionalna metoda za izračun napona kratkog spoja vučnog transformatora s više namota, za koncentrične i pločaste namote. Kod jednostavnih analitičkih metoda koje su razvijene za koncentrične i pločaste namote nije moguće koristiti jednostavni faktor Rogowskog zbog postojanja više namota te se koristi raspodijeljeni faktor Rogowskog, koji se računa za svaki par namota posebno. U [26] autori proširuju spomenute metode za transformatore s više namota za asimetrični položaj namota u prozoru jezgre transformatora.

Sve spomenute analitičke metode odnose se na izračun rasipne reaktancije odnosno napona kratkog spoja između namota koji se nalaze na istom stupu. U [27, 28] autori, među ostalim, opisuju aproksimacijsku metodu koju je razvio Lebedev, a može se koristiti za izračun rasipnog polja između namota na različitim stupovima tako da se transformator s dvama namotima na različitim stupovima aproksimacijom pretvara u ekvivalentni transformator s glavnim i pomoćnim namotom na istom stupu. Međutim, metoda je veoma ograničena, zahtijeva jednostavnu geometriju dvaju namota na različitim stupovima, koji imaju iste visine i nalaze se na sredini prozora jezgre transformatora u aksijalnom smjeru.

2.2 Numeričke metode

Ako se želi dobiti točniji rezultat za neke jednostavne geometrije u odnosu na analitičke metode, može se koristiti MKE metoda [3, 8, 29, 30]. Za komplicirane geometrije, kao što su transformatori s više namota, kod kojih su greške analitičkih metoda prevelike ili se uopće ne mogu primijeniti, potrebno je koristiti MKE [31]. Mogu se koristiti 2D modeli i MKE [32], ali najveća točnost dobije se korištenjem 3D modela i MKE-a da bi se izračunala energija rasipnog polja te iz energije rasipna reaktancija odnosno napon kratkog spoja [33]. Za ubrzanje izračuna može se koristiti hibridni 3D MKE izračun koji kombinira 2D izračun i 3D izračun osnosimetričnog modela [34].

U [35] autori koriste kombinaciju analitičkih i numeričkih metoda za izračun ukupnog rasipnog induktiviteta jednofaznog transformatora. Za izračun rasipnog polja u zraku i namotima unutar prozora jezgre transformatora autori koriste analitičke metode, a za izračun rasipnog polja u zraku i namotima izvan prozora jezgre transformatora koriste MKE.

U [36] autori koriste MKE za izračun cirkulirajućih struja u regulacijskom namotu energetskog transformatora, koji se sastoji od dvaju paralelnih svitaka, za slučaj asimetričnog tereta donjeg i gornjeg niskonaponskog namota.

U [37] autori računaju matricu induktiviteta i međuinaktiviteta vučnog transformatora s više

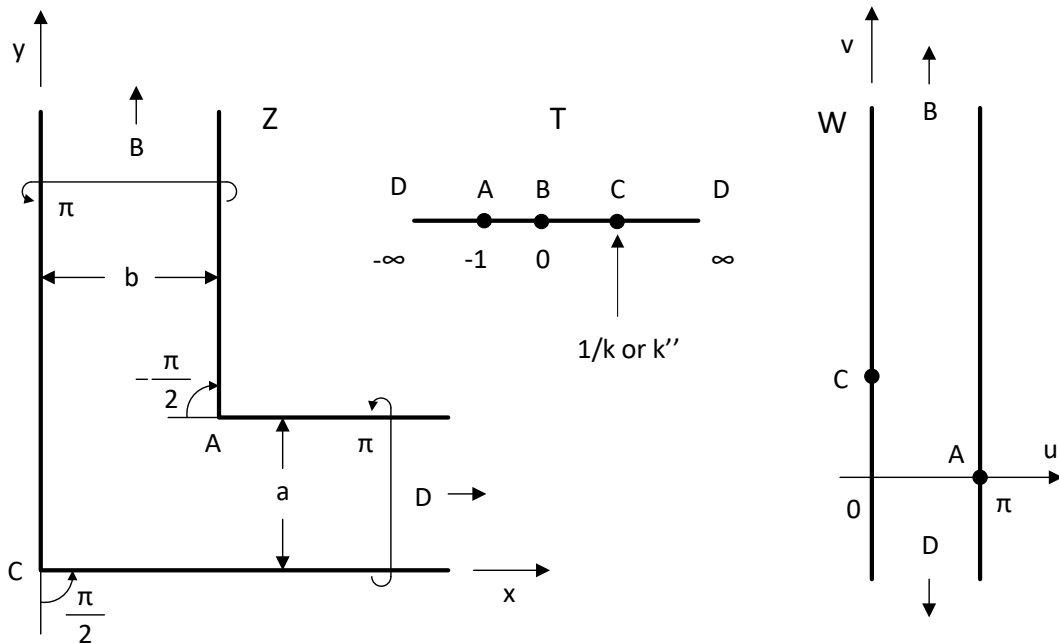
namota te iz izračunatih vrijednosti postavljaju ekvivalentni električni krug pomoću kojega računaju rasipne induktivitete. Analitičke metode koriste u slučaju simetrije, kada su kratko spojena oba niskonaponska namota, a dva su visokonaponska namota paralelno napajana. Za nesimetriju, tj. kada je kratko spojen samo jedan niskonaponski namot, koriste MKE. Isti princip primjenjuju i autori u [38, 39] gdje MKE koriste za izračun matrice induktiviteta dvaju različitih vučnih transformatora, a onda postavljaju jednadžbe električnog kruga i računaju raspodjelu struja kroz pojedine paralelno spojene svitke visokonaponskog namota jer u slučaju nesimetrične raspodjele magnetskog polja, kada je kratko spojen samo jedan niskonaponski namot, struje nisu jednake. Što je točniji izračun raspodjele struja, točniji je i izračun napona kratkog spoja.

U [40] autori koriste modificiranu magnetostatsku metodu momenata za izračun vlastitih induktiviteta i međuinduktiviteta energetskog transformatora. Iz vlastitih induktiviteta i međuinduktiviteta može se jednostavno izračunati i rasipni induktivitet.

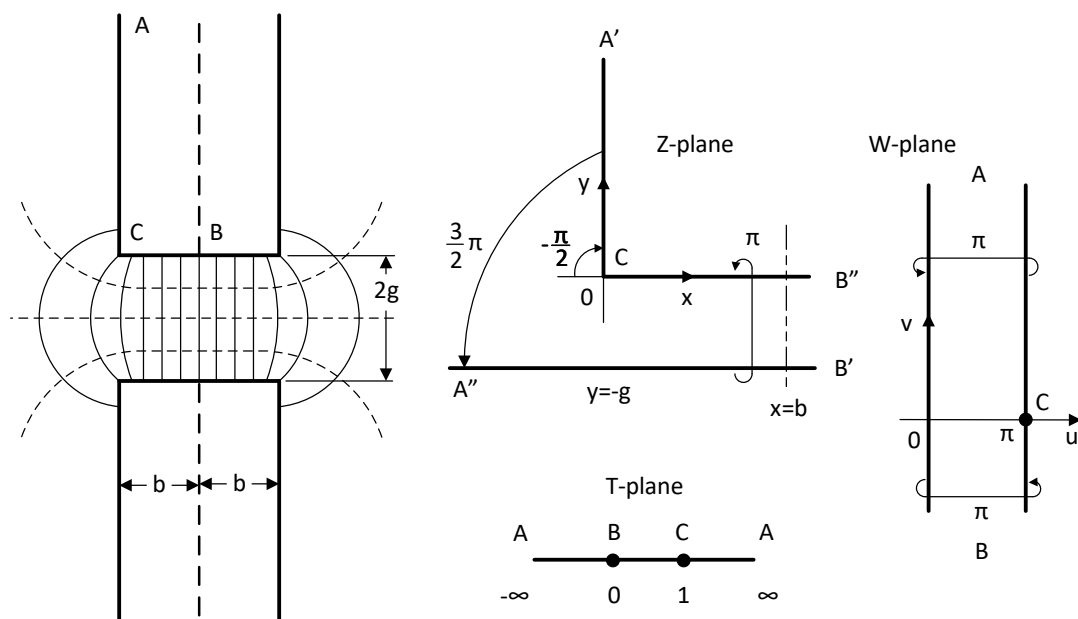
Pregled primjene konformnih preslikavanja

U poglavlju 4 opisana je općenita teorija konformnih preslikavanja te konformna preslikavanja koja će se koristiti u ovom radu, a u ovom poglavlju dan je kratak pregled primjene konformnih preslikavanja kod transformatora dostupan u literaturi te jedan primjer konformnog preslikavanja primijenjen u električnom stroju s permanentnim magnetima koji koristi sličan pristup rješavanju problema kao što je pristup opisan u ovom radu.

U [41] autori opisuju razne praktične primjene konformnih preslikavanja. U knjizi je dan primjer transformacije dvostupne i oklopljene jezgre jednofaznog transformatora s ciljem izračuna magnetskog polja unutar jezgre s beskonačnom permeabilnošću. Preslikavanje jednog kuta jezgre prikazano je na slici 3.1. Osim toga, dan je i primjer transformacije zračnog raspora jezgre sa zračnim rasporom s ciljem izračuna magnetskog polja u blizini raspora. Preslikavanje zračnog raspora jezgre prikazano je na slici 3.2.

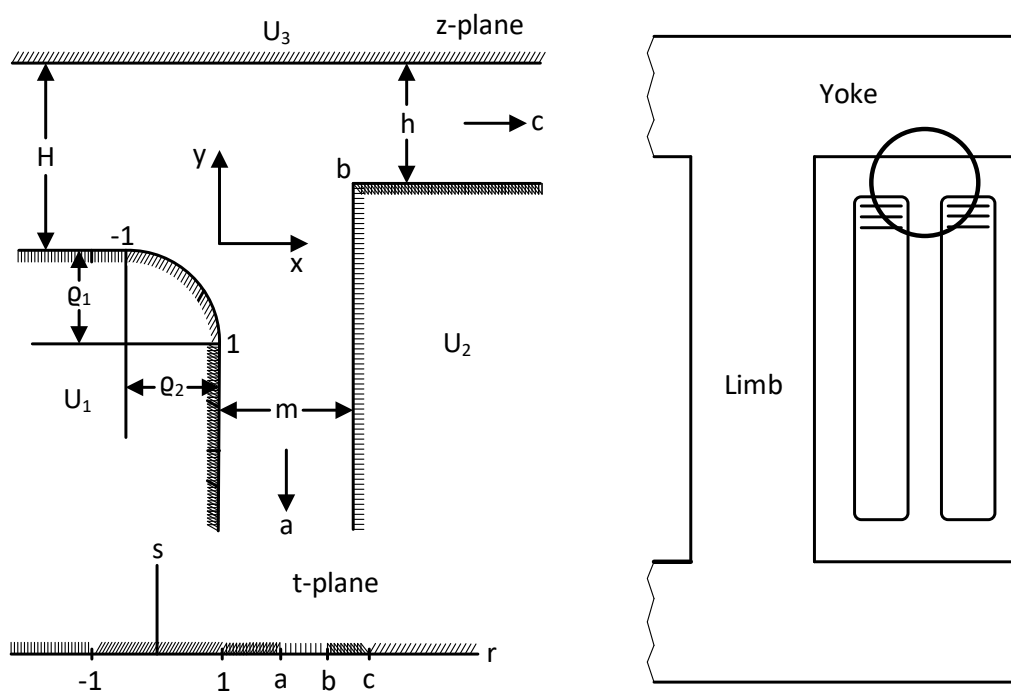


Slika 3.1: Preslikavanje kuta jezgre transformatora [41]



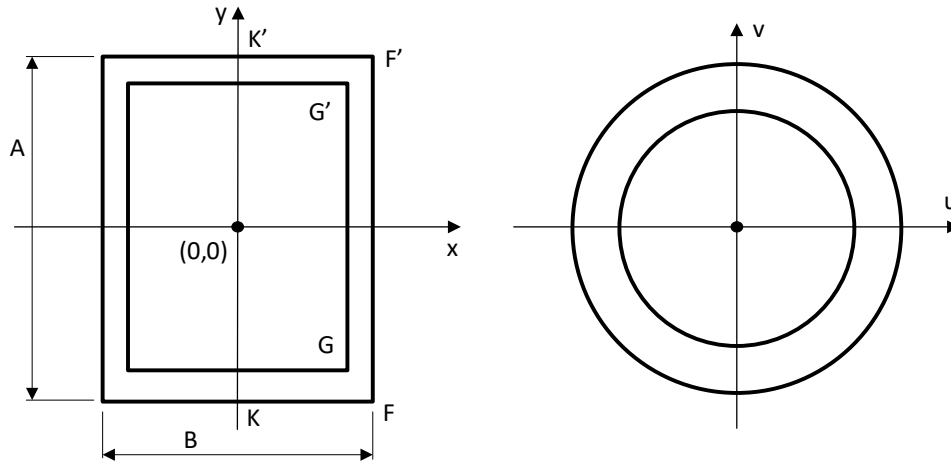
Slika 3.2: Preslikavanje zračnog raspora jezgre transformatora [41]

U [42] autori opisuju metodu za određivanje jakosti elektrostatičkog polja. Metoda se temelji na konformnom preslikavanju uz korištenje Schwarz-Christoffelove transformacije i prikladna je za izračun gradijenata napona u blizini golih ili izoliranih zaobljenih granica određenih trima potencijalima, uz naglasak na primjenu kod transformatora. Preslikavanje područja između jarma i vrhova namota, koji čine tri potencijala, prikazano je na slici 3.3.



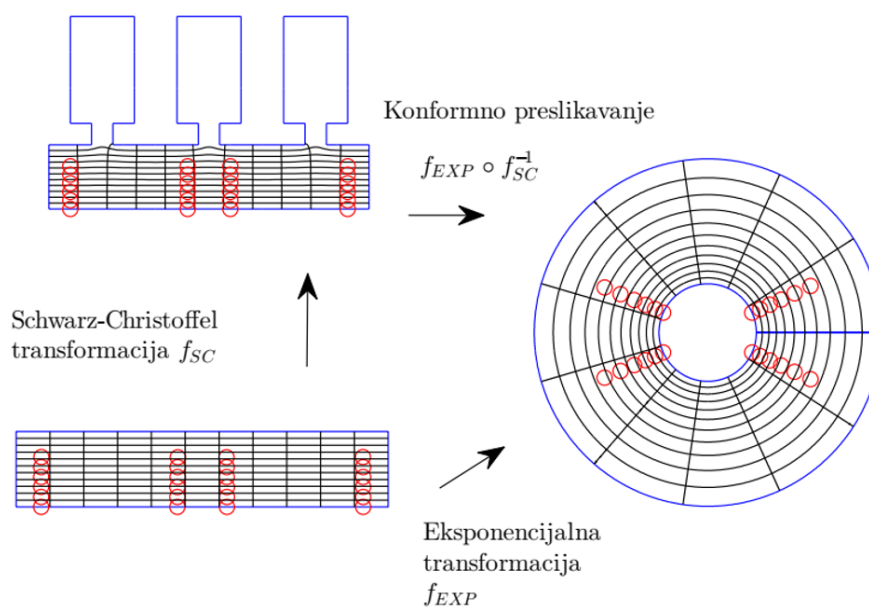
Slika 3.3: Preslikavanje područja između jarma i vrhova namota transformatora [42]

U [43, 44] autori opisuju metodu za izračun kapaciteta i induktiviteta namota pravokutnog oblika. Autori koriste konformno preslikavanje da bi namot pravokutnog oblika transformirali u jednostavniju konfiguraciju, odnosno namot kružnog oblika, koja pojednostavljuje izračun parametara namota. Preslikavanje namota pravokutnog oblika u namot kružnog oblika prikazano je na slici 3.4.



Slika 3.4: Preslikavanje namota pravokutnog oblika u namot kružnog oblika [43]

U [45–48] autorica koristi konformno preslikavanje, odnosno inverznu Schwarz-Christoffelovu transformaciju i eksponencijalnu transformaciju, za preslikavanje nazubljenog zračnog rasporeda motora s permanentnim magnetima prvo u pravokutnu domenu, a zatim i u kružnu domenu, kao što je prikazano na slici 3.5. U kružnoj domeni autorica koristi analitičko rješenje iz [49] za izračun vektorskog magnetskog potencijala. U ovom radu korišten je isti pristup, s time da je zbog jednostavnijeg problema korišteno samo jedno preslikavanje, tj. preslikavanje između fizičke pravokutne domene i kanonske kružne domene. U kružnoj domeni također se koristi analitičko rješenje iz [49], ali za izračun skalarnog magnetskog potencijala koji je polazišna točka za izračun magnetske indukcije i na kraju napona kratkog spoja transformatora.



Slika 3.5: Preslikavanje nazubljenog zračnog rasporeda u pravokutnu i kružnu domenu [45]

Dio II

Teoretska podloga

Teorija konformnih preslikavanja

Konformna preslikavanja korisna su u rješavanju problema koji mogu biti prikazani odgovarajućom kompleksnom funkcijom. Neka je zadano područje D_z u z -ravnini i analitička funkcija $z \mapsto f(z)$ koja preslikava područje D_z u područje D_w u w -ravnini. Ako su geometrijska svojstva zadanog područja u z -ravnini komplicirana, preslikavanjem se dobiva jednostavniji geometrijski oblik na kojemu znamo riješiti diferencijalnu jednadžbu koja opisuje neku fizikalnu pojavu, kao što je magnetsko polje [50].

4.1 Geometrijska interpretacija i definicija

Geometrijska interpretacija kompleksne analitičke funkcije u obliku realne funkcije $y = f(x)$ ne postoji. Međutim, ako se funkcija

$$x + jy = z \mapsto w = f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$$

definira kao preslikavanje točke iz područja D_z , koje pripada z -ravnini, u područje D_w , koje pripada w -ravnini, tada se geometrijska interpretacija može dati pomoću preslikavanja [51].

Neka se točka a iz z -ravnine funkcijom $w = f(z)$ preslika u točku $f(a)$. Pored toga, neka se krivulja l , kojoj pripada točka a , preslika na krivulju L , kojoj pripada $f(a)$. Pretpostavimo da analitička funkcija f u točki a ima derivaciju i da je $f'(a) \neq 0$. Derivacija funkcije f u točki a definirana je kao

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = f'(a). \quad (4.1)$$

Da bismo dali geometrijsko značenje derivacije, promatrat ćemo njezin modul i argument. Iz (4.1) slijedi

$$\left| \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \right| = \lim_{z \rightarrow a} \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|} = |f'(a)|. \quad (4.2)$$

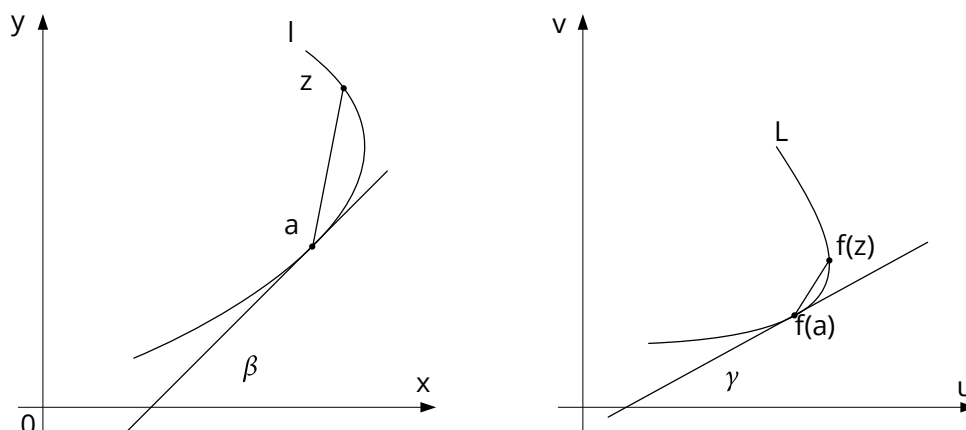
Sada slijedi

$$|f'(a)| \approx \frac{|f(z) - f(a)|}{|z - a|}. \quad (4.3)$$

Na osnovu ove interpretacije zaključujemo da je modul derivacije jednak omjeru dužina $|f(z) - f(a)|$ i $|z - a|$ i to u graničnom slučaju kada je $z \mapsto a$. Zbog toga se $|f'(a)|$ naziva **omjer preslikavanja**. Varira ovisno o tome je li $|f'(a)|$ veće ili manje od jedinice.

Promotrimo argument u graničnom slučaju. Imamo

$$\begin{aligned} \alpha &= \arg\left(\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}\right) = \lim_{z \rightarrow a} \arg\left(\frac{f(z) - f(a)}{z - a}\right) = \arg f'(a) \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \arg(f(z) - f(a)) - \lim_{z \rightarrow a} \arg(z - a) = \gamma - \beta. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Slika 4.1: Preslikavanje iz z ravnine u w ravninu [51]

Kut α naziva se **kut preslikavanja**.

Promotrimo na slici 4.2 dvije glatke krivulje l_1 i l_2 u z -ravnini koje se sijeku u točki a i dvije preslikane glatke krivulje L_1 i L_2 u w -ravnini koje se sijeku u točki $f(a)$. Primjenom jednakosti (4.4) dobivamo

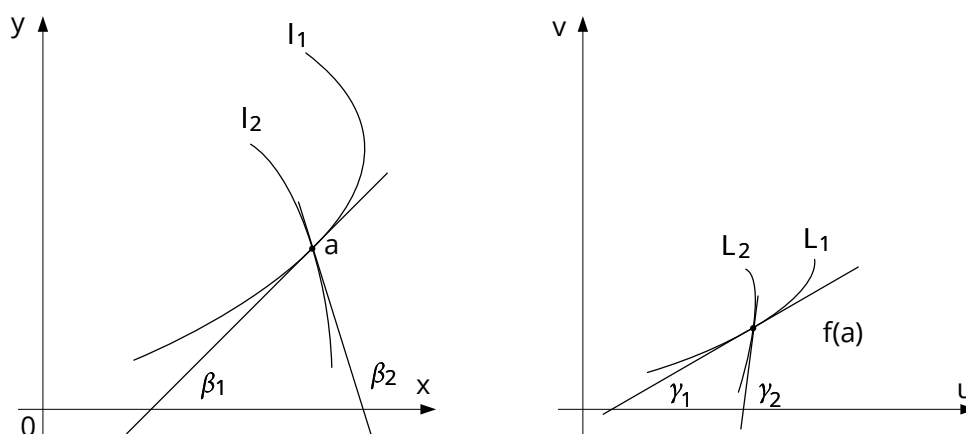
$$\gamma_1 - \beta_1 = \arg f'(a),$$

$$\gamma_2 - \beta_2 = \arg f'(a),$$

odakle je

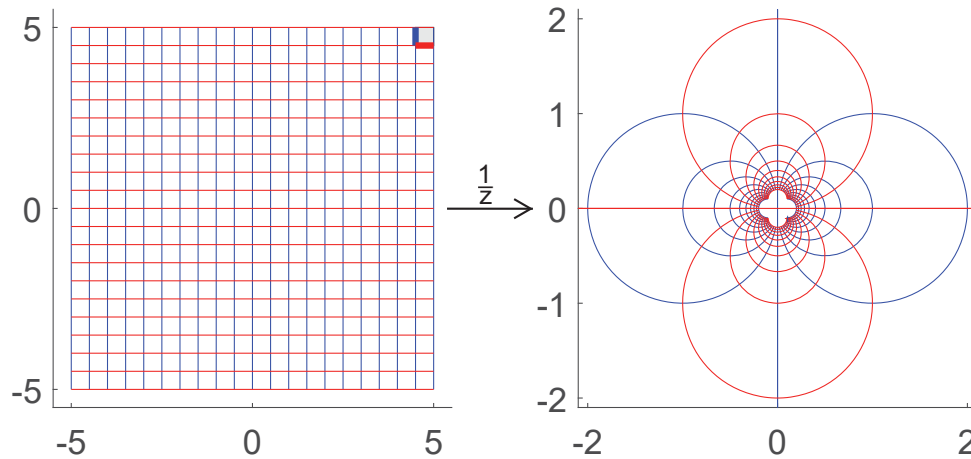
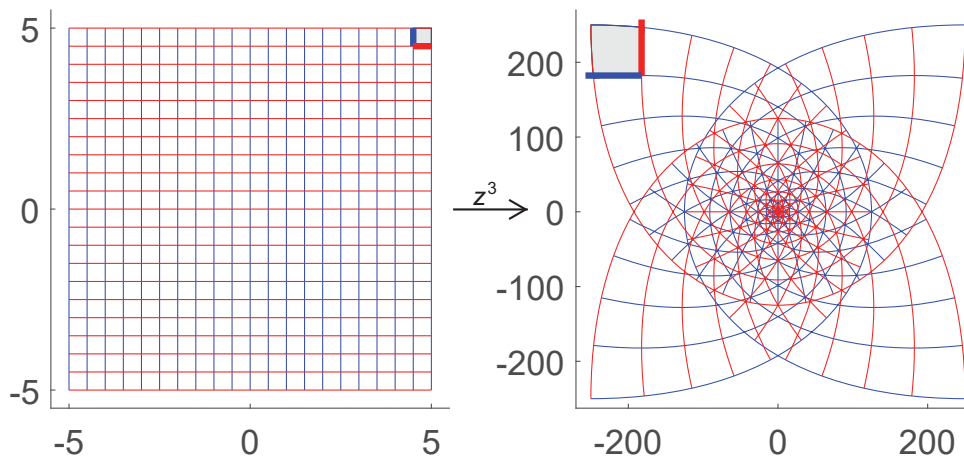
$$\gamma_2 - \gamma_1 = \beta_2 - \beta_1.$$

Dakle, kut između γ_1 i γ_2 jednak je kutu između β_1 i β_2 .



Slika 4.2: Očuvanje kutova pri preslikavanju [51]

Zaključujemo da svako preslikavanje pomoću analitičke funkcije zadržava kutove jednakima, odnosno preslikavanje $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ($\Omega \subseteq \mathbb{C}$) naziva se **konformno preslikavanje** ako čuva kutove po veličini i orijentaciji [51]. Na slikama 4.3 i 4.4 prikazani su primjeri inverzne ($w = \frac{1}{z}$) i kubne ($w = z^3$) transformacije mreže pravokutnika.

Slika 4.3: Konformno preslikavanje $w = \frac{1}{z}$ Slika 4.4: Konformno preslikavanje $w = z^3$

4.2 Schwarz-Christoffelova transformacija

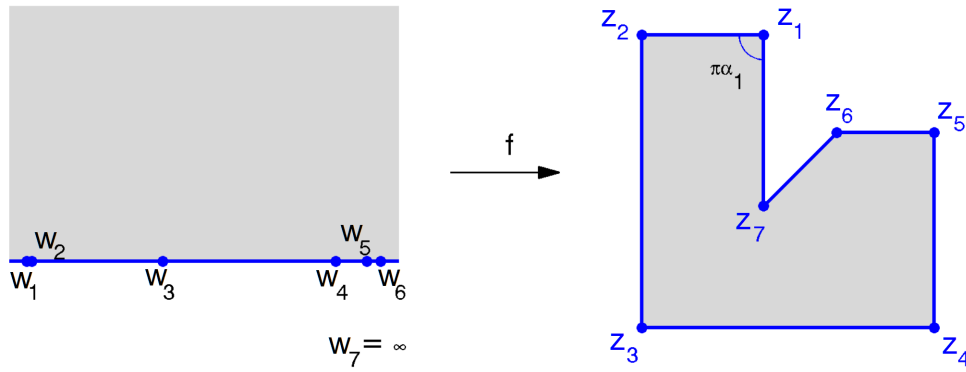
Osnovna Schwarz-Christoffelova jednačica recept je za konformno preslikavanje f iz kompleksne gornje poluravnine (W -domena, **kanonska domena**) u unutrašnjost poligona (Z -domena, **fizikalna domena**). "Poligon" može imati pukotine ili vrhove u beskonačnosti. Vrhovi su označeni sa z_1, \dots, z_n , a izrazi $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ unutarnji su kutovi kod vrhova. Slike vrhova u kanonskoj domeni realni su brojevi i označeni su s w_1, \dots, w_n . Oni zadovoljavaju

$$w_1 < w_2 < \dots < w_n = \infty.$$

Slika 4.5 ilustrira ove definicije [52].

Ako je vrh z_k konačan, onda vrijedi $0 < \alpha_k \leq 2$. Ako je z_k beskonačan, onda je $-2 \leq \alpha_k \leq 0$. Nužno je ograničenje

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k = n - 2.$$



Slika 4.5: Konvencija označavanja za Schwarz-Christoffelovu transformaciju [52]

Schwarz-Christoffelova jednačica za konformno preslikavanje f jest

$$f(w) = f(w_0) + c \int_{w_0}^w \prod_{k=1}^{n-1} (\zeta - w_k)^{\alpha_k - 1} d\zeta, \quad (4.5)$$

gdje su w_k točke u kanonskoj domeni kojima odgovaraju vrhovi mnogokuta u fizičkoj domeni, $\alpha_k \pi$ su unutarnji kutovi kod vrhova, a $f(w_0)$ i c su konstante transformacije. Glavna praktična poteškoća s ovom jednačicom jest u tome što vrhovi w_k (vrhovi u kanonskoj domeni) ne mogu biti izračunati analitički, osim u posebnim slučajevima. Möbiusova je transformacija racionalna funkcija kompleksne varijable definirana formulom

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (4.6)$$

gdje su koeficijenti a , b , c i d kompleksni brojevi koji zadovoljavaju uvjet $ad - bc \neq 0$. Möbiusova transformacija ima svojstvo bijekcije, odnosno jednoznačno se preslikava iz kanonske domene u fizičku i obratno. S obzirom na to da Möbiusova transformacija ima tri stupnja slobode, tri vrha (uključujući već fiksni w_n) mogu biti odabrana proizvoljno. Preostalih $n-3$ vrhova, jednoznačno određenih, može se dobiti rješavanjem sustava nelinearnih jednačica. Ovo je poznato kao **Schwarz-Christoffelov parametarski problem** i njegovo rješenje prvi je korak u bilo kojem Schwarz-Christoffelovom preslikavanju. Nakon što se riješi parametarski problem može se odrediti konstanta množenja c te se preslikavanje može izračunati numerički [52].

Moguće su razne modifikacije osnovne Schwarz-Christoffelove jednačice. Na primjer, ako je kanonska domena jedinični disk umjesto gornje poluravnine, slike vrhova w_k leže na jediničnoj kružnici u smjeru obrnutom od smjera kazaljke na satu i jednačica je identična jednačici za gornju poluravninu, osim što umnožak u jednačici ima n umjesto $n - 1$ izraza [52].

Još je jedna varijanta vanjsko preslikavanje (engl. *exterior map*), gdje je kanonska domena jedinični disk, a fizikalna domena prostor izvan poligona (prostor se proteže od granica poligona do beskonačnosti). U ovom slučaju integrand ima dodatnu singularnost u unutrašnjosti diska. Uz pretpostavku da je ova singularnost fiksirana u konformnom središtu, samo jedan vrh može se odabrati proizvoljno [52].

4.3 Schwarz-Christoffel Toolbox

Schwarz-Christoffel Toolbox (SC Toolbox) skup je M-skripti, u programskom paketu Matlab, pomoću kojih se računaju Schwarz-Christoffelova konformna preslikavanja. SC Toolbox ima interaktivno grafičko sučelje, a može se koristiti i pozivanjem skripti bez otvaranja grafičkog sučelja.

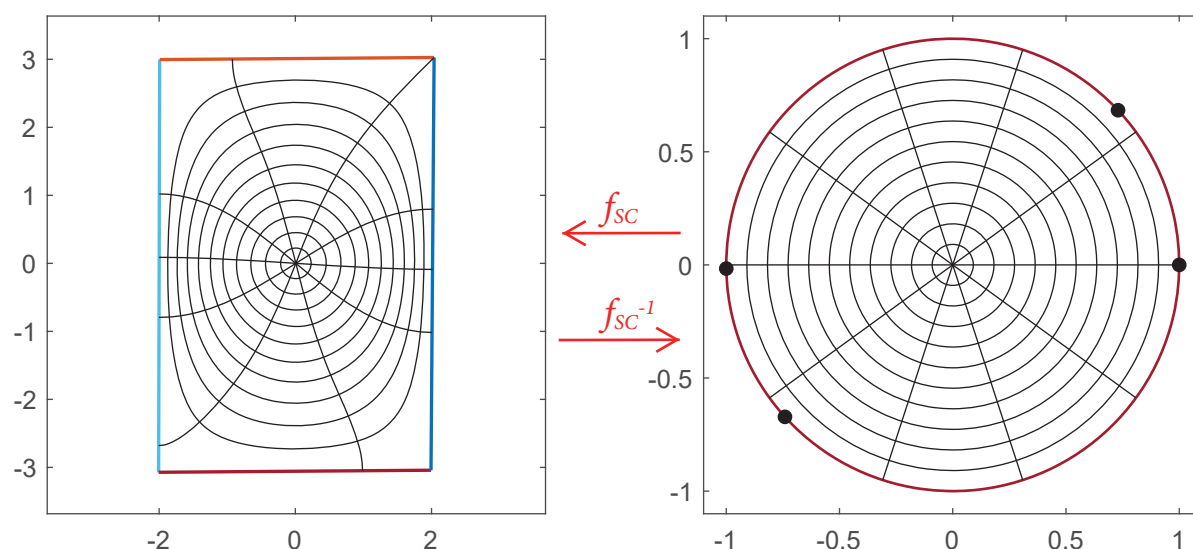
Uobičajeni proces konformnog preslikavanja upotrebom SC Toolboxa sastoji se od crtanja poligona, grafički ili upotrebom naredbi, i pozivanjem potrebnih funkcija, te odabira vrste preslikavanja, odnosno oblika područja preslikavanja [53], [52].

4.4 Preslikavanje jediničnog diska na površinu unutar pravokutnika

Schwarz-Christoffelova jednačina za konformno preslikavanje f koje preslikava površinu unutar jediničnog diska na površinu unutar pravokutnika, prikazano na slici 4.6, glasi [53]

$$z = f(w) = A + C \int^w \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{\zeta}{w_k}\right)^{\alpha_k - 1} d\zeta. \quad (4.7)$$

Preslikavanje površine unutar pravokutnika na površinu unutar jediničnog diska vrši se inverznom funkcijom. Točke na jediničnoj kružnici, na slici 4.6, predstavljaju slike vrhova pravokutnika. Slike 4.6 i 4.7 generirane su u grafičkom sučelju SC Toolboxa koje se poziva naredbom `scgui` u Matlabu.



Slika 4.6: Grafički prikaz preslikavanja jediničnog diska na unutrašnjost pravokutnika u SC Toolboxu

4.5 Preslikavanje jediničnog diska na površinu izvan pravokutnika

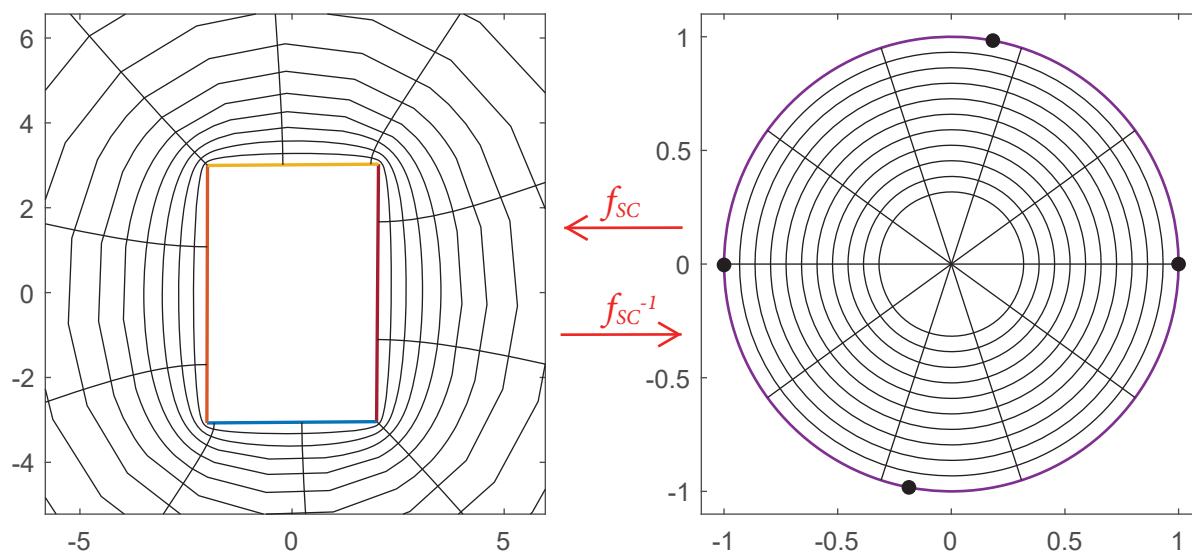
Schwarz-Christoffelova jednačina za konformno preslikavanje f koje preslikava površinu unutar jediničnog diska na površinu izvan pravokutnika, prikazano na slici 4.6, glasi [53]

$$z = f(w) = A + C \int^w \prod_{k=1}^n \zeta^{-2} \left(1 - \frac{\zeta}{w_k}\right)^{1 - \alpha_k} d\zeta. \quad (4.8)$$

Preslikavanje površine izvan pravokutnika na površinu unutar jediničnog diska vrši se inverznom funkcijom. Točke na jediničnoj kružnici, na slici 4.7, predstavljaju slike vrhova pravokutnika.

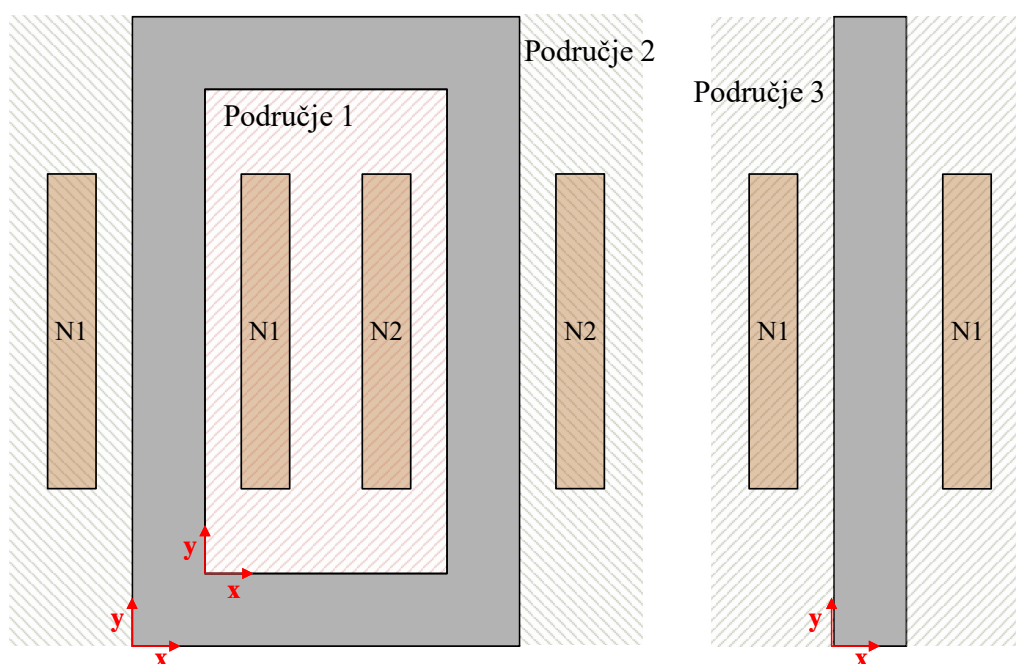
4.6 Preslikavanje tri različita presjeka transformatora na jedinični disk

Transformator se može prikazati u dvjema različitim ravninama, odnosno dvama presjecima, uzdužnom i poprečnom. Na slici 4.8 prikazan je model jednofaznog transformatora koji ima dva namota



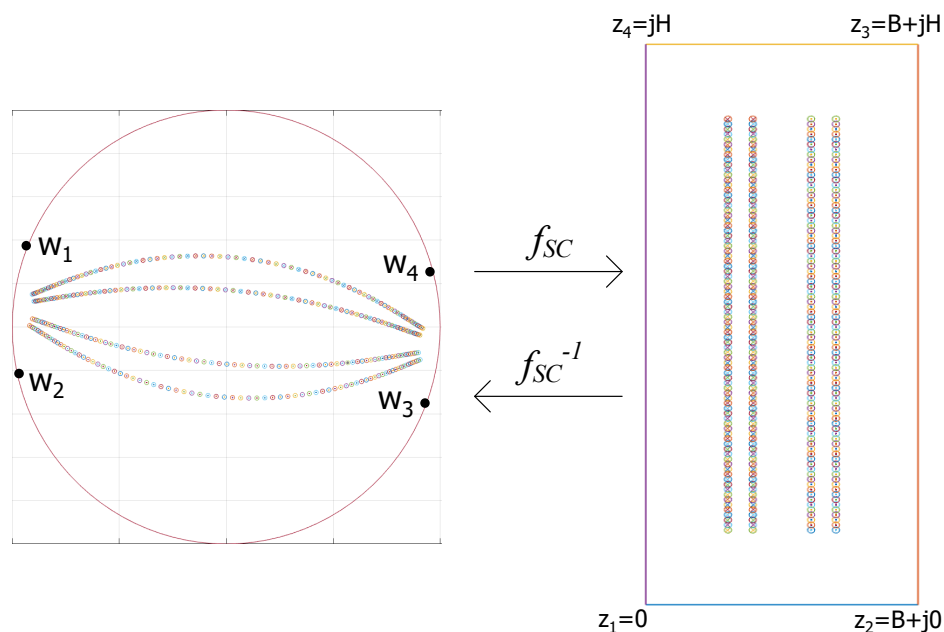
Slika 4.7: Grafički prikaz preslikavanja jediničnog diska izvan pravokutnika u SC Toolboxu

koji se nalaze na različitim stupovima. Model se sastoji od dvaju različitih područja u uzdužnom presjeku. Područje 1 predstavlja prozor jezgre transformatora, a područje 2 prostor izvan prozora jezgre. U poprečnom presjeku model se sastoji od jednog područja, odnosno područja 3, koje predstavlja prostor izvan prozora jezgre.

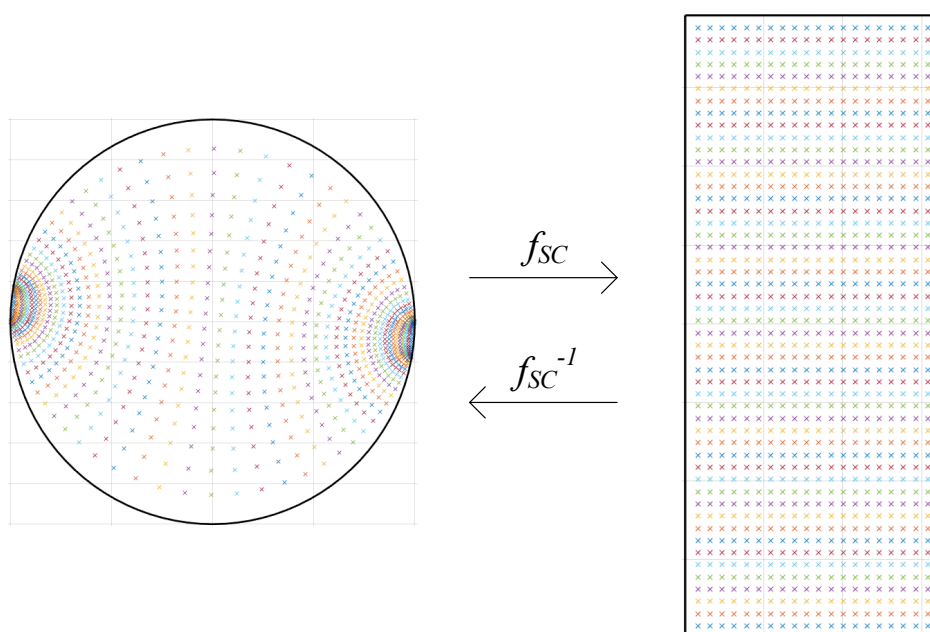


Slika 4.8: Uzdužni i poprečni presjek jednofaznog transformatora s namotima N1 i N2 koji se nalaze na različitim stupovima

Preslikavanje prozora jezgre transformatora, odnosno područja 1 na jedinični krug, vrši se inverznom funkcijom funkcije zadane jednačbom (4.7). Na slici 4.9 prikazano je preslikavanje namota N1 i N2 između jediničnog kruga (kanonska domena) i prozora jezgre transformatora (fizička domena). Namoti N1 i N2 modelirani su točkastim vodičima koji su raspoređeni unutar vanjskih kontura namota. Na slici 4.10 prikazano je preslikavanje točaka prostora, u kojima se računa magnetsko polje, između jediničnog kruga i prozora jezgre transformatora.

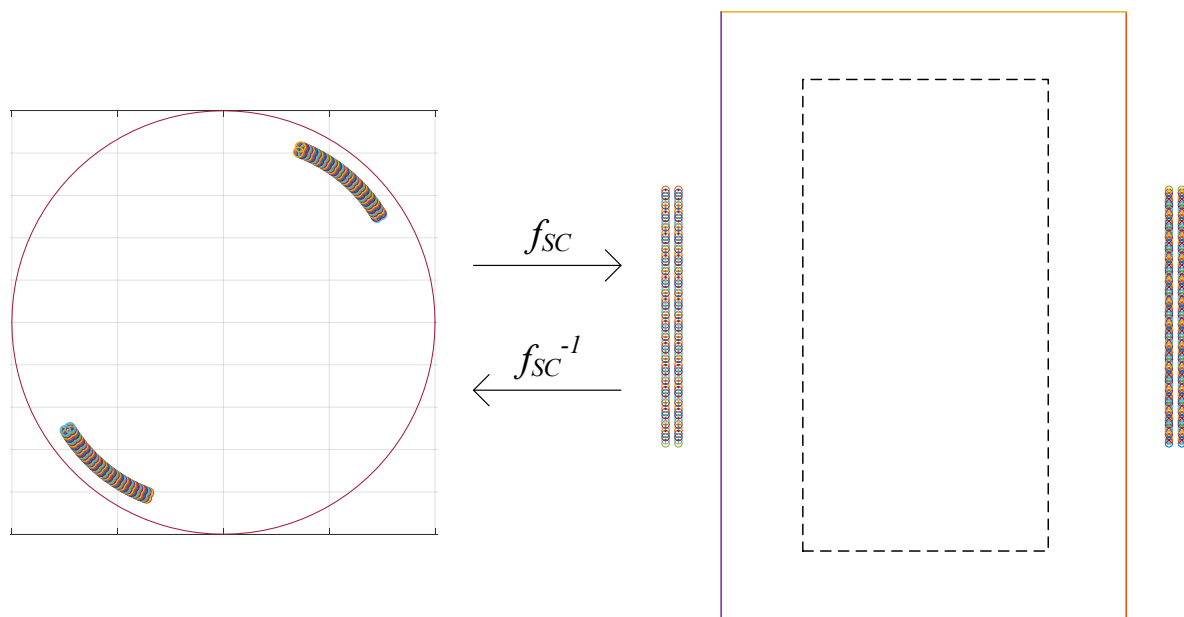


Slika 4.9: SC-transformacija između jediničnog kruga i točkastih vodiča namota N1 i N2 koji se nalaze unutar prozora jezgre transformatora

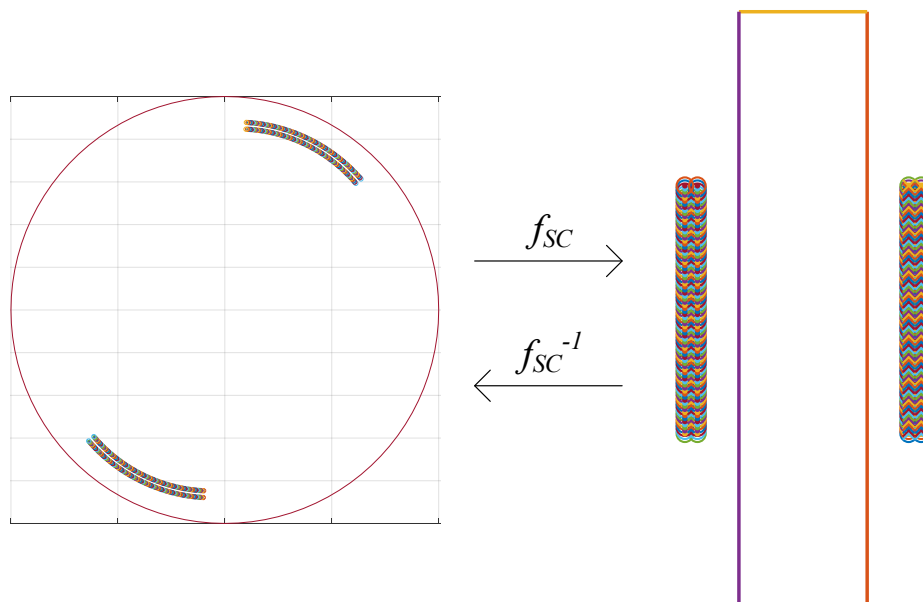


Slika 4.10: SC-transformacija točaka, u kojima se računa magnetsko polje, između jediničnog kruga i prozora jezgre transformatora

Preslikavanje prostora izvan prozora jezgre u uzdužnom i poprečnom presjeku, odnosno preslikavanje područja 2 i 3 na jedinični krug, vrši se inverznom funkcijom funkcije zadane jednačbom (4.8). Na slikama 4.11 i 4.12 prikazano je preslikavanje između jediničnog kruga i točkastih vodiča namota N1 i N2 koji se nalaze u uzdužnom i poprečnom presjeku transformatora, odnosno u području 2 i 3. I u ovom slučaju potrebno je preslikati točke u kojima se računa polje iz područja 2 i 3 u jedinični krug.



Slika 4.11: SC-transformacija između jediničnog kruga i točkastih vodiča namota N1 i N2 koji se nalaze izvan prozora jezgre u uzdužnom presjeku transformatora



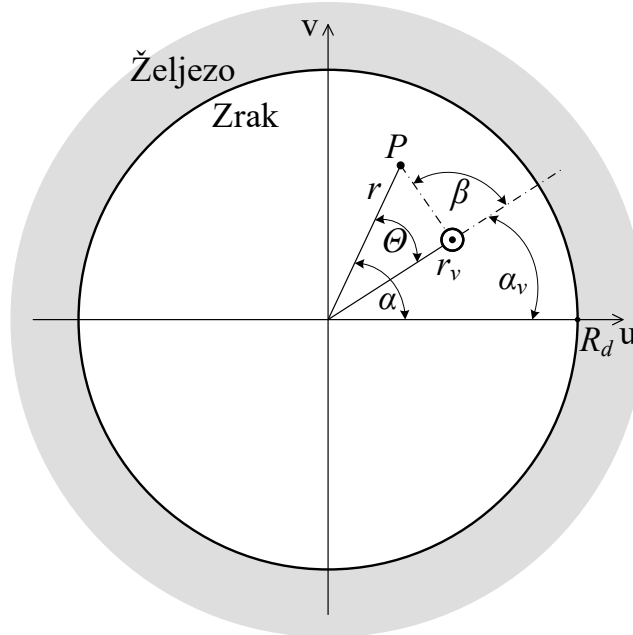
Slika 4.12: SC-transformacija između jediničnog kruga i točkastih vodiča namota N1 i N2 koji se nalaze izvan prozora jezgre u poprečnom presjeku transformatora

Izračun magnetskog polja primjenom konformnog preslikavanja

Jedinični krug odabran je kao kanonska domena jer su iz literature dostupna rješenja magnetskog polja za takav geometrijski oblik problema. Nakon izračuna magnetskog polja u kanonskoj domeni, koristeći dostupna analitička rješenja iz literature, izračunate veličine preslikavaju se u fizičku domenu koja odgovara presjecima transformatora.

5.1 Analitičko rješenje skalarnog magnetskog potencijala

Na slici 5.1 prikazana je definicija problema strujnice koja se nalazi u zračnom tunelu okruženom željezom, gdje je P točka s koordinatama (r, α) u kojoj se računa skalarni magnetski potencijal, (r_v, α_v) su cilindrične koordinate strujnice, R_d je polumjer zračnog tunela, I je točkasta struja koja teče kroz strujnicu, a μ_r je relativna permeabilnost željeza. Rješenje za dani problem u literaturi je dobiveno korištenjem metode odslikavanja [49].



Slika 5.1: Strujnica u zračnom tunelu okruženom željezom

Rješenje skalarnog magnetskog potencijala u nekoj točki s cilindričnim koordinatama (r, α) , smještenoj u tako definiranom zračnom tunelu, dano je izrazom [49]

$$\varphi_{mh} = 2I \left\{ \beta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{1}{n} \frac{r_v^n r^n}{R_d^{2n}} \sin [n\Theta] \right\} \quad (5.1)$$

gdje indeks "h" označava skalarni magnetski potencijal računat prema konvenciji definiranoj u [49], gdje su izrazi skalirani s 4π , tj. definirano je

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 4\pi NI \quad (5.2)$$

gdje je \mathbf{H} vektor jakosti magnetskog polja, \mathbf{l} je vektor linije po kojoj se integrira vektor jakosti magnetskog polja, N je broj zavoja, a I je struja. Da bismo imali ispravnu konvenciju kakva se trenutno koristi u elektrotehnici u Europi, potrebno je jednadžbu 5.1 dijeliti s 4π . Dijeljenjem (5.1) s 4π te uvrštavanjem $\Theta = \alpha - \alpha_v$ dobije se

$$\varphi_m = \frac{I}{2\pi} \left\{ \beta - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{1}{n} \frac{r_v^n r^n}{R_d^{2n}} \sin[n(\alpha - \alpha_v)] \right\}. \quad (5.3)$$

Kut β ovisi o relativnom međusobnom položaju strujnice i točke u kojoj se računa skalarni magnetski potencijal pa postoje tri različita slučaja, tj. kut β iznosi

$$\begin{aligned} \beta &= \pi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r}{r_v}\right)^n \sin[n(\alpha - \alpha_v)] & \text{za } r < r_v, \\ \beta &= \alpha - \alpha_v + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{r_v}{r}\right)^n \sin[n(\alpha - \alpha_v)] & \text{za } r > r_v, \\ \beta &= \frac{\alpha - \alpha_v + \pi}{2} & \text{za } r = r_v. \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.2 Magnetska indukcija u kanonskoj domeni

Vektor jakosti magnetskog polja \mathbf{H} može se izraziti kao negativni gradijent skalarnog magnetskog potencijala [54]

$$\mathbf{H} = -\nabla \varphi_m. \quad (5.5)$$

Iz toga slijedi da je magnetska indukcija, u sredstvu koje ima relativnu magnetsku permeabilnost $\mu_r = 1$, jednaka

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \varphi_m. \quad (5.6)$$

Dalje se, iz jednadžbe (5.6), mogu izraziti radijalna i tangencijalna komponenta magnetske indukcije (slika 5.2) kao

$$B_r = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} \quad (5.7)$$

i

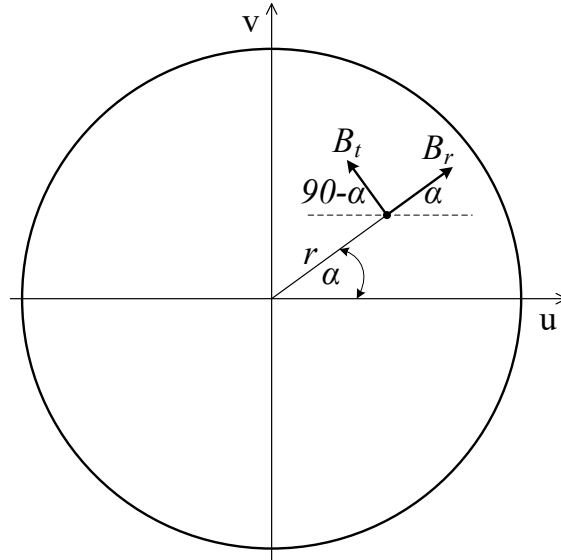
$$B_t = -\mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{r \partial \alpha}. \quad (5.8)$$

Iz radijalne i tangencijalne komponente mogu se izračunati u -komponenta i v -komponenta kao

$$B_u = B_r \cos \alpha - B_t \sin \alpha \quad (5.9)$$

i

$$B_v = B_r \sin \alpha + B_t \cos \alpha \quad (5.10)$$

Slika 5.2: Prikaz radijalne i tangencijalne komponente magnetske indukcije u u - v koordinatnom sustavu

5.2.1 Izračun B_r i B_t za $r < r_v$

Deriviranjem (5.4) po r i α za $r < r_v$ dobije se

$$\frac{\partial \beta}{\partial r} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r_v^n} \sin[n(\alpha - \alpha_v)] \quad (5.11)$$

i

$$\frac{\partial \beta}{r \partial \alpha} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n-1}}{r_v^n} \cos[n(\alpha - \alpha_v)]. \quad (5.12)$$

Deriviranjem (5.3) po r , prema jednadžbi (5.7), te uvrštavanjem (5.11) i množenjem s μ_0 dobije se

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^{n-1}}{r_v^n} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \right) \sin[n(\alpha - \alpha_v)], \quad r < r_v. \quad (5.13)$$

Deriviranjem (5.3) po α , prema jednadžbi (5.8), te uvrštavanjem (5.12) i množenjem s μ_0 dobije se

$$B_t = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^{n-1}}{r_v^n} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \right) \cos[n(\alpha - \alpha_v)], \quad r < r_v. \quad (5.14)$$

5.2.2 Izračun B_r i B_t za $r > r_v$

Deriviranjem (5.4) po r i α za $r > r_v$ dobije se

$$\frac{\partial \beta}{\partial r} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_v^n}{r^{n+1}} \sin[n(\alpha - \alpha_v)] \quad (5.15)$$

i

$$\frac{\partial \beta}{r \partial \alpha} = \frac{1}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_v}{r} \right)^n \cos[n(\alpha - \alpha_v)] \right\}. \quad (5.16)$$

Deriviranjem (5.3) po r , prema jednadžbi (5.7), te uvrštavanjem (5.15) i množenjem s μ_0 dobije se

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_v^n}{r^{n+1}} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \right) \sin[n(\alpha - \alpha_v)], \quad r > r_v. \quad (5.17)$$

Deriviranjem (5.3) po α , prema jednadžbi (5.8), te uvrštavanjem jednadžbe (5.16) i množenjem s μ_0 dobije se

$$B_t = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^n}{r^{n+1}} - \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \right) \cos[n(\alpha - \alpha_v)] \right\}, \quad r > r_v. \quad (5.18)$$

5.2.3 Izračun B_r i B_t za $r = r_v$

Deriviranjem (5.4) po r i α za $r = r_v$ dobije se

$$\frac{\partial \beta}{\partial r} = 0 \quad (5.19)$$

i

$$\frac{\partial \beta}{r \partial \alpha} = \frac{1}{2r}. \quad (5.20)$$

Deriviranjem (5.3) po r , prema jednadžbi (5.7), te uvrštavanjem (5.19) i množenjem s μ_0 dobije se

$$B_r = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \sin[n(\alpha - \alpha_v)], \quad r = r_v. \quad (5.21)$$

Deriviranjem (5.3) po α , prema jednadžbi (5.8), te uvrštavanjem (5.20) i množenjem s μ_0 dobije se

$$B_t = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \frac{1}{2r} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \cos[n(\alpha - \alpha_v)] \right\}, \quad r = r_v. \quad (5.22)$$

5.3 Magnetska indukcija u fizičkoj domeni

Nakon dobivanja rješenja za magnetsku indukciju u kanonskoj domeni (W -domena) potrebno je transformirati to rješenje u fizičku domenu (Z -domena). Iz teorije kompleksnih brojeva poznato je da svaka funkcija kompleksne varijable $z = x + jy$ u Z -domeni automatski zadovoljava Laplaceovu jednadžbu [55]. Te funkcije zovu se konjugirano kompleksne funkcije. Neka je $w = u(x, y) + jv(x, y)$ bilo koja funkcija od $z = x + jy$. Tada obje funkcije, u i v , zadovoljavaju Laplaceovu jednadžbu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Osim toga, ove funkcije zadovoljavaju i Cauchy-Riemannove uvjete

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Ako je $\varphi_m(x, y)$ skalarna potencijalna funkcija u Z -domeni i $\psi_m(u, v)$ transformirana skalarna potencijalna funkcija u W -domeni, onda se može postaviti sljedeći uvjet [54]

$$\varphi_m(x, y) = \psi_m[u(x, y), v(x, y)]. \quad (5.25)$$

Jakost magnetskog polja u Z -domeni jednaka je negativnom gradijentu skalarnog magnetskog potencijala, odnosno

$$H_z = H_x + jH_y = -\frac{\partial \varphi_m}{\partial x} - j\frac{\partial \varphi_m}{\partial y}, \quad (5.26)$$

a u W -domeni

$$H_w = H_u + jH_v = -\frac{\partial \psi_m}{\partial u} - j\frac{\partial \psi_m}{\partial v}. \quad (5.27)$$

Iz uvjeta (5.25) dobije se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} &= \frac{\partial \psi_m}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \psi_m}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} &= \frac{\partial \psi_m}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \psi_m}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Kombiniranjem jednadžbi (5.26), (5.27) i (5.28) dobije se

$$H_z = H_u \frac{\partial u}{\partial x} + H_v \frac{\partial v}{\partial x} + j \left(H_u \frac{\partial u}{\partial y} + H_v \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (5.29)$$

Nakon primjene Cauchy-Riemannovih uvjeta, jednadžba (5.29) postaje

$$H_z = (H_u + jH_v) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial v}{\partial x} \right) = H_w \left(\frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial v}{\partial x} \right). \quad (5.30)$$

S obzirom na to da je $w = u(x, y) + jv(x, y) = w(z)$, slijedi

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (5.31)$$

Prema tome, kompleksnim konjugiranjem $\frac{\partial w}{\partial z}$ dobije se

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^* = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + j\frac{\partial v}{\partial x} \right)^* = \frac{\partial u}{\partial x} - j\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (5.32)$$

Ako se (5.32) uvrsti u (5.30), dobije se jednadžba koja transformira rješenje jakosti magnetskog polja iz W -domene u Z -domenu, odnosno

$$H_z = H_w \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^*. \quad (5.33)$$

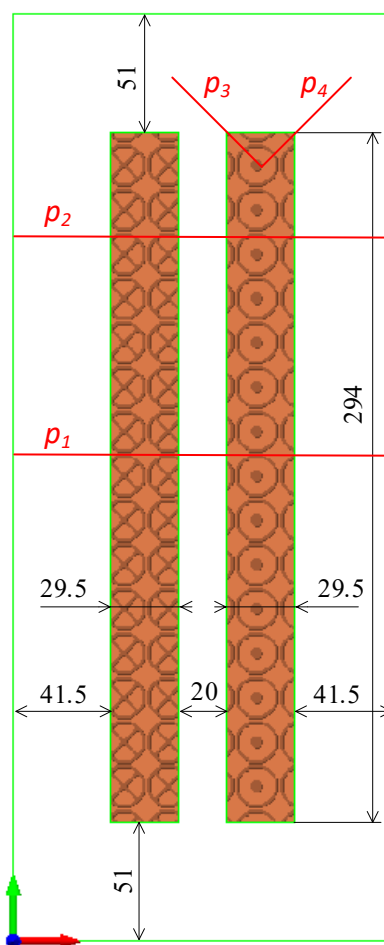
Isti tip jednadžbe može se primijeniti i na magnetsku indukciju jer se magnetsko polje računa u zraku i namotima [56, 57]

$$B_z = B_w \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^*. \quad (5.34)$$

Parcijalna derivacija $\frac{\partial z}{\partial w}$ izračunata je korištenjem *evaldiff* funkcije u SC Toolboxu u Matlabu. Parcijalna derivacija $\frac{\partial w}{\partial z}$ inverz je parcijalne derivacije $\frac{\partial z}{\partial w}$.

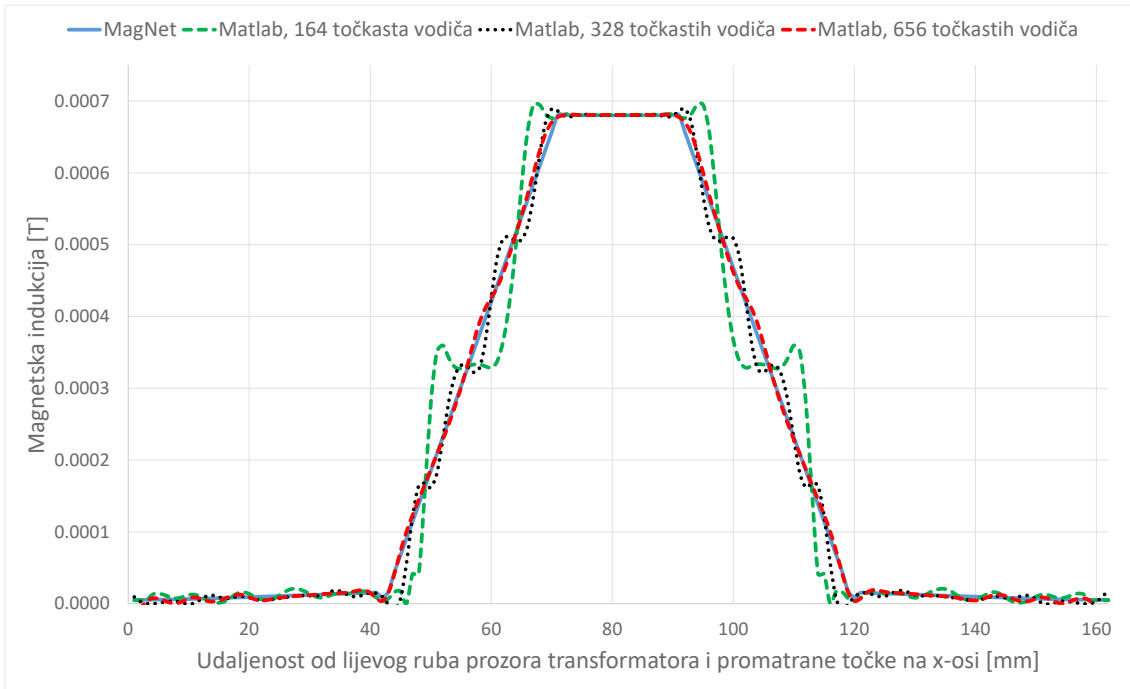
5.4 Model prozora jezgre transformatora

Za provjeru točnosti primjene konformnog preslikavanja za izračun magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora (fizička domena) napravljen je model prozora jezgre transformatora koristeći MKE u programskom paketu Mentor Graphics MagNet, prikazan na slici 5.3. Na slici 5.3 prikazani su, osim dimenzija u milimetrima, dijelovi pravaca na kojima se računa magnetska indukcija za usporedbu rezultata MagNeta i Matlaba, označeni s p_1 , p_2 , p_3 i p_4 te istaknuti crvenom bojom. Za izračun magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora korištenjem SC Toolboxa u Matlabu korišten je model prikazan na slici 4.9. Na slikama 5.4, 5.5, 5.6 i 5.7 prikazana je usporedba rezultata izračuna magnetske indukcije u MagNet-u i Matlabu u točkama koje se nalaze na dijelovima pravaca p_1 , p_2 , p_3 i p_4 . Razmak između točaka postavljen je na 1 mm tako da je usporedba napravljena u 163 točke na p_1 i p_2 te u 58 točaka na p_3 i p_4 .

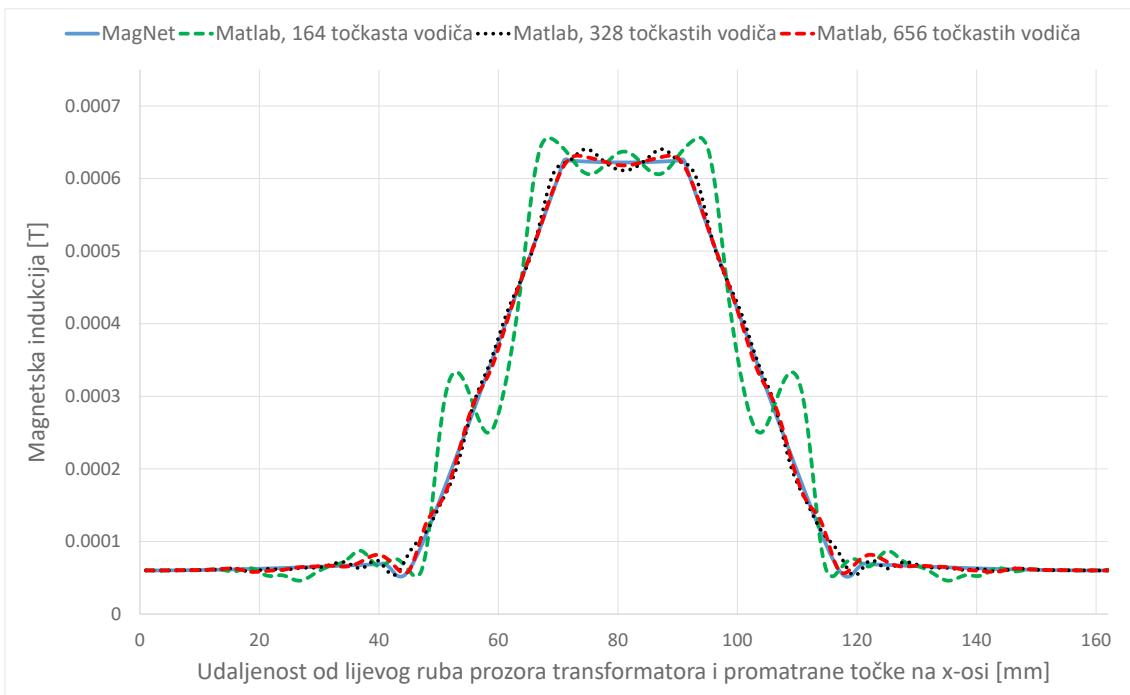


Slika 5.3: Model prozora jezgre transformatora načinjen u MagNetu, s dimenzijama u milimetrima i dijelovima pravaca u kojima se računa indukcija za usporedbu s Matlabom, označenih s p_1 , p_2 , p_3 i p_4

Oba namota u Matlab modelu imaju po 164 zavoja i kroz njih protječe struja od 1 A, ali u suprotnom smjeru, tako da je suma amperzavoja jednaka nuli. Svaki namot modeliran je sa 164 točkasta vodiča kroz koje teče struja od 1 A. Točkasti vodiči raspoređeni su u dva sloja s 82 vodiča po sloju. Krivulja magnetske indukcije u ovisnosti o udaljenosti od lijevog ruba prozora ima stepenast oblik zbog diskretnog modeliranja s konačnim brojem točkastih vodiča. Krivulja je strma na mjestima slojeva u kojima se nalaze točkasti vodiči. Povećanjem broja točkastih vodiča dobiju se bolji rezultati, odnosno smanjuje se srednja kvadratna pogreška rješenja magnetske indukcije



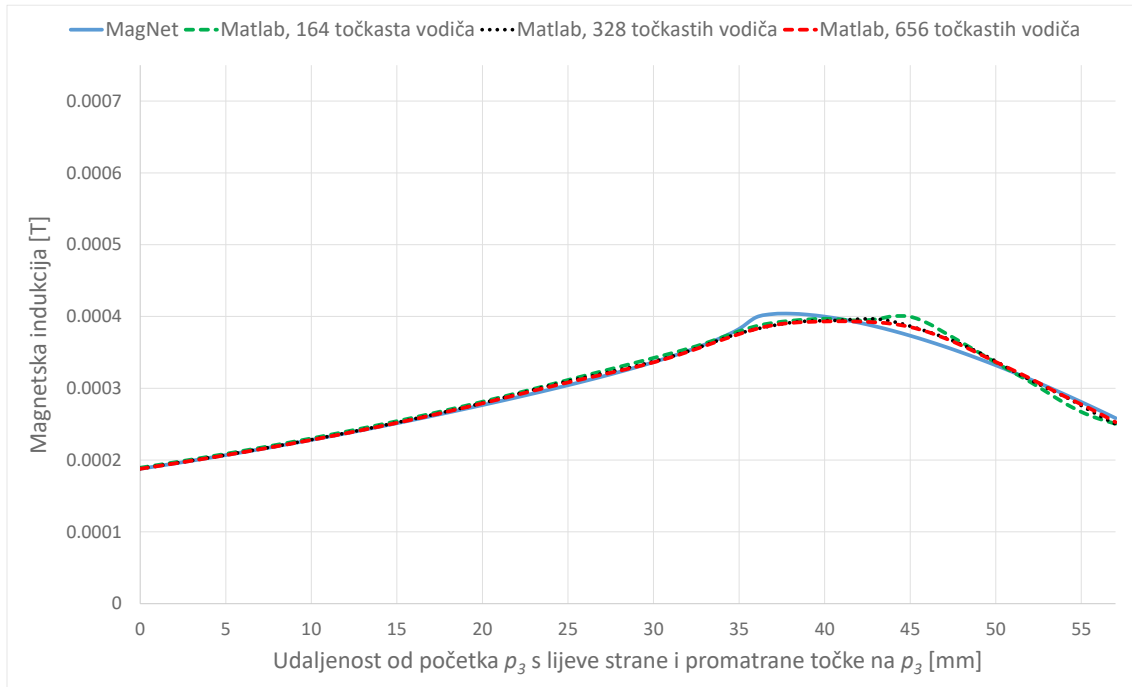
Slika 5.4: Krivulja magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora, za točke koje se nalaze na dijelu pravca p_1



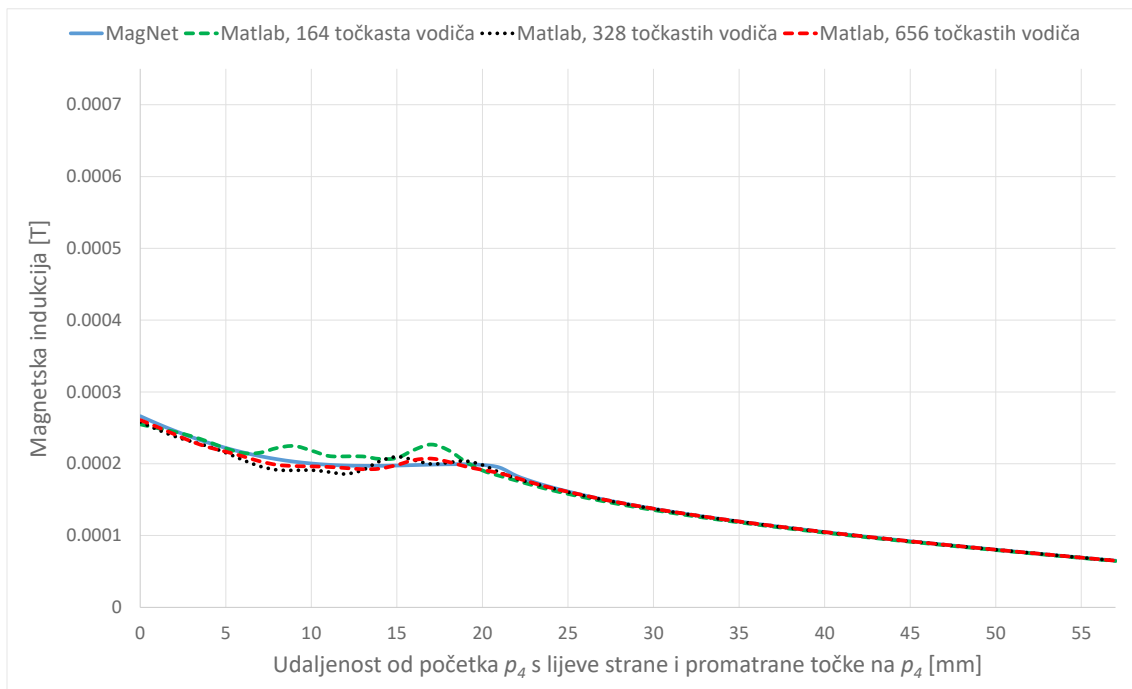
Slika 5.5: Krivulja magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora, za točke koje se nalaze na dijelu pravca p_2

dobivenih u MagNetu i Matlabu, kao što je prikazano u tablici 5.1, za broj točkastih vodiča jednak 164, 328 i 656. Srednja kvadratna pogreška izračunata je prema sljedećoj relaciji:

$$SKP = \frac{\sum_{i=1}^n (B_{matlab_i} - B_{magnet_i})^2}{n}, \quad (5.35)$$



Slika 5.6: Krivulja magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora, za točke koje se nalaze na dijelu pravca p_3



Slika 5.7: Krivulja magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora, za točke koje se nalaze na dijelu pravca p_4

gdje je n broj točaka u kojima se uspoređuje magnetska indukcija, B_{matlab} je magnetska indukcija izračunata u Matlabu korištenjem, a B_{magnet} je magnetska indukcija izračunata u MagNetu. Prilikom izračuna u Matlabu potrebno je paziti da amperzavoji ostanu nepromijenjeni. Prema tome, za 328 točkastih vodiča potrebno je postaviti struju na 0,5 A, a u slučaju 656 točkastih vodiča na 0,25 A.

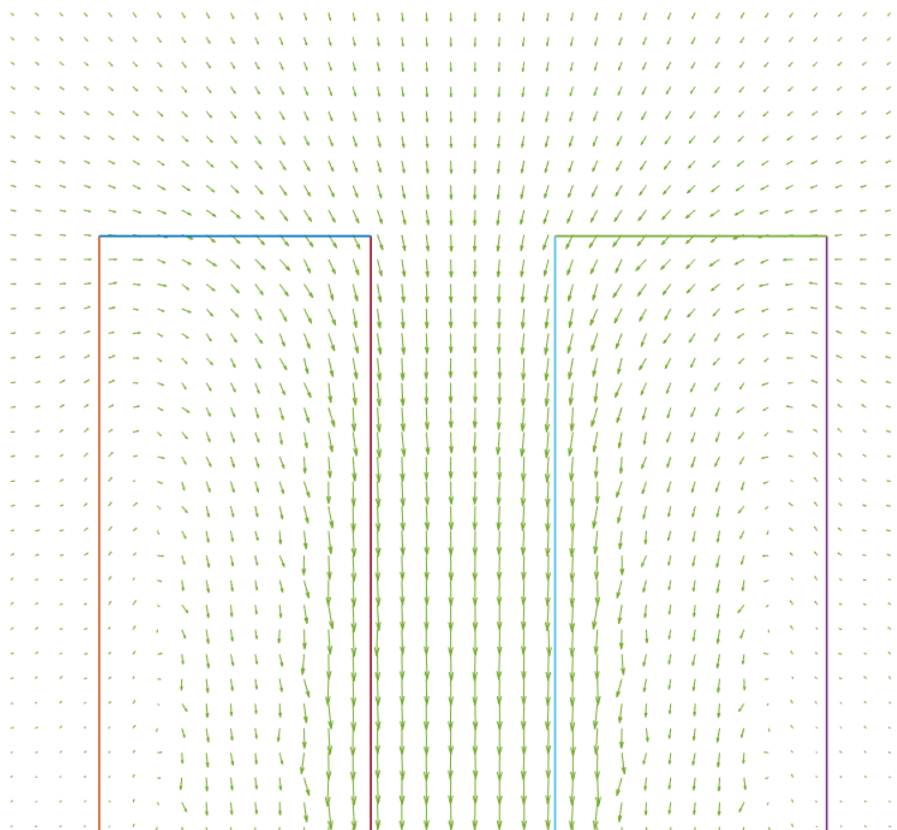
Namoti u MagNetu modelirani su kao dva pravokutnika koja imaju 164 zavoja kroz koje protječe

Tablica 5.1: Srednja kvadratna pogreška rješenja magnetske indukcije dobivenih u MagNetu i Matlabu, za model prikazan na slici 5.3

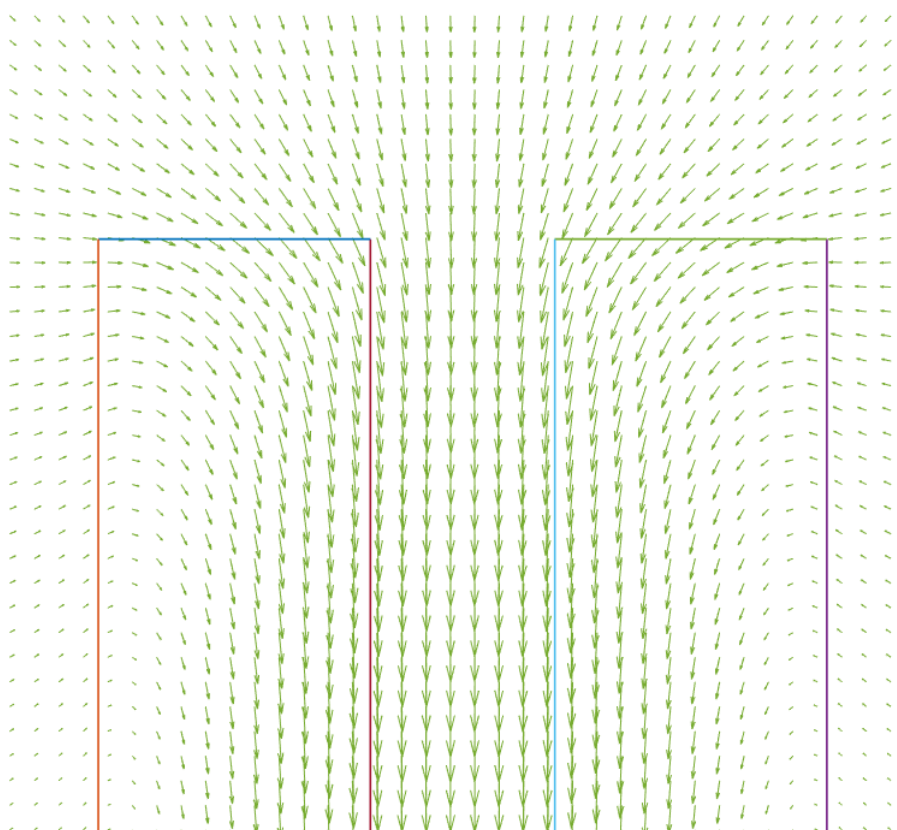
	Broj točkastih vodiča		
	164	328	656
p_1	1,95E-09	3,28E-10	7,82E-11
p_2	1,86E-09	6,37E-11	2,55E-11
p_3	7,27E-11	3,87E-11	3,14E-11
p_4	6,72E-11	2,92E-11	1,20E-11

struja od 1 A. Suma amperzavoja također je jednaka nuli, tj. struje protječu u suprotnim smjerovima, kao što je prikazano na slici 5.3. Na vanjske konture modela u MagNetu, koje predstavljaju konture prozora jezgre, postavljeni su *Field normal* rubni uvjeti, odnosno uvjeti da silnice magnetskog polja upadaju okomito na konture prozora. Postavljanjem takvih uvjeta simulira se beskonačna relativna permeabilnost lima jezgre.

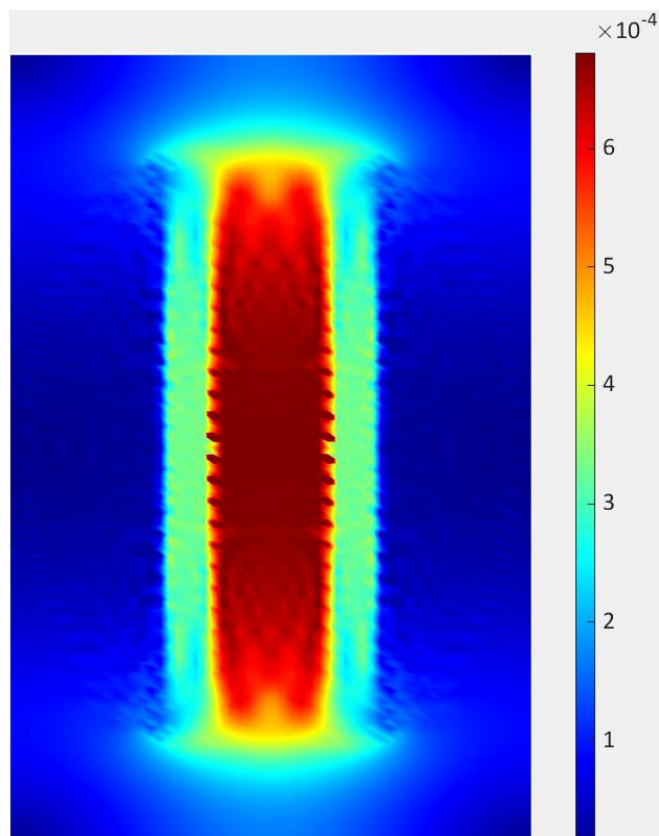
Osim krivulja raspodjele magnetske indukcije, napravljena je usporedba magnetske indukcije između modela u MagNetu i Matlabu pomoću prikaza indukcije strelicama i bojom u gornjem desnom kutu prozora jezgre transformatora. Slike 5.8 i 5.9 prikazuju magnetsku indukciju u Matlabu i MagNetu pomoću strelica. Slike 5.10 i 5.11 prikazuju magnetsku indukciju u Matlabu i MagNetu pomoću boja. I ovdje se pokazuje dobro slaganje rezultata modela u Matlabu i modela u MagNetu.



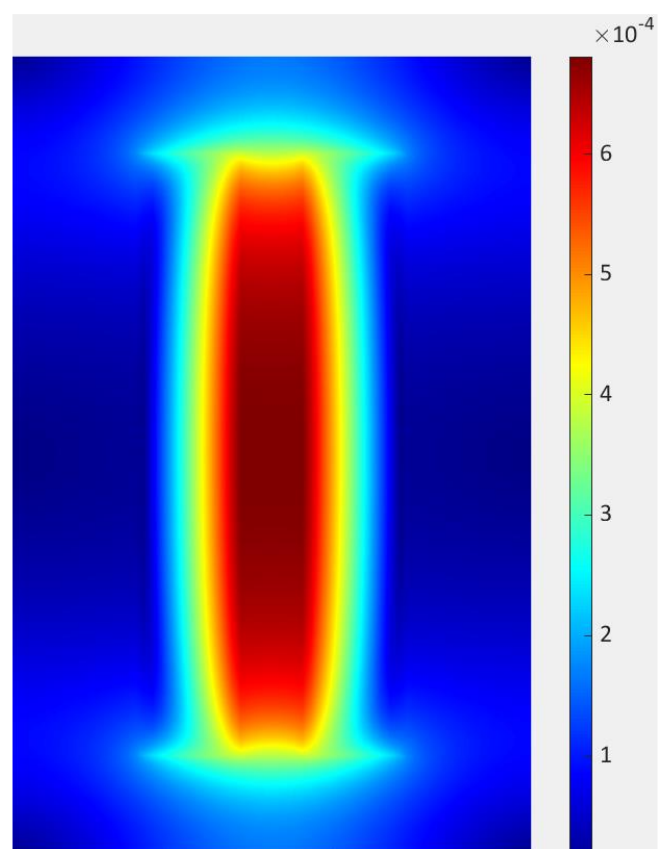
Slika 5.8: Prikaz vektora magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora strelicama, Matlab model



Slika 5.9: Prikaz vektora magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora strelicama, MagNet model



Slika 5.10: Prikaz amplitude magnetske indukcije u [T] u prozoru jezgre transformatora bojama, Matlab model



Slika 5.11: Prikaz amplitude magnetske indukcije u [T] u prozoru jezgre transformatora bojama, MagNet model

5.5 Vektorski magnetski potencijal u kanonskoj domeni

Magnetska indukcija \mathbf{B} može se izraziti kao rotor vektorskog magnetskog potencijala, odnosno

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}. \quad (5.36)$$

Dalje se iz (5.36) može izraziti radijalna komponenta magnetske indukcije kao

$$B_r = \frac{\partial A_z}{r \partial \alpha}. \quad (5.37)$$

Vektorski magnetski potencijal \mathbf{A} , prema slici 5.1, ima samo z -komponentu koja je usmjerena "iz papira" i označena je s A_z . Izjednačavanjem jednadžbi (5.7) i (5.37) dobije se

$$-\mu_0 \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = \frac{\partial A_z}{r \partial \alpha}. \quad (5.38)$$

Iz (5.38) dobije se vektorski magnetski potencijal, odnosno z -komponenta vektorskog magnetskog potencijala, kao

$$A_z = -\mu_0 \int r \frac{\partial \varphi_m}{\partial r} d\alpha. \quad (5.39)$$

5.5.1 Izračun A_z za $r < r_v$

Izjednačavanjem (5.7) i (5.13) dobije se

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = -\frac{I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^{n-1}}{r_v^n} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \right) \sin[n(\alpha - \alpha_v)]. \quad (5.40)$$

Uvrštavanjem (5.40) u (5.39) dobije se

$$A_z = \mu_0 \int r \frac{I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^{n-1}}{r_v^n} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \right) \sin[n(\alpha - \alpha_v)] d\alpha. \quad (5.41)$$

Integriranjem (5.41) po α dobije se konačni izraz

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r^n}{r_v^n} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^n}{R_d^{2n}} \right) \frac{\cos[n(\alpha_v - \alpha)]}{n}, \quad r < r_v \quad (5.42)$$

gdje je proizvoljna konstanta integracije zanemarena, tj. $C = 0$.

5.5.2 Izračun A_z za $r > r_v$

Izjednačavanjem (5.7) i (5.17) dobije se

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = -\frac{I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_v^n}{r^{n+1}} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \right) \sin[n(\alpha - \alpha_v)]. \quad (5.43)$$

Uvrštavanjem (5.43) u (5.39) dobije se

$$A_z = \mu_0 \int r \frac{I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_v^n}{r^{n+1}} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \right) \sin[n(\alpha - \alpha_v)] d\alpha. \quad (5.44)$$

Integriranjem (5.44) po α dobije se konačni izraz

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_v^n}{r^n} + \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^n}{R_d^{2n}} \right) \frac{\cos[n(\alpha_v - \alpha)]}{n}, \quad r > r_v \quad (5.45)$$

gdje je proizvoljna konstanta integracije zanemarena, tj. $C = 0$.

5.5.3 Izračun A_z za $r = r_v$

Izjednačavanjem (5.7) i (5.21) dobije se

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial r} = -\frac{I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \sin[n(\alpha - \alpha_v)]. \quad (5.46)$$

Uvrštavanjem (5.46) u (5.39) dobije se

$$A_z = \mu_0 \int r \frac{I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \sin[n(\alpha - \alpha_v)] d\alpha. \quad (5.47)$$

Integriranjem (5.47) po α dobije se konačni izraz

$$A_z = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 1} \frac{r_v^n r^{n-1}}{R_d^{2n}} \frac{\cos[n(\alpha_v - \alpha)]}{n}, \quad r = r_v \quad (5.48)$$

gdje je proizvoljna konstanta integracije zanemarena, tj. $C = 0$.

5.6 Vektorski magnetski potencijal u fizičkoj domeni

S obzirom na to da vektorski magnetski potencijal ima samo z -komponentu, on ne ovisi o derivaciji koordinata kao magnetska indukcija te je jednak u kanonskoj i fizičkoj domeni, odnosno

$$A_{zz} = A_{zw} \quad (5.49)$$

gdje je A_{zz} z -komponenta vektorskog magnetskog potencijala u fizičkoj domeni, a A_{zw} je z -komponenta vektorskog magnetskog potencijala u kanonskoj domeni. Prema tome, vektorski magnetski potencijal u fizičkoj domeni računa se tako da se prvo izračuna u definiranim točkama u kanonskoj domeni, a onda se transformira u odgovarajuće točke u fizičkoj domeni koristeći (5.49).

Dio III

**Primjena konformnih preslikavanja kod
transformatora**

Izračun napona kratkog spoja

U ovom radu primjenom konformnih preslikavanja geometrija transformatora u uzdužnom i poprečnom presjeku preslikava se na jedinični krug unutar kojega je moguće analitički izračunati magnetsku indukciju te preslikati to rješenje nazad u originalnu domenu. Nakon toga integracijom energije rasipnog polja u namotima i prostoru oko namota, isključujući jezgru, računa se napon kratkog spoja transformatora [58].

U poglavlju 2 i jednadžbi (2.2) definiran je rasipni induktivitet L_σ preko magnetske energije rasipnog polja W_σ . Iz rasipnog induktiviteta može se izračunati reaktivni dio napona kratkog spoja kao

$$u_{\sigma\%} = \omega L_\sigma \frac{S_n}{U_n^2} \cdot 100 \quad (6.1)$$

gdje je ω kružna frekvencija, S_n je ukupna nazivna snaga transformatora i U_n je nazivni napon referentnog namota. Radni dio napona kratkog spoja može se izračunati kao

$$u_{r\%} = \frac{P_g}{S_n} \cdot 100 \quad (6.2)$$

gdje su P_g ukupni omski gubici u namotima i metalnim dijelovima (npr. u kotlu, steznicima, itd.). Ukupni omski gubici za izračun radnog dijela napona kratkog spoja definirani su na referentnoj temperaturi koja za klasu A iznosi 75 °C [1]. Korekcije gubitaka tereta na neku drugu temperaturu, za bakrene i aluminijske namote, dane su u dodatku E u [1]. Napon kratkog spoja može se izračunati kao

$$u_{k\%} = \sqrt{u_{r\%}^2 + u_{\sigma\%}^2}. \quad (6.3)$$

6.1 Energija rasipnog polja u 2D prostoru

Nakon izračuna magnetske indukcije u definiranim točkama u poprečnom i uzdužnim presjecima transformatora, odnosno u područjima 1, 2 i 3 (slika 4.8), može se izračunati magnetska energija rasipnog polja, u svakoj definiranoj točki s koordinatama (x, y) , kao

$$W_{xy} = \frac{B_{xy}^2}{2\mu_0} \quad (6.4)$$

gdje je B_{xy} magnetska indukcija u točki s koordinatama (x, y) . B_{xy} i W_{xy} zapravo su varijable u obliku matrica, iste veličine, gdje broj stupca označava x -koordinatu, a broj retka y -koordinatu točke u kojoj je izračunata magnetska indukcija B , odnosno magnetska energija rasipnog polja W .

Korištenjem interpolacijskih metoda dostupnih u Matlabu moguće je izraziti magnetsku energiju rasipnog polja kao funkciju koordinata (x, y) , tj. matricu vrijednosti energije u pojedinoj točki W_{xy} pretvoriti u funkciju energije $W(x, y)$. U ovom radu za tu je svrhu korištena Matlab funkcija

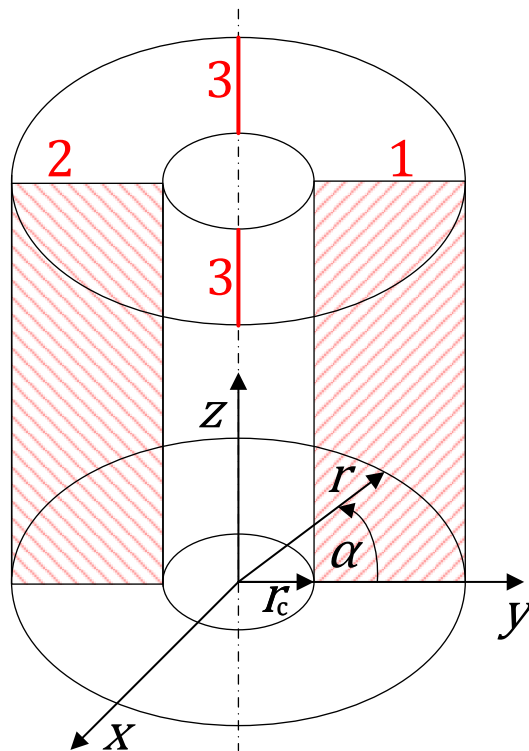
griddedInterpolant. Prema tome, ukupna površinska energija za definirano područje (1, 2 ili 3) dobije se 2D numeričkom integracijom, odnosno

$$W_{P(i)} = \iint W(x, y) dx dy \quad (6.5)$$

gdje indeks i označava broj područja (1, 2 i 3). U ovom radu za tu je svrhu korištena Matlab funkcija *quad2d*.

6.2 Energija rasipnog polja u 3D prostoru

Ukupna volumna energija rasipnog polja može se dobiti ekstrapolacijom izračunatih površinskih energija, za područja 1, 2 i 3, na 3D prostor. S obzirom na to da su stupovi jezgre i namoti kružnog oblika, najpovoljnije je koristiti cilindrični koordinatni sustav za izračun energije u 3D prostoru. Na slici 6.1 prikazan je modificirani cilindrični koordinatni sustav s unutarnjim cilindrom koji predstavlja konture stupa jezgre, gdje r_c označava radijus jezgre, a šrafirano crvenom bojom i brojevima od 1 do 3 (prema slici 4.8) označena su 2D područja za koja se računa površinska energija.



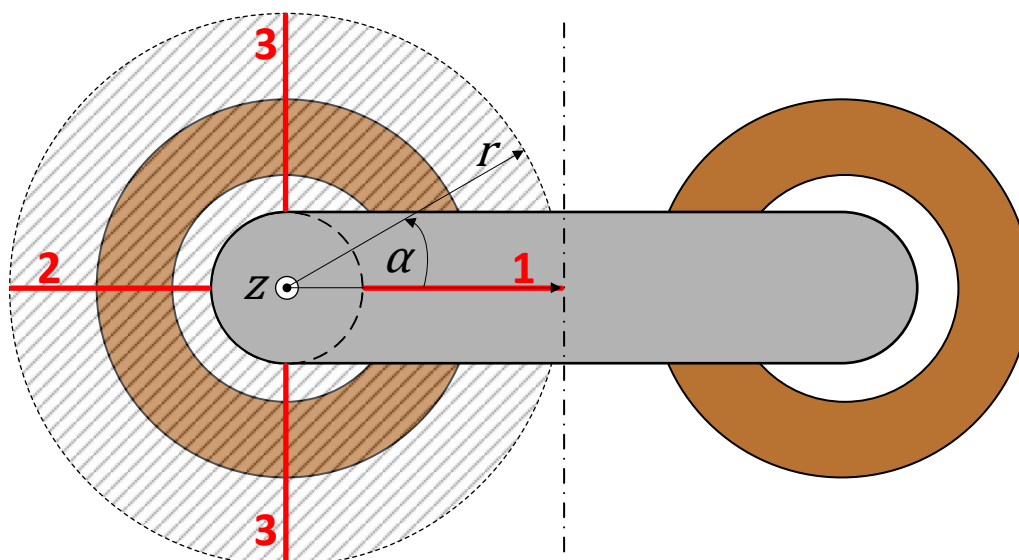
Slika 6.1: Cilindrični koordinatni sustav

Ukupna volumna energija oko jednog stupa jezgre, u namotu i prostoru oko namota, može se izraziti kao suma površinskih energija, od $\alpha = 0$ do 2π , tj.

$$W_{V,uk} = \iiint W(r, z) r dr d\alpha dz \quad (6.6)$$

Na slici 6.2 prikazan je tlocrt jednofaznog transformatora s dvostupnom jezgrom. Crvena linija označena brojem 1 predstavlja površinsku energiju iz rješenja za uzdužni presjek prozora jezgre transformatora, izračunatu za pola širine prozora jezgre, tj. za jedan stup jezgre. Crvena linija označena brojem 2 predstavlja površinsku energiju iz rješenja za uzdužni presjek izvan prozora jezgre transformatora, a crvena linija označena brojem 3 predstavlja površinsku energiju iz rješenja

za poprečni presjek izvan prozora jezgre transformatora. Da bi se dobila ukupna volumna energija, prema jednadžbi (6.6) potrebno je ekstrapolirati izračunate površinske energije, tj. iz četiriju točaka na zamišljenoj kružnici za $\alpha = (0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2})$, koje predstavljaju iznose površinskih energija, dobiti iznose površinskih energija u više točaka od $\alpha = 0$ do 2π , npr. u 360 točaka. To se može napraviti u Matlabu koristeći interpolacijske funkcije. U ovom radu korištene su Matlab funkcije *spline* i *pchip* koje daju slična rješenja, a s obzirom na malen broj poznatih točaka (4 točke), preporuča se korištenje *pchip* funkcije. Nakon toga koristi se numerička integracija na proširenom broju točaka da bi se dobila volumna energija. Za numeričku integraciju korištena je Matlab funkcija *trapz*.



Slika 6.2: Ekstrapolacija energije rasipnog magnetskog polja iz 2D rješenja na 3D prostor

U slučaju jednofaznih i trofaznih transformatora s namotima koji se nalaze na istom stupu, dovoljno je izračunati magnetsku energiju rasipnog polja samo oko jednog stupa jezgre, tj.

$$W_{\sigma} = W_{v,uk}. \quad (6.7)$$

U slučaju jednofaznih transformatora s namotima koji se nalaze na različitim stupovima te ako su namoti jednaki u pogledu geometrije i broja zavoja, dovoljno je izračunati magnetsku energiju rasipnog polja samo oko jednog stupa jezgre, tj.

$$W_{\sigma} = 2 \cdot W_{v,uk}. \quad (6.8)$$

U slučaju jednofaznih transformatora s različitim namotima koji se nalaze na različitim stupovima, potrebno je izračunati magnetsku energiju rasipnog polja oko oba stupa jezgre, tj.

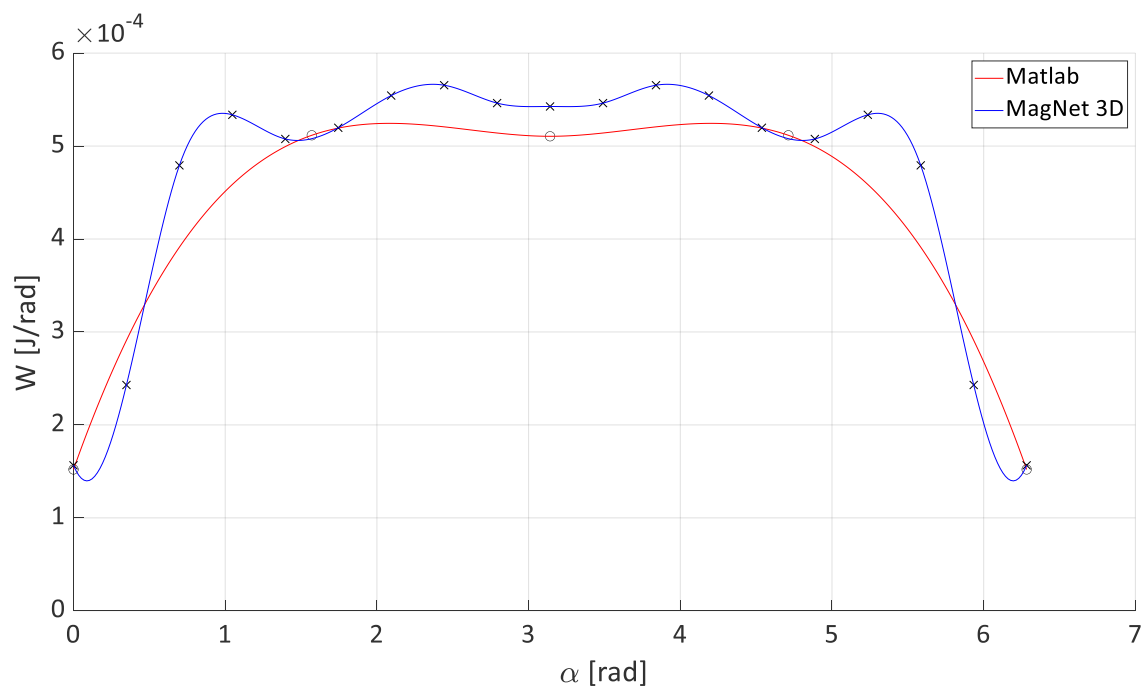
$$W_{\sigma} = W_{v,uk_1} + W_{v,uk_2}. \quad (6.9)$$

6.2.1 Usporedba ekstrapoliranog rješenja u Matlabu s rješenjem 3D modela u MagNetu

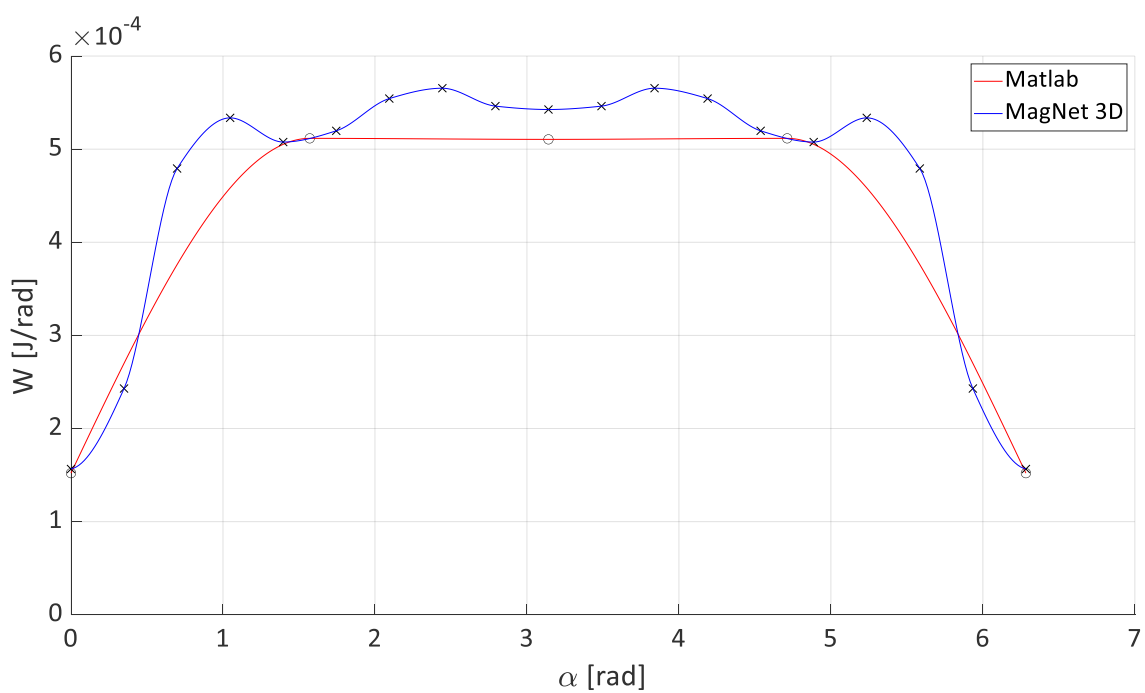
Na slikama 6.3 i 6.4 prikazana je usporedba magnetske energije rasipnog polja oko lijevog stupa, u ovisnosti o kutu α prikazanom na slici 6.2, dobivene pomoću 3D modela u MagNetu i kvazi 3D modela u Matlabu (presjek prozora jezgre s dimenzijama modela koji je korišten za usporedbu prikazan je na slici 5.3).

Kod kvazi 3D modela u Matlabu površinska energija je računata iz izračunatih indukcija u točkama prostora, u četiri različita presjeka (što je objašnjeno u prethodnom poglavlju). Radi usporedbe s 3D modelom u MagNetu, napravljena je Matlab skripta pomoću koje su dohvaćene magnetske indukcije u osamnaest različitih presjeka, s razmakom od 20° , te je za svaki presjek, iz magnetskih indukcija u tom presjeku, izračunata površinska energija rasipnog polja. Prema tome, ekstrapolacija za kvazi 3D model u Matlabu napravljena je iz četiri točke, a ekstrapolacija za 3D model u MagNetu napravljena je iz osamnaest točaka. Ekstrapolacija pomoću Matlab funkcije *spline* prikazana je na slici 6.3, a ekstrapolacija pomoću Matlab funkcija *pchip* i *ppval* prikazana je na slici 6.4. Integriranjem površinskih energija po kutu dobije se ukupna volumna energija oko jednog stupa, a za primjer prikazan na slikama 6.3 i 6.4 razlika između ukupnih volumnih energija, dobivenih pomoću 3D modela u MagNetu i kvazi 3D modela u Matlabu, iznosi oko 5%, što u konačnici znači da će i razlika napona kratkog spoja, izračunatog preko magnetske energije rasipnog polja pomoću navedenih modela, također iznositi oko 5%.

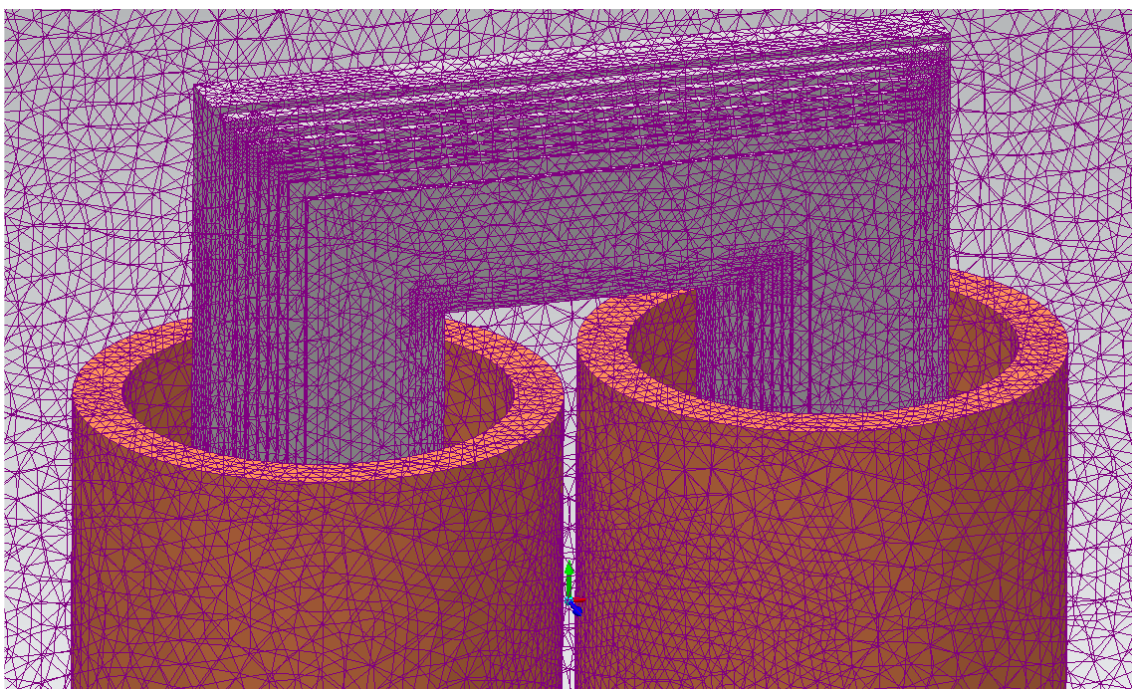
Na slici 6.5 prikazan je gornji dio korištenog 3D modela transformatora u MagNetu, s prikazom gustoće mreže konačnih elemenata. Za izračun je korišten polinom 2. reda.



Slika 6.3: Usporedba magnetske energije rasipnog polja oko lijevog stupa, u ovisnosti o kutu α prikazanom na slici 6.2, dobivene pomoću 3D modela u MagNetu i kvazi 3D modela u Matlabu, uz korištenje Matlab funkcije *spline* za ekstrapolaciju 2D rješenja



Slika 6.4: Usporedba magnetske energije rasipnog polja oko lijevog stupa, u ovisnosti o kutu α prikazanom na slici 6.2, dobivene pomoću 3D modela u MagNetu i kvazi 3D modela u Matlabu, uz korištenje Matlab funkcija *pchip* i *ppval* za ekstrapolaciju 2D rješenja



Slika 6.5: 3D model u MagNetu s prikazom gustoće mreže konačnih elemenata, korišten za usporedbu magnetske indukcije s Matlabom

6.3 Primjer izračuna napona kratkog spoja za trofazne transformatore

Za provjeru predložene metode na trofaznim transformatorima izabrano je devet transformatora različitih snaga i vrsta namota proizvedenih i ispitanih u tvornici transformatora *Končar - Distributivni i specijalni transformatori d.d.* Reaktivni dio napona kratkog spoja u_{σ} izračunat je predloženom metodom te uspoređen s mjerenim vrijednostima i vrijednostima koje su izračunate specijalnim programom proizvođača, koji se temelji na analitičkoj metodi koja je razvijena interno i dosta je slična analitičkim metodama koje se spominju u pregledu literature, odnosno poglavlju 2. Transformatori su jezgrastog tipa s trostupnom jezgrom te se niskonaponski i visokonaponski namoti iste faze nalaze na istom stupu.

Kod trofaznih transformatora potrebno je u presjeku prozora modelirati namote obiju susjednih faza, a u uzdužnom presjeku izvan prozora jezgre potrebno je modelirati namote obiju krajnjih faza.

Tablica 6.1 prikazuje usporedbu mjerenih i izračunatih vrijednosti reaktivnog dijela napona kratkog spoja, za devet različitih transformatora, gdje je $u_{\sigma m}$ mjereni reaktivni dio napona kratkog spoja, $u_{\sigma a}$ je reaktivni dio napona kratkog spoja izračunat specijalnim programom proizvođača, $u_{\sigma s}$ je reaktivni dio napona kratkog spoja izračunat predloženom metodom u kombinaciji s Matlab funkcijom *spline*, $u_{\sigma p}$ je reaktivni dio napona kratkog spoja izračunat predloženom metodom u kombinaciji s Matlab funkcijom *pchip*, a $\Delta_{a,s,p}$ su odstupanja izračunatih vrijednosti od mjerene vrijednosti. Odstupanja računatih i mjerenih vrijednosti smanjuju se povećanjem snage, a razlog tome je manji utjecaj tolerancije vodiča i izolacije te ljudskog faktora prilikom namatanja namota. Visine i širine namota često znaju odstupati od dokumentiranih vrijednosti par milimetara, iz razloga spomenutih u prethodnoj rečenici, a što je namot veći, postotno je odstupanje visine i širine manje. Reaktivni dio napona kratkog spoja za velike energetske transformatore snage 40 MVA i 100 MVA izračunat je u specijalnom programu proizvođača koji se temelji na Rabinsovoj metodi, koja je opisana u prilogu. Iz tablice je vidljivo da predložena metoda daje dobre rezultate za trofazne transformatore jer su odstupanja izračunatih vrijednosti od mjerenih vrijednosti niža od tolerancije definirane normom [1], koja iznosi $\pm 10\%$. Tolerancije na garantiranu vrijednost napona kratkoga spoja pomažu proizvođačima transformatora pokriti dvije vrste grešaka, tj. greške u izračunu i greške u proizvodnji. S obzirom na to da je na greške u proizvodnji najčešće teško utjecati, zbog raznih razloga (različiti dobavljači vodiča isporučuju vodiče s negativnim ili pozitivnim tolerancijama na debljinu vodiča, vještina radnika koji namataju namote, itd.), potrebno je greške u izračunu što više smanjiti. Prema tome, iako norma dopušta toleranciju $\pm 10\%$, poželjno je svesti greške izračuna na par puta manju vrijednost. U pravilu je utjecaj grešaka u proizvodnji veći na manjim transformatorima, a smanjuje se s povećanjem snage, odnosno veličine transformatora. To se jasno vidi i u tablici 6.1, gdje su odstupanja mjerenih i računatih vrijednosti više od deset puta niža od dozvoljenih odstupanja. Prema tome, predložena metoda ulijeva određenu sigurnost projektantu transformatora da će se mjereni napon kratkoga spoja naći u dozvoljenim granicama u odnosu na garantiranu vrijednost, bez obzira na utjecaj grešaka u proizvodnji, jer je utjecaj greške u izračunu mali.

Analitičke metode, kao što je Rabinsova metoda, računaju volumnu magnetsku energiju rasipnog polja iz 2D rješenja u prozoru jezgre transformatora. Prije je pokazano da se u ovom radu koriste tri rješenja za izračun volumne energije (osim rješenja u prozoru koriste se rješenje u uzdužnom presjeku izvan prozora jezgre te rješenje u poprečnom presjeku izvan prozora jezgre), odnosno koristi se kvazi 3D model za izračun volumne magnetske energije rasipnog polja. U tablici 6.2 prikazana je usporedba mjerenih vrijednosti i izračunatih vrijednosti pomoću kvazi 3D modela, što je već prikazano u tablici 6.1, s vrijednostima izračunatim predloženom metodom uz korištenje samo rješenja u prozoru jezgre transformatora. Rezultati pokazuju da je kvazi 3D model koji uzima u obzir tri rješenja točniji od 2D modela koji uzima u obzir samo rješenje u prozoru.

Tablica 6.1: Usporedba u_{σ} dobivenih mjerenjem ($u_{\sigma m}$), izračunom u specijalnom programu proizvođača transformatora ($u_{\sigma a}$) te predloženom metodom za trofazne transformatore ($u_{\sigma s}$ i $u_{\sigma p}$)

Snaga [kVA]	$u_{\sigma m}$ [%]	$u_{\sigma a}$ [%]	$u_{\sigma s}$ [%]	$u_{\sigma p}$ [%]	Δ_a [%]	Δ_s [%]	Δ_p [%]
100	3,58	3,82	3,81	3,77	6,70	6,55	5,38
630	3,63	3,56	3,38	3,37	-1,93	-6,82	-7,16
1500	6,04	5,88	5,82	5,79	-2,65	-3,66	-4,14
1600	6,00	5,79	5,71	5,69	-3,50	-4,83	-5,17
3500	6,77	6,94	6,92	6,90	2,51	2,26	1,90
5000	6,55	6,80	6,54	6,51	3,82	-0,13	-0,67
6300	5,84	6,00	5,83	5,82	2,74	-0,20	-0,33
40 000	9,94	10,27	10,04	10,02	3,32	1,01	0,80
100 000	12,81	13,02	12,93	12,93	1,64	0,94	0,94

Tablica 6.2: Usporedba u_{σ} dobivenih mjerenjem ($u_{\sigma m}$) te predloženom metodom za trofazne transformatore korištenjem kvazi 3D modela ($u_{\sigma s}$ i $u_{\sigma p}$) i 2D modela ($u_{\sigma 2D}$)

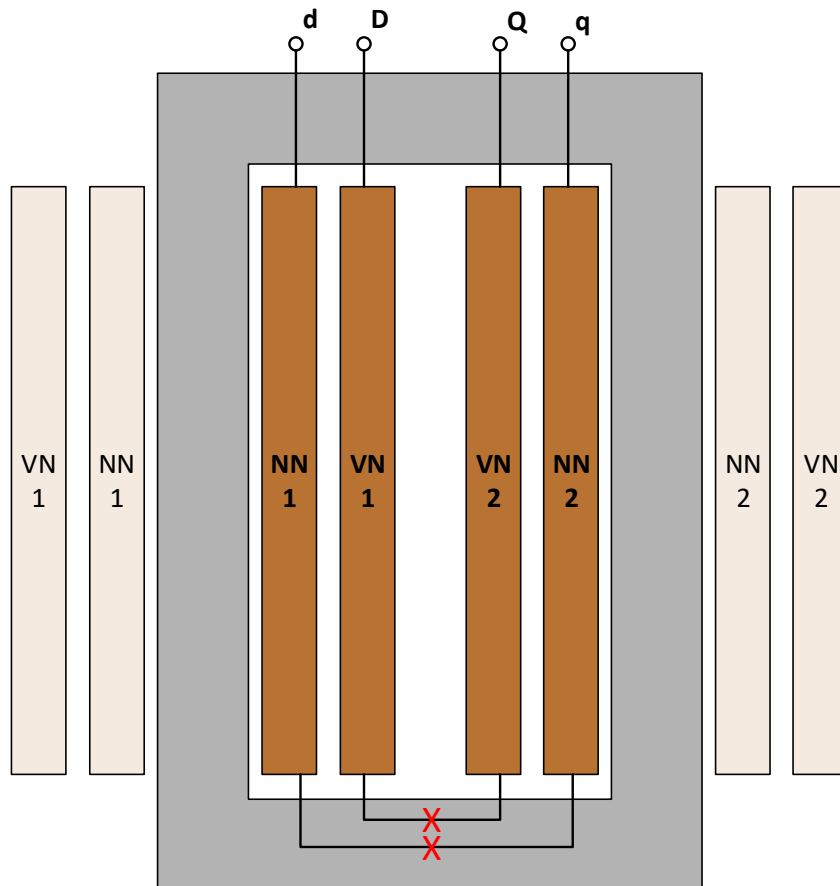
Snaga [kVA]	$u_{\sigma m}$ [%]	$u_{\sigma s}$ [%]	$u_{\sigma p}$ [%]	$u_{\sigma 2D}$ [%]	Δ_s [%]	Δ_p [%]	Δ_{2D} [%]
100	3,58	3,81	3,77	3,86	6,55	5,38	7,82
630	3,63	3,38	3,37	3,58	-6,82	-7,16	-1,38
1500	6,04	5,82	5,79	5,91	-3,66	-4,14	-2,15
1600	6,00	5,71	5,69	5,60	-4,83	-5,17	-6,67
3500	6,77	6,92	6,90	6,95	2,26	1,90	2,66
5000	6,55	6,54	6,51	6,69	-0,13	-0,67	2,14
6300	5,84	5,83	5,82	5,92	-0,20	-0,33	1,37
40 000	9,94	10,04	10,02	9,42	1,01	0,80	-5,23
100 000	12,81	12,93	12,93	12,55	0,94	0,94	-2,03

6.4 Primjer izračuna napona kratkog spoja za jednofazne transformatore

Potreba za računanjem napona kratkog spoja između namota koji se nalaze na različitim stupovima najčešće se javlja kod jednofaznih transformatora za električnu vuču koji imaju više namota, odnosno koji uz visokonaponski namot koji se sastoji od paralelnih grana i vučne namote mogu još imati namot za grijanje, namot pomoćnih pogona te filterski namot. U tom slučaju potrebno je računati napon kratkog spoja za sve kombinacije namota, a neke od kombinacija nalaze se na različitim stupovima [59].

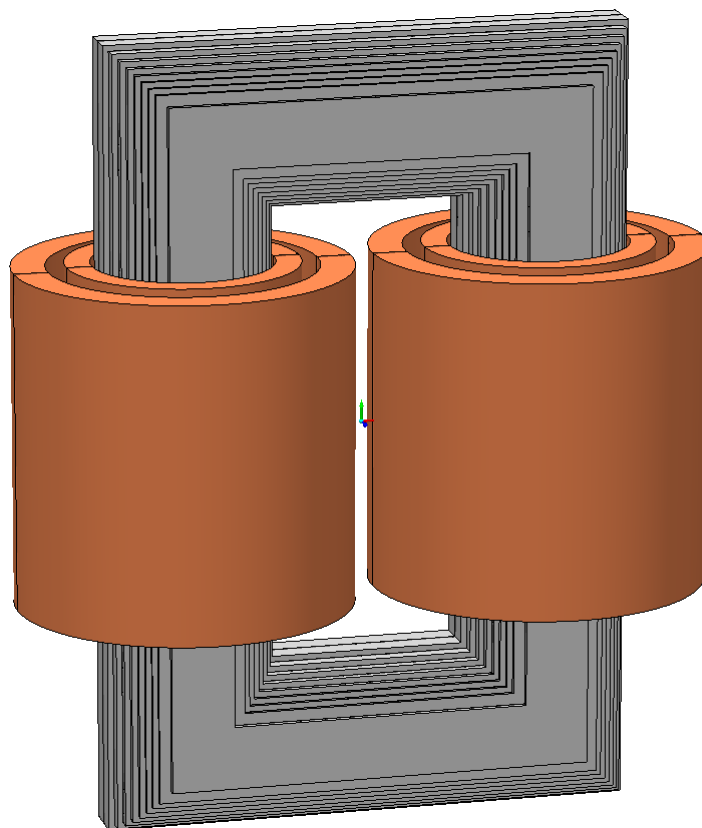
Za provjeru predložene metode za izračun napona kratkog spoja između dvaju namota koji se nalaze na različitim stupovima modificiran je jednofazni transformator (transformator $T2$) proizveden u tvornici transformatora Končar - Distributivni i specijalni transformatori d.d. Transformator $T2$ iskorišten je i za mjerenje raspodjele struja kroz paralelne grane namota, što je objašnjeno u poglavlju 7. Shema transformatora prikazana je na slici 6.6, a 3D model u programskom paketu Mentor Graphics MagNet (verzija 7.9.0.18), korišten za izračun pomoću MKE metode, prikazan je na slici 6.7. Transformator je jezgrastog tipa s dvostupnom jezgrom te ima jedan niskonaponski i jedan visokonaponski namot. Niskonaponski namot sastoji se od dviju serijski spojenih grana, označenih s $NN1$ i $NN2$, koje se nalaze svaka na svom stupu. Visokonaponski namot sastoji se od dviju serijski spojenih grana, označenih s $VN1$ i $VN2$, koje se nalaze svaka na svom stupu. Modifikacija je napravljena tako da su serijski spojevi obaju namota odspojeni. Na taj način dobivena su

četiri odvojena namota, označena NN_1 , VN_1 , NN_2 i VN_2 . Napon kratkog spoja mjereno je između namota koji se nalaze na različitim stupovima, tj. za kombinacije namota VN_2 - VN_1 , VN_2 - NN_1 i NN_1 - NN_2 . Namoti NN_1 , NN_2 , VN_1 i VN_2 prikazani su i s vanjske strane jezgre, tj. izvan prozora jezgre transformatora, zbog jasnije predožbe na kojem stupu jezgre se nalaze koji namoti. Prema tome, namoti NN_1 i VN_1 nalaze se na lijevom stupu, a namoti NN_2 i VN_2 na desnom stupu.



Slika 6.6: Shema jednofaznog transformatora modificirana za mjerenje napona kratkog spoja

Tablica 6.3 prikazuje usporedbu mjerenih i izračunatih vrijednosti reaktivnog dijela napona kratkog spoja, za tri različite kombinacije namota modificiranog jednofaznog transformatora, gdje je $u_{\sigma m}$ mjereni reaktivni dio napona kratkog spoja, $u_{\sigma k}$ je reaktivni dio napona kratkog spoja izračunat MKE metodom, odnosno programskim paketom Mentor Graphics MagNet, $u_{\sigma s}$ je reaktivni dio napona kratkog spoja izračunat predloženom metodom u kombinaciji s Matlab funkcijom *spline*, $u_{\sigma p}$ je reaktivni dio napona kratkog spoja izračunat predloženom metodom u kombinaciji s Matlab funkcijom *pchip*, a $\Delta_{k,s,p}$ su odstupanja izračunatih vrijednosti od mjerene vrijednosti. Prvi namot u oznaci kombinacije označava namot koji je napajan, a drugi namot označava namot koji je kratko spojen. Iz tablice je vidljivo da predložena metoda daje dobre rezultate za jednofazni transformator jer su odstupanja izračunatih vrijednosti od mjerenih vrijednosti niža od tolerancije definirane normom [1], koja iznosi $\pm 10\%$. I u ovom slučaju vrijedi napisano u potpoglavlju 6.3 o utjecaju grešaka u proizvodnji na mjereno napon kratkoga spoja. S obzirom na to da se radi o malom transformatoru (snaga modificiranog transformatora T_1 iznosi 100 kVA) utjecaj grešaka u proizvodnji je dosta velik, a modeli u MagNetu i Matlabu napravljeni su prema dokumentaciji transformatora, pa su odstupanja otprilike na polovici dopuštenog raspona na plus strani. I tolika odstupanja su dovoljno mala da ulijevaju određenu sigurnost projektantu transformatora da će se mjereno napon kratkoga spoja naći u dozvoljenim granicama u odnosu na garantiranu vrijednost. Osim toga, radi se o izračunu napona



Slika 6.7: 3D model jednofaznog transformatora u programskom paketu Mentor Graphics MagNet

kratkoga spoja između namota koji se nalaze na različitim stupovima, što nije moguće računati klasičnim metodama već samo MKE metodom, a s obzirom na to da su rezultati MKE metode i predložene metode vrlo slični, vrijedi zaključak da predložena metoda daje dobre rezultate.

Tablica 6.3: Usporedba u_{σ} dobivenih mjerenjem ($u_{\sigma m}$), MKE metodom ($u_{\sigma k}$) te predloženom metodom ($u_{\sigma s}$ i $u_{\sigma p}$) za jednofazni transformator s namotima na različitim stupovima

Kombinacija namota	$u_{\sigma m}$ [%]	$u_{\sigma k}$ [%]	$u_{\sigma s}$ [%]	$u_{\sigma p}$ [%]	Δ_k [%]	Δ_s [%]	Δ_p [%]
VN2-VN1	78,11	81,82	81,85	83,7	4,75	4,79	7,16
VN2-NN1	81,4	84,91	85,42	87,35	4,31	4,94	7,31
NN1-NN2	83,86	88,09	89,18	91,09	5,04	6,34	8,62

6.5 Analiza točnosti i vremena izračuna

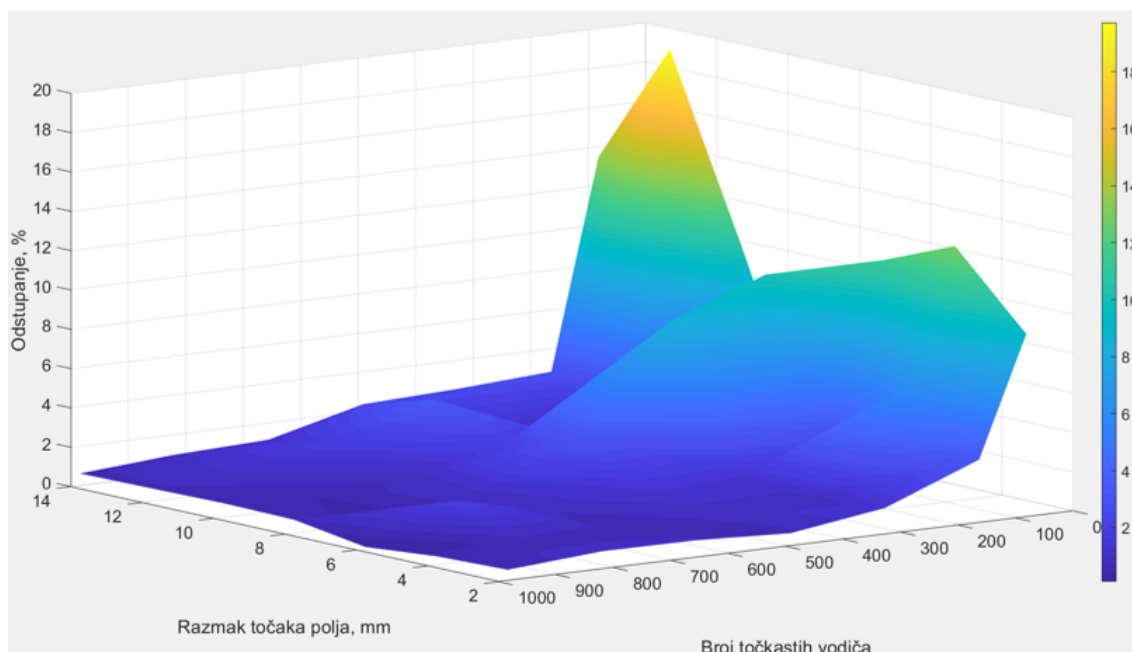
Tri parametra utječu na točnost izračuna i vrijeme potrebno da računalo ispiše rezultat nakon pokretanja izračuna:

- broj točkastih vodiča kojima se modeliraju namoti,
- broj točaka u prostoru u kojima se računa magnetska indukcija,
- broj članova Fourierova reda u jednadžbi 5.3.

Točnost izračuna i vrijeme potrebno računalu za izračun analizirani su za 2D model koji se sastoji od dvaju jednakih namota koji se nalaze unutar prozora jezgre transformatora. Referenca za točnost jest model u programskom paketu Mentor Graphics MagNet prikazan na slici 5.3, koji ima jednake namote i 164 zavoja u svakom namotu, kroz koje teče struja 1 A, tako da svaki namot ima 164 amperzavoja. Model je postavljen tako da su amperzavoji suprotnog predznaka pa se poništavaju. Vrijeme trajanja izračuna u MagNetu usporedivo je s vremenom trajanja izračuna u Matlabu. S obzirom na to da je kod u Matlabu neoptimiran, vrijeme trajanja izračuna može se dodatno smanjiti optimizacijom koda te prebacivanjem u neki drugi programski jezik, kao što je C.

Model u Matlabu ima istu geometriju kao i model u MagNetu te jednake amperzavoje. Napravljen je niz izračuna u Matlabu s različitim kombinacijama parametara spomenutih na početku potpoglavlja, koji su mijenjani u širokom rasponu. Mijenjanjem broja točkastih vodiča koji predstavljaju namot mijenjana je i struja kroz vodiče tako da amperzavoji ostanu jednaki, npr. za namot modeliran s 328 točkastih vodiča struja je postavljena na 0,5 A tako da namot ima ukupno 164 amperzavoja. Svi izračuni napravljeni su u Matlabu R2020a, na računalu s operacijskim sustavom Windows 10 Pro i četverojezgrenim procesorom Intel Core i5-4440 3.1 GHz.

Na slici 6.8 i u tablici 6.4 prikazano je odstupanje površinske energije rasipnog polja izračunate u Matlabu u odnosu na energiju izračunatu u MagNetu, u ovisnosti o broju točkastih vodiča s kojima se modeliraju namoti i razmaku između točaka, odnosno broju točaka, u prostoru u kojima se računa magnetska indukcija. Broj članova Fourierova reda u rješenju magnetske indukcije u ovom je slučaju konstantan i iznosi 100. Sa slike 6.8 i iz tablice 6.4 vidljivo je da na točnost izračuna najviše utječe broj točkastih vodiča s kojima se modeliraju namoti, tj. veći broj točkastih vodiča daje manje odstupanje, odnosno veću točnost. Veća gustoća točaka, odnosno veći broj točaka u kojima se računa magnetska indukcija također daje manje odstupanje, ali za dovoljno velik broj točkastih vodiča i dobre interpolacijske funkcije u Matlabu opravdano je koristiti manje točaka u kojima se računa magnetska indukcija da bi se smanjilo vrijeme izračuna. Na slici 6.9 prikazano je vrijeme izvođenja izračuna u ovisnosti o istim parametrima kao na slici 6.8.

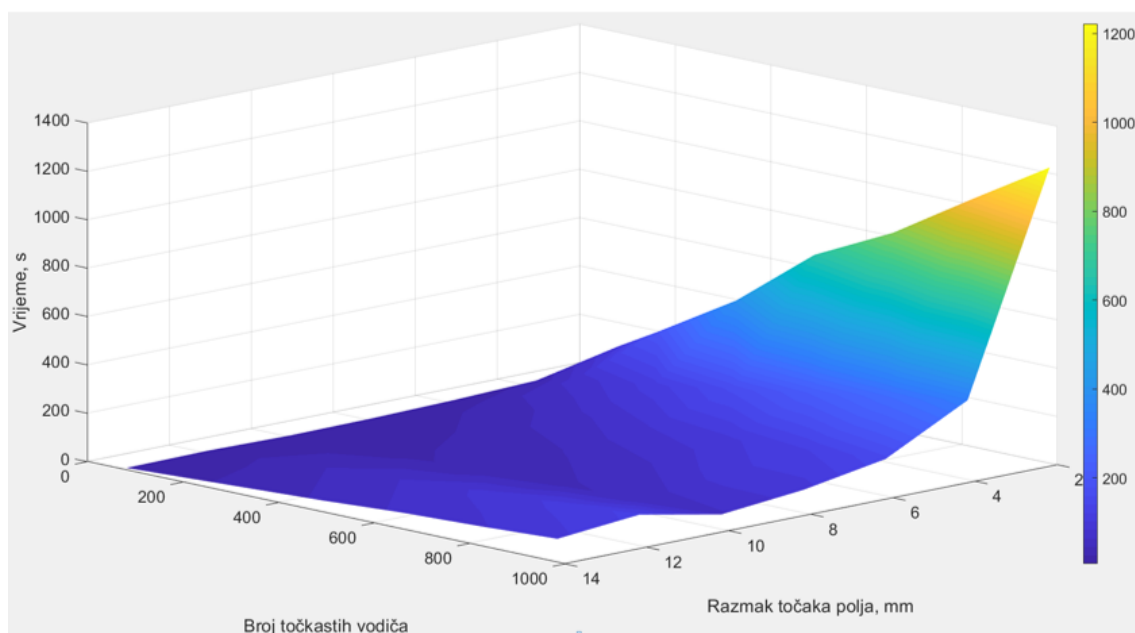


Slika 6.8: Odstupanje površinske energije rasipnog polja u ovisnosti o broju točkastih vodiča i razmaku između točaka u prostoru u kojima se računa magnetska indukcija

Tablica 6.4: Odstupanje površinske energije rasipnog polja u [%] u ovisnosti o broju točkastih vodiča (N_z) i razmaku između točaka u prostoru u kojima se računa magnetska indukcija (d)

d	N_z						
	82	164	328	492	656	820	984
14	-13,46	2,84	2,55	2,36	1,15	-0,97	0,61
12	19,73	-0,35	-0,72	3,41	-1,86	-1,13	0,66
10	10,60	-4,12	1,29	-1,96	-0,85	-0,41	-0,72
8	0,82	10,19	8,42	3,04	1,08	0,24	-0,68
6	11,44	2,63	1,33	1,44	0,73	1,88	-0,10
4	12,96	6,15	-0,80	0,81	-0,44	0,56	-0,43
2	9,29	3,20	1,33	-0,64	0,87	-0,90	-0,55

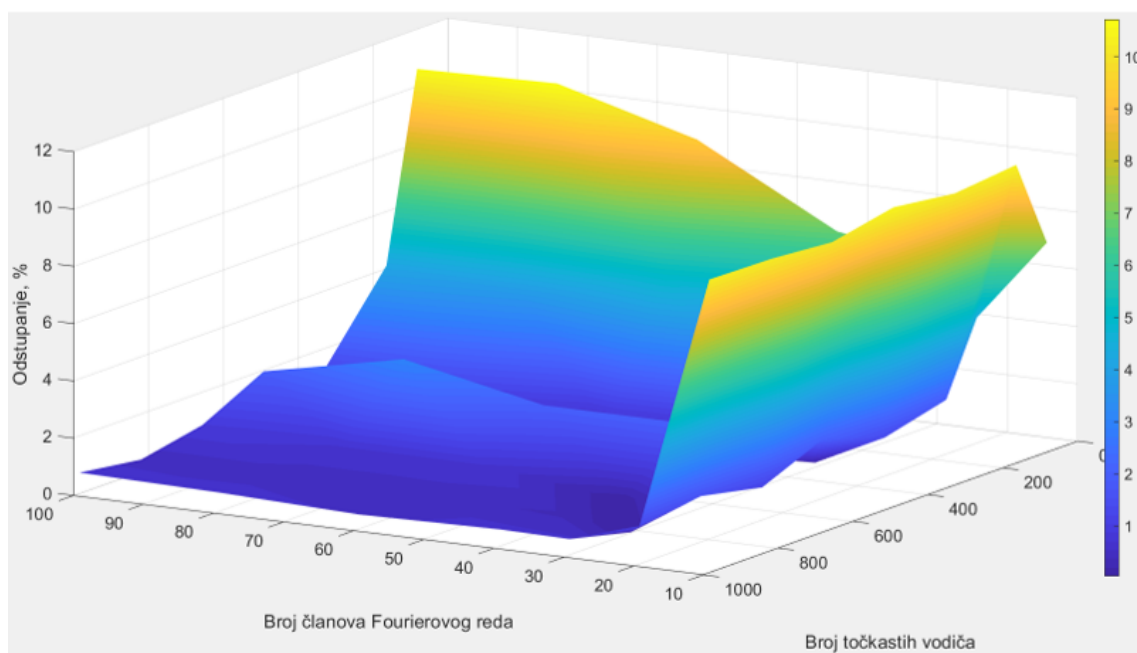
Na slici 6.10 i u tablici 6.5 prikazano je odstupanje površinske energije rasipnog polja izračunate u Matlabu u odnosu na energiju izračunatu u MagNetu, u ovisnosti o broju točkastih vodiča s kojima se modeliraju namoti i broju članova Fourierova reda u rješenju magnetske indukcije. Razmak između točaka, čime je definiran broj točaka, u kojima se računa magnetska indukcija konstantan je i iznosi 10 mm. Sa slike 6.10 i iz tablice 6.5 vidljivo je da na odstupanje, odnosno točnost izračuna, broj točkastih vodiča i broj članova Fourierova reda imaju sličan utjecaj. Veći broj točkastih vodiča i veći broj članova Fourierova reda daju manje odstupanje, tj. veću točnost izračuna. Na slici 6.11 prikazano je vrijeme izvođenja izračuna u ovisnosti o istim parametrima kao na slici 6.10.



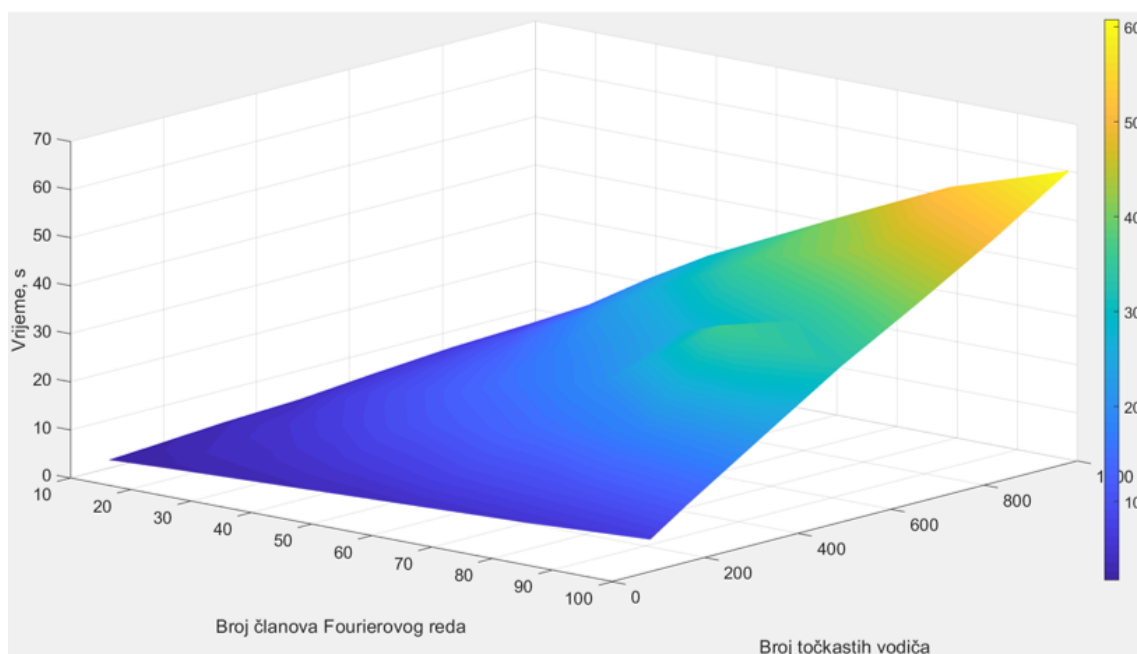
Slika 6.9: Vrijeme izvođenja izračuna u ovisnosti o broju točkastih vodiča i razmaku između točaka u prostoru u kojima se računa magnetska indukcija

Tablica 6.5: Odstupanje površinske energije rasipnog polja u [%] u ovisnosti o broju točkastih vodiča (N_z) i broju članova Fourierova reda u rješenju magnetske indukcije (n)

n	N_z						
	82	164	328	492	656	820	984
10	-7,31	-10,41	-10,18	-10,46	-10,01	-10,19	-10,24
20	4,39	-1,90	-1,35	-2,07	-1,14	-1,60	-1,32
30	6,41	-3,99	0,16	-1,27	0,92	0,03	-0,56
40	6,78	-2,50	0,06	-2,01	-0,05	-0,34	-0,59
60	9,37	-5,07	0,31	-2,01	-0,70	-0,42	-0,49
80	10,71	-3,56	1,08	-3,00	-0,68	-0,42	-0,64
100	10,60	-4,12	1,29	-1,96	-0,85	-0,41	-0,72



Slika 6.10: Odstupanje površinske energije rasipnog polja u ovisnosti o broju točkastih vodiča i broju članova Fourierova reda u rješenju magnetske indukcije

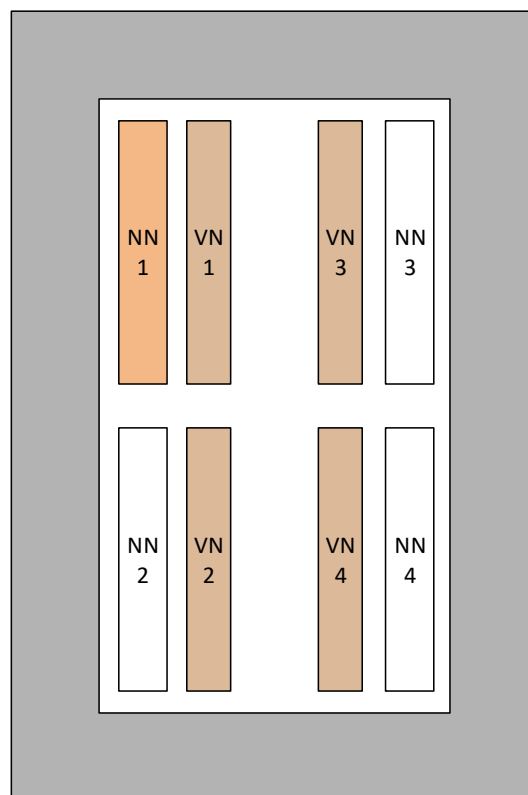


Slika 6.11: Vrijeme izvođenja izračuna u ovisnosti o broju točkastih vodiča i broju članova Fourierova reda u rješenju magnetske indukcije

Izračun raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke namota

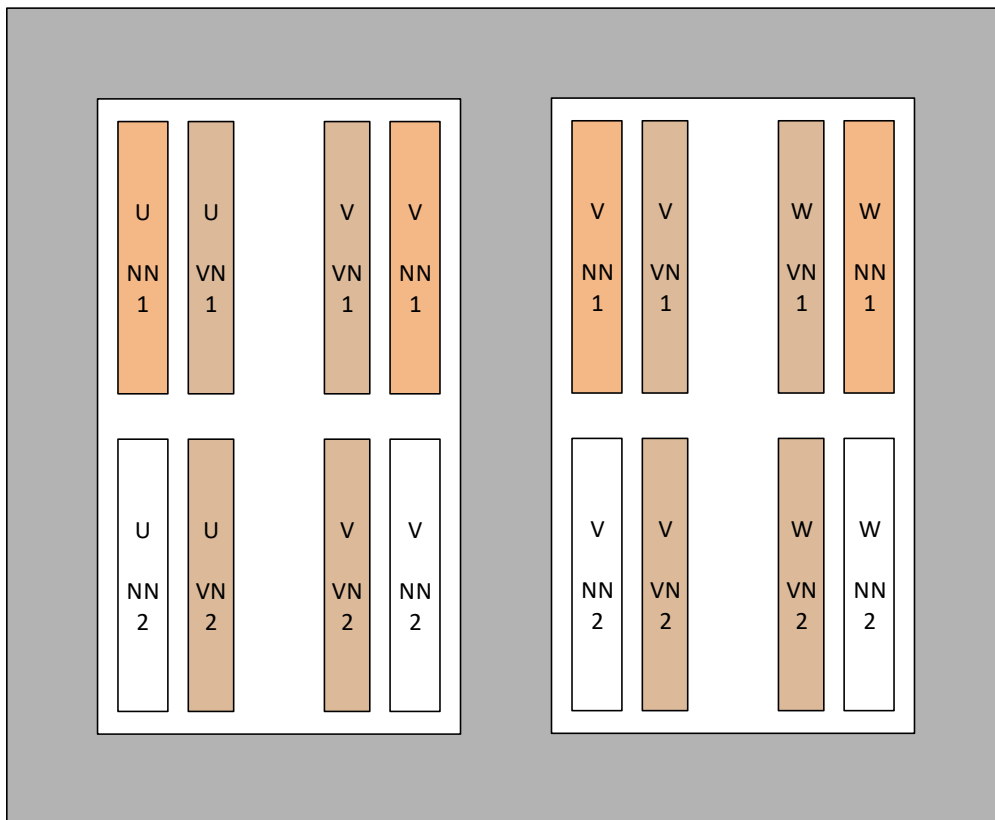
Kod transformatora koji imaju dva ili više niskonaponskih namota, visokonaponski namot najčešće se sastoji od onoliko paralelno spojenih svitaka koliko ima niskonaponskih namota. Primjer takvih transformatora jednofazni su vučni transformatori i trofazni ispravljачki transformatori.

Na slici 7.1 prikazani su namoti vučnog transformatora u prozoru jezgre. U slučaju pokusa kratkog spoja za kombinaciju namota *NNI-VN*, gdje *VN* označava paralelni spoj visokonaponskih svitaka $VN1 \parallel VN2 \parallel VN3 \parallel VN4$, struja protječe kroz kratkospojeni niskonaponski namot *NNI* te kroz paralelne svitke visokonaponskog namota. Namoti, kroz koje teče struja, na slici 7.1 označeni su u boji. Zbog asimetrične raspodjele magnetskog polja raspodjela struja kroz paralelne svitke visokonaponskog namota također je asimetrična. Glavnina magnetskog toka nalazi se između kratkospojenog *NN* namota i njemu najbližeg paralelnog svitka *VN* namota, pa će najveća struja protjecati kroz najbliži paralelni svitak. Za okvirni izračun napona kratkog spoja može se pretpostaviti da cijela struja *VN* namota teče kroz svitak *VN1*, međutim, za točniji izračun napona kratkog spoja potrebno je što točnije izračunati raspodjelu struja kroz paralelne svitke *VN* namota.



Slika 7.1: Prikaz namota jednofaznog vučnog transformatora u prozoru jezgre

Na slici 7.2 prikazani su namoti ispravljačkog transformatora u prozoru jezgre. U slučaju pokusa kratkog spoja za kombinaciju namota $NNI-VN$, gdje VN označava paralelni spoj visokonaponskih svitaka $VN1 \parallel VN2$, struja protječe kroz kratkospojeni niskonaponski namot NNI te kroz paralelne svitke visokonaponskog namota. Na slici 7.2 označeni su u boji svi namoti kroz koje teče struja. Zbog asimetrične raspodjele magnetskog polja raspodjela struja kroz paralelne svitke visokonaponskog namota također je asimetrična. Glavnina magnetskog toka nalazi se između namota NNI i paralelnog svitka $VN1$, pa će veća struja protjecati kroz paralelni svitak $VN1$. Kao kod vučnog transformatora u prethodnom primjeru, i u ovom slučaju za okvirni izračun napona kratkog spoja može se pretpostaviti da cijela struja VN namota teče kroz svitak $VN1$, međutim za točniji izračun napona kratkog spoja potrebno je što točnije izračunati raspodjelu struja kroz paralelne svitke VN namota.



Slika 7.2: Prikaz namota trofaznog ispravljačkog transformatora u prozoru jezgre

S obzirom na to da se VN namot sastoji od paralelno spojenih svitaka može se postaviti uvjet da su naponi pojedinih paralelnih svitaka jednaki, odnosno

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n \quad (7.1)$$

gdje indeks n označava broj paralelnog svitka. Prema tome, ako su naponi jednaki, uz zanemarenje radnog dijela otpora i pada napona na njemu, može se postaviti uvjet da su i ulančeni tokovi pojedinih paralelnih svitaka jednaki, odnosno

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \dots = \Psi_n \quad (7.2)$$

gdje indeks n označava broj paralelnog svitka na koji se odnosi ulančeni tok. Jedinični ulančeni tok, odnosno ulančeni tok po jediničnoj duljini u x -smjeru za rješenja 1 i 2 te u y -smjeru za rješenja 3 sa

slike 6.1, k -tog namota može se izračunati kao

$$\Psi_k = \sum_{i=1}^{z_k} A_z(x_{vi}^k, y_{vi}^k) \quad (7.3)$$

gdje je z_k ukupni broj točkastih vodiča k -tog namota, x_{vi}^k i y_{vi}^k su x -koordinata i y -koordinata i -tog točkastog vodiča, a A_z je vektorski magnetski potencijal tog točkastog vodiča. Zbroj vektorskih magnetskih potencijala k -tog namota za z_k točkastih vodiča nazvan je jediničnim ulančenim tokom tog namota jer predstavlja ulančeni tok po jedinici duljine s mjernom jedinicom Wb/m. Vektorski magnetski potencijal može se izračunati korištenjem jednadžbi iz potpoglavlja 5.5 i 5.6.

Ako se namot modelira tako da broj točkastih vodiča odgovara broju zavoja namota, onda vrijednost jediničnog ulančenog toka odgovara stvarnoj vrijednosti. Međutim, ako namot ima puno zavoja, npr. 5000, može se modelirati s 500 točkastih vodiča da se ubrza izračun. Isto tako, ako namot ima malo zavoja, npr. 20, može se modelirati s 200 točkastih vodiča da se poveća točnost. U obama slučajevima jedinični ulančeni tok ne odgovara stvarnoj vrijednosti. Međutim, za izračun raspodjele struja to nije nužno jer raspodjela ovisi o geometriji, a paralelni svici u pravilu su geometrijski i brojem zavoja jednaki.

Za izračun raspodjele struja kroz paralelne svitke VN namota mogu se koristiti 2D modeli ili kvazi 3D model, a opisi modela i rezultati prikazani su u nastavku.

7.1 Izračun raspodjele struja u 2D modelu transformatora

Za izračun raspodjele struja kroz paralelne svitke VN namota, u 2D modelu transformatora, mogu se koristiti dva uzdužna presjeka transformatora koji obuhvaćaju sve namote i paralelne svitke, tj. može se koristiti presjek prozora jezgre transformatora s namotima unutar prozora ili uzdužni presjek transformatora s namotima izvan prozora jezgre.

Poprečni presjeci jednog ili drugog stupa, kod jednofaznog transformatora, ne mogu se koristiti za izračun raspodjele struja u 2D modelu jer ne sadrže sve namote i paralelne svitke (npr. stup 1 u poprečnom presjeku sadrži NN namot i paralelne svitke 1 i 2 VN namota, dok stup 2 sadrži samo paralelne svitke VN namota). Kod trofaznog transformatora mogu se koristiti i poprečni presjek i uzdužni presjek izvan prozora jezgre. U slučaju poprečnog presjeka koriste se namoti iste faze, a u slučaju uzdužnog presjeka izvan prozora jezgre koriste se namoti krajnjih faza.

Struje su ulazni parametri za izračun jediničnih ulančenih tokova paralelnih svitaka namota. Raspodjela struja između paralelnih svitaka računa se pomoću funkcije *fsolve* u Matlabu. Unutar funkcije postavljaju se uvjeti da je suma amperzavoja jednaka nuli te da su jedinični ulančeni tokovi jednaki, odnosno:

$$1) I_{NN} \cdot N_{NN} = (I_1 + I_2 + \dots + I_n) \cdot N_{VN}$$

$$2) \Psi_1 = \Psi_2$$

$$3) \Psi_2 = \Psi_3$$

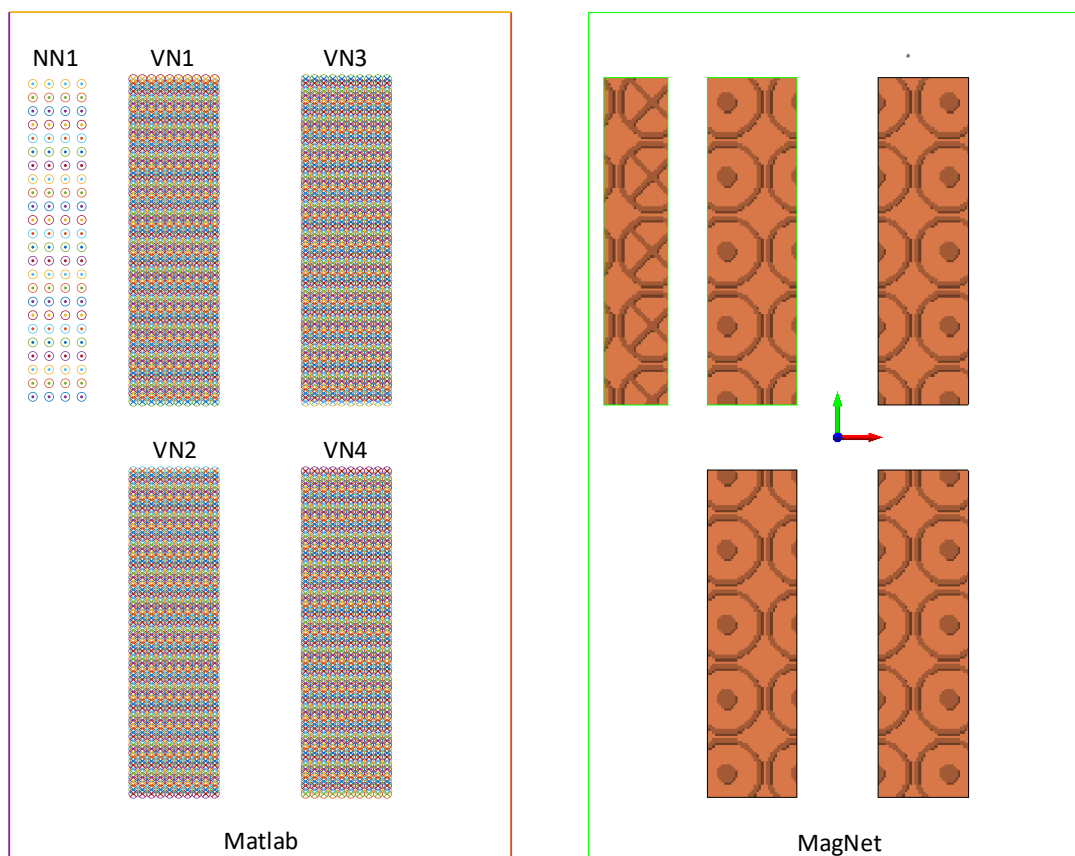
⋮

$$n) \Psi_{n-1} = \Psi_n$$

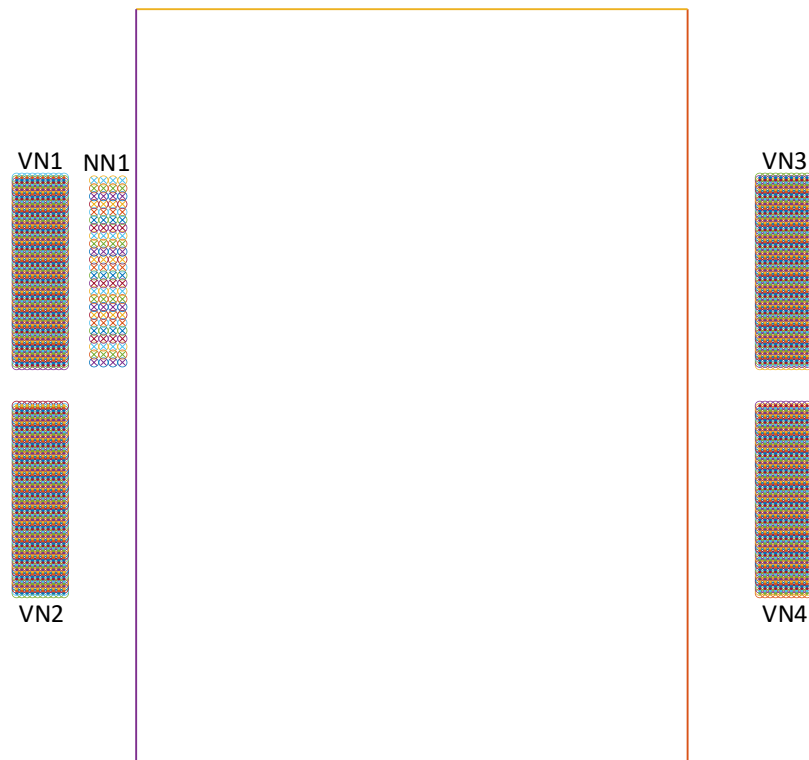
gdje je I_{NN} struja niskonaponskog namota koji je kratko spojen, N_{NN} je broj zavoja niskonaponskog namota, I_1, I_2, \dots, I_n su struje kroz n paralelnih svitaka visokonaponskog namota, N_{VN} je broj zavoja visokonaponskog namota, a $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ su jedinični ulančeni tokovi pojedinih paralelnih svitaka

visokonaponskog namota. Struja I_{NN} je poznata, npr. može se zadati kao nazivna vrijednost tog namota. Funkcija *fsolve* rješava sustav nelinearnih jednadžbi sa strujama kao nepoznicama te pronalazi struje koje zadovoljavaju navedene uvjete.

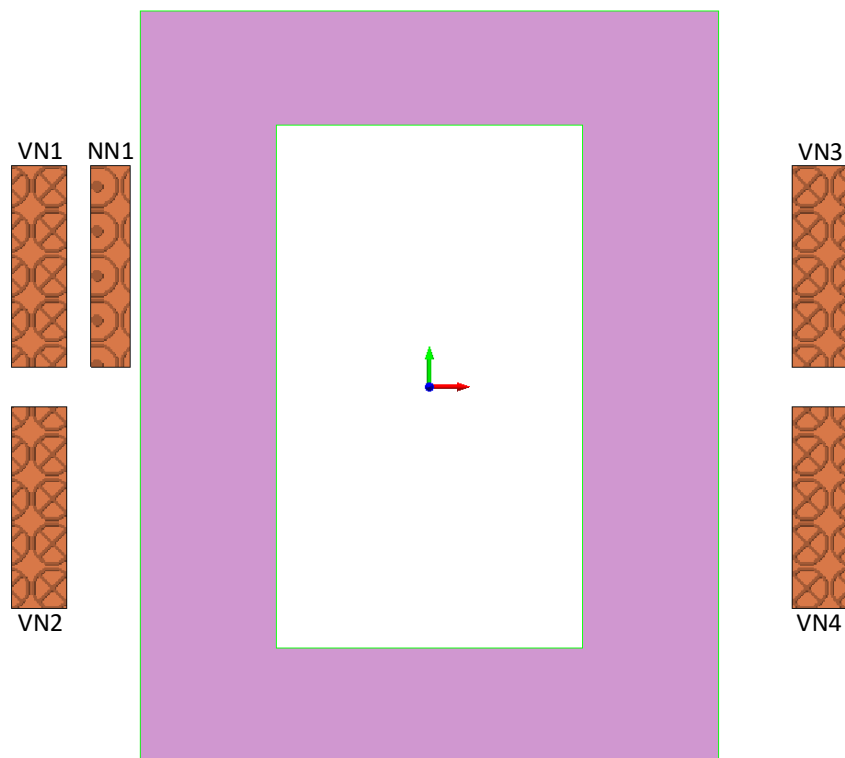
Na slikama 7.3, 7.4 i 7.5 prikazani su 2D modeli jednofaznog vučnog transformatora (u potpoglavlju 7.6 označen kao $T3$) u Matlabu i MagNetu koji su korišteni za izračun raspodjele struja kroz paralelne svitke VN namota. Namot $NN1$ i paralelno spojeni svici VN namota $VN1$ i $VN2$ smješteni su na lijevom stupu, a paralelno spojeni svici VN namota $VN3$ i $VN4$ na desnom stupu jezgre vučnog transformatora.



Slika 7.3: Prikaz 2D modela jednofaznog vučnog transformatora u Matlabu i MagNetu, za uzdužni presjek u prozoru jezgre



Slika 7.4: Prikaz 2D modela jednofaznog vučnog transformatora u Matlabu, za uzdužni presjek izvan prozora jezgre



Slika 7.5: Prikaz 2D modela jednofaznog vučnog transformatora u MagNetu, za uzdužni presjek izvan prozora jezgre

7.2 Izračun raspodjele struja u kvazi 3D modelu transformatora

Za izračun raspodjele struja kroz paralelne svitke VN namota, u kvazi 3D modelu transformatora, koriste se svi presjeci transformatora. Kvazi 3D model transformatora, kao i kod izračuna raspone energije magnetskog polja, sastoji se od triju ili četiriju 2D modela (za transformatore s namotima na različitim stupovima potrebno je koristiti dva poprečna presjeka, za oba stupa), tj. računaju se jedinični ulančeni tokovi paralelnih svitaka namota u prozoru jezgre transformatora, u bočnom presjeku te u uzdužnom presjeku izvan prozora jezgre transformatora. Na taj način dobiju se rješenja jediničnog ulančenog toka u četirima točkama (ako se promatra tlocrt kružnog namota, to su točke $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ i $\frac{3\pi}{2}$), za svaki paralelni svitak, kao što je prikazano na slikama 6.1 i 6.2. Nakon toga ekstrapolacijom rješenja jediničnog ulančenog toka, kao i kod ekstrapolacije energije rasipnog polja, računa se ukupni ulančeni tok pojedinog paralelnog svitka.

S obzirom na to da se kvazi 3D model svodi na izračun više 2D modela, struje su i u ovom slučaju ulazni parametar za izračun jediničnih ulančenih tokova paralelnih svitaka namota. Za svaki 2D model koriste se iste struje pojedinog paralelnog svitka namota te se u jednoj Matlab skripti računaju svi jedinični ulančeni tokovi iz kojih se ekstrapolacijom računaju ukupni ulančeni tokovi paralelnih svitaka. I u ovom slučaju postavlja se uvjet da je suma amperzavoja jednaka nuli, međutim uvjet jednakosti ulančenih tokova nemoguće je postaviti jer ne postoji kombinacija struja koja će dati jednake ukupne tokove zato što 2D modeli imaju različitu geometriju i npr. kombinacija struja koja daje jednake jedinične ulančene tokove u prozoru neće dati jednake jedinične ulančene tokove u uzdužnom presjeku izvan prozora jezgre transformatora. Zbog toga je potrebno uvesti uvjet približno jednakih ukupnih ulančenih tokova i definirati u kojem postotku se pojedini tokovi smiju razlikovati. Ako se definira veći postotak razlikovanja tokova, manja je točnost, i obrnuto, manji postotak razlikovanja daje veću točnost.

Za izračun raspodjele struja kroz paralelne svitke korištena su dva optimizacijska algoritma, *diferencijalna evolucija* i *MIDACO* algoritam. Kod diferencijalne evolucije funkcija cilja postavljena je kao razlika poznate ukupne struje i zbroja struja kroz pojedine svitke, odnosno

$$f(X) = |x_1 + x_2 + \dots + x_n - I_{uk}| \quad (7.4)$$

gdje je n broj paralelnih svitaka, I_{uk} ukupna struja namota koji se sastoji od paralelnih svitaka, a optimizacijske varijable $X = x_1, x_2, \dots, x_n$ predstavljaju struje kroz paralelne svitke. Funkcija ograničenja postavljena je tako da razlike između ulančenih tokova pojedinih paralelnih svitaka i srednjeg ulančenog toka budu manje od definirane vrijednosti, odnosno

$$\Delta\Psi_{\%} = \frac{\Psi_m - \Psi_{sr}}{\Psi_{sr}} \cdot 100 \leq d_{max} \quad (7.5)$$

gdje je d_{max} maksimalna dopuštena razlika u postotku (npr. 5 %), Ψ_m predstavlja ulančeni tok paralelnog svitka m , gdje je $m = 1, 2, \dots, n$, a Ψ_{sr} je srednji ulančeni tok definiran kao

$$\Psi_{sr} = \frac{\Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_n}{n} \quad (7.6)$$

Optimizacijski algoritam postavljen je tako da minimizira razliku ukupne struje i zbroja struja kroz paralelne svitke, odnosno da ta razlika bude što bliže nuli, uz zadovoljenje funkcije ograničenja, tj. zadovoljenje zahtjeva da razlika ulančenih tokova bude manja od unaprijed definirane vrijednosti. Što je funkcija cilja bliže nuli te definirana vrijednost razlike tokova manja, to je izračun točniji, ali je i vrijeme izvođenja izračuna duže.

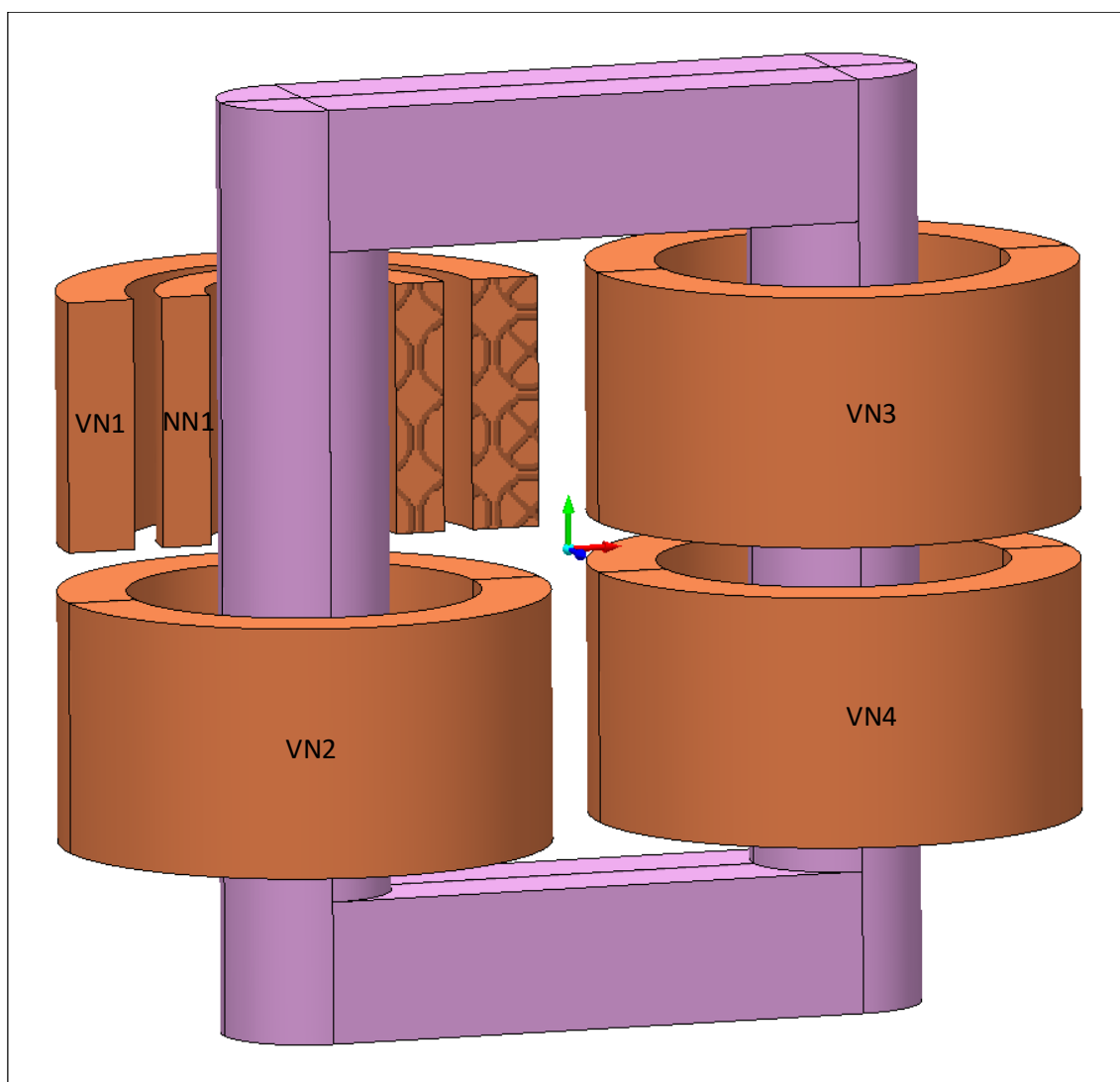
Kod MIDACO algoritma funkcija cilja zbroj je kvadrata odstupanja ulančenih tokova od srednje vrijednosti, odnosno

$$f(X) = \sum_{m=1}^n \left(\frac{\Psi_m - \Psi_{sr}}{\Psi_{sr}} \right)^2 \quad (7.7)$$

gdje je n broj paralelnih svitaka, a ograničenja su postavljena kao odnos struja pojedinih paralelnih svitaka, tj. u slučaju jednofaznog vučnog transformatora postavljen je uvjet

$$I_1 > I_2 > I_3 > I_4 \quad (7.8)$$

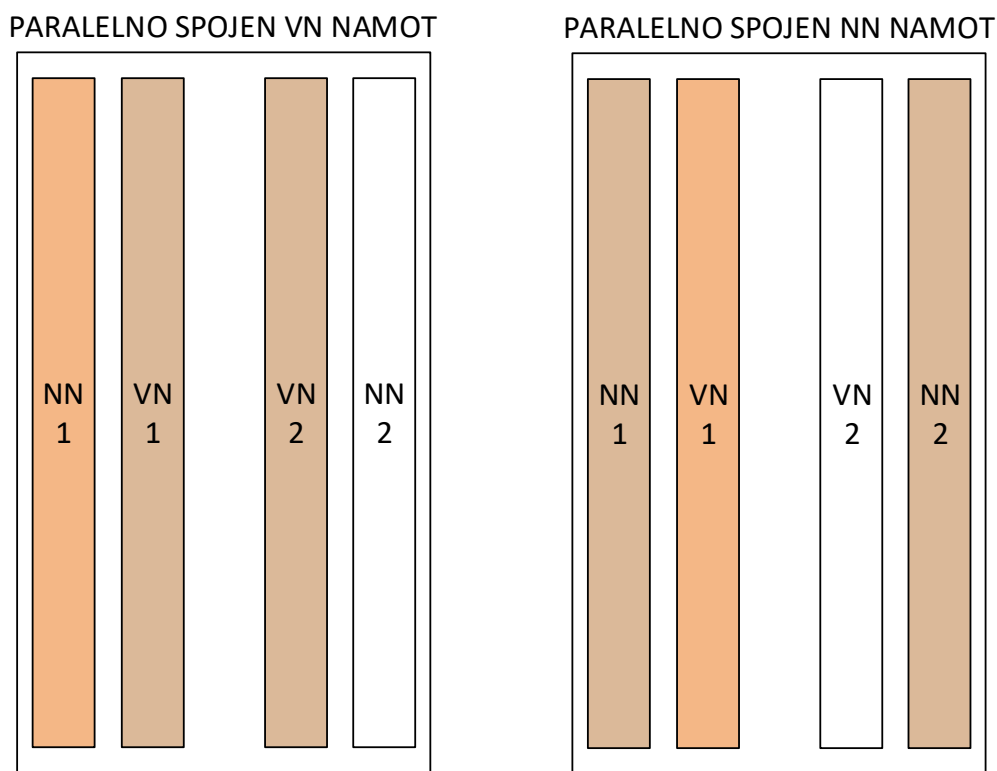
Na slici 7.6 prikazan je 3D model jednofaznog vučnog transformatora (u potpoglavlju 7.6 označen kao T_3) u MagNetu koji je korišten za izračun raspodjele struja kroz paralelne svitke VN namota.



Slika 7.6: Prikaz 3D modela jednofaznog vučnog transformatora u MagNetu

7.3 Izračun raspodjele struja između dvaju paralelnih svitka

U slučaju da se napajani namot sastoji od samo dvaju paralelnih svitaka moguće je koristiti jednostavniji pristup rješavanju problema raspodjele struja. S obzirom na to da se traže samo dvije struje, moguće je mijenjati samo jednu struju, a drugu struju računati kao razliku poznate ukupne struje i struje koja se mijenja. Za izračun raspodjele struja između dvaju paralelnih svitaka korišteni su modeli transformatora $T1$ i $T2$, prikazani na slici 7.7. Raspodjela struja izračunata je za slučaj kad je paralelno spojen VN namot (svici $VN1$ i $VN2$) te za slučaj kad je paralelno spojen NN namot (svici $NN1$ i $NN2$). Geometrijski podaci transformatora $T1$ i $T2$ prikazani su u tablici 7.1.



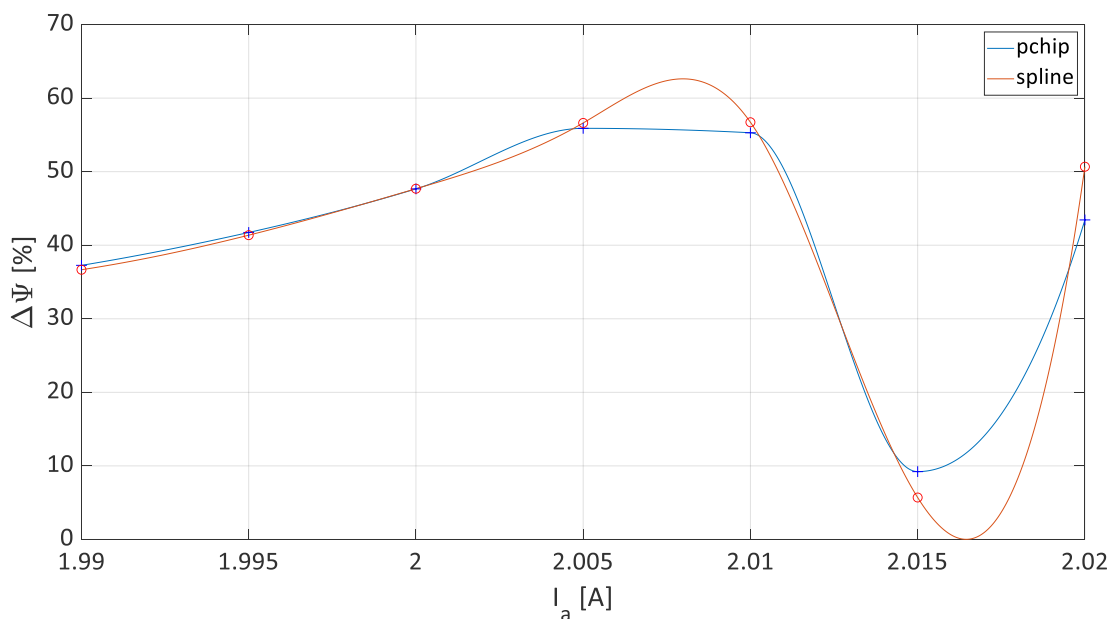
Slika 7.7: Modeli transformatora $T1$ i $T2$, korišteni za izračun raspodjele struja između dvaju paralelnih svitaka

Tablica 7.1: Geometrijski podaci transformatora $T1$ i $T2$

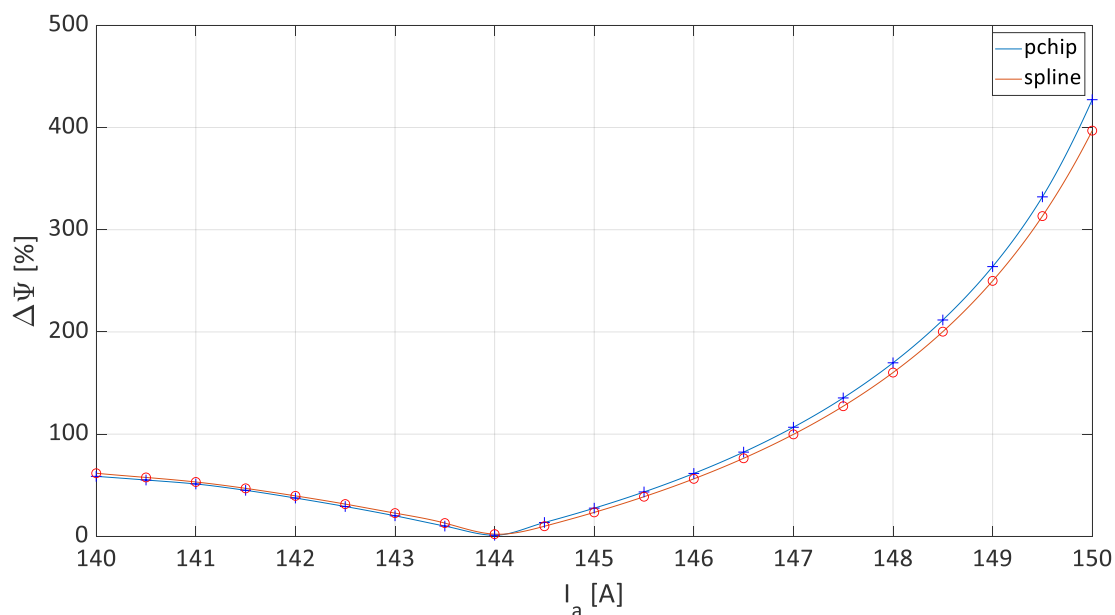
	$T1$	$T2$
Visina prozora [mm]	394	396
Širina prozora [mm]	145	162
Širina NN namota [mm]	10	21,5
Visina NN namota [mm]	279	300
Širina VN namota [mm]	18,5	32
Visina VN namota [mm]	281	294

Prvo je potrebno postaviti dovoljno velike granice u kojima će se mijenjati jedna struja. Ako se mijenja struja paralelnog svitka koji je najbliži kratkospojenom namotu (I_a), onda se granice mogu postaviti od polovice ukupne struje do ukupne struje jer će ta struja sigurno biti veća od polovice ukupne struje. U praksi će najčešće biti dovoljno postaviti granicu na 80-90 % ukupne struje. Izračun se može napraviti koristeći *for* petlju tako da se za više točaka (struja) unutar granica računa postotna razlika ulančenog toka ($\Delta\Psi\%$) između dvaju paralelnih svitaka i rješenja se spremaju u vektor. Nakon toga se pomoću Matlab funkcija *pchip* ili *spline* interpolacijom dobije funkcija razlike ulančenih tokova $\Delta\Psi\%(I_a)$ u zadanim granicama. Matlab funkcija *fminbnd* vraća vrijednost x na kojoj funkcija $f(x)$ ima minimum, a kao ulazne parametre potrebno je definirati funkciju $f(x)$ te interval, odnosno granice, unutar kojih se traži minimum funkcije. U ovom slučaju funkcija *fminbnd*, za funkciju $\Delta\Psi\%(I_a)$ i granice struje kao ulazne parametre, vraća vrijednost struje I_a za koju je $\Delta\Psi\%(I_a)$ minimalno. Struja I_b računa se kao razlika struja I_{uk} i I_a .

Na slici 7.8 prikazana je funkcija razlike ulančenih tokova u ovisnosti o struji koja teče kroz paralelni svitak koji je bliže kratkospojenom namotu, za transformator *T1* i slučaj kada je napajan VN namot (struja je mijenjana od otprilike 90 % ukupne struje do ukupne struje, u koracima 5 mA, a na slici je prikazan uvećani detalj), a na slici 7.9 za slučaj kad je napajan NN namot (struja je mijenjana od otprilike 90 % ukupne struje do ukupne struje, u koracima 0,5 A). Krivulja koja prolazi kroz računane točke dobivena je korištenjem interpolacijskih funkcija *pchip* i *spline*. Rezultati mjerenja i izračuna za transformator *T1* prikazani su u tablici 7.2.

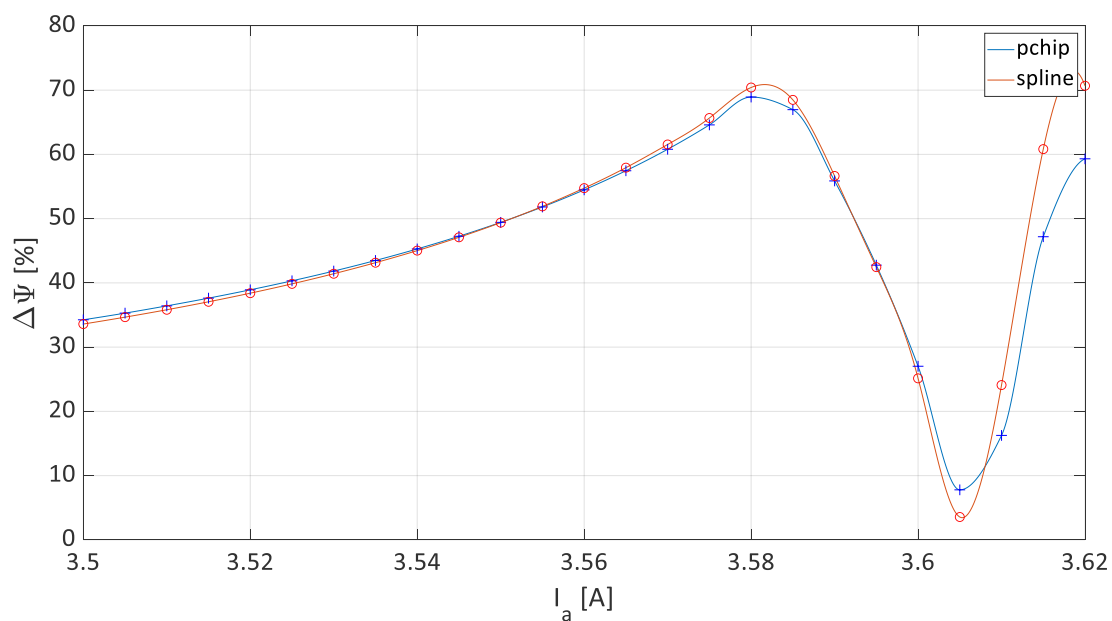


Slika 7.8: Funkcija razlike ulančenih tokova u ovisnosti o struji I_a za transformator *T1* i slučaj paralelno spojenog VN namota

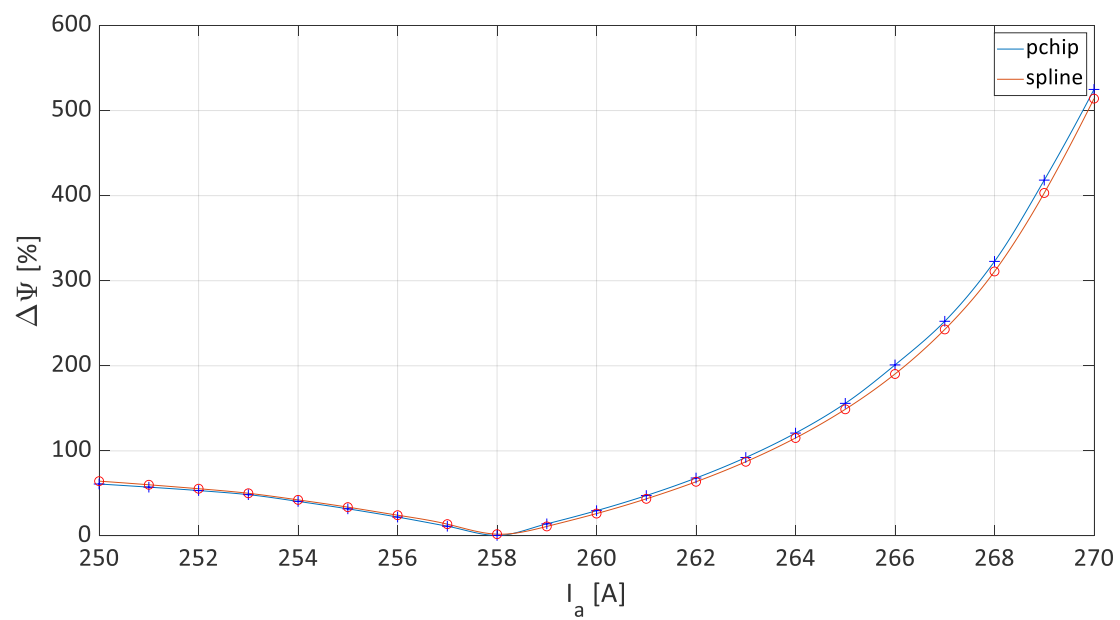


Slika 7.9: Funkcija razlike ulančenih tokova u ovisnosti o struji I_a za transformator $T1$ i slučaj paralelno spojenog NN namota

Na slici 7.10 prikazana je funkcija razlike ulančenih tokova u ovisnosti o struji koja teče kroz paralelni svitak koji je bliže kratkospojenom namotu, za transformator $T2$ i slučaj kad je napajan VN namot (struja je mijenjana od otprilike 90 % ukupne struje do ukupne struje, u koracima 5 mA), a na slici 7.11 za slučaj kad je napajan NN namot (struja je mijenjana od otprilike 90 % ukupne struje do ukupne struje, u koracima 1 A). Rezultati mjerenja i izračuna za transformator $T2$ prikazani su u tablici 7.3. Na slikama se može vidjeti da se grafovi dobiveni korištenjem *pchip* i *spline* funkcija dosta dobro poklapaju te da su rješenja slična.



Slika 7.10: Funkcija razlike ulančenih tokova u ovisnosti o struji I_a za transformator $T2$ i slučaj paralelno spojenog VN namota



Slika 7.11: Funkcija razlike ulančenih tokova u ovisnosti o struji I_a za transformator $T2$ i slučaj paralelno spojenog NN namota

7.4 Utjecaj centra konformnog preslikavanja na izračun ulančenog toka

Centar konformnog preslikavanja točka je u fizikalnoj domeni koja se preslikava u središte jediničnog kruga (kanonska domena). Za preslikavanje područja izvan pravokutnika u jedinični krug, ta točka automatski je postavljena u beskonačnosti, međutim, za preslikavanje područja unutar pravokutnika u jedinični krug, tu točku potrebno je proizvoljno odabrati.

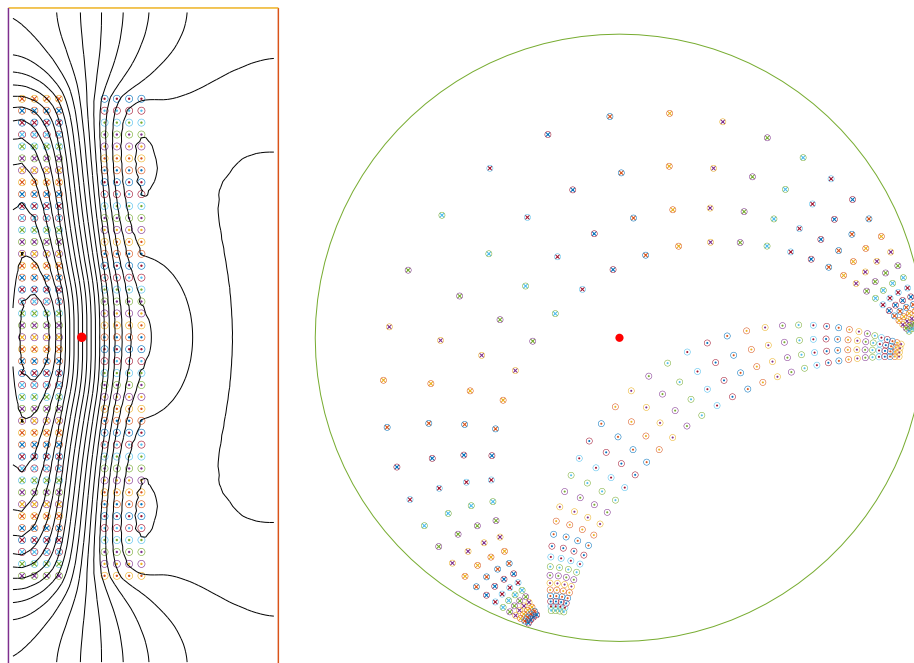
S obzirom na to da se točka centra konformnog preslikavanja u fizikalnoj domeni preslikava u središte kanonske domene, kao prvi izbor centra konformnog preslikavanja odabrano je središte fizikalne domene, odnosno središte prozora jezgre transformatora. Za namote, koji su u odnosu na prozor i središte prozora simetrično postavljeni, u pravilu nema problema i rezultati izračuna zadovoljavajuće se poklapaju s rezultatima dobivenim MKE metodom. Međutim, u slučaju nesimetrije između namota, kao što je jedan kratkospojeni namot i više paralelno spojenih svitaka drugog namota ili dva namota pomaknuta prema jednoj strani prozora, odabir centra konformnog preslikavanja utječe na rezultat te prvotni izbor središta prozora za centar konformnog preslikavanja više nije dobar. Optimalni položaj centra konformnog preslikavanja nije isti za svaki slučaj i mijenja se ovisno o geometriji. Položaj centra konformnog preslikavanja utječe na izračun vektorskog magnetskog potencijala tako da mu dodaje konstantnu vrijednost, koja se može kompenzirati odabirom odgovarajuće integracijske konstante C u jednadžbama (5.42), (5.45) i (5.48) u potpoglavlju 5.5. Tijekom istraživanja nije bilo moguće izvesti jednoznačan kriterij prema kojemu bi se mogao odrediti položaj centra konformnog preslikavanja za koji bi iznos ulančenog toka bio točan, odnosno nije bilo moguće odrediti konstante integracije u jednadžbama (5.42), (5.45) i (5.48).

Na slici 7.12 prikazano je preslikavanje točkastih vodiča dvaju namota, koji su postavljeni nesimetrično u odnosu na središte prozora jezgre transformatora, iz prozora jezgre transformatora u jedinični krug. Položaj centra konformnog preslikavanja postavljen je između namota te je prikazan crvenom točkom u prozoru transformatora i u jediničnom krugu. Jedinični ulančeni tok jednog namota dobiven ovim modelom iznosi 0,00087 Wb/m. Isti model napravljen je i u MagNetu te jedinični ulančeni tok istog namota iznosi 0,00265 Wb/m, tako da je pogreška izračuna u Matlabu dosta velika u odnosu na MagNet. Na slici 7.13 prikazan je optimalni položaj centra konformnog preslikavanja za promatrani model, odnosno položaj u kojem je najmanje odstupanje rješenja iz Matlabu i MagNeta (taj položaj u ovom je slučaju malo pomaknut od središta prema desnoj strani prozora jezgre transformatora).

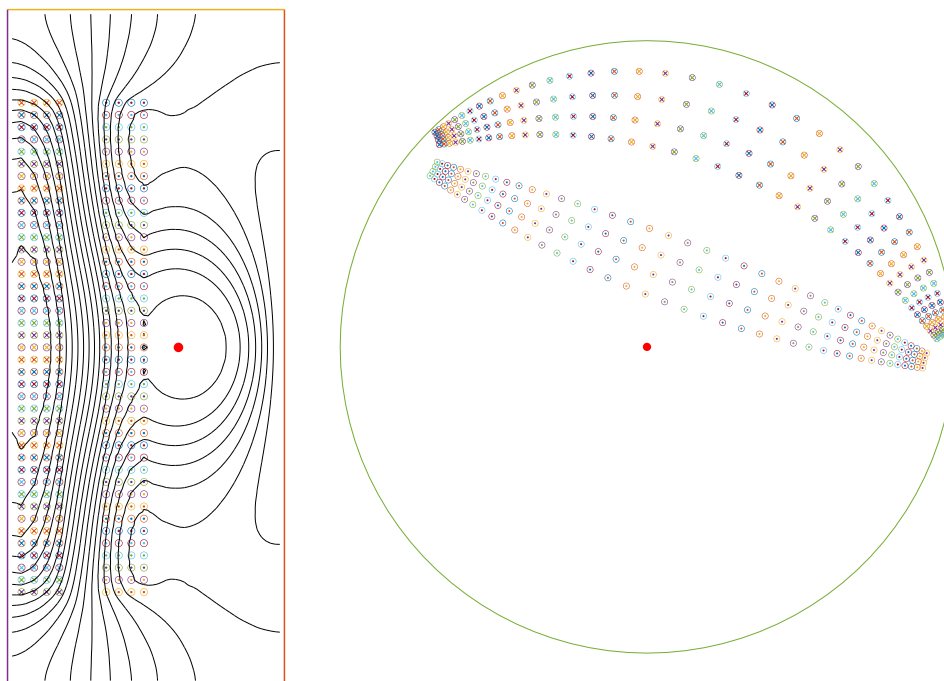
Za izračun raspodjele struja, ako se koristi samo 2D model transformatora, može se koristiti rješenje u prozoru transformatora bez obzira na utjecaj centra konformnog preslikavanja jer raspodjela struja ovisi o geometriji i bitno je relativno izračunati iznos ulančenog toka pojedinog paralelnog svitka i taj iznos apsolutno ne mora biti točan, tj. vidi se sa slika 7.12 i 7.13 da je raspodjela magnetskih silnica na području namota približno jednaka, pa će i struje kroz namote biti približno jednake bez obzira na položaj centra konformnog preslikavanja, a za usporedbu je na slici 7.14 prikazana raspodjela magnetskih silnica dobivena izračunom u MagNetu te je vidljivo da ta raspodjela na području namota približno odgovara raspodjeli dobivenoj izračunom u Matlabu prikazanoj na slikama 7.12 i 7.13. Međutim, za izračun raspodjele struja u kvazi 3D modelu potrebno je izračunati točan iznos ulančenog toka jer se koriste tri rješenja, odnosno ulančeni tok u poprečnom presjeku i uzdužnom presjeku izvan prozora jezgre računa se točno pa se ekstrapolacijom točnih rješenja u tim presjecima i rješenja u prozoru koje je manje točno unosi pogreška u kvazi 3D model.

Rješenje problema odabira centra konformnog preslikavanja predloženo je u potpoglavlju 7.5, tako da se umjesto rješenja u prozoru jezgre dobivenog korištenjem konformnih preslikavanja koristi rješenje u prozoru jezgre izvedeno u potpoglavlju 7.5. Prema tome, 2D model prozora transformatora može se koristiti za izračun raspodjele struja jer je bitno da relativni iznos ulančenog toka bude

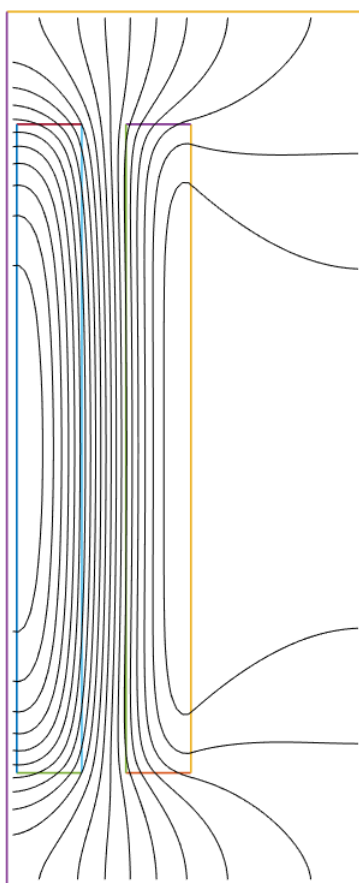
jednak za sve paralelne svitke, a to je moguće postići bez obzira na odabir centra konformnog preslikavanja. Kod kvazi 3D modela potrebno je izračunati točan iznos ulančenog toka, pa se zbog toga u prozoru jezgre transformatora koristi spomenuto rješenje.



Slika 7.12: Preslikavanje točkastih vodiča namota postavljenih nesimetrično u prozoru transformatora, za položaj centra konformnog preslikavanja između namota



Slika 7.13: Preslikavanje točkastih vodiča namota postavljenih nesimetrično u prozoru transformatora, za položaj centra konformnog preslikavanja pomaknut desno od namota



Slika 7.14: Raspodjela magnetskih silnica dobivena izračunom u MagNetu, za model prikazan na slikama [7.12](#) i [7.13](#)

7.5 Rješenje vektorskog magnetskog potencijala prema Knoepfelu

Utjecaj centra konformnog preslikavanja na izračun vektorskog magnetskog potencijala, odnosno ulančenog toka, može se izbjeći ako se umjesto konformnog preslikavanja koristi neko drugo rješenje vektorskog magnetskog potencijala za presjek prozora jezgre transformatora.

U [60] je dano rješenje vektorskog magnetskog potencijala za slučaj beskonačno dugog električnog vodiča koji je zatvoren unutar beskonačno permeabilnih pravokutnih granica, kao što je prikazano na slici 7.15 (dimenzije vodiča u odnosu na unutrašnji promjer su prenaplašene radi boljeg prikaza na slici). U tom slučaju vektorski magnetski potencijal $A_z(x, y)$ definiran je kao

$$A_z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{m,n} \cos(k_m x) \cos(k_n y) \quad (7.9)$$

Koeficijenti k_n , k_m i $a_{m,n}$ definirani su kao

$$k_n = \frac{(n-1)\pi}{b}, \quad (7.10)$$

$$k_m = \frac{(m-1)\pi}{a}, \quad (7.11)$$

$$a_{m,n} ab \frac{k_m^2 + k_n^2}{4} = \mu_0 j_z \frac{[\sin(k_m a_2) - \sin(k_m a_1)][\sin(k_n b_2) - \sin(k_n b_1)]}{k_m k_n}. \quad (7.12)$$

Izrazi za prva tri koeficijenta s indeksima $m, n = 1$ mogu se pojednostavniti te se dobiju sljedeći koeficijenti

$$a_{1,n} ab \frac{k_n^2}{2} = \mu_0 j_z (a_2 - a_1) \frac{\sin(k_n b_2) - \sin(k_n b_1)}{k_n} \quad (7.13)$$

$$a_{m,1} ab \frac{k_m^2}{2} = \mu_0 j_z (b_2 - b_1) \frac{\sin(k_m a_2) - \sin(k_m a_1)}{k_m} \quad (7.14)$$

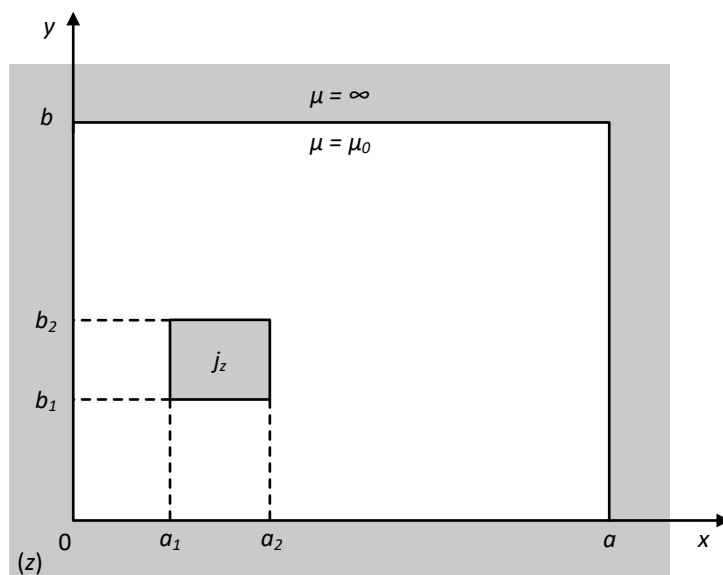
Osim toga, može se uzeti da je $a_{1,1} = 0$ (jer je konstantni član u A_z nebitan). Prema tome, rješenje dano u jednadžbi (7.9) vrijedi u cijelom području unutar pravokutnih granica, uključujući i vodič [60].

Vektorski magnetski potencijal u (7.9) uzrokovan je strujom kroz jedan vodič, međutim to rješenje može se proširiti na jedan ili više namota tako da se definira broj zavoja pojedinog namota i onda se konstante pojedinog namota množe s brojem zavoja pripadajućeg namota jer je ukupni vektorski magnetski potencijal u nekoj točki zbroj doprinosa svih zavoja. Nakon toga definira se proizvoljan broj točaka unutar svakog namota te se u tim točkama računa vektorski magnetski potencijal A_z . Pomoću funkcije *griddedInterpolant* u Matlabu može se za svaki namot, iz točaka unutar namota s rješenjima A_z , izračunati funkcija $A_{zi}(x, y)$, gdje i predstavlja broj namota. Prema tome, za namot 1 i namot 2 sa slike 7.16, jedinični ulančeni tokovi mogu se izračunati prema

$$\Psi_1 = N_1 \frac{\int_{a_{11}}^{a_{21}} \int_{b_{11}}^{b_{21}} A_{z1}(x, y) dx dy}{a_1 b_1} \quad (7.15)$$

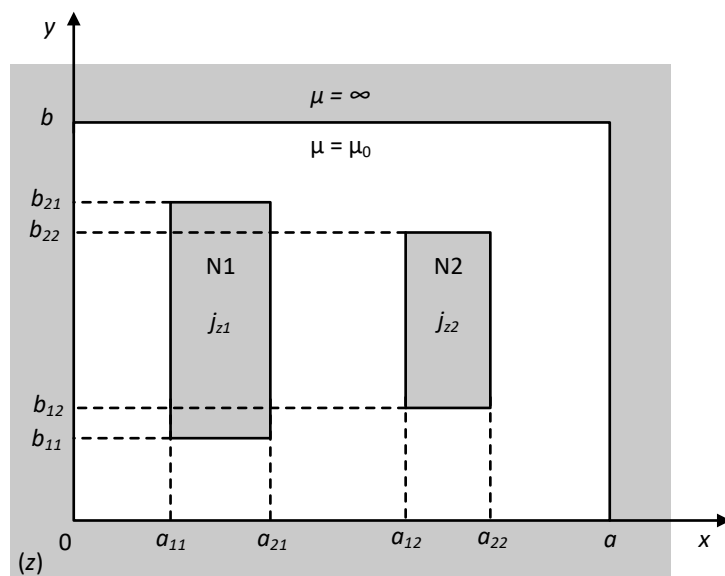
i

$$\Psi_2 = N_2 \frac{\int_{a_{12}}^{a_{22}} \int_{b_{12}}^{b_{22}} A_{z2}(x, y) dx dy}{a_2 b_2} \quad (7.16)$$

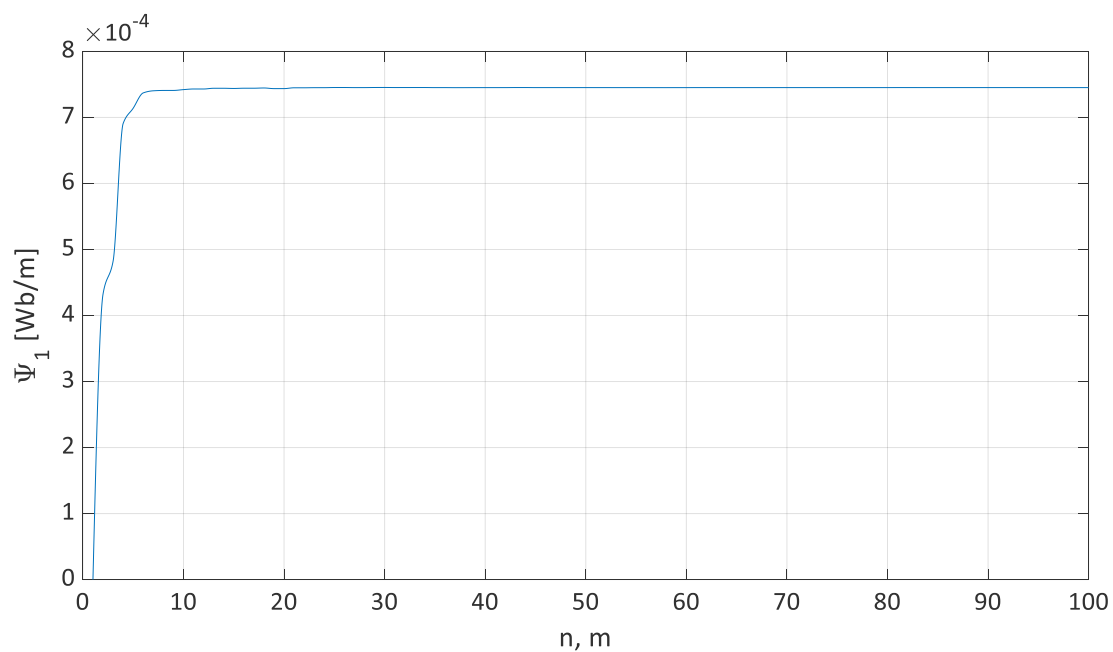


Slika 7.15: Beskonačno dug električni vodič zatvoren unutar beskonačno permeabilnih pravokutnih granica [60]

gdje je N_1 broj zavoja namota 1, a_1 je širina namota 1, b_1 je visina namota 1, N_2 je broj zavoja namota 2, a_2 je širina namota 2 i b_2 je visina namota 2. Za izračun integrala koristi se funkcija *quad2d* u Matlabu koja numerički vrednuje dvostruki integral, odnosno aproksimira integral funkcije $A_{zi}(x, y)$ po površini namota i . S obzirom na to da su izrazi pomoću kojih se računa vektorski magnetski potencijal A_z u definiranim točkama analitički, izračun je vrlo brz i ovisi o odabranom broju harmonika m i n u jednadžbi (5.39) te o broju točaka u kojima se računa A_z . S obzirom na to da Matlab funkcija *griddedInterpolant* dosta dobro interpolira funkciju, dovoljno je koristiti malen broj točaka (npr. može se uzeti broj točaka po širini namota jednak broju vodiča u namotu u radijalnom smjeru i broj točaka po visini namota jednak broju vodiča u namotu u aksijalnom smjeru). Odabir broja točaka ne utječe značajno na vrijeme izvođenja računa jer se točke računaju vektorski. Na vrijeme izvođenja i točnost izračuna više utječe odabir broja harmonika jer se izračun izvodi u petlji. Utjecaj broja harmonika na izračun jediničnog ulančenog toka, za model prikazan na slici 5.3 i uz $m = n$, prikazan je na slici 7.17. Može se vidjeti da je dovoljno koristiti 20 do 30 harmonika, a za veći broj rješenje se ne mijenja značajno. Za 20 harmonika rješenje u Matlabu iznosi 0,0007437 Wb/m, za 30 harmonika iznosi 0,0007454 Wb/m, a za 100 harmonika iznosi 0,0007452. Vrijeme izračuna jediničnog ulančenog toka za navedeni model i 30 harmonika iznosi 0,2 sekunde. Za promatrani model rješenje u MagNetu iznosi 0,000745 Wb/m. Prema tome, može se uzeti da je rezultat dobar već za 20 harmonika, gdje odstupanje rješenja u Matlabu u odnosu na rješenje u MagNetu iznosi manje od 0,2 %. To je dovoljna točnost za potrebe izračuna vektorskog magnetskog potencijala jer stvarne dimenzije namota mogu odstupati od računskih do otprilike 5 %, što unosi u izračun desetak puta veću pogrešku od navedenih 0,2 %.



Slika 7.16: Beskonačno dugi namoti zatvoreni unutar beskonačno permeabilnih pravokutnih granica

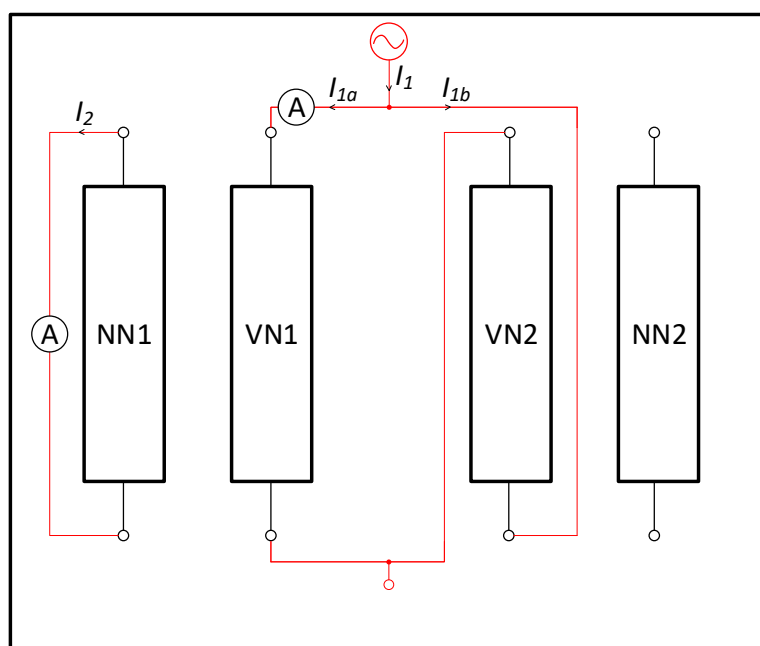


Slika 7.17: Ovisnost jediničnog ulančenog toka o broju harmonika u rješenju vektorskog magnetskog potencijala

7.6 Usporedba rezultata izračuna i mjerenja

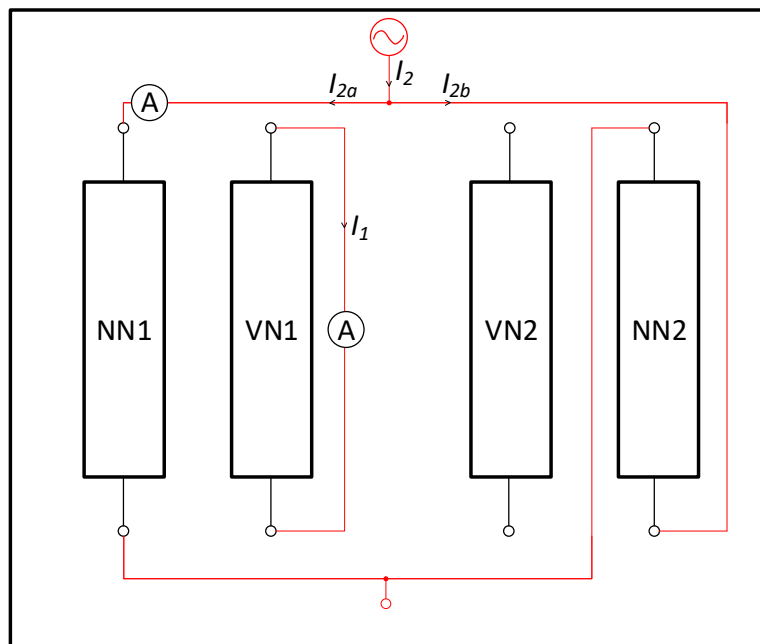
Za usporedbu rezultata izračuna i mjerenja modificirana su dva jednofazna transformatora ($T1$ i $T2$), proizvedena u tvornici transformatora Končar - Distributivni i specijalni transformatori d.d., na način kako je to opisano u potpoglavlju 6.4. Napravljena su dva različita mjerenja, odnosno na obama transformatorima mjerena je raspodjela struja za slučaj kada su paralelno spojena dva VN svitka te kada su paralelno spojena dva NN svitka.

Za prvo mjerenje spojena su paralelno dva VN svitka, tj. svici $VN1$ i $VN2$, NN svitak $NN1$ je kratko spojen, a NN svitak $NN2$ ima otvorene stezaljke. S obzirom na to da su namoti motani u istom smjeru potrebno je svitke spojiti "križno" paralelno tako da se tokovi pojedinih svitaka potpomažu. Paralelno spojeni svici $VN1$ i $VN2$ spojeni su na naponski izvor te su mjereni napon izvora i struja izvora, struja I_{1a} i struja I_2 , kako je prikazano na shemi mjerenja na slici 7.18. Mjesta na kojima se mjerila struja prikazana su slovom "A" unutar kruga i ta oznaka ne označava mjerenje samo ampermetrom već i ostalim mjernim uređajima koji će biti spomenuti u nastavku. Struja I_{1b} koja teče kroz drugi paralelni svitak može se dobiti kao razlika izmjerenih struja. Za mjerenje kratkospojne struje i struje kroz jedan paralelni svitak korištena su strujna kliješta *Fluke 381* prikazana na slici 7.23 i ampermetar u sklopu digitalnog multimetra *Fluke 289* prikazanog na slici 7.24 (mjerenje na transformatoru $T1$) te strujne sonde *LEM IT 700-S/SP2 Ultrastab* i *Danfysik Ultrastab 867* prikazane na slikama 7.25 i 7.26 (mjerenje na transformatoru $T2$).



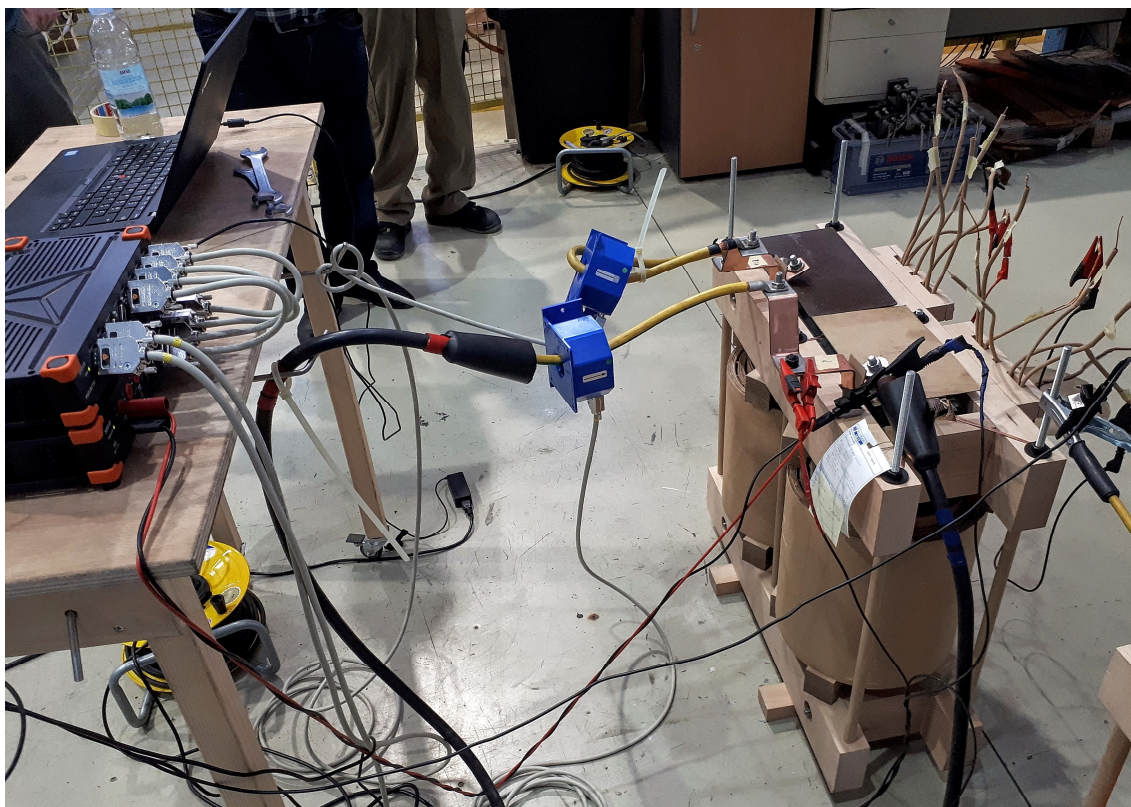
Slika 7.18: Shema mjerenja raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke VN namota modificiranih transformatora

Za drugo mjerenje spojena su paralelno dva NN svitka, tj. svici $NN1$ i $NN2$, VN svitak $VN1$ je kratko spojen, a VN svitak $VN2$ ima otvorene stezaljke. Paralelno spojeni svici $NN1$ i $NN2$ spojeni su na naponski izvor te su mjereni napon izvora i struja izvora, struja I_{2a} i struja I_1 , kako je prikazano na shemi mjerenja na slici 7.19. Struja I_{2b} koja teče kroz drugi paralelni svitak može se dobiti kao razlika izmjerenih struja.



Slika 7.19: Shema mjerenja raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke NN namota modificiranih transformatora

Na slici 7.20 prikazan je jedan od transformatora na kojemu je napravljen niz mjerenja napona kratkog spoja za različite kombinacije namota i raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke NN i VN namota.



Slika 7.20: Mjerenje raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke modificiranog jednofaznog transformatora

Usporedba rezultata izračuna s rješenjem 3D modela u MagNetu prikazana je u tablici 7.2 za transformator $T1$, a usporedba rezultata izračuna s izmjerenim vrijednostima prikazana je u tablici 7.3 za transformator $T2$. Iz tablice 7.2 izostavljen je red s mjerenim vrijednostima jer se naknadno uspostavilo da je tijekom mjerenja došlo do greške prilikom spajanja namota tako da mjerene vrijednosti nisu vjerodostojne, a nije bilo moguće ponoviti mjerenje jer je transformator isporučen, pa je kao referentna vrijednost uzeto rješenje 3D modela u MagNetu. Rješenja dobivena kvazi 3D modelom u Matlabu dosta se dobro poklapaju s rješenjima dobivenima 3D modelom u MagNetu te za transformator $T2$ i s mjerenim vrijednostima. Očekivano, najviše odstupaju rješenja dobivena 2D modelom u prozoru transformatora jer se taj model najviše razlikuje od stvarnog stanja. Rješenja dobivena 2D modelom u uzdužnom presjeku s vanjske strane jezgre, izvan prozora, također se dosta dobro poklapaju s rješenjima dobivenima 3D modelom u MagNetu. S obzirom na to da je krajnji cilj s izračunatom raspodjelom struja izračunati reaktivni dio napona kratkoga spoja, u tablicama je za svaku raspodjelu struja prikazan i izračunati reaktivni dio napona kratkoga spoja u_σ te odstupanje od referentne vrijednosti. U tablici 7.2 referentna vrijednost je u_σ izračunat 3D modelom u MagNet-u, zbog spomenute greške tijekom mjerenja, a u tablici 7.3 referentna vrijednost je izmjereni u_σ . Za svaku od raspodjela struja, dobivenu 2D i 3D modelima navedenima u tablici, izračunat je reaktivni dio napona kratkog spoja pomoću kvazi 3D modela za koji su struje ulazni parametri. Iako se raspodjela struja dobivena različitim modelima donekle razlikuje, iz tablica je vidljivo da svi modeli, osim 2D modela u prozoru jezgre, daju dobre rezultate u odnosu na odstupanje od referentne vrijednosti, tj. odstupanja su dosta niža od tolerancije propisane normama [1, 2], koja iznosi $\pm 10\%$. I u slučaju modificiranih transformatora $T1$ i $T2$, za slučaj kad se jedan namot sastoji od paralelno spojenih svitaka, vrijedi napisano u potpoglavlju 6.3, tj. vrijedi zaključak da predložena metoda daje dobre rezultate iz pozicije projektanta transformatora jer su dobivena odstupanja dosta manja od tolerancije tako da ulijevaju određenu sigurnost projektantu transformatora da će se mjereni napon kratkoga spoja naći u dozvoljenim granicama u odnosu na garantiranu vrijednost.

Tablica 7.2: Usporedba rješenja 3D modela u MagNetu i računatih vrijednosti struja paralelno spojenih svitaka VN i NN namota za transformator $T1$

	VN				NN			
	I_{1a} [A]	I_{1b} [A]	u_σ [%]	Δ [%]	I_{2a} [A]	I_{2b} [A]	u_σ [%]	Δ [%]
MagNet 3D	2,008	0,010	1,71	-	145,95	6,89	1,04	-
¹ MagNet 2D	2,081	-0,063	1,81	5,85	111,53	41,31	1,78	71,15
² Matlab 2D P	2,092	-0,074	1,83	7,02	111,78	41,06	1,77	70,19
³ Matlab 2D U	2,014	0,004	1,72	0,58	146,23	6,61	1,03	-0,96
⁴ Matlab "3D" P	2,015	0,003	1,72	0,58	144,00	8,84	1,02	-1,92
⁵ Matlab "3D" S	2,016	0,002	1,72	0,58	144,04	8,80	1,02	-1,92

¹ Rezultati za MagNet 2D model s namotima unutar prozora jezgre transformatora (dubina modela iznosi 1m)

² Rezultati za Matlab 2D model s namotima unutar prozora jezgre transformatora (rješenje prema *Knoepfelu*)

³ Rezultati za Matlab 2D model s namotima izvan prozora jezgre transformatora u uzdužnom presjeku

⁴ Rezultati za Matlab kvazi 3D model i izračun pomoću minimalnog odstupanja tokova i *pchip* funkcije

⁵ Rezultati za Matlab kvazi 3D model i izračun pomoću minimalnog odstupanja tokova i *spline* funkcije

Osim mjerenja na modificiranim jednofaznim transformatorima $T1$ i $T2$, napravljeno je i mjerenje raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke VN namota na jednofaznom vučnom transformatoru ($T3$) proizvedenom u tvornici transformatora Končar - Distributivni i specijalni transformatori d.d., koji se ugrađuje na elektromotorni vlak za Hrvatske željeznice. VN namot sastoji se od četiriju svitaka ($VN1$, $VN2$, $VN3$ i $VN4$) koji su paralelno spojeni na naponski izvor, a vučni namot $NN1$ je kratko

Tablica 7.3: Usporedba mjerenih i računatih vrijednosti struja paralelno spojenih svitaka VN i NN namota za transformator T2

	VN				NN			
	I_{1a} [A]	I_{1b} [A]	u_{σ} [%]	Δ [%]	I_{2a} [A]	I_{2b} [A]	u_{σ} [%]	Δ [%]
Mjerenje	3,555	0,061	4,95	-	260,97	12,57	3,09	-
MagNet 3D	3,586	0,030	4,83	-2,42	260,42	13,12	2,95	-4,53
¹ Matlab 2D P	3,938	-0,322	5,95	20,20	189,86	83,68	5,34	72,82
² Matlab 2D U	3,602	0,014	4,91	-0,81	261,27	12,27	2,95	-4,53
³ Matlab "3D" P	3,605	0,011	4,91	-0,81	258,00	15,54	2,92	-5,50
⁴ Matlab "3D" S	3,605	0,011	4,91	-0,81	258,07	15,47	2,92	-5,50

¹ Rezultati za Matlab 2D model s namotima unutar prozora jezgre transformatora (rješenje prema *Knoepfelu*)

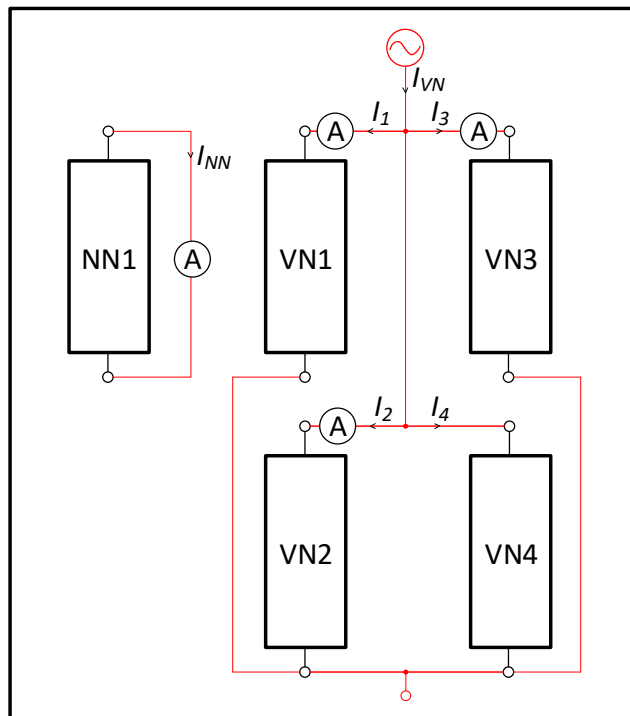
² Rezultati za Matlab 2D model s namotima izvan prozora jezgre transformatora u uzdužnom presjeku

³ Rezultati za Matlab kvazi 3D model i izračun pomoću minimalnog odstupanja tokova i *pchip* funkcije

⁴ Rezultati za Matlab kvazi 3D model i izračun pomoću minimalnog odstupanja tokova i *spline* funkcije

spojen, kako je prikazano na shemi mjerenja raspodjele struja na slici 7.21. Struja kratkospojenog NN namota mjerena je pomoću strujnih kliješta *Fluke 381* (slika 7.23), ukupna struja VN namota mjerena je na izvoru, a struje I_1 , I_2 i I_3 pomoću ampermetra u sklopu digitalnog instrumenta *Fluke 289* (slika 7.24). Struja I_4 može se dobiti kao razlika ukupne struje i zbroja struja I_1 , I_2 i I_3 . U tablici 7.4 prikazani su rezultati mjerenja raspodjele struja na transformatoru T3, gdje je I_{iz} struja izvora, a struje I_1 , I_2 , I_3 i I_4 su struje kroz paralelno spojene svitke VN namota. S obzirom na to da zbog ograničenja izvora nije bilo moguće postići nazivnu struju (11 A), mjereno je 5 točaka za različite struje da se vidi kako se mijenjaju struje svitaka ovisno o promjeni struje izvora. Budući da se radi o pokusu kratkog spoja, promjena je linearna, tako da se vrijednosti za nazivnu struju mogu linearno skalirati. Aktivni dio transformatora T3, u ispitnoj stanici tijekom mjerenja, prikazan je na slici 7.22.

Usporedba rezultata izračuna sa skaliranim mjerenim vrijednostima, za nazivnu struju 11 A, prikazana je u tablici 7.5 za transformator T3. Za svaku od raspodjela struja I_1 , I_2 , I_3 i I_4 , dobivenu 2D i 3D modelima navedenima u tablici, izračunat je reaktivni dio napona kratkog spoja pomoću kvazi 3D modela za koji su struje ulazni parametri. Osim reaktivnog dijela napona kratkog spoja, u tablici je prikazano i odstupanje od mjerene vrijednosti. Slično kao kod transformatora T1 i T2, najveća je pogreška kod rješenja dobivenog iz uzdužnog presjeka s namotima u prozoru jezgre transformatora, dok rješenja dobivena iz uzdužnog presjeka s namotima izvan prozora jezgre transformatora te iz kvazi 3D modela pokazuju dosta dobra slaganja s mjerenim vrijednostima i rješenjima MKE 3D modela. S obzirom na to da je geometrija transformatora T3 kompliciranija od geometrije transformatora T1 i T2, ovdje je razlika raspodjele struja dobivena različitim modelima još izraženija. Međutim, iz tablica je vidljivo da svi modeli daju dobre rezultate jer su i kod transformatora T3 odstupanja rješenja pojedinih modela dosta niža od tolerancije propisane normama [1, 2], koja iznosi $\pm 10\%$. I u ovom slučaju najveća pogreška je kod 2D modela u prozoru. Osim toga, vrijedi i zaključak da predložena metoda daje dobre rezultate, kao kod modificiranih transformatora T1 i T2, jer su dobivena odstupanja dosta manja od tolerancije tako da ulijevaju određenu sigurnost projektantu transformatora da će se mjereni napon kratkoga spoja naći u dozvoljenim granicama u odnosu na garantiranu vrijednost.



Slika 7.21: Shema mjerenja raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke VN namota vučnog transformatora

Tablica 7.4: Mjerenje raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke VN namota transformatora T3

Mjerenje	I_{iz} [A]	I_1 [A]	I_2 [A]	I_3 [A]	1I_4 [A]
1	0,973	0,876	0,092	0,015	-0,01
2	0,805	0,722	0,077	0,013	-0,007
3	0,681	0,612	0,066	0,01	-0,007
4	0,558	0,5	0,05	0,009	-0,001
5	0,433	0,389	0,039	0,007	-0,002

$${}^1I_4 = I_{iz} - (I_1 + I_2 + I_3)$$

Tablica 7.5: Usporedba mjerenih i računatih vrijednosti struja paralelno spojenih svitaka VN namota za transformator T3

	I_1 [A]	I_2 [A]	I_3 [A]	I_4 [A]	u_σ [%]	Δ [%]
¹ Mjerenje	9,91	1,1	0,17	-0,18	35,83	-
MagNet 3D	9,8	1,05	0,21	-0,06	35,11	-2,01
² MagNet 2D P	10,99	0,93	-0,74	-0,18	37,56	4,83
³ MagNet 2D U	10,07	0,84	0,08	0,01	35,16	-1,87
⁴ Matlab 2D P	10,99	0,93	-0,74	-0,18	37,56	4,83
⁵ Matlab 2D U	10,08	0,83	0,07	0,02	35,16	-1,87
⁶ Matlab "3D" DE	9,28	1,45	0,24	0,03	35,36	-1,31
⁷ Matlab "3D" M	9,17	1,45	0,23	0,15	35,48	-0,98

¹ Skalirano prema tablici 7.4

² Rezultati za MagNet 2D model s namotima unutar prozora jezgre transformatora (dubina modela iznosi 1m)

³ Rezultati za MagNet 2D model s namotima izvan prozora jezgre transformatora u uzdužnom presjeku

⁴ Rezultati za Matlab 2D model s namotima unutar prozora jezgre transformatora (rješenje prema *Knoepfeli*)

⁵ Rezultati za Matlab 2D model s namotima izvan prozora jezgre transformatora u uzdužnom presjeku

⁶ Rezultati za Matlab kvazi 3D model i izračun pomoću *diferencijalne evolucije*

⁷ Rezultati za Matlab kvazi 3D model i izračun pomoću *Midaco* metode



Slika 7.22: Mjerenje raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke VN namota jednofaznog vučnog transformatora



Slika 7.23: Strujna kliješta Fluke 381



Slika 7.24: Digitalni multimetar Fluke 289



Slika 7.25: Strujna sonda LEM IT 700-S/SP2 Ultrastab



Slika 7.26: Strujna sonda Danfysik Ultrastab 867

Poglavlje 8

Zaključak

Postoje razne analitičke metode za izračun napona kratkog spoja transformatora. Te metode mogu se primijeniti na većinu transformatora, međutim, u slučajevima specijalnih transformatora s ne-uobičajenom geometrijom te su metode ili prilično netočne ili se uopće ne mogu primijeniti. MKE metoda pokazala se kao dobro rješenje za razne razvojne svrhe i analize postojećih transformatora, međutim, tijekom projektiranja transformatora projektanti ju najčešće izbjegavaju te se oslanjaju na iskustvo i rezultate mjerenja na sličnim transformatorima. Zbog toga je bilo potrebno pronaći alternativu MKE metodi.

U ovom radu predstavljena je kombinirana analitičko-numerička metoda za izračun napona kratkog spoja transformatora koja se temelji na konformnim preslikavanjima. Metoda uzima u obzir namote različitih visina i širina, efekt skošenja magnetskih silnica na krajevima namota te bilo koji relativni položaj namota u prozoru jezgre transformatora. Osim za izračun napona kratkog spoja između dvaju namota koji se nalaze na istom stupu, metoda se može primijeniti za izračun namota kratkog spoja između namota koji se nalaze na različitim stupovima te kod višenamotnih transformatora, kao što je transformator za električnu vuču.

Točnost metode može se povećati korištenjem većeg broja točkastih vodiča koji predstavljaju namote, većeg broja točaka u kojima se računa magnetska indukcija te većeg broja harmonika Fourierova reda. Veća točnost zahtijeva više vremena potrebnog za izračun. Prema tome, potrebno je naći kompromis između točnosti i vremena izračuna. U fazi ponude gdje je potrebno brzo izračunati te ponuditi transformator kupcu može se koristiti manji broj točkastih vodiča, točaka i harmonika, a u slučaju dobivenog projekta, gdje je točnost presudna, može se koristiti veći broj točkastih vodiča, točaka i harmonika.

Za devet trofaznih transformatora različitih snaga, s namotima koji se nalaze na istom stupu, napravljeni su izračuni napona kratkog spoja korištenjem predložene metode. Za jednofazni transformator napravljeni su izračuni napona kratkog spoja za kombinacije namota koji se nalaze na različitim stupovima. Rezultati izračuna predloženom metodom uspoređeni su s mjerenjima, rezultatima dobivenima MKE metodom i rezultatima dobivenima korištenjem specijalnih programa proizvođača transformatora te pokazuju dobro slaganje, čime se potvrđuje točnost i pouzdanost predložene metode.

Prednost je predložene metode mogućnost primjene za bilo kakve geometrije namota, koji se nalaze na istom ili različitim stupovima, a za koje se analitičke metode, na kojima se temelje specijalni programi proizvođača transformatora, ne mogu koristiti. Osim toga, za razliku od analitičkih metoda spomenutih u pregledu literature kod kojih se napon kratkog spoja računa iz jednog dvodimenzionalnog rješenja rasipnog polja, metoda uzima u obzir trodimenzionalni prostor tako da ekstrapolira tri različita dvodimenzionalna rješenja rasipnog polja u uzdužnom i poprečnom presjeku. Napon kratkog spoja u specijalnim slučajevima, kao što su namoti koji se nalaze na različitim stupovima, može se točnije izračunati korištenjem MKE metode, međutim prednost je predložene metode lakša integracija u postojeće specijalne programe proizvođača transformatora te lakše postavljanje modela transformatora koji se zadaje jednostavnim geometrijskim veličinama,

kao što su visine i širine namota, visina i širina prozora jezgre transformatora i promjer jezgre.

Osim metode za izračun napona kratkog spoja transformatora, u ovom radu predstavljen je i algoritam za izračun raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke visokonaponskog namota transformatora s asimetričnim rasporedom kratkospojenih niskonaponskih namota u prozoru jezgre transformatora te asimetričnom raspodjelom magnetskog polja u pokusima kratkog spoja. Raspodjelu struja potrebno je izračunati jer su struje kroz paralelno spojene svitke ulazni podatak za izračun napona kratkog spoja za promatranu asimetričnu kombinaciju kratko spojenih niskonaponskih namota i napajanih visokonaponskih namota. Veća točnost izračuna raspodjele struja znači i veću točnost izračuna napona kratkog spoja. Osim toga, što točniji izračun raspodjele struja je i preduvjet za točniji izračun gubitaka u namotima transformatora u pokusima kratkog spoja.

Kao i kod izračuna napona kratkog spoja, točnost algoritma za izračun raspodjele struja može se povećati korištenjem većeg broja točkastih vodiča koji predstavljaju namote, u kojima se računa vektorski magnetski potencijal, te većeg broja harmonika Fourierova reda. Međutim, povećavanjem broja točaka i harmonika povećava se i vrijeme potrebno za izračun. Za visokonaponski namot s dvama paralelnim svicima može se koristiti jednostavna i brza metoda za izračun raspodjele struja koja traži jednu struju kod koje funkcija odstupanja ulančenih tokova paralelnih svitaka ima minimum. Za visokonaponski namot s više od dvaju paralelnih svitaka potrebno je koristiti optimizacijske metode, kao što su *Diferencijalna evolucija* i *MIDACO* algoritam, kojima je nedostatak duže vrijeme potrebno za izračun raspodjele struja.

Za potrebe mjerenja raspodjele struja, a da bi se mogla potvrditi točnost i pouzdanost algoritma, modificirana su dva jednofazna transformatora u tvornici transformatora Končar D&ST te su napravljeni njihovi modeli u programskom paketu Mentor Graphics MagNet. Osim toga, napravljena su mjerenja i model u MagNetu za jednofazni transformator za električnu vuču. Rezultati izračuna predloženim algoritmom uspoređeni su s mjerenjima i rezultatima dobivenim MKE metodom u MagNetu te pokazuju dobro slaganje, čime se potvrđuje točnost i pouzdanost predloženog algoritma.

Za izračun raspodjele struja može se koristiti kvazi 3D model koji uzima u obzir rješenja iz triju različitih presjeka ili 2D model koji uzima u obzir rješenje iz uzdužnog presjeka izvan prozora jezgre transformatora. S obzirom na to da 2D model koristi rješenje iz samo jednog presjeka, vrijeme potrebno za izračun manje je od vremena potrebnog za izračun kvazi 3D modela. Za promatrane transformatore 2D model i kvazi 3D model daju slična rješenja, s time da su rješenja 2D modela malo točnija. S obzirom na to da kvazi 3D model uzima u obzir rješenja iz više različitih presjeka te se pokazao točnijim za izračun reaktivnog dijela napona kratkog spoja, očekivano je da i za izračun raspodjele struja bude točniji od 2D modela. Predlaže se u daljnjem radu napraviti mjerenja na više različitih transformatora te usporediti s izračunom u 2D i kvazi 3D modelu da bi se utvrdilo koji je pristup u konačnici točniji.

Doprinosi ove disertacije mogu imati primjenu u projektiranju specijalnih transformatora kod kojih nije moguće koristiti postojeće analitičke metode i specijalne programe koji se temelje na tim metodama. Osim kod transformatora, doprinosi ove disertacije mogu imati primjenu u projektiranju prigušnica s magnetskim okirom. Prijedlozi za daljnje istraživanje i razvoj metode su:

- optimizacija koda i rješavanje problema ugniježđenih *for* petlji radi skraćivanja vremena potrebnog za izračun,
- istraživanje utjecaja kotla na izračun napona kratkog spoja i raspodjele struja budući da metoda trenutno obuhvaća samo geometriju aktivnog dijela transformatora (jezgra i namoti),
- istraživanje mogućnosti primjene predložene metode za izračun induktiviteta prigušnica s magnetskim okvirom.

LITERATURA

- [1] IEC 60076-1, "Power transformers - part 1: General." Edition 3.0, April 2011.
- [2] IEC 60310, "Railway applications - traction transformers and inductors on board rolling stock." Edition 4.0, June 2016.
- [3] S. V. Kulkarni and S. A. Khaparde, *Transformer Engineering - Design and Practice*. Marcel Dekker, 2005.
- [4] R. Del Vecchio, B. Poulin, P. Feghali, and D. Ahuja, *Transformer Design Principles*. CRC Press, 3 ed., 2018.
- [5] M. Lambert, F. Sirois, M. Martinez-Duro, and J. Mahseredjian, "Analytical calculation of leakage inductance for low-frequency transformer modeling," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 28, pp. 507–515, January 2013.
- [6] B. S. Alves, P. Kuo-Peng, and P. Dular, "Contribution to power transformers leakage reactance calculation using analytical approach," *International Journal of Electrical Power and Energy Systems*, vol. 105, pp. 470–477, 2019.
- [7] A. Dolenc, *Transformatori I i II*. Liber, 1987.
- [8] D. Azizian, M. Vakilian, J. Faiz, and M. Bigdeli, "Calculating Leakage Inductances of Pancake Windings in Dry-Type Traction Transformers," in *ECTI 2011*, pp. 808–811, 2011.
- [9] H. O. Stephans, "Transformer Reactance and Losses With Nonuniform Windings," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 53, no. 2, pp. 346–349, 1934.
- [10] H. B. Dwight and L. S. Dzung, "A Formula for the Reactance of the Interleaved Component of Transformers," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, vol. 56, no. 11, pp. 1368–1371, 1937.
- [11] P. A. P. de Lima and S. H. L. Cabral, "A Practical Application of the Rabin's Method for Inductance Calculation in Power Transformer Design," in *MOMAG 2012, Brazilian Congress on Electromagnetism*, (João Pessoa-PB), August 2012.
- [12] L. Rabins, "Transformer reactance calculations with digital computers," *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers, Part I: Communication and Electronics*, vol. 75, no. 3, pp. 261–267, 1956.
- [13] P. Gómez and F. De León, "Accurate and efficient computation of the inductance matrix of transformer windings for the simulation of very fast transients," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 26, pp. 1423–1431, July 2011.
- [14] E. Billig, "The calculation of the magnetic field of rectangular conductors in a closed slot, and its application to the reactance of transformer windings," *Proceedings of the IEE - Part IV: Institution Monographs*, vol. 98, no. 1, pp. 55–64, 2014.
- [15] Y. P. Chan and M. H. Pong, "Leakage inductance calculation of complex transformer constructions based on a simple two-coil inductor model," in *PESC Record - IEEE Annual Power Electronics Specialists Conference*, 2006.
- [16] K. Dawood, B. Alboiyaci, M. A. Cinar, and O. Sonmez, "A new method for the calculation of leakage reactance in power transformers," *Journal of Electrical Engineering and Technology*, vol. 12, no. 5, pp. 1883–1890, 2017.

- [17] A. Fouineau, M. A. Raulet, B. Lefebvre, N. Burais, and F. Sixdenier, "Semi-Analytical Methods for Calculation of Leakage Inductance and Frequency-Dependent Resistance of Windings in Transformers," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 54, pp. 1–10, October 2018.
- [18] I. A. Hernandez, J. M. Canedo, J. C. Olivares-Galvan, and E. Betancourt, "Novel technique to compute the leakage reactance of three-phase power transformers," *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 31, no. 2, pp. 437–444, 2016.
- [19] S. Mohsenzade, M. Aghaei, and S. Kaboli, "Leakage Inductance Calculation of the Transformers with Disordered Windings," *IEEE Transactions on Plasma Science*, vol. 47, pp. 1799–1807, April 2019.
- [20] A. Naderian-Jahromi, F. Jawad, and H. Mohseni, "Calculation of distribution transformer leakage reactance using energy technique," in *17th International Conference on Electricity Distribution*, (Barcelona), pp. 1–5, 2003.
- [21] H. Tian, Z. Wei, S. Vaisambhayana, M. P. Thevar, A. Tripathi, and P. C. Kjar, "Calculation and Experimental Validation on Leakage Inductance of a Medium Frequency Transformer," in *2018 IEEE 4th Southern Power Electronics Conference (SPEC)*, (Singapore), pp. 1–6, December 2018.
- [22] J. El Hayek, *Parameters analysis of multi-windings traction transformers*. PhD thesis, Cracow University of Technology Faculty of Electrical and Computer Engineering, 2003.
- [23] J. El Hayek, "Analytic calculation of leakage inductances of dual frequency concentric windings transformers," in *ICEMS 2001 - Proceedings of the 5th International Conference on Electrical Machines and Systems*, (Shenyang), pp. 194–197, August 2001.
- [24] J. El Hayek, "Short-circuit reactances of multi-secondaries concentric windings transformers," in *IEMDC 2001 - IEEE International Electric Machines and Drives Conference*, (Cambridge), pp. 462–465, 2001.
- [25] J. El Hayek and T. J. Sobczyk, "Analytic one-dimensional design method for railways traction transformers," in *IEEE International Electric Machines and Drives Conference, 2003. IEMDC'03*, (Madison), pp. 1760–1765, June 2003.
- [26] T. Sobczyk and M. Jaraczewski, "On simplified calculations of leakage inductances of power transformers," *Energies*, vol. 13, no. 18, 2020.
- [27] R. Doebbelin, M. Benecke, and A. Lindemann, "Calculation of leakage inductance of core-type transformers for power electronic circuits," in *2008 13th International Power Electronics and Motion Control Conference (EPE-PEMC)*, (Poznan), pp. 1280–1286, 2008.
- [28] R. Doebbelin, C. Teichert, M. Benecke, and A. Lindemann, "Computerized Calculation of Leakage Inductance Values of Transformers," *PIERS Online*, vol. 5, no. 8, pp. 721–726, 2009.
- [29] A. F. Licarião Nogueira, "Calculation of Power Transformers Equivalent Circuit Parameters Using Numerical Field Solutions," *International Journal of Research and Reviews in Applied Sciences*, vol. 17, pp. 19–26, November 2013.
- [30] H. Yu, C. Pei, W. Wang, H. Liu, and K. Min, "Calculation, simulation and measurement for short-circuit reactance of distribution transformers with long-circular double windings," in *2017 IEEE 2nd Information Technology, Networking, Electronic and Automation Control Conference (ITNEC)*, (Chengdu), pp. 1562–1565, December 2017.
- [31] S. Pandit, R. K. Mishra, and G. Chauhan, "Estimation and Methods of Equalizing Leakage Reactance for Multi-Winding Transformers," in *2018 20th National Power Systems Conference (NPSC)*, (Tiruchirappalli), pp. 1–5, 2018.
- [32] A. Güemes and A. José, "A new method for calculating of leakage reactances and iron losses in transformers," in *ICEMS 2001 - Proceedings of the 5th International Conference on Electrical Machines and Systems*, (Shenyang), pp. 178–181, August 2001.
- [33] K. Dawood, M. A. Cinar, B. Alboyaci, and O. Sonmez, "Calculation of the leakage reactance in distribution transformers via numerical and analytical methods," *Journal of Electrical Systems*, vol. 15, no. 2, pp. 213–221, 2019.

- [34] H. Fukumoto, T. Furukawa, H. Itoh, and M. Ohchi, "Feasible method of calculating leakage reactance of 9-winding transformer for high-voltage inverter system," in *2014 International Power Electronics Conference (IPEC-Hiroshima 2014 - ECCE ASIA)*, (Hiroshima), pp. 3249–3254, 2014.
- [35] V. S. Duppalli and S. Sudhoff, "Computationally efficient leakage inductance calculation for a high-frequency core-Type transformer," in *2017 IEEE Electric Ship Technologies Symposium (ESTS)*, (Arlington), pp. 635–642, August 2017.
- [36] L. Štrac, J. Haramustek, M. Dorešić, D. Švarc, and B. Juri, "Measurement of Circulating Currents in Split-Winding Transformer and Comparison with Numerical Calculation," in *5th International Colloquium "Transformer Research and Asset Management"*, (Opatija), pp. 1–8, 2019.
- [37] D. Azizian, M. Vakilian, and J. Faiz, "A new multi-winding traction transformer equivalent circuit for short-circuit performance analysis," *International transactions on electrical energy systems*, vol. 24, pp. 186–202, 2014.
- [38] X. Bingruo, L. Xiaosong, C. Qiaofu, Z. Yu, and W. Jin, "Calculation of the circulating current and short-circuit impedance of a 3000kVA HTS transformer with split types of windings," in *Proceeding of International Conference on Electrical Machines and Systems, ICEMS 2007*, (Seoul), pp. 1291–1295, October 2007.
- [39] N. Fang-fang, "Characteristic analysis and parameter calculation of the locomotive transformer with split types of winding," *Journal of Electric Power Science and Technology*, vol. 31, no. 1, 2016.
- [40] B. Trkulja, Ž. Štih, and T. Župan, "Calculation of self-and mutual inductances of power transformers using a 3D modified magnetostatic integral equation approach," in *2017 10th International Conference on Electrical and Electronics Engineering, ELECO 2017*, 2017.
- [41] R. Schinzinger and P. Laura, *Conformal Mapping: Methods and Applications*. Dover publications, 2003.
- [42] L. Fogaras and W. Lampe, "Calculation of Electrical Field Strength Around Transformer Winding Corners," *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-87, pp. 399–405, February 1968.
- [43] A. Ahmad and P. Auriol, "Conformal mapping method for calculation of rectangular winding parameters," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, pp. 2823–2825, September 1992.
- [44] A. Ahmad and C. Kieny, "Shell-form power transformer modelling at high frequencies," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 30, pp. 3729–3732, September 1994.
- [45] A. Hanić, *Modeliranje zasićenih sinkronih strojeva s površinskim trajnim magnetima primjenom konformnoga preslikavanja i magnetskih ekvivalentnih krugova*. PhD thesis, Sveučilište u Zagrebu Fakultet elektrotehnike i računarstva, 2017.
- [46] A. Hanić, D. Žarko, D. Kuhinek, and Z. Hanić, "On-Load Analysis of Saturated Surface Permanent Magnet Machines Using Conformal Mapping and Magnetic Equivalent Circuits," *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 33, no. 3, pp. 915–924, 2018.
- [47] A. Hanić, D. Žarko, and Z. Hanić, "A Novel Method for No-Load Magnetic Field Analysis of Saturated Surface Permanent-Magnet Machines Using Conformal Mapping and Magnetic Equivalent Circuits," *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 31, no. 2, pp. 740–749, 2016.
- [48] A. Hanić, D. Žarko, D. Kuhinek, and Z. Hanić, "No-Load analysis of permanent magnet machines with bread-loaf magnets and fractional-slot winding using conformal mapping and magnetic equivalent circuits," in *2016 IEEE International Power Electronics and Motion Control Conference (PEMC)*, 2016.
- [49] B. Hague, *The Principles of Electromagnetism Applied to Electrical Machines*. Dover publications, 1962.
- [50] P. K. Kythe, *Handbook of Conformal Mappings and Applications*. Boca Raton, FL, USA: CRC Press, 2019.
- [51] L. Rupčić, "Konformno preslikavanje i möbiusova transformacija," završni rad, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, 2017.
- [52] T. A. Driscoll, *Schwarz-Christoffel Toolbox User's Guide*. <http://www.math.udel.edu/driscoll/SC/guide.pdf>, 2.3 ed.

-
- [53] T. Driscoll and L. Trefethen, *Schwarz-Christoffel Mapping*. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Cambridge University Press, 2002.
- [54] Z. Haznadar and Ž. Štih, *Elektromagnetizam 1*. Školska knjiga, 1997.
- [55] W. J. Gibbs, *Conformal Transformations in Electrical Engineering*. London, U.K.: Chapman & Hall, 1958.
- [56] D. Žarko, *A systematic approach to optimized design of permanent magnet motors with reduced torque pulsations*. PhD thesis, University of Wisconsin - Madison, 2004.
- [57] D. Žarko, D. Ban, and T. A. Lipo, "Analytical calculation of magnetic field distribution in the slotted air gap of a surface permanent-magnet motor using complex relative air-gap permeance," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, no. 7, pp. 1828–1837, 2006.
- [58] M. Jurković and D. Žarko, "Core-type transformer short-circuit voltage calculation using conformal mapping," *IET Electric Power Applications*, vol. 14, no. 12, pp. 2422–2430, 2020.
- [59] M. Jurković, I. Sitar, and D. Žarko, "Modern Design of Onboard Traction Transformers," in *3rd International Colloquium Transformer Research and Asset Management*, (Split), pp. 1–10, 2014.
- [60] H. E. Knoepfel, *Magnetic Fields: A Comprehensive Theoretical Treatise for Practical Use*. New York, USA: John Wiley & Sons, 2000.

POPIS SLIKA

3.1	Preslikavanje kuta jezgre transformatora [41]	8
3.2	Preslikavanje zračnog raspora jezgre transformatora [41]	9
3.3	Preslikavanje područja između jarma i vrhova namota transformatora [42]	9
3.4	Preslikavanje namota pravokutnog oblika u namot kružnog oblika [43]	10
3.5	Preslikavanje nazubljenog zračnog raspora u pravokutnu i kružnu domenu [45]	10
4.1	Preslikavanje iz z ravnine u w ravninu [51]	13
4.2	Očuvanje kutova pri preslikavanju [51]	13
4.3	Konformno preslikavanje $w = \frac{1}{z}$	14
4.4	Konformno preslikavanje $w = z^3$	14
4.5	Konvencija označavanja za Schwarz-Christoffelovu transformaciju [52]	15
4.6	Grafički prikaz preslikavanja jediničnog diska na unutrašnjost pravokutnika u SC Toolboxu	16
4.7	Grafički prikaz preslikavanja jediničnog diska izvan pravokutnika u SC Toolboxu	17
4.8	Uzdužni i poprečni presjek jednofaznog transformatora s namotima N1 i N2 koji se nalaze na različitim stupovima	17
4.9	SC-transformacija između jediničnog kruga i točkastih vodiča namota N1 i N2 koji se nalaze unutar prozora jezgre transformatora	18
4.10	SC-transformacija točaka, u kojima se računa magnetsko polje, između jediničnog kruga i prozora jezgre transformatora	18
4.11	SC-transformacija između jediničnog kruga i točkastih vodiča namota N1 i N2 koji se nalaze izvan prozora jezgre u uzdužnom presjeku transformatora	19
4.12	SC-transformacija između jediničnog kruga i točkastih vodiča namota N1 i N2 koji se nalaze izvan prozora jezgre u poprečnom presjeku transformatora	19
5.1	Strujnica u zračnom tunelu okruženom željezom	20
5.2	Prikaz radijalne i tangencijalne komponente magnetske indukcije u u - v koordinatnom sustavu	22
5.3	Model prozora jezgre transformatora načinjen u MagNetu, s dimenzijama u milimetrima i dijelovima pravca u kojima se računa indukcija za usporedbu s Matlabom, označenih s p_1 , p_2 , p_3 i p_4	25
5.4	Krivulja magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora, za točke koje se nalaze na dijelu pravca p_1	26
5.5	Krivulja magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora, za točke koje se nalaze na dijelu pravca p_2	26
5.6	Krivulja magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora, za točke koje se nalaze na dijelu pravca p_3	27
5.7	Krivulja magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora, za točke koje se nalaze na dijelu pravca p_4	27

5.8	Prikaz vektora magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora strelicama, Matlab model	29
5.9	Prikaz vektora magnetske indukcije u prozoru jezgre transformatora strelicama, MagNet model	29
5.10	Prikaz amplitude magnetske indukcije u [T] u prozoru jezgre transformatora bojama, Matlab model	30
5.11	Prikaz amplitude magnetske indukcije u [T] u prozoru jezgre transformatora bojama, MagNet model	30
6.1	Cilindrični koordinatni sustav	35
6.2	Ekstrapolacija energije rasipnog magnetskog polja iz 2D rješenja na 3D prostor.	36
6.3	Usporedba magnetske energije rasipnog polja oko lijevog stupa, u ovisnosti o kutu α prikazanom na slici 6.2, dobivene pomoću 3D modela u MagNetu i kvazi 3D modela u Matlabu, uz korištenje Matlab funkcije <i>spline</i> za ekstrapolaciju 2D rješenja	37
6.4	Usporedba magnetske energije rasipnog polja oko lijevog stupa, u ovisnosti o kutu α prikazanom na slici 6.2, dobivene pomoću 3D modela u MagNetu i kvazi 3D modela u Matlabu, uz korištenje Matlab funkcija <i>pchip</i> i <i>ppval</i> za ekstrapolaciju 2D rješenja	38
6.5	3D model u MagNetu s prikazom gustoće mreže konačnih elemenata, korišten za usporedbu magnetske indukcije s Matlabom	38
6.6	Shema jednofaznog transformatora modificirana za mjerenje napona kratkog spoja . . .	41
6.7	3D model jednofaznog transformatora u programskom paketu Mentor Graphics MagNet . . .	42
6.8	Odstupanje površinske energije rasipnog polja u ovisnosti o broju točkastih vodiča i razmaku između točaka u prostoru u kojima se računa magnetska indukcija	44
6.9	Vrijeme izvođenja izračuna u ovisnosti o broju točkastih vodiča i razmaku između točaka u prostoru u kojima se računa magnetska indukcija	45
6.10	Odstupanje površinske energije rasipnog polja u ovisnosti o broju točkastih vodiča i broju članova Fourierova reda u rješenju magnetske indukcije	46
6.11	Vrijeme izvođenja izračuna u ovisnosti o broju točkastih vodiča i broju članova Fourierova reda u rješenju magnetske indukcije	46
7.1	Prikaz namota jednofaznog vučnog transformatora u prozoru jezgre	47
7.2	Prikaz namota trofaznog ispravljačkog transformatora u prozoru jezgre	48
7.3	Prikaz 2D modela jednofaznog vučnog transformatora u Matlabu i MagNetu, za uzdužni presjek u prozoru jezgre	50
7.4	Prikaz 2D modela jednofaznog vučnog transformatora u Matlabu, za uzdužni presjek izvan prozora jezgre	51
7.5	Prikaz 2D modela jednofaznog vučnog transformatora u MagNetu, za uzdužni presjek izvan prozora jezgre	51
7.6	Prikaz 3D modela jednofaznog vučnog transformatora u MagNetu	53
7.7	Modeli transformatora $T1$ i $T2$, korišteni za izračun raspodjele struja između dvaju paralelnih svitaka	54
7.8	Funkcija razlike ulančenih tokova u ovisnosti o struji I_a za transformator $T1$ i slučaj paralelno spojenog VN namota	55
7.9	Funkcija razlike ulančenih tokova u ovisnosti o struji I_a za transformator $T1$ i slučaj paralelno spojenog NN namota	56
7.10	Funkcija razlike ulančenih tokova u ovisnosti o struji I_a za transformator $T2$ i slučaj paralelno spojenog VN namota	56

7.11	Funkcija razlike ulančenih tokova u ovisnosti o struji I_a za transformator $T2$ i slučaj paralelno spojenog NN namota	57
7.12	Preslikavanje točkastih vodiča namota postavljenih nesimetrično u prozoru transformatora, za položaj centra konformnog preslikavanja između namota	59
7.13	Preslikavanje točkastih vodiča namota postavljenih nesimetrično u prozoru transformatora, za položaj centra konformnog preslikavanja pomaknut desno od namota	59
7.14	Raspodjela magnetskih silnica dobivena izračunom u MagNetu, za model prikazan na slikama 7.12 i 7.13.	60
7.15	Beskonačno dug električni vodič zatvoren unutar beskonačno permeabilnih pravokutnih granica [60]	62
7.16	Beskonačno dugi namoti zatvoreni unutar beskonačno permeabilnih pravokutnih granica	63
7.17	Ovisnost jediničnog ulančenog toka o broju harmonika u rješenju vektorskog magnetskog potencijala	63
7.18	Shema mjerenja raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke VN namota modificiranih transformatora	64
7.19	Shema mjerenja raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke NN namota modificiranih transformatora	65
7.20	Mjerenje raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke modificiranog jednofaznog transformatora	65
7.21	Shema mjerenja raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke VN namota vučnog transformatora	68
7.22	Mjerenje raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke VN namota jednofaznog vučnog transformatora	69
7.23	Strujna kliješta <i>Fluke 381</i>	70
7.24	Digitalni multimetar <i>Fluke 289</i>	70
7.25	Strujna sonda <i>LEM IT 700-S/SP2 Ultrastab</i>	71
7.26	Strujna sonda <i>Danfysik Ultrastab 867</i>	71
1	Geometrija prozora [4]	83
2	Aksijalna raspodjela gustoće struje u namotu [4]	84
3	Geometrija za izračun rasipne reaktancije dvaju namota [4]	92

nobookmark

POPIS TABLICA

5.1	Srednja kvadratna pogreška rješenja magnetske indukcije dobivenih u MagNetu i Matlabu, za model prikazan na slici 5.3	28
6.1	Usporedba u_σ dobivenih mjerenjem ($u_{\sigma m}$), izračunom u specijalnom programu proizvođača transformatora ($u_{\sigma a}$) te predloženom metodom za trofazne transformatore ($u_{\sigma s}$ i $u_{\sigma p}$)	40
6.2	Usporedba u_σ dobivenih mjerenjem ($u_{\sigma m}$) te predloženom metodom za trofazne transformatore korištenjem kvazi 3D modela ($u_{\sigma s}$ i $u_{\sigma p}$) i 2D modela ($u_{\sigma 2D}$)	40
6.3	Usporedba u_σ dobivenih mjerenjem ($u_{\sigma m}$), MKE metodom ($u_{\sigma k}$) te predloženom metodom ($u_{\sigma s}$ i $u_{\sigma p}$) za jednofazni transformator s namotima na različitim stupovima . . .	42
6.4	Odstupanje površinske energije rasipnog polja u [%] u ovisnosti o broju točkastih vodiča (N_z) i razmaku između točaka u prostoru u kojima se računa magnetska indukcija (d)	44
6.5	Odstupanje površinske površinske energije rasipnog polja u [%] u ovisnosti o broju točkastih vodiča (N_z) i broju članova Fourierova reda u rješenju magnetske indukcije (n)	45
7.1	Geometrijski podaci transformatora $T1$ i $T2$	54
7.2	Usporedba rješenja 3D modela u MagNetu i računatih vrijednosti struja paralelno spojenih svitaka VN i NN namota za transformator $T1$	66
7.3	Usporedba mjerenih i računatih vrijednosti struja paralelno spojenih svitaka VN i NN namota za transformator $T2$	67
7.4	Mjerenje raspodjele struja kroz paralelno spojene svitke VN namota transformatora $T3$	68
7.5	Usporedba mjerenih i računatih vrijednosti struja paralelno spojenih svitaka VN namota za transformator $T3$	69

PRILOG - RABINSOVA METODA ZA IZRAČUN NAPONA KRATKOGA SPOJA

Rabinsova metoda jedna je od analitičkih metoda koju, zbog pouzdanosti i točnosti, koriste proizvođači za izračun napona kratkog spoja svojih transformatora te sila u kratkom spoju. To je ujedno i jedna od metoda koju koristi proizvođač *Končar - Distributivni i specijalni transformatori d.d.* te je i u ovom radu korištena za usporedbu izračuna napona kratkog spoja s predloženom metodom. Opis, detalji i rješenja Rabinsove metode preuzeti su iz knjige *Transformer Design principles* ([4]) te prevedeni na hrvatski jezik.

Uvod

Za izračun magnetskog polja unutar složene geometrije transformatora dostupni su moderni računalni programi opće namjene. Ove numeričke metode obično koriste metodu konačnih elemenata ili metodu graničnih elemenata. Mogu se uzeti u obzir geometrijski detalji poput stranice kotla i steznog sustava. Iako su dostupni 3D programi, 2D programi, koji koriste osnosimetričnu geometriju, prikladni su za mnoge svrhe. Iako unos geometrije, amperzavoja u sekcijama namota te rubnih uvjeta mogu biti mukotrpni, moguće je koristiti parametarske postupke za pojednostavljivanje ovog zadatka. Uz magnetsko polje, ovim metodama mogu se izračunati i povezane veličine, poput induktiviteta i sila. Uz to, mogu se dobiti vrtložne struje u strukturnim dijelovima i gubici uzrokovani tim strujama.

Unatoč ovom modernom napretku u računalnim metodama, starije metode često se mogu efikasno koristiti za dobivanje veličina koje nas zanimaju, vrlo brzo i uz minimalan utrošak vremena za unos podataka. Jedna je od njih Rabinsova metoda, koja koristi idealiziranu geometriju transformatora. Ova pojednostavljena geometrija omogućuje izvod analitičkih formula za magnetsko polje i druge korisne veličine. Geometrija se sastoji od jednog stupa jezgre, jednofaznog ili trofaznog transformatora, s donjim i gornjim jarmom koji se protežu u beskonačnost. S jedne strane stupa nalaze se namoti koji su osnosimetrični. Cijela osnosimetrična geometrija pretpostavlja radijalno širenje u beskonačnost. Prema tome, u geometriji nema stranica kotla ili steznog sustava. Uz to, pretpostavlja se da su stup i jarmovi, odnosno jezgra, beskonačno permeabilni.

Unatoč ovim pojednostavljenjima, Rabinsova metoda prilično je točna za izračun magnetskog polja u blizini namota. Prema tome, prilično točno se računaju sile i induktiviteti, koji najviše ovise o magnetskom polju u blizini namota. To se može pokazati izravnom usporedbom s rješenjem dobivenim MKE metodom, primijenjenom na složeniju geometriju, uključujući stranice kotla i stezni sustav. Korištenjem MKE metode mogu se izračunati dodatni gubici u konstrukcijskim dijelovima, dok Rabinsova metoda nije prikladna za to. S obzirom na to da se magnetsko polje u blizini ili unutar namota može izračunati prilično točno, gubici vrtložnih struja u namotima, kao i njihova prostorna raspodjela, mogu se točno dobiti iz jednadžbi koje slijede iz rasipnog polja.

Teorija

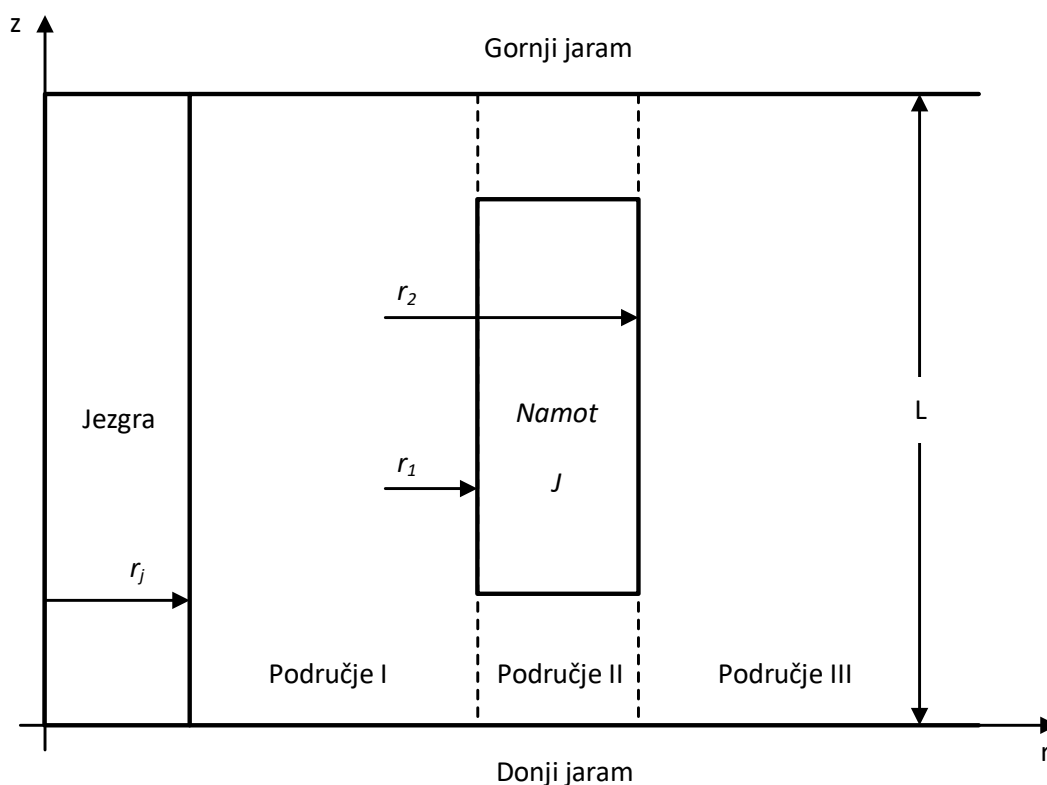
Na slici 1 prikazan je cilindrični namot ili sekcija namota, koji okružuje stup jezgre te se iznad i ispod nalaze jarmovi jezgre. Jarmovi su granice geometrije koja se proteže radijalno u beskonačnost. Metoda pretpostavlja DC uvjete, tako da efekti vrtložne struje nisu modelirani direktno. Pretpostavlja se da je gustoća struje u namotu po dijelovima konstantna u aksijalnom smjeru i uniformna u radijalnom smjeru, kao što je prikazano na slici 2. Također, postoji mogućnost da unutar namota postoje dijelovi na kojima je gustoća struje jednaka nuli, što se i vidi na slici 2. S obzirom na to da u geometriji modela nema modeliranja nelinearnih efekata, magnetska polja više različitih namota mogu se vektorski zbrajati tako da se može računati jedan po jedan namot, pa se rješenja naknadno zbroje.

Maxwellove jednadžbe za magnetsko polje unutar prozora transformatora, pod pretpostavkom statičkih uvjeta, glase

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2)$$

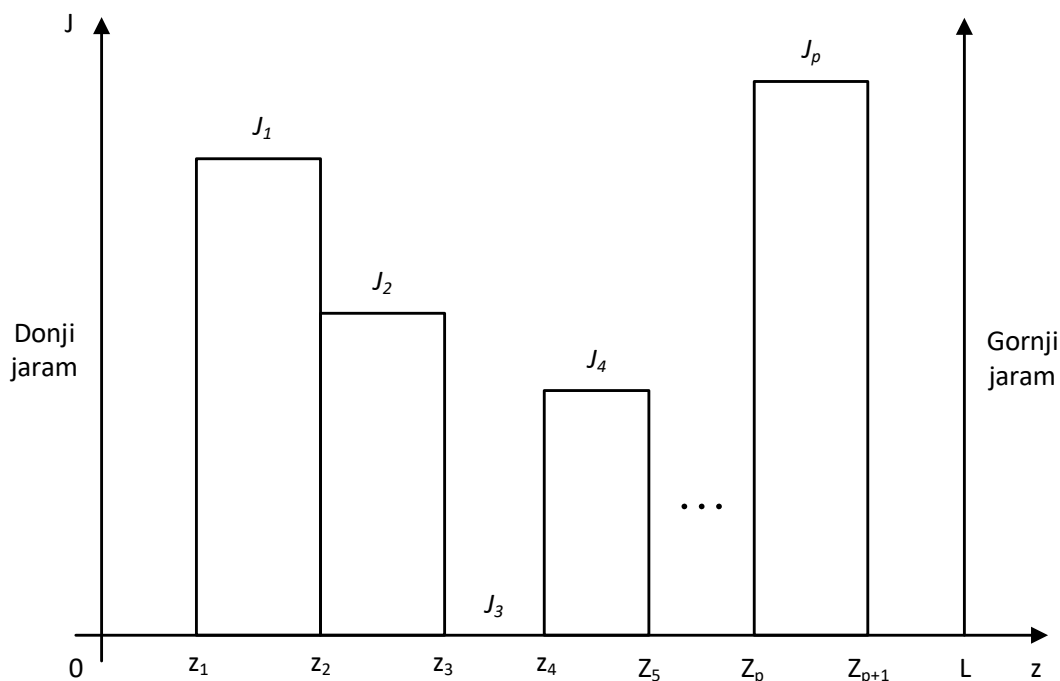
gdje je \mathbf{H} jakost magnetskog polja, \mathbf{B} je magnetska indukcija, a \mathbf{J} je gustoća struje.



Slika 1: Geometrija prozora [4]

Definiramo vektorski magnetski potencijal

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3)$$



Slika 2: Aksijalna raspodjela gustoće struje u namotu [4]

i time je jednačba (2) automatski zadovoljena zbog matematičkog identiteta $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, koji vrijedi za bilo koju vektorsku funkciju. Također, vrijedi relacija

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (4)$$

gdje je μ_0 permeabilnost vakuuma, a praktički i permeabilnost ulja ili zraka. Uvrštavanjem (3) i (4) u (1) dobije se

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (5)$$

Jednačbom (3) vektorski magnetski potencijal nije u potpunosti definiran, pa se uvodi relacija

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (6)$$

Time (5) postaje

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (7)$$

Vektor gustoće struje u smjeru je obodnog kuta, tako da se može pisati

$$\mathbf{J} = J_\varphi \mathbf{a}_\varphi \quad (8)$$

gdje je \mathbf{a}_φ jedinični vektor u smjeru obodnog kuta. Zbog osnosimetrične geometrije, svi su iznosi polja neovisni o obodnom kutu φ . Uz ove pretpostavke, (7) postaje

$$\frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} - \frac{A_\varphi}{r^2} + \frac{\partial^2 A_\varphi}{\partial z^2} = -\mu_0 J_\varphi \quad (9)$$

Radi jednostavnosti, u daljnjim jednadžbama izostavljamo indeks φ budući da A i J imaju samo φ komponentu.

Gustoću struje možemo raspisati kao Fourierov red s duljinom osnovnog prostornog harmonika jednakom visini prozora L . U praksi, L može biti neki višekratnik udaljenosti između jarmova tako da se uzme u obzir da se jaram ne proteže uniformno u smjeru obodnog kuta.

$$J = J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \quad (10)$$

gdje su Fourierovi koeficijenti

$$J_0 = \frac{1}{L} \int_0^L J dz, \quad J_n = \frac{2}{L} \int_0^L J \cos\left(\frac{n\pi z}{L}\right) dz. \quad (11)$$

Gustoća struje po dijelovima je konstantna, kao što je prikazano na slici 2, pa imamo

$$J = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq z_1 \\ J_1, & z_1 \leq z \leq z_2 \\ \vdots & \\ J_i, & z_i \leq z \leq z_{i+1} \\ \vdots & \\ J_p, & z_p \leq z \leq z_{p+1} \\ 0, & z_{p+1} \leq z \leq L \end{cases} \quad (12)$$

Korištenjem izraza iz jednadžbe (12), integrali iz (11) mogu se aproksimirati kao

$$J_0 = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^p J_i (z_{i+1} - z_i) \quad (13)$$

$$J_n = \frac{2}{n\pi} \sum_{i=1}^p J_i \left[\sin\left(\frac{n\pi z_{i+1}}{L}\right) - \sin\left(\frac{n\pi z_i}{L}\right) \right].$$

Tako se za jednu sekciju, s konstantnom gustoćom struje J , može pisati

$$J_0 = J \frac{(z_2 - z_1)}{L} \quad (14)$$

$$J_n = \frac{2J}{n\pi} \left[\sin\left(\frac{n\pi z_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{n\pi z_1}{L}\right) \right].$$

Kao što je prikazano na slici 1, prostor rješenja može se podijeliti u tri područja:

Područje I	$r_c \leq r \leq r_1,$	$0 \leq z \leq L$
Područje II	$r_1 \leq r \leq r_2,$	$0 \leq z \leq L$
Područje III	$r_2 \leq r \leq \infty,$	$0 \leq z \leq L$

U područjima I i III gustoća struje jednaka je nuli, pa jednadžba (9) postaje

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = 0. \quad (15)$$

Ovo je homogena parcijalna diferencijalna jednadžba. Traži se rješenje oblika

$$A(r, z) = R(r) \cdot Z(z). \quad (16)$$

Uvrštavanjem (16) u (15) i dijeljenjem s RZ , dobiva se

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = 0. \quad (17)$$

Ova jednadžba sadrži izraze koji su samo funkcija od r i izraze koji su samo funkcija od z čiji je zbroj konstantan i jednak nuli. Prema tome, svaki izraz mora biti jednak istoj konstanti s različitim predznakom. Neka je ta konstanta pozitivan broj m^2 . Iz toga slijedi

$$\frac{1}{R} \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{1}{rR} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{r^2} = m^2, \quad \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -m^2. \quad (18)$$

Sređivanjem izraza dalje se dobije

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} - (m^2 r^2 + 1) R = 0, \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + m^2 Z = 0. \quad (19)$$

Moramo odvojeno promatrati slučajeve za $m = 0$ i $m > 0$.

Za slučaj $m = 0$, rješenje za z jednadžbu koje zadovoljava rubne uvjete na gornjem i donjem jarmu je konstanta i r jednadžba u (19) postaje

$$r^2 \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + r \frac{\partial R}{\partial r} - R = 0. \quad (20)$$

Rješenje ove jednadžbe je

$$R_0 = Sr + \frac{T}{r} \quad (21)$$

gdje su S i T konstante koje se određuju pomoću rubnih uvjeta.

Za slučaj $m > 0$, rješenje z jednadžbe u (19) može se pisati kao

$$Z = Z_m \cos(mz + \varphi_m) \quad (22)$$

gdje su Z_m i φ_m konstante koje se određuju pomoću rubnih uvjeta. Uz pretpostavku da materijal jarma ima beskonačnu permeabilnost, magnetska indukcija \mathbf{B} je okomita na površinu. Koristeći izraz (3) u cilindričnim koordinatama dobije se

$$\mathbf{B} = -\frac{\partial A}{\partial z} \mathbf{a}_r + \left(\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} \right) \mathbf{k} \quad (23)$$

gdje su \mathbf{a}_r i \mathbf{k} jedinični vektori u r i z smjeru. Kako bi bio zadovoljen uvjet da je magnetska indukcija \mathbf{B} okomita na gornji i donji jaram, mora biti zadovoljeno

$$\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Z}{\partial z} = 0 \quad \text{pri } z = 0, L. \quad (24)$$

Koristeći ovo, jednadžba (22) postaje

$$Z = Z_n \cos(mz), \quad m = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

gdje se radije koristi indeks n umjesto indeksa m kod oznake konstante Z_n . Konstanta m također ovisi o n , ali je indeks ispušten radi jednostavnosti.

Za slučaj $m > 0$, rješenje r jednadžbe u (19) može se, uz supstituciju $x = mr$, pisati kao

$$x^2 \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + x \frac{\partial R}{\partial x} - R(x^2 + 1) = 0. \quad (26)$$

Rješenje ove jednadžbe je

$$R_n = C_n I_1(x) + D_n K_1(x) \quad (27)$$

gdje su I_1 i K_1 modificirane Besselove funkcije prve i druge vrste prvog reda. Također su indeksirane konstante C i D s indeksom n budući da rješenje ovisi o n preko m koje je sadržano u x .

Općenito, rješenje jednadžbe (15) može se izraziti kao zbroj ovih dvaju pojedinačnih rješenja

$$A = Sr + \frac{T}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n I_1(mr) + D_n K_1(mr)] \cos(mz), \quad m = \frac{n\pi}{L} \quad (28)$$

gdje su konstante rješenja z člana (Z_0 i Z_n) sadržane u prikazanim konstantama. Ovo rješenje zadovoljava rubne uvjete kod $z = 0, L$. Zbog pretpostavke da je permeabilnost jezgre beskonačna, magnetska indukcija \mathbf{B} mora biti okomita na površinu jezgre. Prema tome, slijedi da k komponenta u (23), na površini jezgre (područje I), mora biti jednaka nuli, odnosno

$$\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} = 0 \quad \text{za } r = r_j. \quad (29)$$

Uvrštavanjem (28) u (29) dobije se

$$2S + \sum_{n=1}^{\infty} \left[m C_n \frac{\partial I_1}{\partial x} + m D_n \frac{\partial K_1}{\partial x} + m \frac{(C_n I_1 + D_n K_1)}{x} \right] \cos(mz) = 0 \quad \text{za } x = mr_j. \quad (30)$$

Iako se čini da bi trebalo biti $S = 0$ da jednadžba (30) bude ispravna, može se zadovoljiti rubni uvjet za $S \neq 0$ za svaki namot kada se uzmu u obzir svi namoti s amperzavojima čiji je zbroj jednak nuli. Za preostale izraze u (30) ovisne o z , može se postaviti uvjet

$$m C_n \left(\frac{\partial I_1}{\partial x} + \frac{I_1}{x} \right) + m D_n \left(\frac{\partial K_1}{\partial x} + \frac{K_1}{x} \right) = m C_n I_0 - m D_n K_0 = 0 \quad (31)$$

gdje su korišteni identiteti modificiranih Besselovih funkcija, odnosno $\frac{d}{dx} x I_1(x) = x I_0(x)$ i $\frac{d}{dx} x K_1(x) = -x K_0(x)$. I_0 i K_0 su modificirane Besselove funkcije nultog reda. Iz (31) dalje slijedi

$$D_n = C_n \frac{I_0(mr_j)}{K_0(mr_j)}. \quad (32)$$

Označavanjem nepoznatih konstanti brojem područja, (28) postaje

$$A^I = S^I r + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^I \left[I_1(mr) + \frac{I_0(mr_j)}{K_0(mr_j)} K_1(mr) \right] \cos(mz), \quad m = \frac{n\pi}{L}. \quad (33)$$

Izostavljen je izraz $\frac{T}{r}$ jer nije potreban da bi se zadovoljio rubni uvjet u ovom području te se približava beskonačnosti kako se radijus jezgre približava nuli, tako da se može postaviti konstanta $T^I = 0$.

U području III zahtijeva se da A bude konačan kako $r \rightarrow \infty$. Budući da $I_1 \rightarrow \infty$ kako $r \rightarrow \infty$ te $Sr \rightarrow \infty$, jednadžba (28) za područje III, uz $S^{III} = 0$ i $C_n^{III} = 0$, postaje

$$A^{III} = \frac{T^{III}}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^{III} K_1(mr) \cos(mz). \quad (34)$$

U području II potrebno je zadržati izraz za gustoću struje iz (9). Uvrštavanjem (10) u (9) te izbacivanjem indeksa φ , za područje II dobije se

$$\frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{A}{r^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = -\mu_0 \left[J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \cos(mz) \right]. \quad (35)$$

Rješenje ove jednadžbe traži se pomoću razvoja u red, odnosno

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r) \cos(mz), \quad m = \frac{n\pi}{L}. \quad (36)$$

Uvrštavanjem (36) u (35) dobije se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_n}{\partial r} - \frac{R_n}{r^2} \right) \cos(mz) - m^2 \sum_{n=1}^{\infty} R_n \cos(mz) = -\mu_0 \left[J_0 + \sum_{n=1}^{\infty} J_n \cos(mz) \right]. \quad (37)$$

S obzirom na to da su kosinus funkcije ortogonalne, mogu se izjednačiti odgovarajući koeficijenti na objema stranama jednadžbe te se dobije

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_0}{\partial r} - \frac{R_0}{r^2} &= -\mu_0 J_0 \\ \frac{\partial^2 R_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial R_n}{\partial r} - \frac{R_n}{r^2} - m^2 R_n &= -\mu_0 J_n. \end{aligned} \quad (38)$$

Za slučaj $n = 0$, rješenje se može pisati u obliku zbroja rješenja homogene jednadžbe i partikularnog rješenja, odnosno

$$R_0 = Sr + \frac{T}{r} - \frac{\mu_0 J_0 r^2}{3}. \quad (39)$$

Za slučaj $n > 0$, rješenje jednadžbe (38) sastoji se od homogenog rješenja i partikularnog rješenja, odnosno

$$R_n = C_n I_1(mr) + D_n K_1(mr) - \frac{\pi \mu_0 J_n}{2m^2} L_1(mr) \quad (40)$$

gdje je L_1 modificirana Struveova funkcija prvog reda. Prema tome, rješenje (36) u području II je eksplicitno dano kao

$$A^{\text{II}} = S^{\text{II}} r + \frac{T^{\text{II}}}{r} - \frac{\mu_0 J_0 r^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n^{\text{II}} I_1(mr) + D_n^{\text{II}} K_1(mr) - \frac{\pi \mu_0 J_n}{2m^2} L_1(mr) \right] \cos(mz). \quad (41)$$

Ova jednadžba već zadovoljava rubne uvjete pri $z = 0, L$. Nepoznate konstante određuju se iz rubnih uvjeta za $r = r_1, r_2$. Može se postaviti uvjet da vektorski magnetski potencijal A mora biti kontinuiran na prijelazima između područja, odnosno mora biti derivabilan, inače bi magnetska indukcija B , dana jednadžbom (23), sadržavala beskonačnosti. Prema tome, za $r = r_1$, izjednačavanjem (33) i (41), dobije se

$$\begin{aligned} S^{\text{I}} r_1 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^{\text{I}} \left[I_1(mr_1) + \frac{I_0(mr_j)}{K_0(mr_j)} K_1(mr_1) \right] \cos(mz) &= S^{\text{II}} r_1 + \frac{T^{\text{II}}}{r_1} - \frac{\mu_0 J_0 r_1^2}{3} \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[C_n^{\text{II}} I_1(mr_1) + D_n^{\text{II}} K_1(mr_1) - \frac{\pi \mu_0 J_n}{2m^2} L_1(mr_1) \right] \cos(mz). \end{aligned} \quad (42)$$

S obzirom na to da ovo mora vrijediti za svaki z , dobije se

$$\begin{aligned} S^{\text{I}} r_1 &= S^{\text{II}} r_1 + \frac{T^{\text{II}}}{r_1} - \frac{\mu_0 J_0 r_1^2}{3} \\ C_n^{\text{I}} \left[I_1(x_1) + \frac{I_0(x_j)}{K_0(x_j)} K_1(x_1) \right] &= C_n^{\text{II}} I_1(x_1) + D_n^{\text{II}} K_1(x_1) - \frac{\pi \mu_0 J_n}{2m^2} L_1(x_1) \end{aligned} \quad (43)$$

gdje je $x_1 = mr_1$ i $x_j = mr_j$.

Za $r = r_2$, korištenjem (34) i (41), dobije se

$$\begin{aligned} \frac{T^{\text{III}}}{r_2} &= S^{\text{II}} r_2 + \frac{T^{\text{II}}}{r_2} - \frac{\mu_0 J_0 r_2^2}{3} \\ D_n^{\text{III}} K_1(x_2) &= C_n^{\text{II}} I_1(x_2) + D_n^{\text{II}} K_1(x_2) - \frac{\pi \mu_0 J_n}{2m^2} L_1(x_2) \end{aligned} \quad (44)$$

gdje je $x_2 = mr_2$.

Uz kontinuitet vektorskog magnetskog potencijala A na granicama područja također se zahtijeva, prema Maxwellovim jednadžbama, da normalna komponenta magnetske indukcije \mathbf{B} i tangencijalna komponenta jakosti magnetskog polja \mathbf{H} budu kontinuirane na tim granicama. Prema jednadžbi (23) sve normalne komponente magnetske indukcije \mathbf{B} već su kontinuirane na granicama područja budući da rješenja u svim područjima imaju istu ovisnost o z i jer su vektorski magnetski potencijali kontinuirani. S obzirom na to da je ovdje \mathbf{B} proporcionalno s \mathbf{H} u svim područjima, zahtijeva se da tangencijalne komponente \mathbf{B} budu kontinuirane. Prema tome, zahtijeva se iz (23) da izraz

$$\frac{\partial A}{\partial r} + \frac{A}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA) = \frac{m}{x} \frac{\partial}{\partial x} (xA), \quad x = mr \quad (45)$$

bude kontinuiran za $r = r_1, r_2$. Nakon izjednačavanja, dobiju se sljedeće relacije za nepoznate konstante:

$$\begin{aligned} S^{\text{I}} &= \frac{\mu_0 J_0 (r_2 - r_1)}{2}, & S^{\text{II}} &= \frac{\mu_0 J_0 r_2}{2} \\ T^{\text{II}} &= -\frac{\mu_0 J_0 r_1^3}{6}, & T^{\text{III}} &= \frac{\mu_0 J_0 (r_2^3 - r_1^3)}{6} \end{aligned} \quad (46)$$

Konstante C_n i D_n iznose:

$$\begin{aligned} C_n^{\text{II}} &= \frac{\pi \mu_0 J_n}{2m^2} \left[\frac{K_0(x_2) L_1(x_2) + K_1(x_2) L_0(x_2)}{K_0(x_2) I_1(x_2) + K_1(x_2) I_0(x_2)} \right] \\ C_n^{\text{I}} &= C_n^{\text{II}} - \frac{\pi \mu_0 J_n}{2m^2} \left[\frac{K_0(x_1) L_1(x_1) + K_1(x_1) L_0(x_1)}{K_0(x_1) I_1(x_1) + K_1(x_1) I_0(x_1)} \right] \\ D_n^{\text{II}} &= \frac{I_0(x_j)}{K_0(x_j)} C_n^{\text{I}} + \frac{\pi \mu_0 J_n}{2m^2} \left[\frac{I_0(x_1) L_1(x_1) - I_1(x_1) L_0(x_1)}{K_0(x_1) I_1(x_1) + K_1(x_1) I_0(x_1)} \right] \\ D_n^{\text{III}} &= D_n^{\text{II}} - \frac{\pi \mu_0 J_n}{2m^2} \left[\frac{I_0(x_2) L_1(x_2) - I_1(x_2) L_0(x_2)}{K_0(x_2) I_1(x_2) + K_1(x_2) I_0(x_2)} \right] \end{aligned} \quad (47)$$

Koristeći identitete,

$$\begin{aligned} I_0(x) K_1(x) + I_1(x) K_0(x) &= \frac{1}{x} \\ x [L_0(x) K_1(x) + L_1(x) K_0(x)] &= \frac{2}{\pi} \int_0^x t K_1(t) dt \\ x [L_0(x) I_1(x) - L_1(x) I_0(x)] &= \frac{2}{\pi} \int_0^x t I_1(t) dt \end{aligned} \quad (48)$$

moгу se izrazi iz (47) transformirati u jednostavniji oblik

$$\begin{aligned}
 C_n^{\text{II}} &= \frac{\mu_0 J_n}{m^2} \int_0^{x_2} t K_1(t) dt \\
 C_n^{\text{I}} &= \frac{\mu_0 J_n}{m^2} \int_{x_1}^{x_2} t K_1(t) dt \\
 D_n^{\text{II}} &= \frac{\mu_0 J_n}{m^2} \left[\frac{I_0(x_j)}{K_0(x_j)} \int_{x_1}^{x_2} t K_1(t) dt - \int_0^{x_1} t I_1(t) dt \right] \\
 D_n^{\text{III}} &= \frac{\mu_0 J_n}{m^2} \left[\frac{I_0(x_j)}{K_0(x_j)} \int_{x_1}^{x_2} t K_1(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} t I_1(t) dt \right]
 \end{aligned} \tag{49}$$

Prema tome, rješenja u tri područja dana su jednadžbama

$$\begin{aligned}
 A^{\text{I}} &= \frac{\mu_0 J_0 (r_2 - r_1)}{2} r + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n}{m^2} [C_n I_1(x) + D_n K_1(x)] \cos(mz) \\
 A^{\text{II}} &= \mu_0 J_0 \left(\frac{r_2 r}{2} - \frac{r_1^3}{6r} - \frac{r^2}{3} \right) + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n}{m^2} \left[E_n I_1(x) + F_n K_1(x) - \frac{\pi}{2} L_1(x) \right] \cos(mz) \\
 A^{\text{III}} &= \frac{\mu_0 J_0 (r_2^3 - r_1^3)}{6r} + \mu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_n}{m^2} G_n K_1(x) \cos(mz)
 \end{aligned} \tag{50}$$

gdje je $m = \frac{n\pi}{L}$, $x = mr$ i

$$\begin{aligned}
 C_n &= \int_{x_1}^{x_2} t K_1(t) dt, \quad D_n = \frac{I_0(x_j)}{K_0(x_j)} C_n \\
 E_n &= \int_0^{x_2} t K_1(t) dt, \quad F_n = \frac{I_0(x_j)}{K_0(x_j)} \int_{x_1}^{x_2} t K_1(t) dt - \int_0^{x_1} t I_1(t) dt \\
 G_n &= \frac{I_0(x_j)}{K_0(x_j)} \int_{x_1}^{x_2} t K_1(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} t I_1(t) dt
 \end{aligned} \tag{51}$$

gdje je $x_1 = mr_1$ i $x_2 = mr_2$.

Vektorski magnetski potencijal drugih namota ili sekcija namota određuje se na istovjetan način. S obzirom na to da su Maxwellove jednadžbe linearne za magnetska polja i potencijale u području izvan jezgre i jarmova, mogu se magnetska polja ili potencijali jednostavno vektorski zbrajati u svakoj točki da bi se dobila ukupna vrijednost magnetskog polja ili potencijal. Treba samo paziti da točka razmatranja nije u istom području (I, II ili III) gledano iz pozicije pojedinog namota (npr. namot bliže jezgri nalazi se u području I gledano iz pozicije namota koji je udaljeniji od jezgre).

Rabinsova formula za rasipnu reaktanciju

Rasipna reaktancija za dvonamotni transformator može se dobiti iz ukupne magnetske energije, kad je suma amperzavoja jednaka nuli. Magnetska energija rasipnog polja može se izračunati korištenjem relacije

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_n} \mathbf{A} \mathbf{J} dV \tag{52}$$

gdje je V_n volumen svih namota, vektor A je ukupni vektorski magnetski potencijal, a vektor J je gustoća struje. S obzirom na to da vektori A i J imaju isti smjer, njihov skalarni umnožak postaje obični umnožak. Osim (52), za dobivanje rasipne reaktancije, potrebno je koristiti i relaciju

$$L_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)L_2 - 2\frac{N_1}{N_2}M_{12} = L_{\sigma 1} = \frac{2W}{I_1^2} \quad (53)$$

gdje je L_1 glavni induktivitet namota 1, L_2 je glavni induktivitet namota 2, M_{12} je međuinduktivitet namota 1 i 2, N_1 je broj zavoja namota 1, N_2 je broj zavoja namota 2, $L_{\sigma 1}$ je rasipni induktivitet promatran iz pozicije namota 1 (u ovom slučaju referentni namot), I_1 je struja namota 1, a W je ukupna magnetska energija rasipnog polja dobivena iz (52).

Izračun rasipne reaktancije između dvaju radijalno razmaknutih namota

Na slici 3 prikazana je geometrija prozora jezgre transformatora s dvama namotima koji se nalaze na različitim radijalnim pozicijama, za koje je potrebno izračunati rasipnu reaktanciju. Ako su A_1 i A_2 vektorski magnetski potencijali uzrokovani namotima 1 i 2, uz J_1 i J_2 gustoće struja namota 1 i 2, jednadžba (52) postaje

$$\begin{aligned} 2W &= \int_{V_1} (A_1 + A_2) J_1 dV_1 + \int_{V_2} (A_1 + A_2) J_2 dV_2 \\ &= \int_{V_1} A_1 J_1 dV_1 + \int_{V_1} A_2 J_1 dV_1 + \int_{V_2} A_1 J_2 dV_2 + \int_{V_2} A_2 J_2 dV_2 \end{aligned} \quad (54)$$

gdje je V_1 volumen namota 1, a V_2 je volumen namota 2. Za integrale s članovima $A_1 J_1$ i $A_2 J_2$ potrebno je koristiti rješenje područja II koje odgovara pojedinom namotu. Za integral s članom $A_2 J_1$ koristi se rješenje područja I za A_2 , a za integral s članom $A_1 J_2$ potrebno je koristiti rješenja područja III za A_1 .

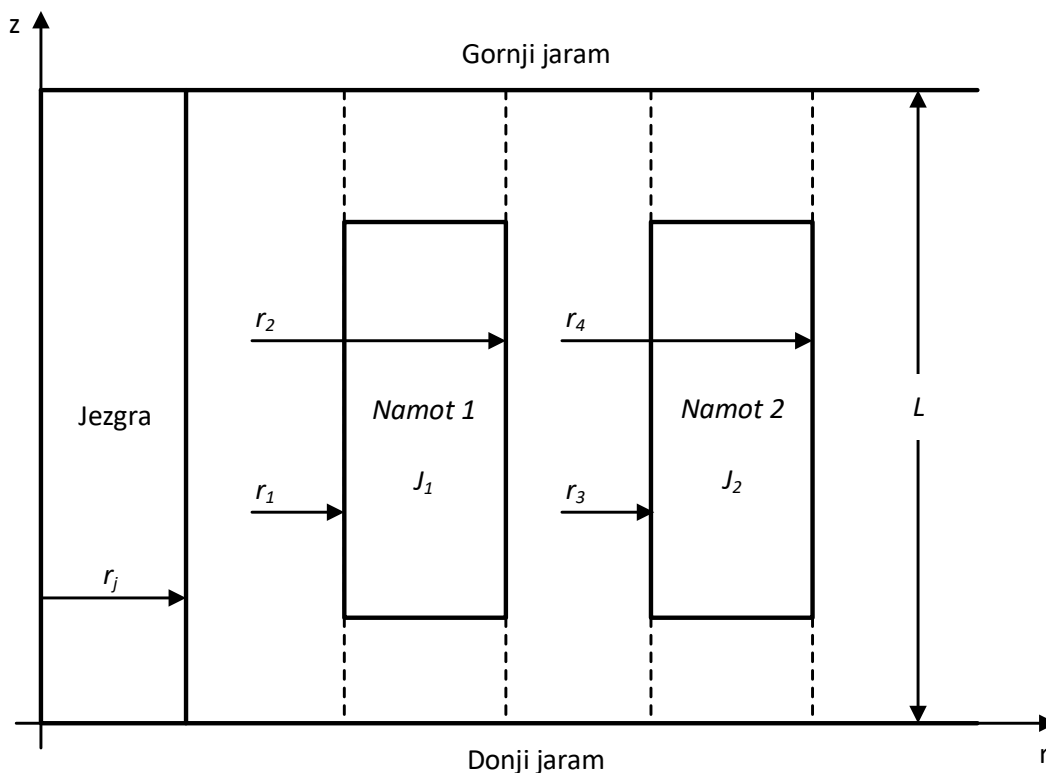
Provođenjem integracije prema rješenjima za A u (50) i korištenjem (53) dobije se izraz za izračun rasipnog induktiviteta

$$\begin{aligned} L_{\sigma} &= \frac{\pi\mu_0 LN^2}{6(NI)^2} \left\{ J_{0,1}^2 (r_2 - r_1)^2 [(r_1 + r_2)^2 + 2r_1^2] \right. \\ &\quad \left. + J_{0,2}^2 (r_4 - r_3)^2 [(r_3 + r_4)^2 + 2r_3^2] + 4J_{0,1}J_{0,2} (r_2 - r_1) (r_4 - r_3) (r_1^2 + r_1r_2 + r_2^2) \right\} \\ &\quad + \frac{\pi\mu_0 LN^2}{(NI)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{J_{n,1}^2}{m^4} \left[E_{n,1} \int_{x_1}^{x_2} x I_1(x) dx + F_{n,1} \int_{x_1}^{x_2} x K_1(x) dx - \frac{\pi}{2} \int_{x_1}^{x_2} x L_1(x) dx \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{J_{n,2}^2}{m^4} \left[E_{n,2} \int_{x_3}^{x_4} x I_1(x) dx + F_{n,2} \int_{x_3}^{x_4} x K_1(x) dx - \frac{\pi}{2} \int_{x_3}^{x_4} x L_1(x) dx \right] \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{J_{n,1}J_{n,2}}{m^4} G_{n,1} \int_{x_3}^{x_4} x K_1(x) dx \right\} \end{aligned} \quad (55)$$

gdje su N i I broj zavoja i struja referentnog namota s čije se strane računa rasipni induktivitet. Da bismo dobili rasipnu reaktanciju, potrebno je pomnožiti L_{σ} s $\omega = 2\pi f$.

Izračun rasipne reaktancije između dvaju aksijalno razmaknutih namota

Kod nekih transformatora dva namota postavljena su aksijalno, odnosno jedan iznad drugoga te imaju iste radijalne pozicije. U takvim slučajevima namoti najčešće imaju istu širinu, odnosno potpuno su jednaki. U takvim situacijama može se koristiti Rabinsova metoda. Gustoća struje za svaki će namot biti različita od nule u različitim aksijalnim područjima, što bi se trebalo moći vidjeti



Slika 3: Geometrija za izračun rasipne reaktancije dvaju namota [4]

u Fourierovu razvoju funkcije gustoće struje. U ovom slučaju potrebno je koristiti samo rješenje u području II za oba namota, te je $r_3 = r_1$ i $r_4 = r_2$.

Izraz za izračun rasipnog induktiviteta, za namote koji su aksijalno razmaknuti te zadovoljavaju uvjet jednake širine, glasi

$$L_{\sigma} = \frac{\pi\mu_0 LN^2}{(NI)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(J_{n,1}^2 + J_{n,2}^2 + 2J_{n,1}J_{n,2})}{m^4} \left[E_{n,1} \int_{x_1}^{x_2} x I_1(x) dx + F_{n,1} \int_{x_1}^{x_2} x K_1(x) dx - \frac{\pi}{2} \int_{x_1}^{x_2} x L_1(x) dx \right] \right\} \quad (56)$$

gdje su N i I broj zavoja i struja referentnog namota s čije strane se računa rasipni induktivitet. Da bismo dobili rasipnu reaktanciju, potrebno je pomnožiti L_{σ} s $\omega = 2\pi f$.

ŽIVOTOPIS

Mario Jurković rođen je 1987. godine u Sinju, Hrvatska. Srednju školu Kralja Zvonimira u Kninu, smjer elektrotehnika, završio je 2006. godine, te je stekao titulu sveučilišnog prvostupnika i magistra inženjera u polju elektrotehnike i informacijske tehnologije na Sveučilištu u Zagrebu Fakultetu elektrotehnike i računarstva (FER), Hrvatska, 2009. i 2011. godine, tim redom.

Po završetku studija zapošljava se tvrtki DOK-ING d.o.o, gdje je do 2012. godine radio na razvoju elektronike za specijalne strojeve za razminiravanje, rudnike te električne automobile. Od 2012. radi u tvrtki Končar Distributivni i Specijalni transformatori d.d. kao projektant specijalnih transformatora i prigušnica.

Objavio je jedan znanstveni rad u časopisu Q1 kategorije (prema Scimago bazi), jedan znanstveni rad u časopisu Q4 kategorije (prema Scimago bazi), tri rada u zbornicima skupova s međunarodnom recenzijom te dva rada u zbornicima domaćih skupova. Njegovi su znanstveni interesi u području projektiranja, modeliranja i analize električnih strojeva.

U 2009. nagrađen je nagradom Josip Lončar Fakulteta elektrotehnike i računarstva, a u 2010. godini nagradom INETEC nuklearnog instituta. Diplomski studij završio je 2011. godine s velikom pohvalom (*magna cum laude*). Član je strukovne udruge HRO-CIGRE.

Aktivno govori i piše engleski jezik. Oženjen je i otac dvoje djece.

POPIS RADOVA

RADOVI U ČASOPISIMA:

- [1] M. Jurković i D. Žarko, "Optimized Design of a Brushless DC Permanent Magnet Motor for Propulsion of an Ultra Light Aircraft," *Automatika*, vol. 53, no. 3, pp. 244–254, 2012.
- [2] M. Jurković i D. Žarko, "Core-type transformer short-circuit voltage calculation using conformal mapping," *IET Electric Power Applications*, vol. 14, iss. 12, pp. 2422–2430, December 2020.

RADOVI U ZBORNICIMA SKUPOVA:

- [1] M. Jurković, I. Sitar, i D. Žarko, "Modern Design of Onboard Traction Transformers," *Proceedings of the 3rd International Colloquium Transformer Research and Asset Management*, pp. 1–10, Split, Croatia, 2014.
- [2] I. Sitar i M. Jurković, "Modern Design of EMU Traction Transformers," *Proceedings of the Automation in transportation 2014*, pp. 234–237, Dubrovnik, Croatia, 2014.
- [3] M. Jurković i V. Ucović, "Transformator za uzemljenje s Petersenovom prigušnicom u zajedničkom kotlu," 6. (12.) *savjetovanje HO CIRED*, pp. 1–10, Opatija, Hrvatska, 2014.
- [4] M. Jurković i S. Grdinić, "Kompenzacijska prigušnica s funkcijom Petersenove prigušnice," 7. (13.) *savjetovanje HO CIRED*, pp. 1–11, Šibenik, Hrvatska, 2021.
- [5] M. Jurković i D. Žarko, "A Novel Method for Three-phase Core-type Distribution Transformers Short-circuit Voltage Calculation," *3rd SEERC Conference, CIGRE*, pp. 1–10, Vienna, Austria, 2021.

CURRICULUM VITAE

Mario Jurković was born in Sinj, Croatia, in 1987. He graduated from high school in Knin, electrotehnic class, in 2006 and earned his bachelor's and master's degrees in electrical engineering and information technology from the University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing (UNIZG-FER), Croatia, in 2009 and 2011, respectively.

After earning his master's degree, he was employed at the DOK-ING where he worked on development of electronics for special demining and underground mining machines and electric vehicles. Since 2012 he has been employed at Končar Distribution and Special Transformers Inc. as design engineer for special transformers and reactors.

He published one paper in journal indexed in Current Contents database, one paper in journal indexed in Science Citation Index Expanded database, three papers in proceedings of international conferences and two papers in proceedings of local conferences. His research interests include design, modelling and analysis of electric machines.

In 2009, he was awarded with the "Josip Lončar Award" from the Faculty of Electrical Engineering and Computing University of Zagreb, and in 2010 he was awarded with the "INETEC Award" from the nuclear institute. He graduated *magna cum laude* in 2011. He is a member of HRO-CIGRE.

He speaks English. He is married and has two children.

KOLOFON

Ovaj dokument napisan je u programskom jeziku \LaTeX uz korištenje *ferphd* predloška koji je razvio Marko Gulin, a koji je inspiriran *ferbook* predloškom koji su razvili Jadranko Matuško i Ivan Marković.