Dijagonalizacija antisimetričnih matrica specijaliziranih korijena simplektičke Liejeve algebre

Vlahović, Nikola

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 1403

DIJAGONALIZACIJA ANTISIMETRIČNIH MATRICA SPECIJALIZIRANIH KORIJENA SIMPLEKTIČKE LIEJEVE ALGEBRE

Nikola Vlahović

Zagreb, lipanj 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

ZAVRŠNI RAD br. 1403

DIJAGONALIZACIJA ANTISIMETRIČNIH MATRICA SPECIJALIZIRANIH KORIJENA SIMPLEKTIČKE LIEJEVE ALGEBRE

Nikola Vlahović

Zagreb, lipanj 2024.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA

Zagreb, 4. ožujka 2024.

ZAVRŠNI ZADATAK br. 1403

Pristupnik:	**Nikola Vlahović (0036541947)**
Studij:	Elektrotehnika i informacijska tehnologija i Računarstvo
Modul:	Računarstvo
Mentor:	izv. prof. dr. sc. Tomislav Šikić

Zadatak: **Dijagonalizacija antisimetričnih matrica specijaliziranih korijena simplektičke Liejeve algebre**

Opis zadatka:

Antisimetrične matrice važna su klasa realnih kvadratnih matrica. Klasa antisimetričnih matrica sadržana je u klasi normalnih matrica te se kao takve mogu dijagonalizirati. Klasične Liejeve algebre važni su primjeri prostih Liejevih algebri. Matrice specijaliziranih korijena (MSK) klasičnih Liejevih algebri su antisimetrične matrice ranga 2 pa se mogu kvazidijagonalizirati. U sklopu ovog završnog rada bit će obrađen slučaj dijagonalizacije MSK simplektičke Liejeve algebre s primijenom na određivanje odgovarajućih Kacovih parametara.

Rok za predaju rada: 14. lipnja 2024.

Sadržaj

1. Uvod

Antisimetrične matrice su posebna vrsta realnih kvadratnih matrica koje se odlikuju time da njihovo transponiranje rezultira originalnoj matrici suprotnog predznaka. Pripadaju klasi normalnih matrica, što znači da se mogu dijagonalizirati, ali samo unutar kompleksnog vektorskog prostora. Posebno, matrice specijaliziranih korijena klasičnih Liejevih algebri oblikuju jednu značajnu podgrupu antisimetričnih matrica. Važna karakteristika ovih matrica je ta da su uvijek ranga 2.

Klasične Liejeve algebre, odnosno konačno dimenzionalne Liejeve algebre tipa A_n, B_n, C_n te D_n, su jedni od najvažnijih primjera Liejevih algebri općenito. Liejeve algebre imaju vrlo važnu ulogu u znanstvenim istraživanjima vezanima uz kvantu mehaniku i fiziku elementarnih čestica. Posebno je važno istaknuti da beskonačno dimenzionalne Liejeve algebre i njihove reprezentacije imaju veliku ulogu i u proučavanju Rogers-Ramanujanovih identiteta. To otkriće datira iz 80-ih godina prošlog stoljeća.

U ovom radu koristeći spektralnu dekompoziciju matrice specijaliziranih korijena simplektičke Liejeve algebre (tj. klasične Liejeve algebre tipa C_n), objasnit ćemo postupak kojim dobivamo urednu strukturu matrice MSK_{C_n}. Preciznije rečeno, nova matrica specijaliziranih korijena i dalje će biti antisimetrična i simetrična s obzirom na antidijagonalu, ali će se sastojati od nenegativnog gornjeg trokuta i nepozitivnog donjeg trokuta.

2. Dijagonalizacija normalnih matrica

Ovo poglavlje posvećeno je normalnim matricama te je u njemu iskazan glavni teorem tzv. spektralni teorem za normalne matrice. Uz to uvedena je i notacija i dan je je jedan ogledni primjer antisimetrične matrice. Važno je istaknuti da ćemo u ovom poglavlju pokazati da je svaka antisimetrična matrica ujedno i normalna. Teorem i korolar iz ovog poglavlja nećemo dokazivati. Detaljnije informacije mogu se pronaći u [1, 2].

Definicija 1 *Neka je A matrica s kompleksnim koeficijentima. Adjungiranu matricu matrice A označavamo s A^* i definiramo formulom*

$$A^* = \overline{A^T} = \overline{A}^T.$$

Ako je A realna matrica, tada vrijedi da je

$$A^* = A^T.$$

Definicija 2 *Kvadratnu matricu A s kompleksnim koeficijentima nazivamo normalnom ako je*

$$AA^* = A^*A.$$

Za realne kvadratne matrice izraz prelazi u

$$AA^T = A^TA.$$

Teorem 1 (Spektralni teorem za normalne matrice) *Neka je matrica A normalna tada* *postoji unitarna matrica U takva da je*

$$A = UDU^*,$$

gdje je D dijagonalna matrica. Tada su elementi dijagonale matrice D svojstvene vrijednosti matrice A. Stupci matrice U su svojstveni vektori matrice A i oni su ortonormirani. Drugim riječima, ako je matrica A normalna, postoji unitarna matrica U takva da je U^*AU dijagonalna matrica.

Primijetimo da za svaku antisimetričnu matricu A vrijedi sljedeće:

$$AA^T = A(-A) = -A^2$$

i

$$A^TA = (-A)A = -A^2.$$

Dakle,

$$AA^T = A^TA,$$

iz čega slijedi da su antisimetrične matrice normalne te na osnovu Teorema 1 možemo iskazati sljedeći korolar.

Korolar 1 *Antisimetrične matrice se mogu dijagonalizirati pomoću unitarne (ortogonalne) matrice.*

Štoviše, vlastite vrijednosti antisimetričnih matrica uvijek dolaze u parovima konjugiranih strogo imaginarnih brojeva oblika $\pm\lambda i$. Iznimka je slučaj kada je dimenzija matrice neparan broj, tada postoji neparan broj svojstvenih vrijednosti koje su jednake nuli.

Kao što je navedeno na početku ovog poglavlja spomenuti teorem i korolar nećemo dokazivati, nego ćemo pomoću sljedećeg primjera ilustrirati primjenu na proizvoljno odabranoj antisimetričnoj matrici.

Primjer 1 *Dijagonalizacija antisimetrične matrice nad $\mathbb{C}$*

Neka je matrica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 1 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odredimo karakteristični polinom $\kappa(\lambda)$ matrice A.

$$\kappa(\lambda) = det(A - \lambda I) = \lambda^4 + 25\lambda^2 + 100.$$

Ovaj polinom nema realne nul-točke, stoga se matrica ne može dijagonalizirati nad poljem $\mathbb{R}$. No, možemo nastaviti u polju kompleksnih brojeva, gdje matrica ima četiri različite vlastite vrijednosti i može se svesti na dijagonalni oblik.

$$\lambda_1 = 2\sqrt{5}i, \quad \lambda_2 = -2\sqrt{5}i, \quad \lambda_3 = \sqrt{5}i, \quad \lambda_4 = -\sqrt{5}i.$$

Baza u kojoj matrica A ima dijagonalni oblik sastoji se od vektora: v_1, v_2, v_3, v_4.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{5}i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -\sqrt{5}i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{2i}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ -\frac{2i}{\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastite vektore zapišimo kao stupce matrice prijelaza U.

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -\frac{i}{\sqrt{5}} & \frac{i}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{5}i & -\sqrt{5}i & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \frac{2i}{\sqrt{5}} & -\frac{2i}{\sqrt{5}} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Važno je istaknuti da u navedenu matricu U nismo upisivali jedinične ortogonalne vektore, pa time matrica nije unitarna odnosno ortogonalna. To je učinjeno iz razloga preglednosti postupka. U nastavku teksta ćemo u postupku diajgonalizacije umjesto adjungiranja (od-

nosno transponiranja) koristiti invertiranje matrice U. No u konačnici rezultat je dijagonalna matrica čiji su dijagonalni elementi vlastite vrijednosti matrice A.

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\sqrt{5}i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5}i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{5}i \end{pmatrix}.$$

3. Matrica specijaliziranih korijena

Klasične Liejeve algebre važni su primjeri konačno dimenzionalnih Liejevih algebri. Prema klasifikaciji prostih Liejevih algebri pomoću Dynkinovih dijagrama klasične Liejeve algebre su tipa A_n, B_n, C_n, te D_n. Matrice specijaliziranih korijena klasičnih Liejevih algebri su antisimetrične matrice ranga 2. Više o njima možete pronaći u [3] i [4].

Najprije ćemo pojasniti matricu specijaliziranih korijena na primjeru Liejevih algebre tipa A_n, budući da se definicije za sve ostale tipove temelje na ovom slučaju.

Definicija 3 (MSK za klasičnu Liejevu algebru tipa A_n) *Neka je* $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{n-1})$ *proizvoljna* $(n-1)$*-torka cijelih brojeva. Matricu specijaliziranih korijena,* MSK_{A_n} *definiramo na sljedeći način:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{\textit{za} } i = j, \\ \sum\limits_{k=i}^{j-1} s_k & \text{\textit{za} } i < j, \\ -\sum\limits_{k=i}^{j-1} s_k & \text{\textit{za} } i > j. \end{cases}$$

Tako definirana matrica je dimenzija $n \times n$, te kao što smo ranije spomenuli, antisimetrična i ranga 2. Matricu specijaliziranih korijena za klasičnu Liejevu algebru tipa A_n označavat ćemo u nastavku s $MSK_{A_n}(\mathbf{s})$.

Sljedeći algoritam omogućuje konstrukciju ovog tipa matrice na temelju ulaznog parametra $\mathbf{s}$.

Algoritam za generiranje matrice MSK_{A_n}

```
s ← ulaz()
n ← broj_elemenata(s) + 1
A ← 0_{n×n}
za i ← 1 do n − 1 činiti
    za j ← i + 1 do n činiti
        A[i, j] ← suma(s[i : j − 1])
        A[j, i] ← −A[i, j]
    kraj za
kraj za
```

Slika 3.1. Algoritam za generiranje matrice MSK_{A_n}

Osim prethodno navedene definicije, postoji i alternativni pristup konstrukciji ove matrice, kako je opisano u članku [5]. Ovaj pristup je posebno koristan kada želimo analizirati spektralna svojstva.

Propozicija 1 *Alternativna reprezentacija matrice $MSK_{A_n}(\mathbf{s})$ je sljedeća:*

$$MSK_{A_n}(\mathbf{s}) \equiv A = \mathbf{EST} - \mathbf{T}^T\mathbf{S}^T\mathbf{E}^T$$

gdje je $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$, $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} \end{pmatrix}$, *a* $\mathbf{T}$ *je matrica oblika:*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na analogan način možemo definirati matricu specijaliziranih korijena za sve klasične Liejeve algebre. Specijalno, za MSK tipa C_n, tj. za simplektičku Liejevu algebru, analogno ranije navedenoj Definiciji 3, uvodimo sljedeću definiciju. U slučaju klasične Liejeve algebre tipa C_n, za $\mathbf{s}$ uzimamo n-torku $(s_1, \dots, s_n)$, različito od slučaja A_n kada smo uzimali $(n-1)$-torku.

Definicija 4 (MSK za klasičnu Liejevu algebru tipa C_n) *Proširimo* $\mathbf{s}$ *tako da postane simetrična* $(2n-1)$*-torka:* $\mathbf{s}' = (s_1, \dots, s_{n-1}, s_n, s_{n-1}, \dots, s_1)$. *Zatim možemo iskoristiti jedan od prethodno navedenih načina za generiranje matrice* $MSK_{A_n}(\mathbf{s}')$ *koja je ekvivalentna matrici* $MSK_{C_n}(\mathbf{s})$.

S obzirom na način kojim smo proširili $\mathbf{s}$, matrica $MSK_{C_n}(\mathbf{s})$ je dimenzija $2n \times 2n$.

Elementi matrice $MSK_{C_n}(\mathbf{s})$ zadovoljavaju sljedeće relacije:

$$a_{i,j} = a_{-j,-i} = -a_{j,i} = -a_{-i,-j} = s_i + s_{i+1} + \dots + s_{j-1}, \tag{3.1}$$

$$a_{i,-j} = a_{j,-i} = -a_{-j,i} = -a_{-i,j} = (s_i + \dots + s_n) + (s_j + \dots + s_{n-1}), \tag{3.2}$$

za indekse $1 \leq i < j \leq n$, te

$$a_{i,i} = a_{-i,-i} = 0, \tag{3.3}$$

$$a_{i,-i} = -a_{-i,i} = 2s_i + 2s_{i+1} + \dots + 2s_{n-1} + s_n, \tag{3.4}$$

gdje je $i = 1, 2, \dots, n$.

Kao i u slučaju klasične Liejeve algebre A_n, matricu specijaliziranih korijena za ovaj tip možemo realizirati na dva načina: prvi, prateći Algoritam 3.1., te drugi, kao što je opisano u Propoziciji 1. Prikažimo sada jedan primjer MSK za slučaj klasične Liejeve algebre C_n, generirane prema Definiciji 3..

Primjer 2 *Neka je* $\mathbf{s} = (2, -3, 1, 5, -2)$. *Proširimo ovu petorku tako da dobijemo simetričnu devetorku* $\mathbf{s}'$*, definiranu kao* $\mathbf{s}' = (2, -3, 1, 5, -2, 5, 1, -3, 2)$. *Generirajmo matricu* $MSK_{C_5}(\mathbf{s})$ *dimenzija* 10×10 *primjenjujući jedan od prethodna dva opisana načina. Dakle,*

$MSK_{C_5}(\mathbf{s})$ je sljedeća matrica:

	1	***2***	***3***	***4***	***5***	***-5***	***-4***	***-3***	***-2***	***-1***
1	0	2	-1	0	5	3	8	9	6	8
2	-2	0	-3	-2	3	1	6	7	4	6
3	1	3	0	1	6	4	9	10	7	9
4	0	2	-1	0	5	3	8	9	6	8
5	-5	-3	-6	-5	0	-2	3	4	1	3
-5	-3	-1	-4	-3	2	0	5	6	3	5
-4	-8	-6	-9	-8	-3	-5	0	1	-2	0
-3	-9	-7	-10	-9	-4	-6	-1	0	-3	-1
-2	-6	-4	-7	-6	-1	-3	2	3	0	2
-1	-8	-6	-9	-8	-3	-5	0	1	-2	0.

Primijetimo, kada bismo u postupku generiranja gore navedene matrice koristili spomenuti alternativni način, tada bi $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}^T$ bila stupčasta matrica reda $2n$, $\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & s_{n-1} & s_n & s_{n-1} & \cdots & s_1 \end{pmatrix}$ matrica redak reda $2n$ te $\mathbf{T}$ kvadratna matrica također reda $2n$:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Štoviše, za proizvoljne elemente možemo se uvjeriti da zaista vrijede relacije iz Definicije 3.:

$$a_{1,2} = a_{-2,-1} = -a_{2,1} = -a_{-1,-2} = 2 \tag{3.1}$$

$$a_{1,-2} = a_{2,-1} = -a_{-2,1} = -a_{-1,2} = -6 \tag{3.2}$$

$$a_{5,5} = a_{-5,-5} = 0 \tag{3.3}$$

$$a_{5,-5} = -a_{-5,5} = -2 \tag{3.4}$$

Ova matrica bit će korištena u daljnjim primjerima.

Napomena: Gore navedeni primjer dovoljno je općenit i ogledan da možemo u općenitosti zaključiti da je matrica specijaliziranih korijena $MSK_{C_n}(\mathbf{s})$ uvijek antisimetrična i simetrična s obzirom na antidijagonalu. Dokazi te tvrdnji mogu se naći u [3].

4. Spektralna dekompozicija MSK

U Poglavlju 2. naveli smo sva bitna svojstva normalnih matrica koja specijalno vrijede i za antisimetrične matrice. Budući da su matrice specijaliziranih korijena antisimetrične matrice ranga 2, možemo iskazati Teorem 2. Na osnovu tog teorema, iskazat ćemo Korolar 2 kojim je ostvaren postupak rearanžiranja strukture matrice koja će imati korisna svojstva za razumijevanje i daljnje proučavanje. Preciznije rečeno, nova matrica MSK i dalje će biti antisimetrična i simetrična s obzirom na antidijagonalu, ali će se sastojati od nenegativnog gornjeg trokuta i nepozitivnog donjeg trokuta.

Teorem 2 *(Spektralna dekompozicija MSK) Neka je* $\mathbf{s} = (s_1, \dots, s_{n-1})$ *proizvoljna* $(n-1)$*-torka cijelih brojeva, također neka je* $A = EST - T^T S^T E^T$*. Nadalje, P je vektor parcijalnih suma od* $\mathbf{s}$*:*

$$P = (ST)^T = \Big(0, s_1, s_1 + s_2, \dots, s_1 + \dots + s_{n-1}\Big)^T,$$

i neka je

$$\check{P} = P - \frac{1}{E^T E} E E^T P$$

rezultat Gram-Schmidtove ortogonalizacije P u odnosu na E. Tada $A \equiv EP^T - PE^T$ *ima spektralnu dekompoziciju* $A = W \Lambda W^*$*, gdje je* $\Lambda = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$*,* $W^* W = I_n$*, i*

$$\lambda_1 = i\sqrt{\langle P, P\rangle \langle E, E\rangle - \langle P, E\rangle^2},$$

$$\lambda_2 = -i\sqrt{\langle P, P\rangle \langle E, E\rangle - \langle P, E\rangle^2},$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Odgovarajući svojstveni vektori (stupci matrice W) su

$$w_1 = \frac{\tilde{w}_1}{||\tilde{w}_1||},\ gdje\ je\ \tilde{w}_1 = \frac{||\check{P}||}{||E||}E + i\check{P},$$

$$w_2 = \frac{\tilde{w}_2}{||\tilde{w}_2||},\ gdje\ je\ \tilde{w}_2 = \frac{||\check{P}||}{||E||}E - i\check{P},$$

$$w_3, \ldots, w_n = bilo\ koja\ ortonormirana\ baza\ span(w_1, w_2)^{\perp}.$$

Za dokaz ovog teorema, pogledajte [5].

Računanje $\check{P}$, vidjet ćemo kasnije, nam omogućava dobivanje permutacije koja pomaže organizirati elemente matrice MSK na način koji olakšava daljnje analize. Na taj način možemo dobiti urednu strukturu matrice koja će imati korisna svojstva za razumijevanje i daljnje proučavanje.

Primjer 3 *Neka je* $\mathbf{s}' = (2, -3, 1, 5, -2, 5, 1, -3, 2)$ *simetrična devetorka iz Primjera 2. Za izračunavanje* $\check{P}$*, prvo nam je potreban vektor parcijalnih suma* P *od* $\mathbf{s}'$*:*

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 5 & 3 & 8 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}^T$$

.

Zatim definiramo vektor E *kao:*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T.$$

Sada možemo dobiti $\check{P}$ *pomoću izraza:*

$$\check{P} = P - \tfrac{1}{E^T E} E E^T P.$$

$$\begin{aligned} \check{P} &= P - \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} P \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 0 & 5 & 3 & 8 & 9 & 6 & 8 \end{pmatrix}^T - \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix} -4 & -2 & -5 & -4 & 1 & -1 & 4 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

Korolar 2 *Neka je π permutacija koja sortira komponente vektora $\check{P}$ u neopadajući niz. Tada je π također sortirajuća permutacija za P. Također, neka je Π pripadajuća matrična reprezentacija permutacije π. Nadalje, svi elementi u gornjem trokutu matrice $\Pi^T A \Pi$ su nenegativni, a zbog antisimetričnosti posljedično su svi elementi u donjem trokutu nepozitivni. U svakom retku matrice $\Pi^T A \Pi$ elementi monotono rastu, a u svakom od njezinih stupaca, elementi su monotono opadajući.*

$$\Pi^T A \Pi = \begin{pmatrix} a_{\pi(1),\pi(1)} & a_{\pi(1),\pi(2)} & \cdots & a_{\pi(1),\pi(n)} \\ a_{\pi(2),\pi(1)} & a_{\pi(2),\pi(2)} & \cdots & a_{\pi(2),\pi(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\pi(n),\pi(1)} & a_{\pi(n),\pi(2)} & \cdots & a_{\pi(n),\pi(n)} \end{pmatrix}$$

Primjer 4 *U Primjeru 3, imamo $\check{P}$ kako slijedi:*

$$\check{P} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -4 & -2 & -5 & -4 & 1 & -1 & 4 & 5 & 2 & 5 \end{pmatrix}^T$$

Kada ovaj vektor sortiramo u neopadajući niz, dobivamo:

$$\check{P}_{sortiran} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 9 & 7 & 10 & 8 \\ -5 & -4 & -4 & -2 & -1 & 1 & 2 & 4 & 4 & 5 \end{pmatrix}^T$$

Možemo primijetiti da smo mogli odabrati i druge permutacije. Konkretno za ovaj primjer možemo odabrati $2! \times 2!$ različitih permutacija. To proizlazi iz činjenice da se neki elementi unutar $\check{P}$ mogu pojaviti više puta.
Neka je π permutacija koja sortira $\check{P}$:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 6 & 5 & 9 & 7 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Tada, permutacijska matrica Π koja odgovara permutaciji π može se zapisati kao:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Konačno, koristeći $MSK_{C_5}(\mathbf{s})$ iz Primjera 2, možemo dobiti matricu $\Pi^T A \Pi$ koja ima gore navedena svojstva.

$$\Pi^T A \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 6 & 7 & 9 & 9 & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 8 & 9 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 5 & 6 & 8 & 8 & 9 \\ -3 & -2 & -2 & 0 & 1 & 3 & 4 & 6 & 6 & 7 \\ -4 & -3 & -3 & -1 & 0 & 2 & 3 & 5 & 5 & 6 \\ -6 & -5 & -5 & -3 & -2 & 0 & 1 & 3 & 3 & 4 \\ -7 & -6 & -6 & -4 & -3 & -1 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ -9 & -8 & -8 & -6 & -5 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -9 & -8 & -8 & -6 & -5 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ -10 & -9 & -9 & -7 & -6 & -4 & -3 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Zaključak

Proces dijagonalizacije matrica predstavlja moćan alat u matematici i fizici. Omogućuje nam da jednostavno razumijemo i analiziramo njihova svojstva i primjene. Prvo smo pokazali da antisimetrične matrice posjeduju svojstva normalnih matrica, što ih čini pogodnima za dijagonalizaciju pomoću unitarnih matrica. Nadalje, razmotreni su različiti pristupi konstrukciji specifične grupe antisimetričnih matrica, poznatih kao matrice specijaliziranih korijena, s posebnim naglaskom na klasične Liejeve algebre tipa A_n i C_n. Definirali smo matematičke formule i algoritme za generiranje ovih matrica te posebnu pažnju posvetili njihovoj spektralnoj dekompoziciji. Posebice smo se usredotočili na matrice specijaliziranih korijena tipa C_n. Kroz primjer jedne takve matrice demonstrirali smo transformaciju u jednostavniji oblik koji olakšava analizu i pruža dublji uvid u njihovu strukturu i svojstva. Daljnja istraživanja mogla bi se usmjeriti prema primjeni ovih rezultata vezanih uz teoriju reprezentacija klasičnih Liejevih algebri svih navedenih tipova.

Literatura

[1] A. Aglić Aljinović, N. Elezović, i D. Žubrinić, *Linearna algebra*. Element, 2013.

[2] S. Kurepa, *Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene*. Tehnička knjiga, 1967.

[3] T. Šikić, "Z-gradations of classical affine lie algebras and kac parameters", *COMMUNICATIONS IN ALGEBRA® Vol. 32*, sv. No. 8, str. 2987–3016, 12 2004.

[4] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer, 1972.

[5] Z. Drmač i T. Šikić, "On kac parameters and spectral decomposition of a matrix of specialized roots of lie algebra sln", *Rad HAZU, Matematičke znanosti*, sv. 18, str. 55–72, 2014.

Sažetak

Dijagonalizacija antisimetričnih matrica specijaliziranih korijena simplektičke Liejeve algebre

Nikola Vlahović

Antisimetrične matrice su realne kvadratne matrice koje pripadaju klasi normalnih matrica, stoga se mogu dijagonalizirati pomoću unitarne matrice. Poseban fokus je usmjeren na matrice specijaliziranih korijena, koje su podgurpa antisimetričnih matrica ranga 2. Istraženi su načini konstrukcije ovih matrica, konkretno za klasične Liejeve algebre tipa A_n i C_n (simplektička Liejeva algebra). Rezultati spektralne dekompozicije ovih matrica, kao što smo pokazali na primjeru MSK za klasičnu Liejevu algebru tipa C_n, omogućuju nam dobivanje nove matrice specijaliziranih korijena s urednom strukturom. Tako transformirane matrice ostaju antisimetrične i simetrične s obzirom na antidijagonalu, ali se također sastoje od nenegativnog gornjeg trokuta i nepozitivnog donjeg trokuta. Takav jednostavni oblik matrice olakšava analizu i pruža dublji uvid u njihovu strukturu i svojstva.

Ključne riječi: antisimetrična matrica;dijagonalizacija normalne matrice;spektralna dekompozicija;simplektička Liejeva algebra;matrica specijaliziranih korijena

Abstract

Diagonalization of skew-symmetric matrices of specialized roots of the symplectic Lie algebra

Nikola Vlahović

Skew-symmetric matrices are real square matrices that fall within the class of normal matrices and therefore can be diagonalized using a unitary matrix. Special attention was given to matrices of specialized roots, a subgroup of skew-symmetric matrices that are of rank 2. We have explored methods for constructing these matrices, particularly for classical Lie algebras of types A_n and C_n (symplectic Lie algebra). The results of the spectral decomposition of these matrices, as demonstrated with the matrix of specialized roots example for the classical Lie algebra of type C_n, enable us to derive new matrices with a structured form. These transformations maintain skew-symmetry and symmetry with respect to the antidiagonal but also feature a non-negative upper triangle and a non-positive lower triangle. This simplified matrix form facilitates analysis and provides deeper insights into their structure and properties.

Keywords: skew-symmetric matrix;diagonalization of a normal matrix;spectral decomposition;symplectic Lie algebra;matrix of specialized roots