

# Sinteza sustava s minimalnim izobličenjem vremenskog odziva

---

**Molnar, Goran**

**Doctoral thesis / Disertacija**

**2010**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Electrical Engineering and Computing / Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:168:206188>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-10-13**



*Repository / Repozitorij:*

[FER Repository - University of Zagreb Faculty of Electrical Engineering and Computing repository](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**FAKULTET ELEKTROTEHNIKE I RAČUNARSTVA**

**Goran Molnar**

**SINTEZA SUSTAVA S MINIMALNIM IZOBLIČENJEM  
VREMENSKOG ODZIVA**

**Doktorska disertacija**

**Zagreb, 2010.**

Doktorska disertacija je izrađena na Zavodu za elektroničke sustave i obradbu informacija  
Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu.

Mentor: prof.dr.sc. Mladen Vučić

Doktorska disertacija ima 100 stranica.

Povjerenstvo za ocjenu doktorske disertacije:

1. Akademik emer.dr.sc. Hrvoje Babić, profesor u mirovini  
Sveučilište u Zagrebu Fakultet elektrotehnike i računarstva
2. Dr.sc. Mladen Vučić, izvanredni profesor  
Sveučilište u Zagrebu Fakultet elektrotehnike i računarstva
3. Dr.sc. Nino Stojković, izvanredni profesor  
Sveučilište u Rijeci Tehnički fakultet

Povjerenstvo za obranu doktorske disertacije:

1. Dr.sc. Branko Jeren, redoviti profesor  
Sveučilište u Zagrebu Fakultet elektrotehnike i računarstva
2. Dr.sc. Mladen Vučić, izvanredni profesor  
Sveučilište u Zagrebu Fakultet elektrotehnike i računarstva
3. Dr.sc. Nino Stojković, izvanredni profesor  
Sveučilište u Rijeci Tehnički fakultet
4. Akademik emer.dr.sc. Hrvoje Babić, profesor u mirovini  
Sveučilište u Zagrebu Fakultet elektrotehnike i računarstva
5. Dr.sc. Davor Petrinović, izvanredni profesor  
Sveučilište u Zagrebu Fakultet elektrotehnike i računarstva

Datum obrane doktorske disertacije: 29. ožujka 2010. godine

*majci*

# Sadržaj

1	Uvod .....	1
2	Sinteza sustava u vremenskoj domeni .....	3
2.1	Sustavi s monotonim vremenskim odzivima .....	3
2.2	Sustavi s najmanjim produktom trajanja odziva i širine frekvencijskog područja .....	4
2.3	Sustavi s linearnom fazom .....	5
2.4	Aproksimacija zadanog impulsnog odziva .....	6
2.5	Sinteza sustava temeljena na optimizacijskim postupcima .....	7
3	Model pobude za mjerenje linearnih izobličenja u vremenskoj domeni .....	8
3.1	Sinc puls .....	8
3.2	Odziv vremenski kontinuiranog sustava na sinc puls .....	9
3.3	Primjeri odziva sustava na sinc puls .....	19
3.4	Modeli pobude izvedeni iz sinc pulsa .....	23
3.5	Energija odziva na sinc puls .....	24
3.6	Odziv vremenski diskretnog sustava na sinc puls .....	28
4	Sinteza sustava primjenom simetrije odziva na sinc puls .....	31
4.1	Mjera fazne linearnosti sustava .....	31
4.2	Sinteza vremenski kontinuiranih sustava .....	35
4.2.1	Korektori niskopropusnih filtara .....	35
4.2.2	Korektori pojasnopropusnih filtara .....	42
4.2.3	Sustavi s konstantnim kašnjenjem .....	46
4.3	Frekvencijska reprezentacija simetrije odziva .....	52
4.4	Sinteza vremenski diskretnih sustava .....	54
4.4.1	Hilbertovi transformatori .....	54
4.4.2	Korektori .....	61
5	Sinteza sustava primjenom maksimuma odziva na sinc puls .....	66
5.1	Mjera izobličenja valnog oblika signala .....	66
5.2	Sinteza vremenski kontinuiranih korektora .....	67
5.3	Frekvencijska reprezentacija maksimuma odziva .....	70
5.4	Sinteza vremenski diskretnih korektora .....	72
6	Sinteza sustava sa zadanim impulsnim odzivom .....	75
6.1	Formulacija problema .....	76
6.2	Optimizacijski postupak .....	77
6.3	Gradijent impulsnog odziva .....	80
6.4	Stabilnost sustava .....	82
6.5	Praktična razmatranja .....	83
6.6	Sinteza valićnih filtara .....	84
6.6.1	Morletov filtar .....	85
6.6.2	Gaussov filtar .....	88

7 Zaključak .....	91
8 Literatura .....	92
Sažetak .....	97
Abstract .....	98
Životopis.....	99
Biography .....	100

## Popis slika

3.1	Valni oblik (a) i frekvencijska karakteristika (b) sinc pulsa .....	9
3.2	Putovi integracije funkcije $F_r(t)$ za $t < 0$ .....	11
3.3	Putovi integracije funkcije $F_r(t)$ za $t > 0$ .....	13
3.4	Put integracije funkcije $e_i(z)$ .....	16
3.5	Imaginarni dio funkcije $e_i(z)$ .....	17
3.6	Odziv na sinc puls nekih klasičnih filtara osmog reda, svi normirani na $\omega_g = 1 \text{ rad/s}$ .....	19
3.7	Amplitudna karakteristika odziva na sinc puls nekih klasičnih filtara osmog reda normiranih na $\omega_g = 1 \text{ rad/s}$ .....	20
3.8	Grupno kašnjenje odziva na sinc puls nekih klasičnih filtara osmog reda normiranih na $\omega_g = 1 \text{ rad/s}$ .....	20
3.9	Odziv na sinc puls Butterworthovog filtra od prvog do desetog reda granične frekvencije $\omega_g = \omega_{3\text{dB}} = 1 \text{ rad/s}$ .....	21
3.10	Amplitudna karakteristika odziva na sinc puls Butterworthovog filtra od prvog do desetog reda granične frekvencije $\omega_g = \omega_{3\text{dB}} = 1 \text{ rad/s}$ .....	22
3.11	Grupno kašnjenje odziva na sinc puls Butterworthovog filtra od prvog do desetog reda granične frekvencije $\omega_g = \omega_{3\text{dB}} = 1 \text{ rad/s}$ .....	22
4.1	Odziv na sinc puls Besselove linije za kašnjenje petog reda .....	34
4.2	Pogreška simetrije nekih klasičnih filtara petog reda .....	34
4.3	Odziv na sinc puls kaskade eliptičkog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 80dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora $A$ -tog reda, uz $\omega_g = \omega_{1\text{dB}} = 1 \text{ rad/s}$ .....	38
4.4	Grupno kašnjenje kaskade eliptičkog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 80dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora $A$ -tog reda .....	39
4.5	Položaj polova i nula kaskade eliptičkog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 80dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora šestog reda (nule filtra nisu prikazane) .....	39
4.6	Odziv na sinc puls kaskade Butterworthovog filtra osmog reda i optimalnog korektora $A$ -tog reda, uz $\omega_g = \omega_{3\text{dB}} = 1 \text{ rad/s}$ .....	41



4.7 Grupno kašnjenje kaskade Butterworthovog filtra osmog reda i optimalnog korektora $A$ -tog reda .....	41
4.8 Grupno kašnjenje kaskade Chebyshevljevog filtra šestog reda s 1dB valovitosti u području propuštanja i optimalnog korektora $A$ -tog reda .....	42
4.9 Grupno kašnjenje kaskade Chebyshevljevog pojasnopropusnog filtra desetog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja i optimalnog korektora $A$ -tog reda .....	45
4.10 Grupno kašnjenje kaskade Chebyshevljevog pojasnopropusnog filtra desetog reda s 1dB valovitosti u području propuštanja i optimalnog korektora $A$ -tog reda .....	45
4.11 Pogreška simetrije optimalnih svepropusnih sustava od prvog do desetog reda .....	48
4.12 Odziv optimalnih svepropusnih sustava šestog reda na sinc puls s $\omega_g=1$ rad/s .....	48
4.13 Grupno kašnjenje optimalnih svepropusnih sustava šestog reda, uz $\omega_g=1$ rad/s .....	49
4.14 Položaj polova i nula optimalnih svepropusnih sustava šestog reda, uz $\omega_g=1$ rad/s .....	49
4.15 Grupno kašnjenje niskopropusnih filtara šestog reda sa simetričnim vremenskim odzivom (SVO), Besselovog filtra i filtara s jednolikom valovitosti fazne pogreške od $0.5^\circ$ i $0.05^\circ$ , normirani na $\omega_{3dB}=1$ rad/s .....	51
4.16 Amplitudna karakteristika niskopropusnih filtara šestog reda sa simetričnim vremenskim odzivom (SVO), Besselovog filtra i filtara s jednolikom valovitosti fazne pogreške od $0.5^\circ$ i $0.05^\circ$ , normirani na $\omega_{3dB}=1$ rad/s .....	51
4.17 Fazna pogreška optimalnih Hilbertovih transformatora šestog i dvanaestog reda s $\omega_1=0.06\pi$ rad i $\omega_2=0.94\pi$ rad .....	58
4.18 Pogreška simetrije za razne svepropusne IIR Hilbertove transformatore s $\omega_1=0.06\pi$ rad, izračunata za $S=N-1$ .....	59
4.19 Pogreška simetrije svepropusnih IIR Hilbertovih transformatora s najmanjim izobličenjem vremenskog odziva i najmanjom kvadratnom faznom pogreškom .....	60
4.20 Fazna pogreška svepropusnih IIR Hilbertovih transformatora šestog reda s najmanjim izobličenjem vremenskog odziva i najmanjom kvadratnom faznom pogreškom .....	60

4.21 Fazna pogreška kaskade eliptičkog niskopropusnog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 60dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora osmog reda, uz $\omega_g = \omega_{0.1dB} = 0.3\pi$ rad .....	65
4.22 Odzivi $y[n]$ i $y_a(t)$ kaskade eliptičkog niskopropusnog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 60dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora $A$ -tog reda, uz $\omega_g = \omega_{0.1dB} = 0.3\pi$ rad .....	65
5.1 Odziv na sinc puls kaskade eliptičkog filtra osmog reda i optimalnog korektora $A$ -tog reda .....	69
5.2 Grupno kašnjenje kaskade eliptičkog filtra osmog reda i optimalnog korektora $A$ -tog reda .....	69
5.3 Odzivi $y[n]$ i $y_a(t)$ kaskade eliptičkog niskopropusnog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 60dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora $A$ -tog reda, uz $\omega_g = \omega_{0.1dB} = 0.3\pi$ rad .....	73
5.4 Grupno kašnjenje kaskade eliptičkog niskopropusnog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 60dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora $A$ -tog reda, uz $\omega_g = \omega_{0.1dB} = 0.3\pi$ rad .....	74
6.1 Impulsni odziv idealnog Morletovog filtra i njegova aproksimacija filtrom 10-og reda s 8 nula .....	86
6.2 Impulsni odziv idealnog Morletovog filtra i njegova aproksimacija filtrom 8-og reda sa 6 nula .....	87
6.3 Impulsni odziv idealnog Gaussovog filtra i njegova aproksimacija filtrom s 5 polova, nulom u ishodištu kompleksne ravnine i jednim parom kompleksnih nula .....	90

## Popis tablica

4.1	Polovi optimalnih svepropusnih sustava šestog reda, uz $\omega_g=1\text{rad/s}$ .....	50
4.2	Polovi svepropusnih IIR Hilbertovih transformatora s najmanjim izobličenjem vremenskog odziva za $\omega_1=0.1\text{ rad}$ .....	61
4.3	Polovi svepropusnih IIR Hilbertovih transformatora s najmanjim izobličenjem vremenskog odziva za $\omega_1=0.01\text{ rad}$ .....	61
6.1	Polovi, nule i pojačanje za Morletov filter s 10 polova i 8 nula .....	86
6.2	Polovi, nule i pojačanje za Morletov filter s 8 polova i 6 nula .....	87
6.3	Polovi, nule i pojačanje za Gaussov filter s 5 polova, nulom u ishodištu kompleksne ravnine i jednim parom kompleksnih nula .....	89

# 1 Uvod

Ovisno o ciljnoj aplikaciji, zahtjevi na sustave mogu biti specificirani u frekvencijskoj ili u vremenskoj domeni. S druge strane, zbog jednostavnosti postupka, često se sinteza djelomično ili potpuno provodi u frekvencijskoj domeni. Međutim, ako su zahtjevi dani u vremenskoj domeni, rješavanje problema u frekvencijskoj domeni predstavlja neizravan pristup i ne rezultira nužno optimalnim rješenjem. Stoga se sinteza u vremenskoj domeni provodi ili kad ne postoji svojstvo u frekvencijskoj domeni koje bi odgovaralo postavljenom zahtjevu u vremenskoj domeni, ili kad se svojstvo u vremenskoj domeni želi aproksimirati u optimalnom smislu. Općenito vrijedi da je sinteza sustava u vremenskoj domeni složen, a često i iterativan postupak koji traži čovjekovu intervenciju u pojedinim koracima.

Filtri dobiveni sintezom u vremenskoj domeni često se susreću u komunikacijskim sustavima i mjernoj opremi. Do danas su razvijene mnoge metode za njihov dizajn. Napredak digitalnih računala, te razvoj programske podrške u novije vrijeme doveo je do sve većeg broja metoda temeljenih na robusnim optimizacijskim postupcima, kao što je na primjer optimizacija linearnih funkcija nad prostorom omeđenim stošcima drugog reda.

Tema ove disertacije je sinteza sustava u vremenskoj domeni, temeljena na optimizacijskim postupcima. U disertaciji je opisan novi model pobude za analizu i sintezu sustava. Model pobude temelji se na sinc pulsu jedinične amplitude i nulte faze. Za ovu pobudu predložene su mjere linearnih izobličenja odziva. Nadalje, razvijene su učinkovite metode za sintezu sustava u vremenskoj domeni temeljenih na simetriji i maksimumu odziva na sinc puls. Kako u nekim primjenama sustavi moraju osigurati minimalno izobličenje valnog oblika zadanog pulsa, razvijena je i robusna metoda za sintezu sustava sa zadanim impulsnim odzivom.

U drugom poglavlju dan je pregled postojećih postupaka za sintezu sustava u vremenskoj domeni. Pritom su obrađeni sustavi s monotonim vremenskim odzivima, filtri s najmanjim produktom trajanja vremenskog odziva i širine frekvencijskog područja, zatim sustavi s linearnom fazom, sustavi sa zadanim impulsnim odzivom, i drugi. U trećem poglavlju predložen je model pobude temeljen na sinc pulsu, te su izvedeni analitički izrazi za odgovarajuće odzive vremenski kontinuiranih i diskretnih sustava, te izrazi za njihove energije. Osim samog sinc pulsa koji predstavlja niskopropusnu pobudu razmatrane su i pojasnopropusne pobude koje su također izvedene iz sinc pulsa. U četvrtom poglavlju predložena je sinteza sustava temeljena na simetriji odziva na sinc puls. Ovakav model izobličenja primijenjen je u dizajnu niskopropusnih i pojasnopropusnih korektora, zatim sustava s konstantnim kašnjenjem, te Hilbertovih transformatora. Osim toga, dana je i frekvencijska reprezentacija simetrije vremenskog odziva. U petom poglavlju opisana je

sinteza korektora temeljena na maksimumu odziva na sinc puls. I u ovom slučaju dana je frekvencijska reprezentacija maksimuma vremenskog odziva. Tema šestog poglavlja je dizajn sustava sa zadanim vremenskim odzivom. U sklopu toga, opisana je učinkovita i robusna metoda za sintezu sustava sa zadanim impulsnim odzivom.

## 2 Sinteza sustava u vremenskoj domeni

Sinteza sustava u vremenskoj domeni podrazumijeva da su zahtjevi na sustav zadani u toj domeni. Ipak, s ciljem da se pojednostavni postupak, često se sinteza djelomično ili potpuno provodi u frekvencijskoj domeni [1]. U tom slučaju potrebno je prepoznati koje svojstvo u frekvencijskoj domeni odgovara zahtjevu postavljenom u vremenskoj domeni. Međutim, najbolja aproksimacija nekog svojstva u jednoj domeni ne daje nužno i najbolju aproksimaciju odgovarajućeg svojstva u drugoj domeni. Stoga ovaj pristup općenito ne osigurava optimalna svojstva obzirom na postavljen zahtjev [2].

Sinteza izravno u vremenskoj domeni provodi se u slučaju kad ne postoji svojstvo u frekvencijskoj domeni koje bi odgovaralo postavljenom zahtjevu u vremenskoj domeni, ili kad se svojstvo u vremenskoj domeni želi aproksimirati u optimalnom smislu. Općenito vrijedi da je sinteza sustava u vremenskoj domeni prilično složen postupak i vrlo često traži intervenciju u pojedinim koracima postupka. U daljnjem tekstu bit će navedeni karakteristični primjeri sinteze linearnih sustava u vremenskoj domeni.

### 2.1 Sustavi s monotonim vremenskim odzivima

Tipičan primjer filtra zadanog u vremenskoj, a dobivenog u frekvencijskoj domeni je filtar čija amplitudna karakteristika aproksimira Gaussovu funkciju oblika [3]

$$|H(j\omega)| = \exp\left[-\frac{\ln(2)}{2}\left(\frac{\omega}{\omega_{3dB}}\right)^2\right] \quad (2.1)$$

Naime, kad se traži monoton vremenski odziv često se polazi od filtra čiji impulsni odziv odgovara Gaussovoj funkciji. S druge strane, poznato je da amplitudna karakteristika takvog filtra također ima oblik Gaussove krivulje. Stoga aproksimirajući ovakvu amplitudu filtra, istovremeno se aproksimira i vremenski odziv.

Sličan pristup korišten je i u rješavanju problema filtra s monotonim odzivom na stepenicu. Tako je Temes [4] pokazao da najbrži monotoni odziv na stepenicu ima takozvani "prolate" filtar. Ovaj filtar je nazvan po funkciji pomoću koje je dobivena njegova prijenosna funkcija. Njegova amplitudna karakteristika je frekvencijski ograničena pa je ovaj filtar nerealizibilan. Stoga je potrebno provesti aproksimaciju njegove amplitude, što se opet provodi u frekvencijskoj domeni.

Halpern [5] je opisao klasu filtara s približno monotonim odzivom na stepenicu koji su dobiveni aproksimacijom impulsnog odziva oblika

$$h(t) = \begin{cases} K \sin^m(\pi t) & , \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & , \quad t > 1 \end{cases} \quad (2.2)$$

Laplaceov transformat ovog odziva sadrži funkciju  $\text{ch}(s/2)$  za parni  $m$ , odnosno funkciju  $\text{th}(s/2)$  za neparni  $m$ . Halpern je ove funkcije aproksimirao na način [6] koji se razlikuje od načina koji daje Besselove filtre. Puno kasnije, ovu klasu filtara je aproksimirao Filanovsky [7] na način da je realni i imaginarni dio Laplaceovog transformata razvio u beskonačne produkte, a potom njihovim odsijecanjem na konačni broj faktora dobio odgovarajući filter.

Babić [8], [9] je predložio filtre s monotonim odzivom na stepenicu i najkraćim vremenom porasta, gdje je mjeru brzine porasta izrazio pomoću prvog i drugog momenta impulsnog odziva. Budući se momenti lako mogu izraziti pomoću parametara prijenosne funkcije, provedena je optimizacija vremena porasta za više momente u cilju dobivanja prijenosnih funkcija čiji odziv na stepenicu ima najkraće vrijeme porasta [10].

## 2.2 Sustavi s najmanjim produktom trajanja odziva i širine frekvencijskog područja

Sustavi s najmanjim produktom trajanja odziva i širine njegovog frekvencijskog područja predstavljaju kombinaciju sinteze u vremenskoj i frekvencijskoj domeni. Jess i Schussler [11], [12] prvi su razmatrali takve sustave, te su razvili dvije klase sustava. Jedna od njih ima minimalan produkt širine impulsnog odziva i širine frekvencijskog područja, a druga minimalan produkt brzine porasta odziva na stepenicu i širine frekvencijskog područja. U oba slučaja autori predlažu jednoliku valovitost u području gušenja amplitudne karakteristike, te jednoliku valovitost prvih  $N-1$  prebačaja i podbačaja valnog oblika odgovarajućeg vremenskog odziva, pri čemu je  $N$  red sustava.

Kasnije su Babić i Vučić [13], [14] predložili novu klasu sustava s minimalnim produktom trajanja impulsnog odziva i širine frekvencijskog područja. Pri tom su za širinu impulsnog odziva koristili više momente impulsnog odziva, a za širinu frekvencijskog područja više momente kvadrata amplitudne karakteristike [14]. Optimiranjem ovog produkta dobili su kauzalne sustave s najvećom koncentracijom energije u vremenu za dano frekvencijsko područje. Nadalje, pokazali su da je dobiveni impulzni odziv kvazi Gaussov s malim i kratkim istitravanjem.

Ovi sustavi interesantni su u komunikacijama jer omogućavaju najveću brzinu prijenosa digitalnog signala oblika niza pulsa unutar zadanog frekvencijskog područja.

## 2.3 Sustavi s linearnom fazom

Sinteza sustava s linearnom fazom moguće je izravno provesti u vremenskoj domeni. Osnovni i najpraktičniji postupak je sinteza temeljena na Padéovoj aproksimaciji funkcije  $H_d(s)=e^s$  [1]. Ovom aproksimacijom dobiva se racionalna prijenosna funkcija oblika

$$H(s) = \frac{P_m(s)}{Q_n(s)} \quad (2.3)$$

Kod ove aproksimacije se na temelju Taylorovog razvoja funkcije  $H_d(s)$  u okolini ishodišta kompleksne ravnine dobiva polinom  $T_{m+n}(s)$  iz kojeg se određuju koeficijenti polinoma u brojniku i nazivniku prijenosne funkcije (2.3). Postoje razne metode za njihovo dobivanje [1]. Najjednostavnija metoda je izravno rješavanje sustava jednadžbi dobivenih iz

$$P_m(s) = T_{m+n}(s)Q_n(s) \quad (2.4)$$

Međutim, ovom metodom se ne mogu dobiti sustavi visokih redova.

Kod aproksimacije Gaussove amplitudne karakteristike, istovremeno se aproksimira i Gaussov impulsni odziv. No, moguće je i obrat. Kod Morrisona [15] nalazimo začetke ideje da se linearna faza aproksimira postupkom u vremenskoj domeni. Proučavajući aproksimacije linearne faze, Morrison je uočio da odziv na stepenicu Besselovih filtera ima oblik sličan segmentu funkcije kosinus na intervalu  $(\pi, 2\pi)$ . Iako je ukazao na tu činjenicu, nije ju upotrijebio, već je samo predložio da se ona može iskoristiti kod sinteze filtera s linearnom fazom. Ulstad [16] je opisala postupak aproksimacije idealnog niskopropusnog filtera granične frekvencije  $\omega_g$ , temeljenog na aproksimaciji njegovog impulsnog odziva oblika

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\sin(\omega_g t)}{\pi t} & , \quad t \neq 0 \\ \frac{\omega_g}{\pi} & , \quad t = 0 \end{cases} \quad (2.5)$$

Zbog nekauzalnosti, Ulstad je odziv (2.5) pomakla udesno, tako da se vrh odziva nalazi u  $t=1$ , izjednačila ga s nulom za  $t<0$ , a dio odziva za  $t>2$  je prigušila padajućom eksponencijalnom funkcijom kako bi osigurala bolju simetričnost zadanog impulsnog odziva, a time i bolju linearnost faze dobivenog filtera. Tako modificiran impulsni odziv poslužio je kao polazna točka za aproksimaciju u smislu najmanjih kvadrata. Sličan postupak opisao je Pottle [17], dajući pritom kratak osvrt na metode koje optimiraju srednju kvadratnu pogrešku.

Krajem devedesetih, Vučić i Babić predlažu novu klasu filtera s linearnom faznom karakteristikom. Oni ih nazivaju filteri sa simetričnim impulsnim odzivom [2], [18]. Ti filteri dobiveni su optimiranjem pogreške simetrije impulsnog odziva obzirom na zadanu os simetrije  $t_m$ . Pogrešku simetrije izrazili su kao energiju asimetrije odziva na način



$$e_a(t_m) = \int_{-\infty}^{+\infty} [h(t) - h(2t_m - t)]^2 dt \quad (2.6)$$

U kontekstu sinteze sustava s linearnom fazom ovdje se može razmotriti i sinteza sustava s konstantnim grupnim kašnjenjem. Postoje dva različita pristupa u sintezi takvih sustava u vremenskoj domeni. Prvi pristup je temeljen na sintezi sustava čiji impulsni odziv aproksimira određenu funkciju. Kao primjer često korištenih funkcija su potencije sinusnog pulsa danih izrazom (2.2), a mogu se pronaći u [7]. Osim njih, tu su i Nyquistovi pulsevi od kojih se oni s maksimalno glatkim kašnjenjem mogu pronaći u [19]. Drugi pristup je temeljen na korištenju integralnih kriterija, kao na primjer već spomenuti sustavi sa simetričnim impulsnim odzivom [2], [18].

## 2.4 Aproksimacija zadanog impulsnog odziva

Uloga filtara ne mora biti ograničena isključivo na operacije kao što su razdvajanje signala, prijenos, oblikovanje pulsa, linearna faza i slično. Filtri se mogu koristiti i za operacije kao što je na primjer sinteza određenog valnog oblika. U tom slučaju prijenosna funkcija neće biti određena zahtjevom na veliku brzinu porasta, mali prebačaj i slično, već će se tražiti dobra aproksimacija odziva u zadanom intervalu. Takav problem svodi se na aproksimaciju zadane funkcije  $f(t)$ , sumom kompleksnih eksponencijala oblika

$$h(t) = \sum_{r=1}^N (C_{0r} + C_{1r}t + \dots + C_{N-1,r}t^{N-1}) A_r e^{p_r t} \quad , \quad t \geq 0 \quad (2.7)$$

koja predstavlja impulsni odziv linearnog, vremenski nepromjenjivog sustava čiji su polovi  $p_r$ . Članovi od  $C_{1r}t$  do  $C_{N-1,r}t^{N-1}$  posljedica su višestrukosti odgovarajućeg pola. Polovi u općem slučaju mogu biti realni ili konjugirano kompleksni.

Dobar pregled analitičkih i numerički postupaka za aproksimaciju zadanog valnog oblika impulsnog odziva može se pronaći u [1]. Tu su, između ostaloga, opisane poznate izravne metode kao one temeljene na razvoju u Fourierov red, te popularne neizravne metode, kao one temeljene na Padéovoj ili Chebyshevljevoj aproksimaciji.

Razvoj digitalnih računala učinio je popularnim postupke temeljene na numeričkon optimizaciji. Pri tom se obično izvodi optimizacija integralnih pogrešaka. Mjera odstupanja nekog impulsnog odziva,  $h(t)$ , od zadanog odziva,  $h_d(t)$ , definirana je integralom

$$L_p = \int_0^{+\infty} |h(t) - h_d(t)|^p dt \quad (2.8)$$

Optimiranjem ove pogreške dobivaju se sustavi koji aproksimiraju zadani impulsni odziv u smislu najmanje  $p$ -te pogreške. Do sada se ovakva mjera nije optimirala u cijelosti već su razmatrani samo specijalni slučajevi. Prvi slučaj je kvadratna pogreška koja se dobiva za  $p=2$ . Kod nje frekvencijska reprezentacija predstavlja kvadratno odstupanje od željene frekvencijske karakteristike, tj. vrijedi

$$L_2 = \int_0^{+\infty} [h(t) - h_d(t)]^2 dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [H(\omega) - H_d(\omega)]^2 d\omega \quad (2.9)$$

Postupci temeljeni na numeričkoj optimizaciji ove mjere mogu se pronaći u [20]–[22].

Drugi specijalan slučaj je maksimalno apsolutno odstupanje koje se dobiva kad  $p \rightarrow \infty$ , a svodi se na oblik

$$L_\infty = \max_t |h(t) - h_d(t)| \quad (2.10)$$

Potrebno je naglasiti da metode za aproksimaciju zadanog valnog oblika impulsnog odziva mogu biti iskorištene i za dizajniranje filtara specificiranih u frekvencijskoj domeni, kao na primjer selektivnih filtara.

## 2.5 Sinteza sustava temeljena na optimizacijskim postupcima

Posljednjih desetljeća, razvoj digitalnih računala i programske podrške doveli su do intenzivnog razvoja teorije i primjene optimizacijskih postupaka.

Dizajn sustava temeljen na optimizacijskim postupcima započinje formiranjem funkcije cilja koja opisuje zahtjeve postavljene na sustav. Takva funkcija cilja se tada minimizira, najčešće pomoću nekog postupka za numeričku optimizaciju [23], [24]. Dobar pregled modernih optimizacijskih postupaka, kao i niz primjera njihovog korištenja u dizajnu sustava dan je u [25].

## 3 Model pobude za mjerenje linearnih izobličenja u vremenskoj domeni

### 3.1 Sinc puls

U analizi i sintezi sustava koriste se različiti modeli pobudnih signala. Najpoznatiji su Diracov impuls i bijeli šum. Oba ova signala jednoliko pobuđuju sustav na svim frekvencijskim komponentama. Međutim, u praksi se obično promatra dio frekvencijskog područja. Stoga, ukoliko sustav želimo pobuditi u određenom frekvencijskom području, a analizu izobličenja želimo provesti u vremenskoj domeni, tada je potrebno odabrati model pobude čiji se spektar nalazi isključivo u zadanom frekvencijskom području. Jedan takav model signala može se dobiti ograničavanjem spektra Diracovog impulsa na zadano frekvencijsko područje. Tako dobiveni signal zove se sinc puls nulte faze karakteristike.

Sinc puls nulte faze koji jednoliko pobuđuje sve frekvencijske komponente sustava unutar područja  $-\omega_g \leq \omega \leq \omega_g$ , ima oblik

$$x(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \text{sinc}(\omega_g t) \quad (3.1)$$

gdje je

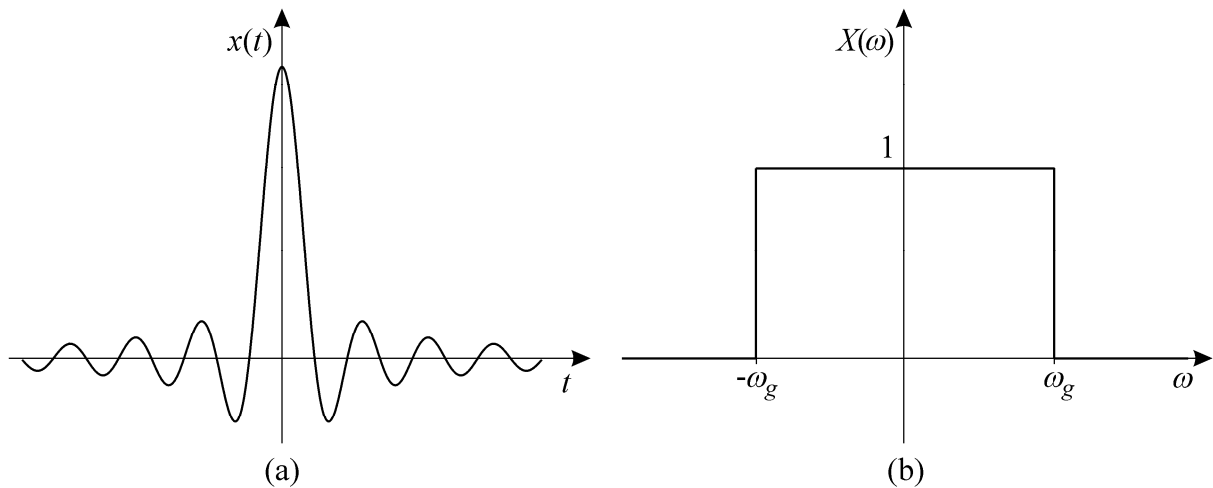
$$\text{sinc}(u) = \begin{cases} \frac{\sin(u)}{u} & , \quad u \neq 0 \\ 1 & , \quad u = 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Frekvencijska karakteristika sinc pulsa (3.1) je oblika

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \omega_g \\ 0 & , \quad |\omega| > \omega_g \end{cases} \quad (3.3)$$

Valni oblik sinc pulsa i njegova frekvencijska karakteristika prikazani su na slici 3.1.

U nastavku teksta bit će izveden analitički izraz za odziv sustava na sinc puls, te na ostale spektralno ograničene pobude koje se temelje na sinc pulsu. Tako će biti razmatrani niskopropusni, pojasnopropusni, pojasnonepropusni i visokopropusni signali. Navedeni izrazi bit će dani za kontinuiranu i diskretnu domenu.



Slika 3.1 Valni oblik (a) i frekvencijska karakteristika (b) sinc pulsa.

### 3.2 Odziv vremenski kontinuiranog sustava na sinc puls

Za računanje odziva sustava na neku pobudu, potrebno je poznavati ili impulsni odziv ili prijenosnu funkciju sustava. U ovom slučaju odabrana je prijenosna funkcija i to model opisan nulama, polovima i pojačanjem. Prijenosna funkcija kontinuiranog sustava reda  $N$  može se opisati izrazom

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (3.4)$$

gdje su  $z_i$  nule,  $p_k$  polovi, a  $H_0$  pojačanje sustava. Ako su polovi jednostruki i ako je  $M \leq N$ , tada je impulsni odziv sustava (3.4)

$$h(t) = \alpha H_0 \delta(t) + H_0 \sum_{r=1}^N K_r e^{p_r t} S(t) \quad (3.5)$$

gdje je  $\alpha$  konstanta određena brojem nula i polova prijenosne funkcije na način

$$\alpha = \begin{cases} 0 & , \quad M < N \\ 1 & , \quad M = N \end{cases} \quad (3.6)$$

dok su  $K_r$  reziduumi polova prijenosne funkcije dani izrazom

$$K_r = \frac{\prod_{i=1}^M (p_r - z_i)}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^N (p_r - p_k)}, \quad r = 1, \dots, N \quad (3.7)$$

Funkcije  $\delta(t)$  i  $S(t)$  u impulsnom odzivu (3.5) predstavljaju Diracov impuls i jediničnu stepenicu.

Za potrebe računanja odziva na sinc puls pretpostavit će se stabilni sustavi, tj. sustavi čiji se polovi nalaze u lijevoj poluravnini. Odziv sustava (3.4) na signal (3.1) dan je konvolucijom

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau \quad (3.8)$$

gdje je  $h(t)$  impulsni odziv sustava dan izrazom (3.5). Uvrštavanjem izraza (3.5) i (3.1) u (3.8) dobiva se

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega_g}{\pi} \text{sinc}(\omega_g \tau) \left[ \alpha H_0 \delta(t - \tau) + H_0 \sum_{r=1}^N K_r e^{p_r(t-\tau)} S(t - \tau) \right] d\tau \quad (3.9)$$

Budući je  $S(t - \tau) = 0$  za  $\tau > t$ , integral (3.9) može se zapisati kao

$$y(t) = \alpha H_0 \frac{\omega_g}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sinc}(\omega_g \tau) \delta(t - \tau) d\tau + H_0 \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{r=1}^N K_r e^{p_r t} \int_{-\infty}^t \text{sinc}(\omega_g \tau) e^{-p_r \tau} d\tau \quad (3.10)$$

Koristeći svojstvo delta funkcije, prvi integral u (3.10) može se analitički izračunati, te se dobiva

$$y(t) = \alpha H_0 \frac{\omega_g}{\pi} \text{sinc}(\omega_g t) + H_0 \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{r=1}^N K_r e^{p_r t} F_r(t) \quad (3.11)$$

Pri tom je s  $F_r(t)$  označen integral

$$F_r(t) = \int_{-\infty}^t \text{sinc}(\omega_g \tau) e^{-p_r \tau} d\tau \quad (3.12)$$

Koristeći Eulerovu formulu, integral (3.12) može se zapisati kao

$$F_r(t) = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^t \frac{e^{j\omega_g \tau - p_r \tau} - e^{-j\omega_g \tau - p_r \tau}}{\tau} d\tau \quad (3.13)$$

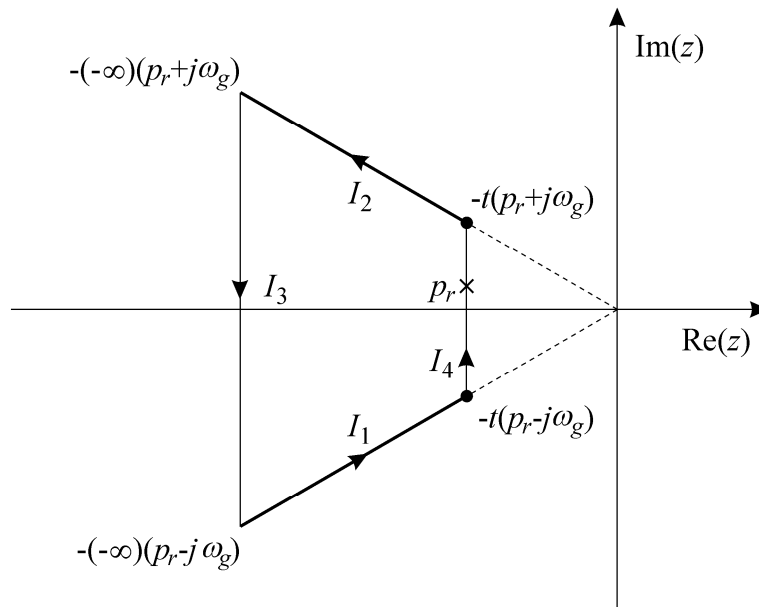
odnosno

$$F_r(t) = \frac{1}{2j} \left[ \int_{-\infty}^t \frac{e^{-\tau(p_r - j\omega_g)}}{\tau} d\tau - \int_{-\infty}^t \frac{e^{-\tau(p_r + j\omega_g)}}{\tau} d\tau \right] \quad (3.14)$$

Supstitucijom  $z = -\tau(p_r - j\omega_g)$  u prvi integral, odnosno  $z = -\tau(p_r + j\omega_g)$  u drugi integral izraza (3.14) dobiva se

$$F_r(t) = \frac{1}{2j} \left[ \int_{-(-\infty)(p_r - j\omega_g)}^{-t(p_r - j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz + \int_{-(-\infty)(p_r + j\omega_g)}^{-t(p_r + j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz \right] = \frac{1}{2j} (I_1 + I_2) \quad (3.15)$$

Uz pretpostavku  $\text{Re}(p_r) < 0$ , računanje  $F_r(t)$  se svodi na tri slučaja  $t < 0$ ,  $t > 0$  i  $t = 0$ . Kod određivanja  $F_r(t)$  bit će dodana dva integrala,  $I_3$  i  $I_4$ , tako da putovi integracije integrala  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$  i  $I_4$  čine zatvorenu krivulju. Za slučaj  $t < 0$  ova krivulja prikazana je slikom 3.2. Uočiti da su putovi integracije integrala  $I_1$  i  $I_2$  pravci, obzirom da varijabla  $t$  pripada skupu realnih brojeva.



Slika 3.2 Putovi integracije funkcije  $F_r(t)$  za  $t < 0$ .

Obzirom da je funkcija  $e^z/z$  analitička u lijevoj poluravnini, integral ove funkcije po zatvorenoj krivulji u tom dijelu ravnine je jednak 0, tj. vrijedi

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 \quad (3.16)$$

Obzirom da vrijedi

$$\lim_{\text{Re}(z) \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^z}{z} \right) = 0 \quad (3.17)$$

slijedi da je  $I_3=0$  odnosno  $I_1+I_2=-I_4$ . Ovime funkcija  $F_r(t)$  za  $t<0$  poprima oblik

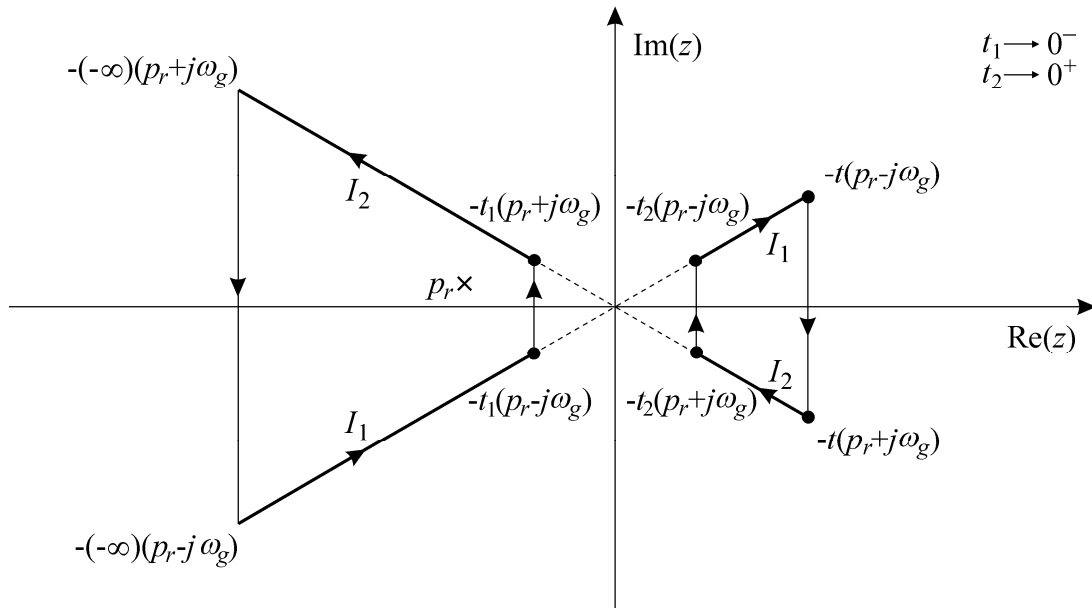
$$F_r(t) = -\frac{1}{2j} \int_{-t(p_r-j\omega_g)}^{-t(p_r+j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz, \quad t < 0 \quad (3.18)$$

Za  $t>0$  putovi integracije integrala  $I_1$  i  $I_2$  prolaze kroz ishodište kompleksne ravnine. Zbog singulariteta funkcije  $e^z/z$  u točki  $z=0$ , potrebno je uzeti Cauchyevu glavnu vrijednost (engl. Cauchy Principal Value, PV) integrala iz (3.15), tj.  $F_r(t)$  je potrebno zapisati kao

$$F_r(t) = \frac{1}{2j} \left[ \lim_{t_1 \rightarrow 0^-} \left( \int_{-(-\infty)(p_r-j\omega_g)}^{-t_1(p_r-j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz + \int_{-t_1(p_r+j\omega_g)}^{-(-\infty)(p_r+j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz \right) + \lim_{t_2 \rightarrow 0^+} \left( \int_{-t_2(p_r-j\omega_g)}^{-t(p_r-j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz + \int_{-t(p_r+j\omega_g)}^{-t_2(p_r+j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz \right) \right] \quad (3.19)$$

Dobiveni putovi integracije integrala  $I_1$  i  $I_2$  iz (3.15) za slučaj  $t>0$  prikazani su na slici 3.3. Kao i u prethodnom slučaju, obzirom da je funkcija  $e^z/z$  analitička i u lijevoj i u desnoj poluravnini, integrali po zatvorenim krivuljama u tim dijelovima ravnine jednaki su 0. Odabirom zatvorenih krivulja sa slike 3.3,  $F_r(t)$  se može reducirati na

$$F_r(t) = \frac{1}{2j} \left[ \lim_{t_1 \rightarrow 0^-} \left( - \int_{-t_1(p_r-j\omega_g)}^{-t_1(p_r+j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz \right) + \lim_{t_2 \rightarrow 0^+} \left( \int_{-t_2(p_r-j\omega_g)}^{-t_2(p_r+j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz \right) - \int_{-t(p_r-j\omega_g)}^{-t(p_r+j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz \right] \quad (3.20)$$


 Slika 3.3 Putovi integracije funkcije  $F_r(t)$  za  $t > 0$ .

Za računanje sume limesa u (3.20) potrebno je prvo izračunati primitivnu funkciju neodređenog integrala, tj.

$$\int \frac{e^z}{z} dz = \int \left( \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \dots \right) dz = \ln(z) + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{18} + \dots \quad (3.21)$$

Potrebno je napomenuti da gornja definicija u općem slučaju sadrži funkciju  $\text{Ln}(z)$  pri čemu je

$$\text{Ln}(z) = \ln(z) + j2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3.22)$$

U ovom slučaju vrijedi  $-\pi < \arg(z) \leq \pi$  pa je ispravno koristiti funkciju njenu osnovnu granu,  $\ln(z)$ . Rez funkcije  $\ln(z)$  nalazi se na negativnoj realnoj poluosi.

Računanje prvog limesa u izrazu (3.20) ovisi o putu integracije, odnosno o položaju početne i krajnje točke puta obzirom na rez funkcije  $\ln(z)$ . U ovom slučaju su zbog  $\text{Re}(p_r) < 0$  i  $t_1 \rightarrow 0^-$  početna i krajnja točka puta uvijek smještene u lijevoj poluravnini. Ako su granice integracije s iste strane reza tada se izravno može primijeniti Newtonovo pravilo jer je primitivna funkcija neprekinuta na tom dijelu, odnosno

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{t_1 \rightarrow 0^-} \left( - \int_{-t_1(p_r - j\omega_g)}^{-t_1(p_r + j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz \right) \\ &= \lim_{t_1 \rightarrow 0^-} \left\{ -\ln[-t_1(p_r + j\omega_g)] + \ln[-t_1(p_r - j\omega_g)] \right\} \end{aligned} \quad (3.23)$$



Koristeći pravilo za logaritam produkta

$$\ln(z_1 z_2) = \ln(z_1) + \ln(z_2) \quad (3.24)$$

koje se može primijeniti ako i samo ako je zadovoljen uvjet  $-\pi < \arg(z_1) + \arg(z_2) \leq \pi$ . Obzirom da u promatranom slučaju vrijedi  $-\pi < \arg(-t_1) + \arg(p_r \pm j\omega_g) \leq \pi$ , spomenuti uvjet je zadovoljen pa se izraz (3.23) može se zapisati kao

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{t_1 \rightarrow 0^-} \left[ -\ln(-t_1) - \ln(p_r + j\omega_g) + \ln(-t_1) + \ln(p_r - j\omega_g) \right] \\ &= -\ln(p_r + j\omega_g) + \ln(p_r - j\omega_g) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Ako su granice integracije na suprotnim stranama obzirom na rez funkcije  $\ln(z)$  tada se ne može izravno primijeniti Newtonovo pravilo jer primitivna funkcija na tom putu ima pozitivan skok za  $j2\pi$ , tj. prekinuta je. Skok  $j2\pi$  zapravo predstavlja prijelaz u drugu granu logaritma  $\ln(z)$  kao što se vidi iz (3.22). Eliminiranje skoka primitivne funkcije vodi k

$$L_1 = -\ln(p_r + j\omega_g) + \ln(p_r - j\omega_g) + j2\pi \quad (3.26)$$

Kod računanja drugog limesa u izrazu (3.20) može se izravno primijeniti Newtonovo pravilo budući su zbog  $\operatorname{Re}(p_r) < 0$  i  $t_2 \rightarrow 0^+$  početna i krajnja točka puta uvijek smještene u desnoj poluravnini. Drugim riječima, primitivna funkcija (3.21) je na tom dijelu neprekinuta jer na tom dijelu  $\ln(z)$  nema rez. Stoga, drugi limes ima oblik

$$L_2 = \lim_{t_2 \rightarrow 0^+} \left( \int_{-t_2(p_r - j\omega_g)}^{-t_2(p_r + j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz \right) = \lim_{t_2 \rightarrow 0^+} \left\{ \ln[-t_2(p_r + j\omega_g)] - \ln[-t_2(p_r - j\omega_g)] \right\} \quad (3.27)$$

Budući da vrijedi  $-\pi < \arg(t_2) + \arg[-(p_r \pm j\omega_g)] \leq \pi$ , može se primijeniti pravilo za logaritam produkta. Ovime drugi limes poprima oblik

$$\begin{aligned} L_2 &= \lim_{t_2 \rightarrow 0^+} \left[ \ln(t_2) + \ln(-p_r - j\omega_g) - \ln(t_2) - \ln(-p_r + j\omega_g) \right] \\ &= \ln(-p_r - j\omega_g) - \ln(-p_r + j\omega_g) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Uvođenjem oznaka  $z_1 = p_r + j\omega_g$  i  $z_2 = p_r - j\omega_g$ , suma prva dva limesa u (3.20) iznosi

$$L_1 + L_2 = -\ln(z_1) + \ln(z_2) + \ln(-z_1) - \ln(-z_2) + j2\pi \quad (3.29)$$

ako su  $z_1$  i  $z_2$  u lijevoj poluravnini i na suprotnim stranama reza funkcije  $\ln(z)$ . U protivnom suma limesa iznosi

$$L_1 + L_2 = -\ln(z_1) + \ln(z_2) + \ln(-z_1) - \ln(-z_2) \quad (3.30)$$

Primjenom definicije logaritamske funkcije

$$\ln(z) = \ln|z| + j \arg(z) \quad , \quad -\pi < \arg(z) \leq \pi \quad (3.31)$$

suma logaritama u (3.29) i (3.30) može se zapisati kao

$$\begin{aligned} -\ln(z_1) + \ln(z_2) + \ln(-z_1) - \ln(-z_2) = & -\ln|z_1| + \ln|z_2| + \ln|-z_1| - \ln|-z_2| \\ & + j[-\arg(z_1) + \arg(-z_1) + \arg(z_2) - \arg(-z_2)] \end{aligned} \quad (3.32)$$

odnosno, nakon kraćenja logaritama, kao

$$-\ln(z_1) + \ln(z_2) + \ln(-z_1) - \ln(-z_2) = j[-\arg(z_1) + \arg(-z_1) + \arg(z_2) - \arg(-z_2)] \quad (3.33)$$

Može se lako pokazati da ako su  $z_1$  i  $z_2$  s iste strane reza funkcije  $\ln(z)$  suma argumenata u (3.33) iščezava pa je u tom slučaju

$$-\ln(z_1) + \ln(z_2) + \ln(-z_1) - \ln(-z_2) = 0 \quad (3.34)$$

Ako su  $z_1$  i  $z_2$  na suprotnim stranama obzirom na rez funkcije  $\ln(z)$ , te uz pretpostavku da je  $\omega_g > 0$ , suma argumenata u (3.33) jednaka  $-2\pi$ , odnosno da je

$$-\ln(z_1) + \ln(z_2) + \ln(-z_1) - \ln(-z_2) = -j2\pi \quad (3.35)$$

Iz (3.34) odnosno (3.35) slijedi da je suma limesa u izrazu (3.20) uvijek jednaka 0. Prema tome, funkcija  $F_r(t)$  u izrazu (3.20) za  $t > 0$  poprima oblik

$$F_r(t) = -\frac{1}{2j} \int_{-t(p_r - j\omega_g)}^{-t(p_r + j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz \quad , \quad t > 0 \quad (3.36)$$

Kao što se vidi iz (3.18) i (3.36) funkcija  $F_r(t)$  ima isti oblik neovisno o tome da li je  $t < 0$  ili  $t > 0$ , tj.

$$F_r(t) = \frac{j}{2} \int_{-t(p_r - j\omega_g)}^{-t(p_r + j\omega_g)} \frac{e^z}{z} dz \quad , \quad t \neq 0 \quad (3.37)$$

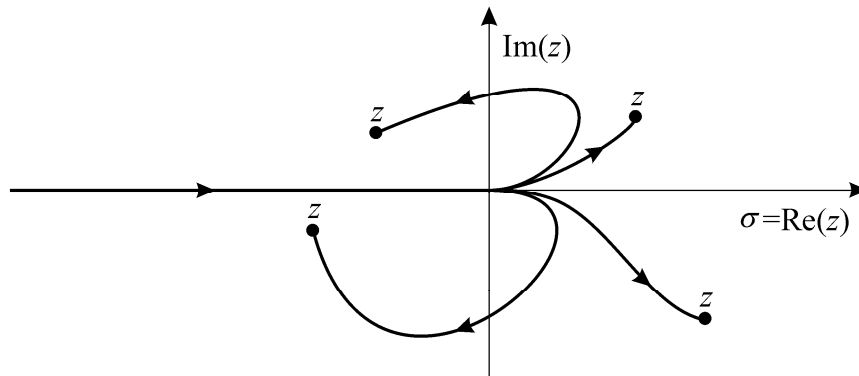
Za računanje integrala (3.37) potrebno je poznavati primitivnu funkciju. U ovom slučaju primitivna funkcija je eksponencijalni integral. Ova funkcija definirana je preko integrala, a ima više definicija koje se razlikuju u granicama integracije. U daljnjem tekstu bit će korištena sljedeća definicija [26]

$$ei(z) = \int_{-\infty}^z \frac{e^u}{u} du \quad (3.38)$$

Funkcija eksponencijalni integral definirana je kao analitičko proširenje funkcije realne varijable

$$ei(\sigma) = \text{PV} \int_{-\infty}^{\sigma} \frac{e^u}{u} du, \quad \sigma > 0 \quad (3.39)$$

Mogući putovi integracije eksponencijalnog integrala (3.38) ovisno o varijabli  $z$  prikazani su na slici 3.4.



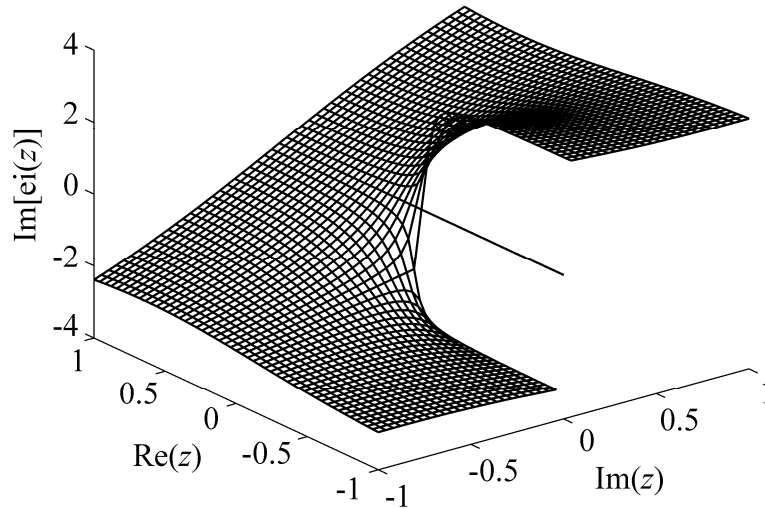
Slika 3.4 Put integracije funkcije  $ei(z)$ .

Poseban slučaj predstavlja  $\arg(z)=\pi$ , tj.  $z$  koji poprima realne negativne vrijednosti. U tom slučaju funkcija  $ei(z)$  poprima realne vrijednosti definirane integralom (3.39), uz pretpostavku  $\sigma < 0$ . Posljedica toga je da funkcija  $ei(z)$ , tj. njezin imaginarni dio  $\text{Im}[ei(z)]$ , ima rez po negativnoj realnoj poluosi. Osim toga,  $ei(z)$  poprima samo realne vrijednosti za  $z \in \mathfrak{R}$ , tj.  $\text{Im}[ei(z)]=0$ . Imaginarni dio funkcije  $ei(z)$  prikazan je na slici 3.5. Opisani rez funkcije može se formalno zapisati na način

$$\lim_{\substack{\text{Im}(z) \rightarrow 0^+ \\ \text{Re}(z) < 0}} ei(z) = j\pi \quad (3.40)$$

i s druge strane

$$\lim_{\substack{\text{Im}(z) \rightarrow 0^- \\ \text{Re}(z) < 0}} ei(z) = -j\pi \quad (3.41)$$

Slika 3.5 Imaginarni dio funkcije  $ei(z)$ .

U nastavku su dana neka svojstva funkcije  $ei(z)$  koja će biti korištena u daljnjim razmatranjima. Razvoj u red oko točke  $z=0$  ima oblik

$$ei(z) = \begin{cases} \gamma + \ln(z) + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{18} + \dots - j\pi & , z \in R^- \\ \gamma + \ln(z) + z + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{18} + \dots & , \text{inače} \end{cases} \quad (3.42)$$

gdje je  $\gamma$  Eulerov broj. Razvoj u red obično se koristi u implementaciji funkcije. Iz razvoja u red vidi se da vrijedi sljedeći limes

$$\lim_{z \rightarrow 0} ei(z) = \begin{cases} \gamma + \ln(z) - j\pi & , z \in R^- \\ \gamma + \ln(z) & , \text{inače} \end{cases} \quad (3.43)$$

Za opisanu primitivnu funkciju rješenje integrala  $F_r(t)$  ovisi o predznaku varijable  $t$ . Za  $t < 0$  put integracije može prelaziti preko reza funkcije  $ei(z)$  pa se u tom slučaju ne može izravno primijeniti Newtonovo pravilo već se prvo mora eliminirati prekinutost primitivne funkcije. U ovom slučaju  $F_r(t)$  ima oblik

$$F_r(t) = \frac{j}{2} \left\{ ei[-t(p_r + j\omega_g)] - ei[-t(p_r - j\omega_g)] - C \right\} , \quad t < 0 \quad (3.44)$$

Konstanta  $C$  eliminira skok primitivne funkcije. Ovisno o  $\omega_g$  i  $\text{Im}(p_r)$  ima iznos

$$C = \begin{cases} 0 & , \quad \text{Im}(p_r) > 0 \text{ ili } \text{Im}(p_r) < -\omega_g \\ j\pi & , \quad \text{Im}(p_r) = \omega_g \text{ ili } \text{Im}(p_r) = -\omega_g \\ j2\pi & , \quad -\omega_g < \text{Im}(p_r) < \omega_g \end{cases} \quad (3.45)$$

Slučaj  $C=0$  odgovara putu integracije koji ne ide preko reza. Slučaj  $C=j\pi$  odgovara putu kod kojeg je jedna od granica integracije na negativnoj realnoj poluosi, a slučaj  $C=j2\pi$  putu kod kojeg su granice integracije na suprotnim stranama reza funkcije  $ei(z)$ .

Za  $t>0$  početna i krajnja točka puta integracije nalaze se uvijek u desnoj poluravnini, a tamo funkcija  $ei(z)$  nema rez. Stoga, u ovom slučaju  $F_r(t)$  ima oblik

$$F_r(t) = \frac{j}{2} \left\{ ei[-t(p_r + j\omega_g)] - ei[-t(p_r - j\omega_g)] \right\} \quad , \quad t > 0 \quad (3.46)$$

Slučaj  $t=0$  dobiva se kao lijevi ili desni limes funkcije (3.44) odnosno (3.46). Obzirom da nema reza u desnoj poluravnini, računat će se desni limes, tj.

$$F_r(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{j}{2} \left\{ ei[-t(p_r + j\omega_g)] - ei[-t(p_r - j\omega_g)] \right\} \quad (3.47)$$

Za računanje limesa (3.47) iskoristit će se izraz (3.43) čime se dobiva

$$F_r(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{j}{2} \left\{ \ln[-t(p_r + j\omega_g)] - \ln[-t(p_r - j\omega_g)] \right\} \quad (3.48)$$

Budući vrijedi  $-\pi < \arg(t) + \arg[-(p_r \pm j\omega_g)] \leq \pi$ , može se primijeniti pravilo za logaritam produkta pa se za  $t=0$  dobiva

$$F_r(t) = \frac{j}{2} \left[ \ln(-p_r - j\omega_g) - \ln(-p_r + j\omega_g) \right] \quad (3.49)$$

Konačno, funkcija  $F_r(t)$  može se ovisno o  $t$  zapisati na način

$$F_r(t) = \frac{j}{2} \begin{cases} ei[-t(p_r + j\omega_g)] - ei[-t(p_r - j\omega_g)] - C & , \quad t < 0 \\ \ln(-p_r - j\omega_g) - \ln(-p_r + j\omega_g) & , \quad t = 0 \\ ei[-t(p_r + j\omega_g)] - ei[-t(p_r - j\omega_g)] & , \quad t > 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

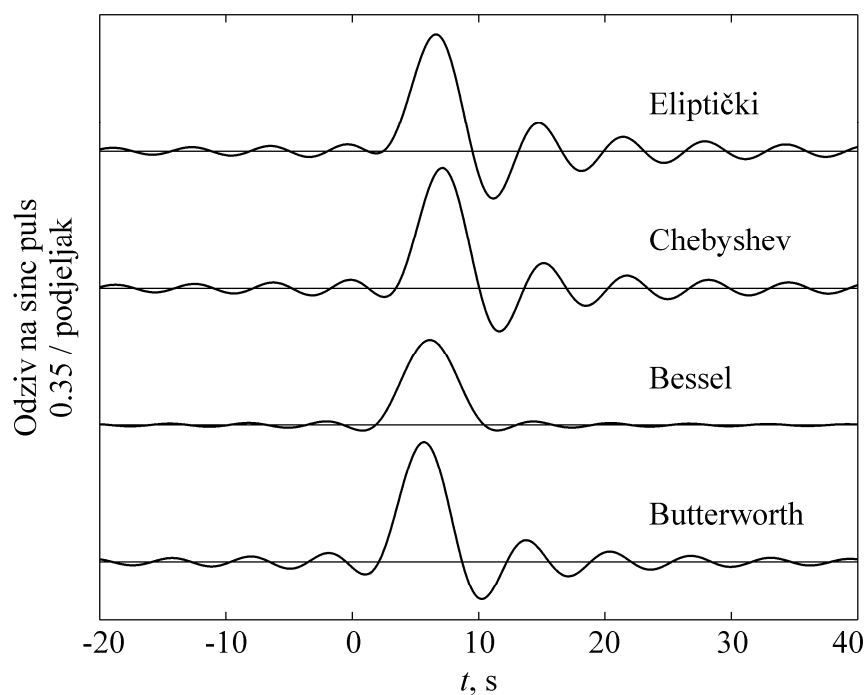
pri čemu je konstanta  $C$  definirana izrazom (3.45). Ovime je izvod odziva kontinuiranog sustava na sinc puls završen, a odziv je definiran izrazima (3.11), (3.6), (3.7) i (3.50).

### 3.3 Primjeri odziva sustava na sinc puls

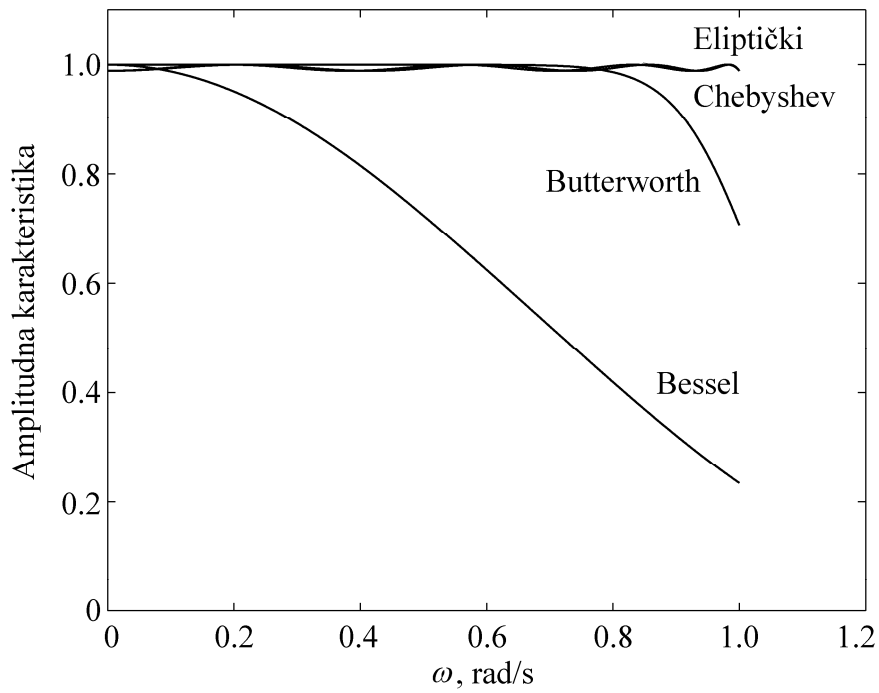
Odziv na sinc puls predstavlja novi alat za analizu i sintezu sustava. Štoviše, impulsni odziv je samo njegov specijalan slučaj. Naime, ako granična frekvencija sinc pulsa teži u beskonačnost, sinc puls postaje Diracov impuls, a odziv na sinc puls impulsni odziv. Formalno zapisano, vrijedi

$$h(t) = \lim_{\omega_g \rightarrow \infty} y(\omega_g, t) \quad (3.51)$$

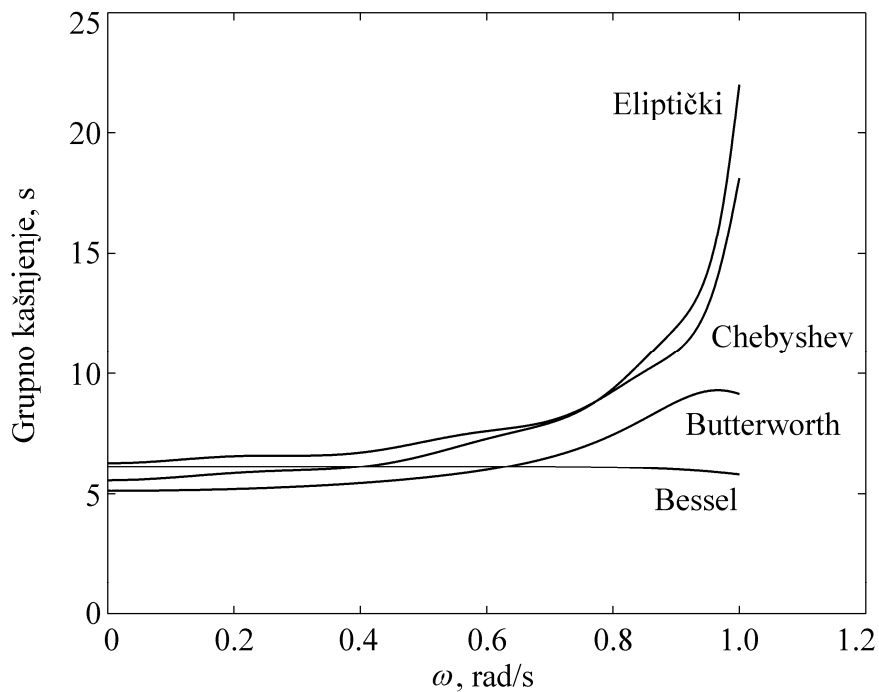
Za ilustraciju odziva na sinc puls poslužit će niskopropusni Butterworthov, Besselov, Chebyshev i eliptički filter osmog reda. Pritom su svi filteri normirani na frekvenciju 1rad/s. Valovitost u području propuštanja Chebyshevjevog i eliptičkog filtra iznosi 0.1dB, a valovitost u području gušenja eliptičkog filtra iznosi 100dB. Za pobudu uzet je sinc puls granične frekvencije jednake graničnoj frekvenciji filtera, tj.  $\omega_g=1$ rad/s. Odziv filtera na sinc puls prikazan je na slici 3.6, dok su njegova amplitudna karakteristika i karakteristika grupnog kašnjenja prikazani su na slikama 3.7 i 3.8.



Slika 3.6 Odziv na sinc puls nekih klasičnih filtera osmog reda, svi normirani na  $\omega_g=1$ rad/s.



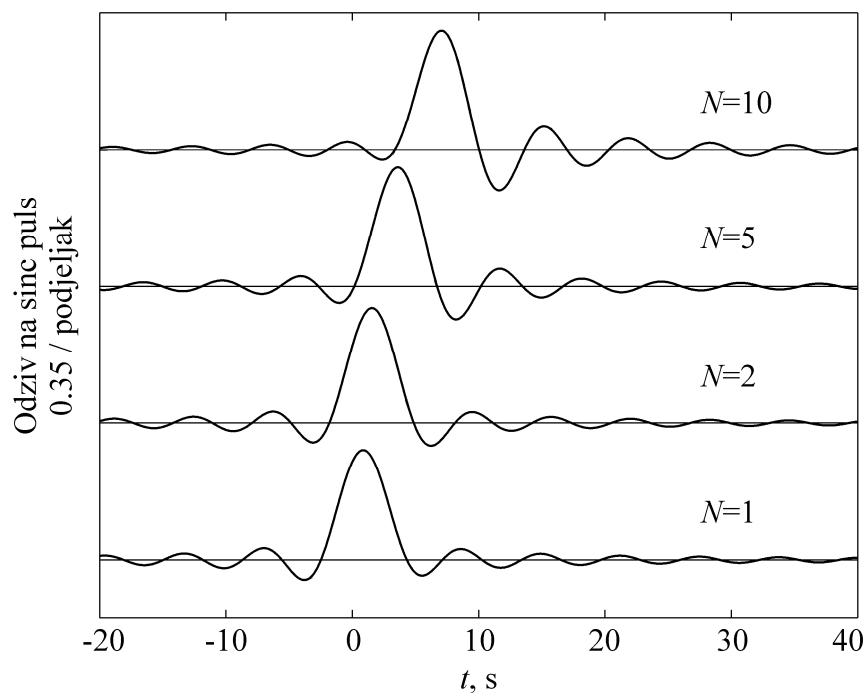
Slika 3.7 Amplitudna karakteristika odziva na sinc puls nekih klasičnih filtara osmog reda normiranih na  $\omega_g=1\text{rad/s}$ .



Slika 3.8 Grupno kašnjenje odziva na sinc puls nekih klasičnih filtara osmog reda normiranih na  $\omega_g=1\text{rad/s}$ .

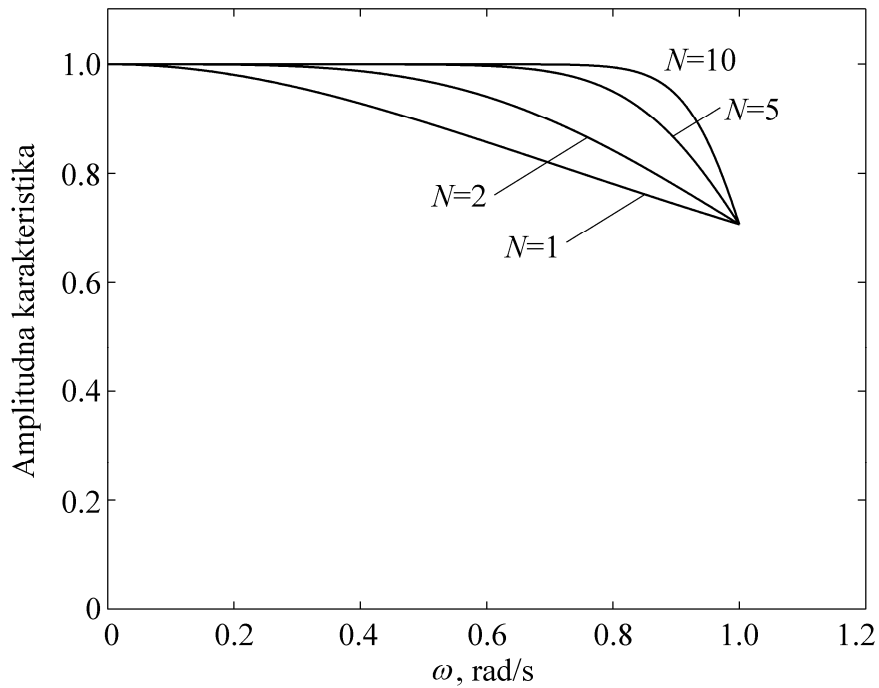
Iz odziva se može uočiti da selektivni filtri narušavaju simetričnost valnog oblika. To je posljedica njihove nelinearne fazne karakteristike. Selektivniji filtri imaju lošiju faznu karakteristiku, pa je simetričnost veća kod Butterworthovog filtra nego kod Chebyshevljevog ili eliptičkog filtra. Za razliku od njih, Besselov filter kao predstavnik filtera s linearnom faznom karakteristikom ima približno simetričan odziv. Međutim, istitavanje njegovog odziva prije i poslije glavne latice značajno je prigušeno. To je posljedica monotono padajuće amplitudne karakteristike filtra u području propuštanja. Osim simetričnosti, iz valnih oblika odziva može se uočiti i njihova sličnost s impulsnim odzivom. Naime, eliptički filter je predstavnik jako strmih filtera. Stoga su amplitudni dijelovi spektra odziva na sinc puls i impulsnog odziva približno jednaki. To se u vremenskoj domeni manifestira u sličnosti odziva na sinc puls i njegovog impulsnog odziva.

Interesantno je pogledati odziv na sinc puls jedne familije filtera za razne redove. Na slici 3.9 prikazan je odziv Butterworthovog filtra prvog, drugog, petog i desetog reda, a na slikama 3.10 i 3.11 prikazani su amplitudna karakteristika i karakteristika grupnog kašnjenja. Svi filtri imaju istu graničnu frekvenciju iznosa  $\omega_{3dB}=1\text{rad/s}$ . Granična frekvencija sinc pulsa odgovara graničnim frekvencijama filtera, tj.  $\omega_g=1\text{rad/s}$ . Povećanjem reda filtra povećava se istiravanje odziva na sinc puls. To je posljedica povećanja strmine amplitudne karakteristike filtra unutar područja propuštanja. Tako za velike redove odziv na sinc puls sve više poprima valni oblik impulsnog odziva. S druge strane, povećanjem reda smanjuje se simetričnost odziva što je posljedica veće nelinearnosti fazne karakteristike filtra kod viših redova.

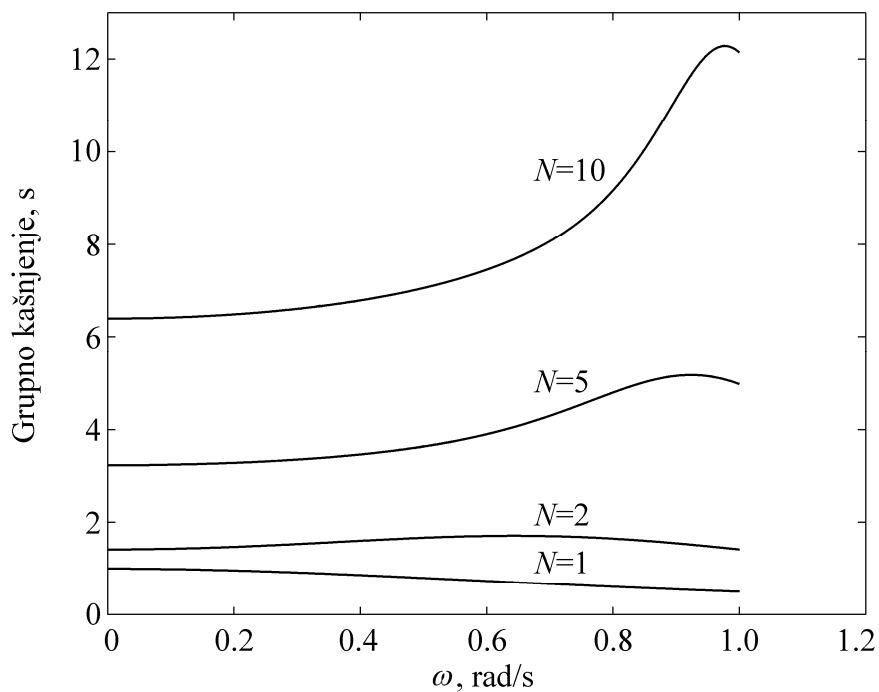


Slika 3.9 Odziv na sinc puls Butterworthovog filtra od prvog do desetog reda granične frekvencije  $\omega_g = \omega_{3dB} = 1\text{rad/s}$ .





Slika 3.10 Amplitudna karakteristika odziva na sinc puls Butterworthovog filtra od prvog do desetog reda granične frekvencije  $\omega_g = \omega_{3dB} = 1$  rad/s.



Slika 3.11 Grupno kašnjenje odziva na sinc puls Butterworthovog filtra od prvog do desetog reda granične frekvencije  $\omega_g = \omega_{3dB} = 1$  rad/s.

### 3.4 Modeli pobude izvedeni iz sinc pulsa

Osim niskopropusnih sustava, u praksi se često susreću i pojasnopropusni, pojasnonepropusni i visokopropusni sustavi. Takve je sustave potrebno pobuditi odgovarajućim signalom. Ukoliko se radi o pojasnopropusnom sustavu, sinc puls je potrebno transformirati u odgovarajući pojasnopropusni puls. U tom slučaju komponente pulsa smještene su u frekvencijskom području  $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$ . Pojasnopropusni puls nulte faze i jedinične amplitude je linearna kombinacija dva sinc pulsa s graničnim frekvencijama  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Stoga je pojasnopropusni puls dan izrazom

$$x_{pp}(t) = \frac{\omega_2}{\pi} \text{sinc}(\omega_2 t) - \frac{\omega_1}{\pi} \text{sinc}(\omega_1 t) \quad (3.52)$$

Za linearne sustave, odziv na puls (3.52) je također linearna kombinacija odgovarajućih niskopropusnih odziva (3.11), tj.

$$y_{pp}(t) = y(\omega_2, t) - y(\omega_1, t) \quad (3.53)$$

U slučaju visokopropusnog sustava granične frekvencije  $\omega_g$ , pobudni puls je linearna kombinacija Diracovog impulsa i sinc pulsa granične frekvencije jednake graničnoj frekvenciji visokopropusnog sustava, tj.

$$x_{vp}(t) = \delta(t) - \frac{\omega_g}{\pi} \text{sinc}(\omega_g t) \quad (3.54)$$

Prema tome, odziv sustava je razlika impulsnog odziva i odgovarajućeg niskopropusnog odziva, tj.

$$y_{vp}(t) = h(t) - y(\omega_g, t) \quad (3.55)$$

Ukoliko se sustav želi pobuditi na svim frekvencijama osim na frekvencijama između  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , sinc puls je formiran kao razlika Diracovog impulsa i pojasnopropusnog pulsa s graničnim frekvencijama  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , tj.

$$x_{pb}(t) = \delta(t) - \frac{\omega_2}{\pi} \text{sinc}(\omega_2 t) + \frac{\omega_1}{\pi} \text{sinc}(\omega_1 t) \quad (3.56)$$

Odziv sustava u tom slučaju je razlika njegovog impulsnog odziva i odgovarajućeg odziva na pojasnopropusni puls, tj.

$$y_{pb}(t) = h(t) - y(\omega_2, t) + y(\omega_1, t) \quad (3.57)$$

### 3.5 Energija odziva na sinc puls

Često je u analizi i sintezi sustava osim odziva na danu pobudu potrebno poznavati i energiju odziva. U nastavku teksta bit će izvedena energija odziva kontinuiranog sustava na sinc puls, te energija odziva na modele pobude opisane u prethodnom poglavlju.

Energija signala može se računati ili u frekvencijskoj ili u vremenskoj domeni. Naime, jednakost energije u obje domene definirana je Parsevalovom jednakosti. Budući je odziv (3.11) složen izraz, energija će se računati u frekvencijskoj domeni. Radi lakšeg računanja, prijenosna funkcija sustava (3.4) rastavit će se na parcijalne razlomke kao

$$H(s) = \alpha H_0 + H_0 \sum_{r=1}^N \frac{K_r}{s - p_r} \quad (3.58)$$

Energija odziva na sinc puls određuje se pomoću integrala [27]

$$e_y = \frac{1}{j2\pi} \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} H(s)H(-s)ds \quad (3.59)$$

pri čemu je put integracije duž  $j\omega$  osi. Uvrštavanjem (3.58) u (3.59) dobiva se

$$e_y = \frac{H_0^2}{j2\pi} \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} \left( \alpha + \sum_{r=1}^N \frac{K_r}{s - p_r} \right) \left( \alpha + \sum_{r=1}^N \frac{K_r}{-s - p_r} \right) ds \quad (3.60)$$

Nakon množenja u podintegralnoj funkciji, energija poprima oblik

$$e_y = \frac{H_0^2}{j2\pi} \left[ \alpha^2 \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} ds + \alpha \sum_{r=1}^N K_r \left( \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} \frac{ds}{s - p_r} + \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} \frac{ds}{-s - p_r} \right) + \sum_{r=1}^N \sum_{q=1}^N K_r K_q \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} \frac{ds}{(s - p_r)(-s - p_q)} \right] \quad (3.61)$$

Kao što se vidi iz izraza (3.61), za računanje energije potrebno je izračunati 4 integrala. Prvi integral iznosi

$$I_1 = \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} ds = j2\omega_g \quad (3.62)$$

U drugom integralu potrebno je napraviti supstituciju  $z=s-p_r$ , koja daje

$$I_2 = \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} \frac{ds}{s-p_r} = \int_{-p_r-j\omega_g}^{-p_r+j\omega_g} \frac{dz}{z} = \ln(-p_r+j\omega_g) - \ln(-p_r-j\omega_g) \quad (3.63)$$

Uočiti da zbog  $\text{Re}(p_r) < 0$  put integracije ne prelazi rez funkcije  $\ln(z)$ , pa je izravno primijenjeno Newtonovo pravilo. Obzirom da su  $-p_r+j\omega_g$  i  $-p_r-j\omega_g$  uvijek smješteni u desnoj poluravnini moguće je primijeniti pravilo za logaritam kvocijenta

$$\ln\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \ln(z_1) - \ln(z_2) \quad (3.64)$$

koje vrijedi ako i samo ako je  $-\pi < \arg(z_1) - \arg(z_2) \leq \pi$ , što je u ovom slučaju zadovoljeno. Drugi integral stoga iznosi

$$I_2 = \ln \frac{-p_r+j\omega_g}{-p_r-j\omega_g} \quad (3.65)$$

Analogno drugom, računa se i treći integral uvođenjem supstitucije  $z=-s-p_r$  pa se dobiva

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} \frac{ds}{-s-p_r} = \int_{-p_r-j\omega_g}^{-p_r+j\omega_g} \frac{dz}{z} \\ &= \ln(-p_r+j\omega_g) - \ln(-p_r-j\omega_g) = \ln \frac{-p_r+j\omega_g}{-p_r-j\omega_g} \end{aligned} \quad (3.66)$$

Četvrti integral potrebno je rastaviti na parcijalne razlomke oblika

$$I_4 = \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} \frac{ds}{(s-p_r)(-s-p_q)} = -\frac{1}{p_r+p_q} \left( \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} \frac{ds}{s-p_r} + \int_{-j\omega_g}^{j\omega_g} \frac{ds}{-s-p_q} \right) \quad (3.67)$$

čime se dobivaju dva integrala čija su rješenja dana u (3.65) i (3.66). Stoga, četvrti integral iznosi

$$I_4 = -\frac{1}{p_r+p_q} \left( \ln \frac{-p_r+j\omega_g}{-p_r-j\omega_g} + \ln \frac{-p_q+j\omega_g}{-p_q-j\omega_g} \right) \quad (3.68)$$

Uvrštavanjem (3.62), (3.65), (3.66) i (3.68) u izraz za energiju (3.61) dobiva se

$$e_y = \frac{H_0^2}{j2\pi} \left[ j2\omega_g \alpha^2 + 2\alpha \sum_{r=1}^N K_r \ln \frac{-p_r + j\omega_g}{-p_r - j\omega_g} - \sum_{r=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{K_r K_q}{p_r + p_q} \left( \ln \frac{-p_r + j\omega_g}{-p_r - j\omega_g} + \ln \frac{-p_q + j\omega_g}{-p_q - j\omega_g} \right) \right] \quad (3.69)$$

odnosno, nakon sređivanja

$$e_y = \frac{H_0^2}{j\pi} \left( j\alpha^2 \omega_g + \alpha \sum_{r=1}^N K_r \ln \frac{-p_r + j\omega_g}{-p_r - j\omega_g} - \sum_{r=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{K_r K_q}{p_r + p_q} \ln \frac{-p_r + j\omega_g}{-p_r - j\omega_g} \right) \quad (3.70)$$

Konačno, svođenjem na jednu sumu, energija odziva kontinuiranog sustava na niskopropusni oblik sinc pulsa određena je izrazom

$$e_y = \frac{H_0^2}{\pi} \left[ \alpha^2 \omega_g + \frac{1}{j} \sum_{r=1}^N K_r \left( \alpha - \sum_{q=1}^N \frac{K_q}{p_r + p_q} \right) \ln \frac{-p_r + j\omega_g}{-p_r - j\omega_g} \right] \quad (3.71)$$

U nastavku teksta bit će obrađeni neki specijalni slučajevi. Kao prvi bit će uzet sustav koji ima jednak broj nula i polova, tj.  $M=N$ . U tom slučaju je prema (3.6)  $\alpha=1$  i energija odziva na sinc puls određena je izrazom (3.71).

Kod drugog slučaja neka je još uvijek  $M=N$ , ali neka je umjesto sinc pulsa granične frekvencije  $\omega_g$  uzet Diracov impuls kao njegov specijalan slučaj, tj. sinc puls kod kojeg  $\omega_g \rightarrow \infty$ . U tom slučaju, energija odziva postaje

$$e_y = \lim_{\omega_g \rightarrow \infty} \frac{H_0^2}{\pi} \left[ \alpha^2 \omega_g + \frac{1}{j} \sum_{r=1}^N K_r \left( \alpha - \sum_{q=1}^N \frac{K_q}{p_r + p_q} \right) \ln \frac{-p_r + j\omega_g}{-p_r - j\omega_g} \right] = \infty \quad (3.72)$$

Pri tom je uzeto u obzir da vrijedi

$$\lim_{\omega_g \rightarrow \infty} \ln \frac{-p_r + j\omega_g}{-p_r - j\omega_g} = j\pi \quad (3.73)$$

Kao treći specijalni slučaj uzet je sustav kod kojeg je stupanj brojnika manji od stupnja nazivnika, tj.  $M < N$ . U tom slučaju je  $\alpha=0$  i energija odziva poprima oblik

$$e_y = -\frac{H_0^2}{j\pi} \sum_{r=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{K_r K_q}{p_r + p_q} \ln \frac{-p_r + j\omega_g}{-p_r - j\omega_g} \quad (3.74)$$

U posljednjem slučaju neka je još uvijek  $M < N$ , ali neka je umjesto sinc pulsa uzet Diracov impuls. U tom slučaju energija odziva jednaka je energiji impulsnog odziva i iznosi

$$e_y = -H_0^2 \sum_{r=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{K_r K_q}{p_r + p_q} \quad (3.75)$$

Ovakav izraz korišten je u dizajnu filtera sa simetričnim impulsnim odzivom [18].

Do sada je izveden izraz za energiju niskopropusnog oblika odziva. U nastavku teksta bit će dani izrazi za energije odziva na preostale modele pobude temeljene na sinc pulsu. Slično kao što su dobiveni izrazi za njihove odzive, dobit će se i izrazi za njihovu energiju. U slučaju pojasnopropusnog odziva (3.53), energija se računa kao

$$e_y = \frac{1}{j\pi} \int_{j\omega_1}^{j\omega_2} H(s)H(-s)ds \quad (3.76)$$

Rastavljanjem integrala (3.76) na način

$$e_y = \frac{1}{j\pi} \int_{j0}^{j\omega_2} H(s)H(-s)ds - \frac{1}{j\pi} \int_{j0}^{j\omega_1} H(s)H(-s)ds \quad (3.77)$$

uočava se da energija pojasnopropusnog odziva predstavlja razliku energija odgovarajućih niskopropusnih odziva (3.71), tj.

$$e_y = e_{y2} - e_{y1} \quad (3.78)$$

pri čemu  $e_{y1}$  i  $e_{y2}$  označavaju energije niskopropusnih odziva graničnih frekvencija  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . Slično se može dobiti i energija visokopropusnog odziva (3.55) kao

$$e_y = e_h - e_y \quad (3.79)$$

pri čemu  $e_h$  označava energiju impulsnog odziva (3.75), a  $e_y$  energiju niskopropusnog odziva granične frekvencije  $\omega_g$ . U slučaju pojasnonepropusnog odziva (3.57), energija je dana izrazom

$$e_y = e_h - e_{y2} + e_{y1} \quad (3.80)$$

### 3.6 Odziv vremenski diskretnog sustava na sinc puls

Prijenosna funkcija vremenski diskretnog sustava reda  $N$  može se opisati izrazom

$$H(z) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (3.81)$$

gdje su  $c_i$  nule,  $d_k$  polovi, a  $H_0$  pojačanje sustava. Ako su polovi jednostruki tada je impulsni odziv sustava (3.81) dan izrazom [28]

$$h[n] = H_0 \sum_{q=0}^{M-N} B_q \delta[n-q] + H_0 \sum_{r=1}^N A_r d_r^n S[n] \quad (3.82)$$

gdje su  $B_q$  konstante dobivene dijeljenjem polinoma u brojniku i nazivniku prijenosne funkcije, a  $A_r$  reziduumi u polovima koji se računaju prema izrazu

$$A_r = \frac{\prod_{i=1}^M (1 - c_i d_r^{-1})}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq r}}^N (1 - d_k d_r^{-1})}, \quad r = 1, \dots, N \quad (3.83)$$

Funkcije  $\delta[n]$  i  $S[n]$  u impulsnom odzivu (3.82) predstavljaju Kroneckerov delta i vremenski diskretnu jediničnu stepenicu.

Vremenski diskretni sinc puls nulte faze koji jednoliko pobuđuje sve frekvencijske komponente sustava (3.81) unutar zadanog niskopropusnog područja  $-\omega_g \leq \omega \leq \omega_g$  ima oblik

$$x[n] = \frac{\omega_g}{\pi} \text{sinc}(\omega_g n) \quad (3.84)$$

gdje je funkcija sinc definirana izrazom (3.2). Frekvencijska karakteristika diskretnog sinc pulsa (3.84) ima oblik

$$X(\omega) = \begin{cases} 1 & , \quad |\omega| \leq \omega_g \\ 0 & , \quad \omega_g < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (3.85)$$

Odziv vremenski diskretnog sustava (3.81) na sinc puls (3.84) određen je konvolucijskom sumom oblika

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] \quad (3.86)$$

Praktična implementacija izraza (3.86) smije sadržavati samo konačne sume. To znači da je potrebno impulsi odziv i sinc puls odsjeći na konačnu duljinu. Postoje razne metode za procjenu efektivne duljine impulsnog odziva rekurzivnih sustava. Ovdje je korištena metoda temeljena na energiji impulsnog odziva [29]. Efektivne duljine impulsnog odziva i pobude,  $L_h$  i  $L_x$ , dobivaju se tako da se odbace krajevi signala čije energije ne prelaze zadanu vrijednost, gledano relativno prema ukupnim energijama signala. U ovom slučaju korišten je onaj broj uzoraka koji osigurava da energija odbačenih uzoraka prema ukupnoj energiji bude manja od  $1e-6$ . Korištenjem  $h[n]$  i  $x[n]$  konačnih duljina, indeksi u sumi (3.86) idu od 0 do  $L_h+L_x-2$ .

Potrebno je napomenuti da korištenjem  $h[n]$  i  $x[n]$  danim u izrazima (3.82) i (3.84) odziv  $y[n]$  može biti dobiven i u analitičkom obliku koji ne sadrži beskonačne sume. Međutim, takav izraz je vrlo složen i sadrži višestruke konačne sume. Njegova implementacija u praksi nema prednosti u odnosu na gore opisan približni način određivanja odziva.

Za analizu i sintezu nekih vremenski diskretnih sustava, kao na primjer korektora, potrebno je poznavati kontinuiranu reprezentaciju diskretnog odziva. U ovom slučaju, kontinuirana reprezentacija odziva  $y[n]$  dobiva se sinc interpolacijom [30] na način

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]\text{sinc}[\pi(t-n)] \quad (3.87)$$

Zamjenom diskretnog odziva  $y[n]$  s konvolucijskom sumom (3.86), odziv  $y_a(t)$  može se zapisati kao

$$y_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k]\text{sinc}[\pi(t-n)] \quad (3.88)$$

Uvrštavanjem izraza (3.84) u (3.88), te zamjenom indeksa suma, kontinuirana reprezentacija poprima oblik

$$y_a(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}[\omega_g(n-k)]\text{sinc}[\pi(t-k)] \quad (3.89)$$

Može se lako pokazati da vrijedi

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{sinc}[\omega_g(n-k)]\text{sinc}[\pi(t-k)] = \text{sinc}[\omega_g(t-n)] \quad (3.90)$$



Primjenom (3.90) kontinuirana reprezentacija diskretnog odziva na sinc puls poprima oblik

$$y_a(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \text{sinc}[\omega_g(t-n)] \quad (3.91)$$

Za pojasnopropusni model pobude čije su komponente smještene unutar frekvencijskog područja  $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$ , puls  $x[n]$  je linearna kombinacija dva sinc pulsa  $x_1[n]$  i  $x_2[n]$ , oblika

$$x[n] = x_2[n] - x_1[n] = \frac{\omega_2}{\pi} \text{sinc}(\omega_2 n) - \frac{\omega_1}{\pi} \text{sinc}(\omega_1 n) \quad (3.92)$$

U ovom slučaju kontinuirana reprezentacija odziva je linearna kombinacija odgovarajućih niskopropusnih odziva (3.91), tj. vrijedi

$$y_a(t) = \frac{\omega_2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \text{sinc}[\omega_2(t-n)] - \frac{\omega_1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \text{sinc}[\omega_1(t-n)] \quad (3.93)$$

U slučaju kad je  $x[n]$  visokopropusni puls, tj.  $\omega_2 = \pi$ , kontinuirana reprezentacija odziva također je određena izrazom (3.93).

## 4 Sinteza sustava primjenom simetrije odziva na sinc puls

### 4.1 Mjera fazne linearnosti sustava

Mjerenje fazne linearnosti temeljena na vremenskom odzivu proizlazi iz područja prilagođenih filtara [31]. Posljednjih godina izobličenje vremenskog odziva je uspješno korišteno kao kriterij u dizajnu filtara [2], [18] i faznih korektora [32]. U tim radovima, izobličenje je definirano kao integralna mjera asimetrije impulsnog odziva obzirom na neku liniju simetrije. Budući je spektar impulsnog odziva beskonačan, mjera izobličenja je izračunata za sve frekvencijske komponente, tj.  $-\infty \leq \omega \leq \infty$ . Kao posljedica toga, zbog beskonačnog iznosa energije impulsnog odziva, ta se mjera ne može primijeniti na sustave s jednakim redom polinoma u brojniku i nazivniku prijenosne funkcije.

U praksi je interesantno mjeriti izobličenje spektralno ograničenog signala. To se može učiniti pobuđivanjem sustava konačnom sekvencom obojenog šuma, a zatim njenim uspoređivanjem s odgovarajućom izlaznom sekvencom, kao na primjer u [32]. Ovakav pristup je praktično primjenjiv, ali nije temeljen na analitičkim izrazima. U ovom radu, predložena je mjera izobličenja koja proizlazi iz prijenosa niskopropusnih signala kroz zadani sustav. Prvi put ova mjera definirana je u radu [33].

Idealni sustavi s linearnom faznom i proizvoljnom amplitudnom karakteristikom na simetričnu pobudu daju simetričan odziv. Stoga se mjera fazne linearnosti realnog sustava može definirati kao pogreška simetrije odziva. Nadalje, ako se fazna linearnost želi mjeriti unutar određenog frekvencijskog područja, tada je potrebno koristiti pobudu koja sadrži sve komponente iz tog područja. Osim toga, poželjno je da takva pobuda jednoliko pobuđuje sve frekvencijske komponente iz područja koje se analizira. U tu svrhu odziv na sinc puls pokazuje se kao dobar kandidat za mjeru fazne linearnosti. Pogreška simetrije odziva  $y(t)$  obzirom na os simetrije  $t_s$  može se izraziti kao energija pogreške u obliku

$$e_a(t_s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [y(t) - y(2t_s - t)]^2 dt \quad (4.1)$$

Kvadriranjem podintegralne funkcije, integral (4.1) može se zapisati kao

$$e_a(t_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} y(t)y(2t_s - t) dt = e_y - e_s(t_s) \quad (4.2)$$

Prvi integral u izrazu (4.2) predstavlja energiju odziva na sinc puls definiranu izrazom (3.71). Za dobivanje jednoznačne mjere izobličenja, pogrešku simetrije potrebno je normirati na energiju odziva, čime se dobiva

$$E_a(t_s) = 1 - \frac{e_s(t_s)}{e_y} \quad (4.3)$$

Drugi integral u izrazu (4.2) je autokonvolucija odziva izračunata u trenutku  $2t_s$ , tj.

$$e_s(t_s) = y(t) * y(t) \Big|_{t=2t_s} \quad (4.4)$$

S druge strane, odziv  $y(t)$  je konvolucija pobude  $x(t)$  i impulsnog odziva  $h(t)$ , pa se može pisati

$$e_s(t_s) = x(t) * h(t) * x(t) * h(t) \Big|_{t=2t_s} \quad (4.5)$$

Primjenom svojstva komutacije konvolucije, te svojstva autokonvolucije sinc pulsa oblika

$$x(t) * x(t) = x(t) \quad (4.6)$$

dobiva se

$$e_s(t_s) = x(t) * h(t) * h(t) \Big|_{t=2t_s} \quad (4.7)$$

Kao što se vidi iz dobivenog izraza,  $e_s(t_s)$  se svodi na računanje autokonvolucije impulsnog odziva. Primjenom izraza (3.5), može se lako pokazati da ta konvolucija za sustave s jednostrukim polovima iznosi

$$h(t) * h(t) = \left[ \alpha^2 H_0^2 \delta(t) * \delta(t) + 2\alpha H_0^2 \sum_{r=1}^N K_r e^{p_r t} + 2H_0^2 \sum_{r=1}^N \sum_{\substack{q=1 \\ q \neq r}}^N \frac{K_r K_q}{p_r - p_q} e^{p_r t} + H_0^2 \sum_{r=1}^N K_r^2 t e^{p_r t} \right] S(t) \quad (4.8)$$

Uvrštavanje (4.8) u (4.7), te računanjem konvolucije sa sinc pulsom (3.1), integral  $e_s(t_s)$  može se izraziti kao funkcija polova i reziduuma kao [33]

$$\begin{aligned}
e_s(t_s) = & \frac{H_0^2 \alpha^2 \omega_g}{\pi} \text{sinc}(2\omega_g t_s) \\
& + \frac{H_0^2}{\pi} \sum_{r=1}^N K_r^2 \frac{p_r \sin(2\omega_g t_s) + \omega_g \cos(2\omega_g t_s)}{p_r^2 + \omega_g^2} \\
& + \frac{H_0^2}{j\pi} \sum_{r=1}^N K_r \exp(2p_r t_s) \left( \alpha + K_r t_s + \sum_{q=1, q \neq r}^N \frac{K_q}{p_r - p_q} \right) \\
& \cdot \{ \text{ei}[-2t_s(p_r - j\omega_g)] - \text{ei}[-2t_s(p_r + j\omega_g)] \}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Mjera fazne linearnosti sustava može se definirati kao normirana pogreška simetrije izračunata obzirom na optimalnu os simetrije. U tu svrhu potrebno je riješiti problem

$$E = \min_{t_s} [E_a(t_s)] \tag{4.10}$$

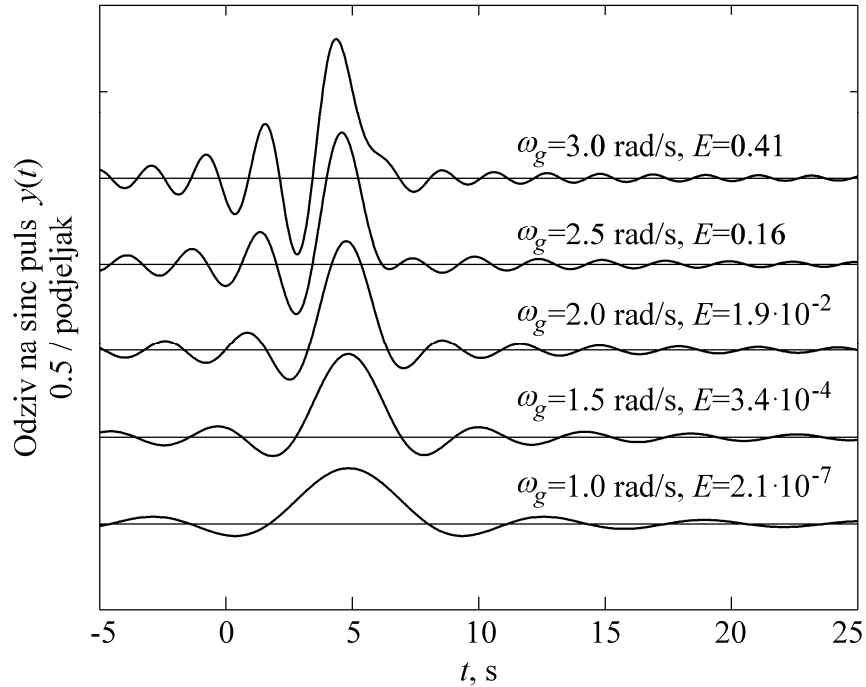
Ovaj problem prilično je jednostavan i može se riješiti korištenjem klasičnih metoda za nelinearnu optimizaciju. Optimizacijski postupak kreće od neke početne osi  $t_s$ , za koju se može uzeti procijenjena pozicija maksimuma odziva na sinc puls koji je dan u (3.11).

Za ilustraciju primjene ove mjere dana su dva primjera. U oba slučaja za dobivanje mjere korišten je kvazi-Newtonov optimizacijski postupak s BFGS (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) formulom za aproksimaciju Hessiana [23]. Prvi primjer pokazuje estimaciju korisnog frekvencijskog područja linije za kašnjenje. Na slici 4.1 prikazani su odzivi (3.11) za Besselovu liniju za kašnjenje petog reda zajedno s odgovarajućim pogreškama simetrije (4.10). Iz odziva se može uočiti da povećanje granične frekvencije uzrokuje povećanje izobličenja signala. Ono postaje značajno za pogreške simetrije veće od 1%.

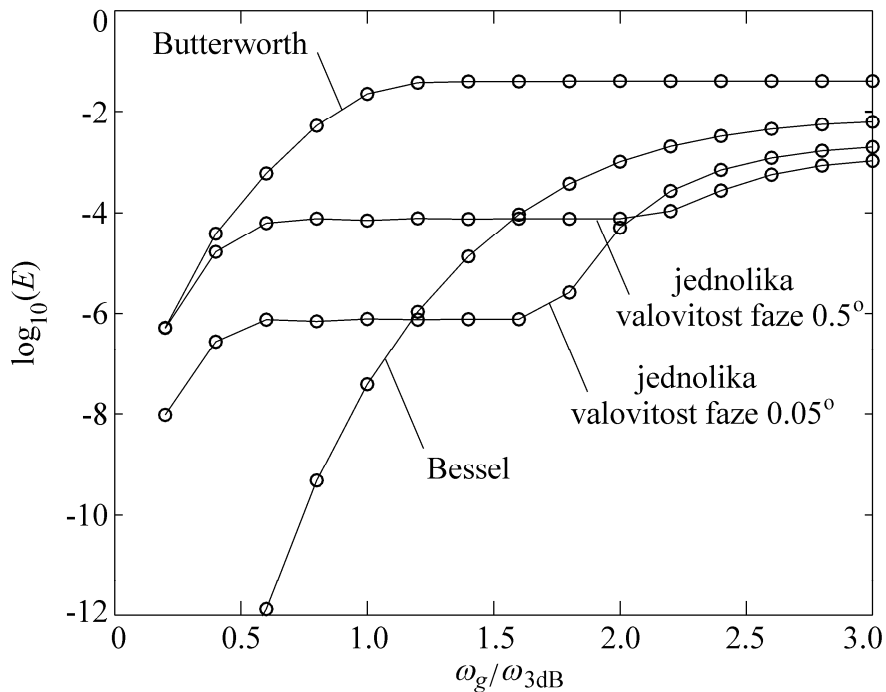
Kao što je pokazano, pogreška simetrije prvenstveno je vezana uz faznu karakteristiku sustava. Međutim, amplitudna karakteristika sustava također utječe na iznos pogreške budući su u odzivu manje zastupljene one komponente koje su jače prigušene. Prema tome, ovako definirana mjera istovremeno uzima u obzir utjecaj fazne i amplitudne karakteristike. Stoga je ona pogodna za usporedbu sustava dobivenih korištenjem raznih kriterija.

Na slici 4.2 prikazana je pogreška simetrija za neke klasične niskopropusne filtre petog reda, pri čemu su svi oni normirani na  $\omega_{3\text{dB}}=1\text{rad/s}$ . Pogreška simetrije prikazana je u odnosu na graničnu frekvenciju pobude  $\omega_g$ . Kao što se moglo i očekivati, filter s maksimalno glatkim grupnim kašnjenjem (Bessel) daje najmanju pogrešku simetrije unutar  $\omega_{3\text{dB}}$  područja. Pogreška se povećava širenjem frekvencijskog područja. Ona doseže pogreške filtera s jednolikom valovitošću faze iznosa  $0.05^\circ$  i  $0.5^\circ$  na frekvencijama  $1.2\omega_{3\text{dB}}$  i  $1.6\omega_{3\text{dB}}$ . Nadalje,

može se uočiti da Butterworthov filter, koji aproksimira pravokutnu amplitudnu karakteristiku, ima zadovoljavajuću pogrešku simetrije za  $\omega \leq 0.7 \omega_{3\text{dB}}$  unatoč relativno lošem grupnom kašnjenju unutar danog područja.



Slika 4.1 Odziv na sinc puls Besselove linije za kašnjenje petog reda.



Slika 4.2 Pogreška simetrije nekih klasičnih filtara petog reda.

Iz opisane analize proizlazi ideja o korištenju pogreške simetrije  $E$  u sintezi sustava koji osiguravaju malo izobličenje signala unutar željenog područja  $-\omega_g \leq \omega \leq \omega_g$ . Ovakav pristup može se uspješno koristiti u dizajnu korektora i linija za kašnjenje, što je opisano u daljnjem tekstu.

## 4.2 Sinteza vremenski kontinuiranih sustava

### 4.2.1 Korektori niskopropusnih filtara

Poznata je činjenica da sustavi s minimalnom fazom ne mogu istovremeno imati strmu amplitudnu karakteristiku u prijelaznom području i konstantno grupno kašnjenje unutar područja propuštanja [27]. U praksi, selektivni filtri sa strmim nagibom amplitudne karakteristike u prijelaznom području imaju velik skok u krivulji grupnog kašnjenja blizu granične frekvencije. To je obično suprotno od zahtjeva za mala izobličenja u vremenskoj domeni. Prema tome, kompromis između velike selektivnosti i konstantnog grupnog kašnjenja unutar područja propuštanja predstavlja klasičan kompromis u dizajnu filtara.

U sustavima sa zadanom amplitudnom karakteristikom, grupno kašnjenje može se poboljšati spajanjem odgovarajućeg svepropusnog filtra u kaskadu sa selektivnim filtrom. Takav svepropusni filtar obično se dizajnira na način da korigira grupno kašnjenje kaskade. Njegova prijenosna funkcija može se dobiti korištenjem raznih aproksimacijskih tehnika kojima se ostvaruju različite pogreške kašnjenja. Na primjer, maksimalno glatka aproksimacija forsira konstantno ponašanje na nižim frekvencijama. Kao posljedica toga, veća pogreška se dobiva blizu ruba područja propuštanja filtra. Grupno kašnjenje će aproksimirati konstantu na širem frekvencijskom području ako mu se dopusti određena valovitost. Predstavnik ovakvog pristupa je opisan u [34] gdje je zadano kašnjenje aproksimirano u smislu jednolike valovitosti. S druge strane, aproksimacija konstante u smislu najmanje kvadratne pogreške rezultira valovitošću koja se povećava od nižih prema višim frekvencijama područja propuštanja. U praksi, ovaj pristup je dosta korišten budući komponente signala blizu granične frekvencije obično imaju manju energiju od onih smještenih duboko u području propuštanja. Osim toga, te komponente mogu biti dodatno potisnute filtrom, ako se gušenje filtra povećava s frekvencijom. Ilustrativna usporedba navedenih pristupa može se pronaći u [27]. Ujednačavanje grupnog kašnjenja najčešći je pristup kod dizajna korektora u frekvencijskoj domeni. Ipak, radi postupnosti potrebno je spomenuti da postoje i drugačiji pristupi, na primjer temeljeni na faznom kašnjenju [35].

Izbor aproksimacije ovisi o aplikaciji. Tako je, na primjer, u spektralnoj analizi potrebno zadržati relativnu faznu razliku između frekvencijskih komponenata. Fazna pogreška je određena maksimalnom valovitosti unutar zadanog područja pa je aproksimacija faze jednolikom valovitošću odgovarajući izbor. S druge strane, ako se radi o obradi pulseva,

tada je važno osigurati mala izobličenja signala u vremenskoj domeni. Obzirom da pulsevi korišteni u prijenosnim sustavima često imaju zvonolik oblik amplitudnog dijela spektra, razumljivo je omogućiti veće tolerancije grupnog kašnjenja blizu rubova frekvencijskog područja nego u njegovoj sredini. Takvo ponašanje kašnjenja moguće je ostvariti aproksimacijom u smislu najmanje kvadratne pogreške. U klasičnom obliku, ova aproksimacija ne uzima u obzir niti amplitudni dio spektra signala niti amplitudnu karakteristiku sustava. Međutim, te karakteristike mogu biti uključene korištenjem odgovarajuće težinske funkcije, kao na primjer u [36] i [37]. U tim radovima analizirane su razne optimalne težinske funkcije u cilju reduciranja bočnih latica amplitudnog dijela spektra pulsa koji se koristi u televizijskim prijenosima.

Ako se forsira konstantno grupno kašnjenje u cilju dobivanja malih izobličenja vremenskog odziva, tada kriterij dan u frekvencijskoj domeni, čak i ako uzima u obzir amplitudnu karakteristiku sustava kao težinsku funkciju, ne rezultira optimalnim korektorom. Stoga je bolje dizajn prebaciti u vremensku domenu. Nedavno je razvijena metoda za dizajn korektora temeljena na simetriji impulsnog odziva [32], [38]. Ta metoda daje korektore koji osiguravaju najmanju pogrešku simetrije impulsnog odziva kaskade. Premda je ovakav pristup vrlo koristan, on ima dva nedostatka. Prvi je da proces korekcije uzima u obzir sve frekvencijske komponente, tj.  $-\infty < \omega < \infty$ , a ne samo komponente iz zadanog frekvencijskog područja. Prema tome, komponente sa značajnom energijom unutar prijelaznog područja filtra mogu također utjecati na ukupno grupno kašnjenje. Iako su te komponente vjerojatno izvan područja interesa, one mogu narušiti ostvareno kašnjenje unutar područja propuštanja. Drugi nedostatak je da ovaj postupak ne može primijeniti za korekciju filtara s istim redom brojnika i nazivnika prijenosne funkcije. Naime, njegov impulsnii odziv ima beskonačnu energiju, te takav slučaj nije podržan jednadžbama potrebnima za dizajn.

U prethodnom poglavlju je pokazano da se simetrija vremenskog odziva može uspješno koristiti kao mjera fazne linearnosti kauzalnih sustava. U tom slučaju ista mjera se može iskoristiti i kao kriterij u dizajnu korektora [39]. Tako dobiveni korektori osiguravat će u vremenskoj domeni najmanje izobličenje signala čiji se spektar nalazi unutar zadanog frekvencijskog područja  $-\omega_g \leq \omega \leq \omega_g$ .

Prijenosna funkcija filtra  $N$ -tog reda s  $M \leq N$  konačnih nula, u kaskadi sa svepropusnim sustavom  $A$ -tog reda i jediničnog pojačanja, dana je izrazom

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \times (-1)^A \frac{\prod_{q=N+1}^{N+A} (s + p_q)}{\prod_{q=N+1}^{N+A} (s - p_q)} \quad (4.11)$$

gdje  $p_k$ ,  $z_i$  i  $H_0$  odgovaraju polovima, nulama i pojačanju filtra. Svepropusni sustav je određen svojim polovima  $p_q$ . Konstanta  $(-1)^A$  osigurava invertiranje negativnog pojačanja koje se javlja kod svepropusnih sustava neparnog reda. Skupljanjem faktora u nazivniku u zajednički produkt, prijenosna funkcija može se zapisati u kompaktnijem obliku kao

$$H(s) = H_0(-1)^A \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i) \prod_{q=N+1}^{N+A} (s + p_q)}{\prod_{k=1}^{N+A} (s - p_k)} \quad (4.12)$$

Cilj u dizajnu je pronaći svepropusnu prijenosnu funkciju koja će pogrešku simetrije (4.3) odziva kaskade (4.12) na sinc puls svesti na minimum, a da se pri tom parametri filtra ne mijenjaju. Obzirom da energija odziva kaskade ovisi samo o parametrima filtra, ona će predstavljati konstantu tijekom optimizacijskog postupka. Prema tome, polovi i nule svepropusne prijenosne funkcije koji osiguravaju minimalnu pogrešku simetrije mogu se pronaći rješavanjem problema

$$\min_{t_s, p_{N+1}, \dots, p_{N+A}} \left[ -e_s(t_s, \omega_g, p_1, \dots, p_{N+A}, z_1, \dots, z_M) \right] \quad (4.13)$$

Pozicija osi simetrije  $t_s$  tretira se kao nezavisna varijabla u optimizacijskom postupku obzirom da se njezina optimalna pozicija ne može unaprijed odrediti. Takvim pristupom osigurana je najveća moguća simetrija odziva.

U optimizaciji je praktičnije koristiti funkciju cilja s realnim umjesto kompleksnim varijablama. U tom smislu, kompleksne polove  $p_{N+1}, \dots, p_{N+A}$ , koji su ustvari varijable funkcije cilja, je potrebno razložiti na realne i imaginarne dijelove kao  $p_k = p_{\sigma k} + j \cdot p_{\varepsilon k}$ . Kompleksni polovi realnih sustava uvijek dolaze u konjugirano kompleksnim parovima. Stoga se optimizacijski problem (4.13) može formulirati kao

$$\min_{t_s, p_{\sigma(N+1)}, \dots, p_{\sigma(N+A/2)}, p_{\varepsilon(N+1)}, \dots, p_{\varepsilon(N+A/2)}} \left[ -e_s(t_s, \omega_g, p_1, \dots, p_{N+A}, z_1, \dots, z_M) \right] \quad (4.14)$$

u slučaju parnog reda korektora, odnosno kao

$$\min_{t_s, p_{\sigma(N+1)}, \dots, p_{\sigma(N+(A-1)/2)}, p_{\sigma(N+A)}, p_{\varepsilon(N+1)}, \dots, p_{\varepsilon(N+(A-1)/2)}} \left[ -e_s(t_s, \omega_g, p_1, \dots, p_{N+A}, z_1, \dots, z_M) \right] \quad (4.15)$$

u slučaju neparnog reda korektora.

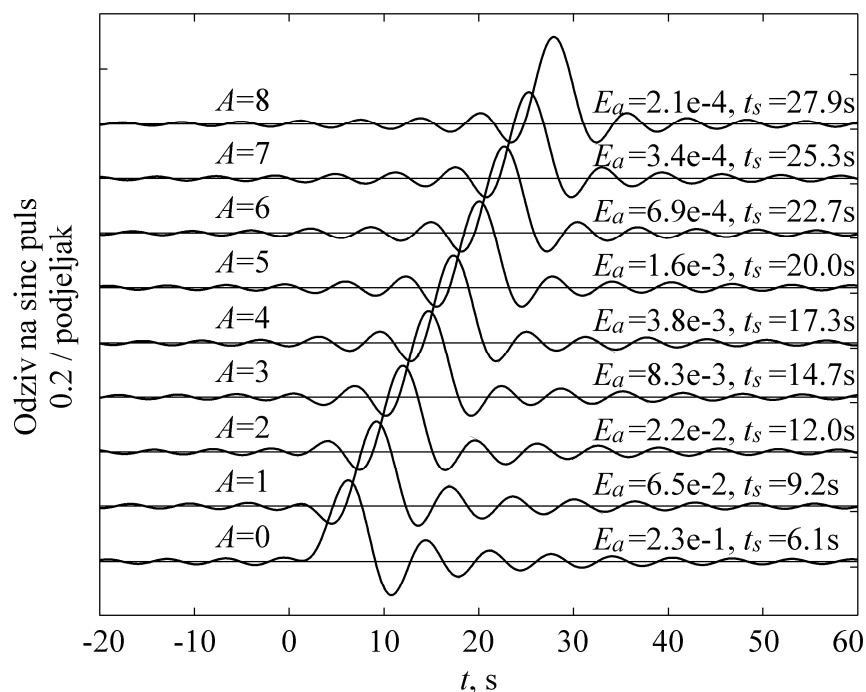


Traženje optimuma može se izvesti korištenjem uobičajenih metoda za nelinearnu optimizaciju. U ovom slučaju korištena je kvazi-Newtonova metoda s BFGS formulom za aproksimaciju Hessijan matrice.

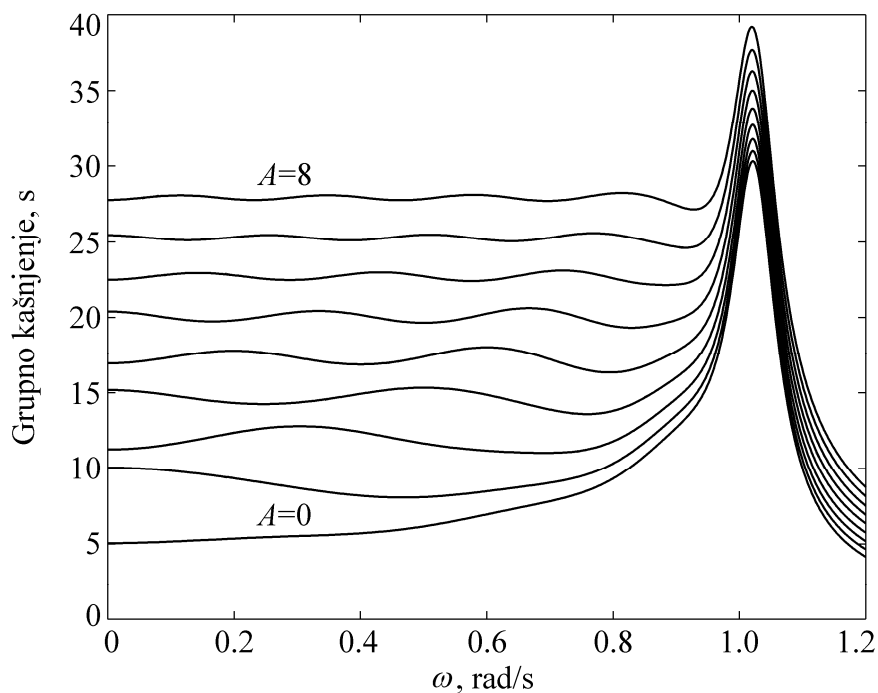
Za ilustraciju značajki opisane metode, provedena je korekcija eliptičkog filtra osmog reda s valovitošću u području propuštanja 0.1dB i valovitošću u području gušenja 80dB. Optimizacijski problemi (4.14) i (4.15) riješeni su za korektore od prvog,  $A=1$ , do osmog reda,  $A=8$ . Slučaj  $A=0$  odgovara samom filteru. Pretpostavljeno je da gornja granica područja interesa odgovara graničnoj frekvenciji filtra. U ovom primjeru ona iznosi  $\omega_g = \omega_{0.1\text{dB}} = 1\text{rad/s}$ .

Odziv na sinc puls je prikazan na slici 4.3, zajedno s ostvarenom pogreškom simetrije  $E_a$  i osi simetrije  $t_s$ . Povećanjem reda korektora povećava se simetrija odziva. Za korektore niskih redova ova činjenica se očituje kroz izjednačavanje lijevog i desnog istitravanja obzirom na glavnu laticu odziva. Poboljšanje u simetriji, koje je ostvareno visokim redovima korektora, može se uočiti samo u numeričkim podacima pogreške simetrije  $E_a$ . Međutim, poboljšanje grupnog kašnjenja je puno očitije. Krivulje grupnog kašnjenja optimalnih kaskada prikazane su na slici 4.4. U području propuštanja, one aproksimiraju konstantu s određenom valovitošću, koja se smanjuje povećavanjem reda korektora.

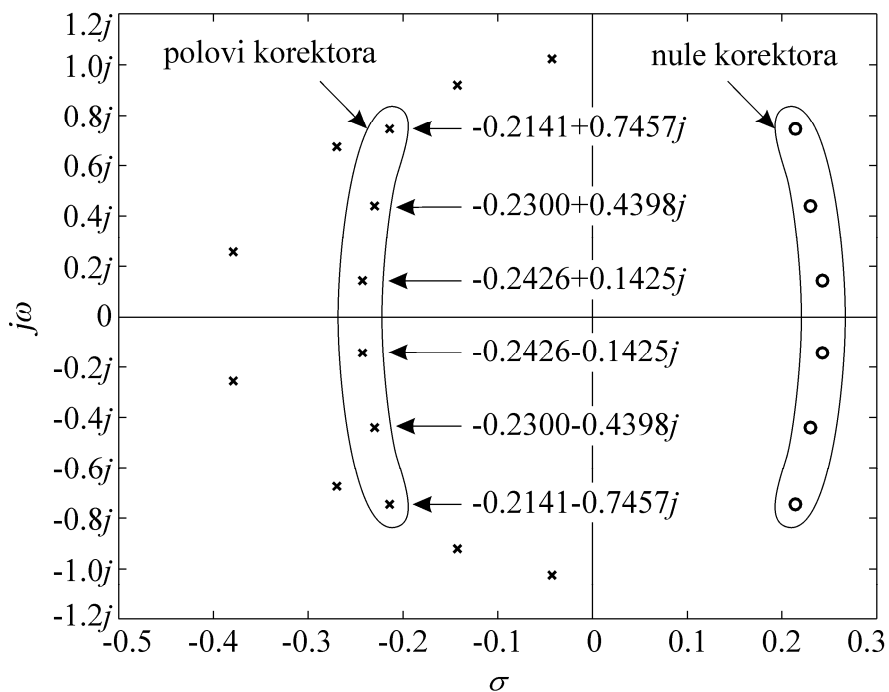
Položaji polova i nula filtra i optimalnog korektora šestog reda prikazani su na slici 4.5. Polovi, a time i nule korektora, su smješteni u onom dijelu ravnine koji odgovara području interesa  $-\omega_g \leq \omega \leq \omega_g$ .



Slika 4.3 Odziv na sinc puls kaskade eliptičkog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 80dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora  $A$ -tog reda, uz  $\omega_g = \omega_{0.1\text{dB}} = 1\text{rad/s}$ .



Slika 4.4 Grupno kašnjenje kaskade eliptičkog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 80dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora  $A$ -tog reda.



Slika 4.5 Položaj polova i nula kaskade eliptičkog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 80dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora šestog reda (nule filtra nisu prikazane).

Za provođenje optimizacija u (4.14) i (4.15) potrebno je odabrati odgovarajuću početnu iteraciju. Iz slike 4.5 se može zaključiti da je preporučljivo početne polove korektora smjestiti unutar frekvencijskog područja filtra, malo lijevo ili desno od polova filtra.

Izrazi (3.71) i (4.9) vrijede samo za jednostruke polove. Prema tome, početni polovi korektora ne smiju se preklapati s polovima filtra. Pored toga, praksa pokazuje da se problem višestrukosti polova nikad ne pojavljuje tijekom ove optimizacije. Za početnu os simetrije  $t_s$ , može se koristiti ona os koja osigurava najmanju pogrešku simetrije početne kaskade. Njezina pozicija može se pronaći rješavanjem problema

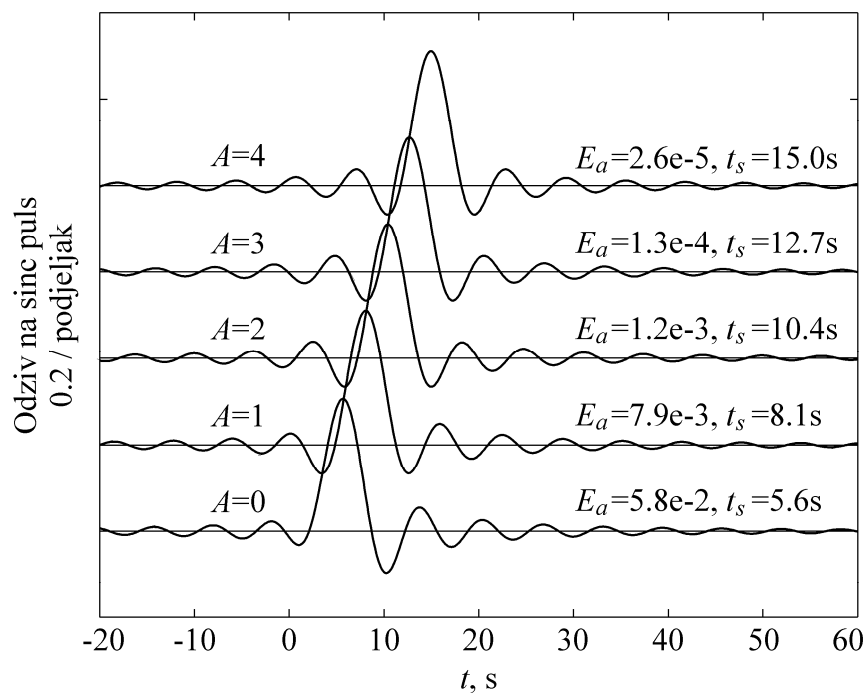
$$\min_{t_s} \left[ -e_s(t_s, \omega_g, p_1, \dots, p_{N+A}, z_1, \dots, z_M) \right] \quad (4.16)$$

Unatoč kompleksnoj i nelinearnoj funkciji cilja, dizajn korektora pokazuje se robusnim. Za optimizaciju korektora nižih redova obično je dovoljno jedno pokretanje optimizacijskog postupka. Međutim, za više redove preporučuje se nekoliko pokretanja postupka s različitim početnim točkama čime se povećava vjerojatnost da dobiveno rješenje predstavlja globalni optimum.

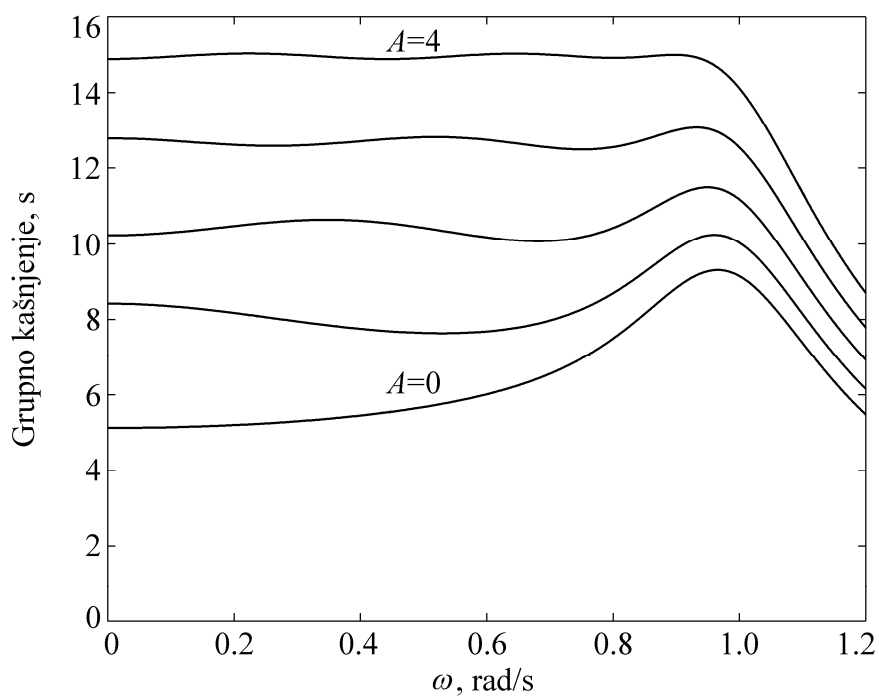
Potrebno je uočiti da pogreška simetrije dana u (4.9) sadrži velik broj pribrojnika. Takva struktura je osjetljiva na pogreške zaokruživanja. Ako korištena optimizacijska metoda računa gradijent korištenjem konačne razlike, pogreška zaokruživanja može biti ograničavajuć faktor kod rada s kaskadama visokih redova. Ipak, implementacija u dvostrukoju preciznosti omogućava optimiranje kaskada do 20-og reda čija pogreška simetrije nije manja od  $E_d=1e-6$ .

Filtri s malom valovitošću grupnog kašnjenja unutar područja interesa daju malu pogrešku simetrije iako su korigirani korektorom niskog reda. Slika 4.6 i slika 4.7 prikazuju odziv na sinc puls i grupno kašnjenje kaskade Butterworthovog filtra osmog reda normiranog na  $\omega_{3dB}=1\text{rad/s}$  i optimalnog korektora s  $\omega_g=\omega_{3dB}$ . Vrlo velika simetrija, te kao posljedica toga, približno konstantno grupno kašnjenje postiže se s korektorom četvrtog reda. Prema tome, očito je da daljnje povećanje reda korektora u praksi nije potrebno.

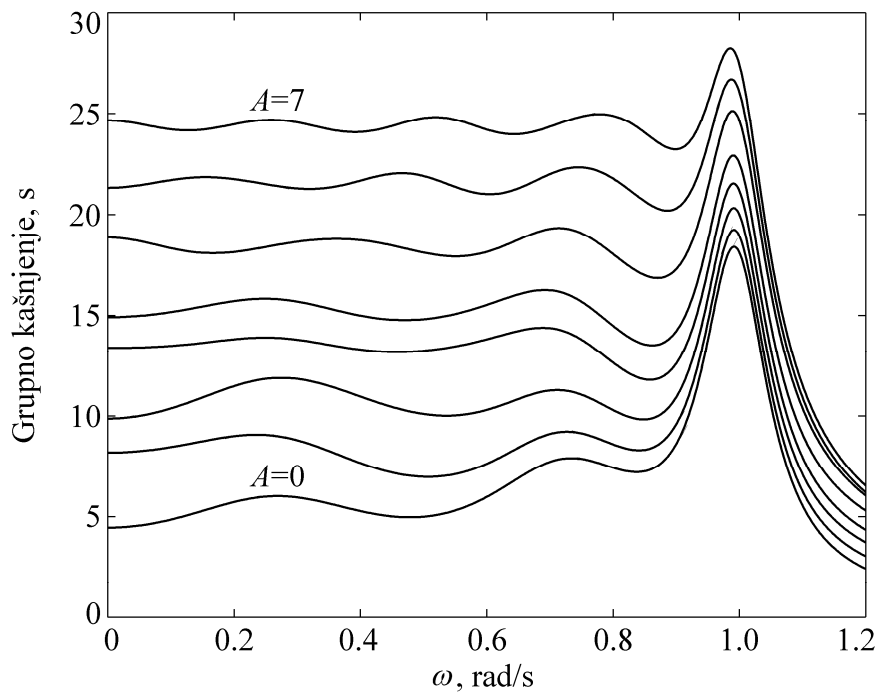
Valovitost grupnog kašnjenja u prethodnim primjerima pokazuje regularno ponašanje, kao što se može vidjeti na slikama 4.4 i 4.7. Broj lokalnih ekstrema na danim krivuljama iznosi  $A+2$ . To je posljedica monotonog ponašanja krivulje grupnog kašnjenja filtra u većem dijelu području propuštanja. Manje regularno ponašanje može se uočiti ako već sam filter ima određenu valovitost grupnog kašnjenja. To je ilustrirano na slici 4.8 za Chebyshevljevi filter s valovitošću u području propuštanja 1dB, granične frekvencije  $\omega_{1dB}=1\text{rad/s}$ , u kaskadi s optimalnim korektorom s  $\omega_g=\omega_{1dB}$ .



Slika 4.6 Odziv na sinc puls kaskade Butterworthovog filtra osmog reda i optimalnog korektora  $A$ -tog reda, uz  $\omega_g = \omega_{3dB} = 1 \text{ rad/s}$ .



Slika 4.7 Grupno kašnjenje kaskade Butterworthovog filtra osmog reda i optimalnog korektora  $A$ -tog reda.



Slika 4.8 Grupno kašnjenje kaskade Chebyshevjevog filtra šestog reda s 1dB valovitosti u području propuštanja i optimalnog korektora  $A$ -tog reda.

#### 4.2.2 Korektori pojasnopropusnih filtara

Za smanjenje izobličenja vremenskog odziva pojasnopropusnog filtra također se može primijeniti pristup temeljen na najmanjoj pogrešci simetrije odziva [40]. U tom slučaju, kaskadu filtra i korektora opisanu prijenosnom funkcijom (4.11), potrebno je jednoliko pobuditi signalom čiji se spektar nalazi unutar područja interesa  $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$ . Takav pojasnopropusni signal može se izraziti kao linearna kombinacija dva sinc pulsa, a ima oblik dan u (3.52). Odziv linearnog sustava na pobudu (3.52) također je moguće izraziti kao linearnu kombinaciju odgovarajućih niskopropusnih odziva, na način dan u (3.53). Ovdje će zbog potpunosti biti ponavljen izraz za odziv. On ima oblik

$$y(t) = y_2(t) - y_1(t) \quad (4.17)$$

gdje su  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$  odzivi sustava na sinc pulseve graničnih frekvencija  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .

Za računanje pogreške simetrije (4.3), potrebno je integrale  $e_y$  i  $e_s(t_s)$  izraziti kao funkciju niskopropusnih odziva  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$ . Primjenom Parsevalovog teorema, energija  $e_y$  može se dobiti kao

$$e_y = e_{y2} - e_{y1} \quad (4.18)$$

gdje  $e_{y_1}$  i  $e_{y_2}$  označavaju energije odziva  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$ , definirane izrazom (3.71), a izračunate za frekvencije  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .

Integral  $e_s(t_s)$  je autokonvolucija odziva  $y(t)$  definirana izrazom (4.4). Uvrštavanjem odziva (4.17) u konvoluciju (4.4) dolazi se do

$$e_s(t_s) = [y_2(t) * y_2(t) + y_1(t) * y_1(t) - 2y_1(t) * y_2(t)]_{t=2t_s} \quad (4.19)$$

Budući su odzivi  $y_1(t)$  i  $y_2(t)$  niskopropusni signali graničnih frekvencija  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , gdje je  $\omega_2 > \omega_1$ , vrijedi jednakost

$$y_1(t) * y_2(t) = y_1(t) * y_1(t) \quad (4.20)$$

Prema tome, konvolucija (4.19) se može reducirati na

$$e_s(t_s) = [y_2(t) * y_2(t)]_{t=2t_s} - [y_1(t) * y_1(t)]_{t=2t_s} = e_{s2}(t_s) - e_{s1}(t_s) \quad (4.21)$$

gdje su  $e_{s1}(t_s)$  i  $e_{s2}(t_s)$  integrali određeni izrazom (4.9), izračunati za frekvencije  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .

Nakon što je određena pogreška simetrije odziva, potrebno je provesti njezinu optimizaciju u cilju dobivanja optimalnih polova korektora. Obzirom da za dani filter energija odziva ovisi samo o prijenosnoj funkciji filtra, polovi korektora koji osiguravaju minimalnu pogrešku simetrije mogu se pronaći rješavanjem problema

$$\min_{t_s, p_{N+1}, \dots, p_{N+A}} [-e_s(t_s, \omega_1, \omega_2, p_1, \dots, p_{N+A}, z_1, \dots, z_M)] \quad (4.22)$$

Kako u optimizaciji niskopropusnih, tako i u optimizaciji pojasnopropusnih kaskada potrebno je krenuti od odgovarajućih početnih polova korektora. Ako se izvodi korekcija pojasnopropusnog filtra dobivenog transformacijom odgovarajućeg niskopropusnog prototipa [27], prvi korak u dizajnu može biti korekcija prototipa metodom opisanom u prethodnom poglavlju. To je preporučljivo jer transformacija niskopropusnog sustava u pojasnopropusni udvostručava red sustava. Pri tom je potrebno uočiti da vrijednosti  $N$  i  $A$  u danim izrazima predstavljaju red pojasnopropusnog filtra i korektora, a ne redove njihovih niskopropusnih prototipova. Nakon što je prototip korigiran, konvencionalna transformacija niskog u pojasni propust primjenjuje se na prijenosnu funkciju filtra, te korektora. Budući transformacija zadržava samo oblik krivulje amplitudne karakteristike, transformirani korektor više nije optimalan. Međutim, njegovi polovi predstavljaju dobar izbor za početne polove kod optimizacije pojasnopropusne kaskade (4.22).

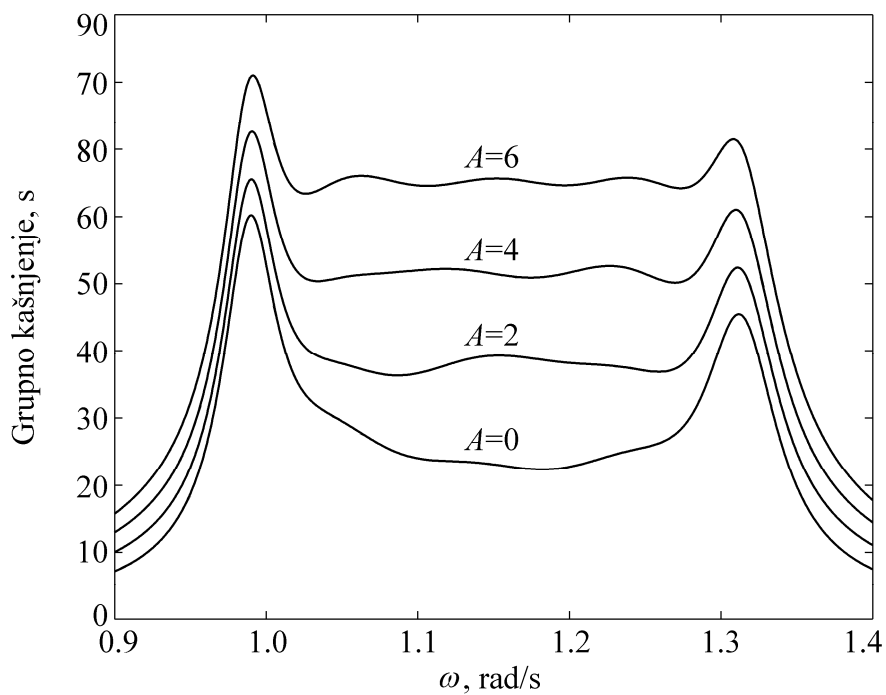
Ukoliko pojasnopropusni filter nije dobiven transformacijom prototipa, početne polove korektora treba smjestiti unutar područja propuštanja filtra, malo lijevo ili desno od polova filtra. Osim toga, budući izrazi (3.71) i (4.9) vrijede samo za jednostruke polove, početni polovi korektora ne smiju se preklapati s polovima filtra.

Kao i kod korekcije niskopropusnog filtra, dobar izbor za početnu os simetrije  $t_s$ , predstavlja ona os koja osigurava najmanju pogrešku simetrije početne kaskade. Njezina pozicija može se pronaći rješavanjem problema

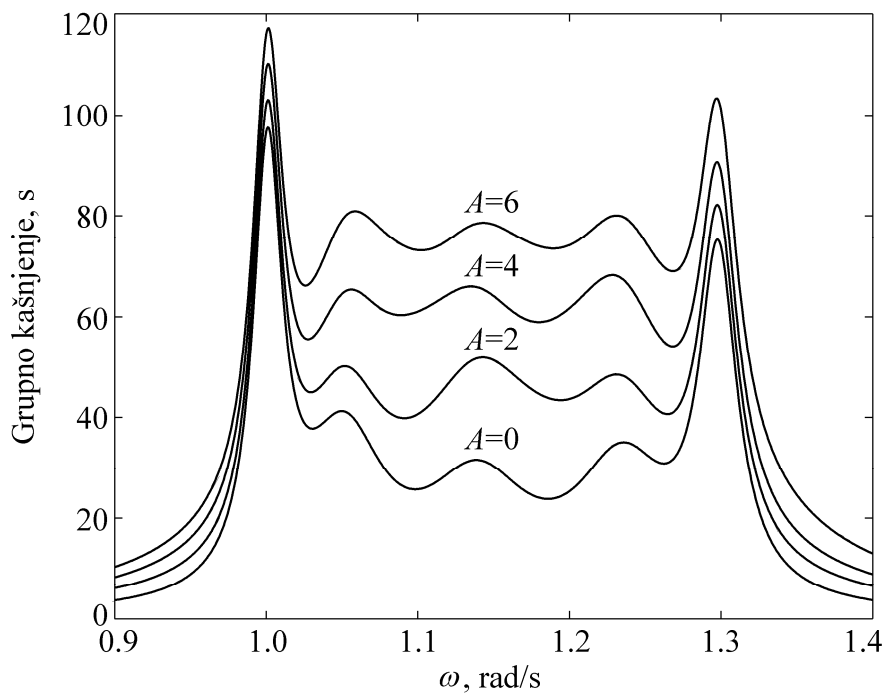
$$\min_{t_s} [-e_s(t_s, \omega_1, \omega_2, p_1, \dots, p_{N+A}, z_1, \dots, z_M)] \quad (4.23)$$

Usporedbom problema (4.22) i (4.13) može se uočiti da je metoda za dizajn korektora pojasnopropusnih filtera identična onoj za dizajn korektora niskopropusnih filtera. Štoviše, korektori niskopropusnih filtera mogu se promatrati kao specijalan slučaj korektora pojasnopropusnih filtera, ako se uzme  $\omega_1=0$  i  $\omega_2=\omega_g$ . Međutim, maksimalni red kaskada koje se u ovom slučaju mogu optimirati je nešto manji od reda niskopropusnih kaskada. To je posljedica složenije funkcije cilja koja je osjetljivija na pogreške zaokruživanja. Ako se koristi dvostruka preciznost, ovom metodom je moguće optimirati kaskade do 18-og reda i pogreška simetrija do  $E_a=1e-4$ .

Za ilustraciju značajki metode, provedena je korekcija Chebyshevljevog pojasnopropusnog filtra desetog reda s graničnim frekvencijama  $\omega_1=1\text{rad/s}$  i  $\omega_2=1.3\text{rad/s}$ . Filter je dobiven iz niskopropusnog prototipa petog reda. Optimizacijski problem je riješen za korektore drugog, četvrtog i šestog reda. Krivulje ostvarenih grupnih kašnjenja prikazane su na slikama 4.9 i 4.10, zajedno s krivuljom kašnjenja samog filtra, koja je označena s  $A=0$ . Slika 4.9 odgovara filtru s valovitosti u području propuštanja 0.1dB. Ovaj filter ima prilično glatko grupno kašnjenje unutar područja propuštanja. Prema tome, povećanje reda korektora uzrokuje smanjenje valovitosti grupnog kašnjenja unutar velikog dijela područja propuštanja. Manje regularno ponašanje može se uočiti za filtre čije grupno kašnjenje ima značajnu valovitost, kao na primjer za Chebyshevjev filter s 1dB valovitosti u području propuštanja, kao što je prikazano na slici 4.10.



Slika 4.9 Grupno kašnjenje kaskade Chebyshevljevog pojasnopropusnog filtra desetog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja i optimalnog korektora  $A$ -tog reda.



Slika 4.10 Grupno kašnjenje kaskade Chebyshevljevog pojasnopropusnog filtra desetog reda s 1dB valovitosti u području propuštanja i optimalnog korektora  $A$ -tog reda.



### 4.2.3 Sustavi s konstantnim kašnjenjem

Klasični postupci za dizajn sustava s konstantnim kašnjenjem izvedeni su u frekvencijskoj domeni. Najpoznatiji predstavnik je Besselov filter [41], koji je napravljen korištenjem maksimalno glatke aproksimacije. Među popularnim filterima nalaze se i oni dobiveni korištenjem aproksimacije faze ili grupnog kašnjenja s jednolikom valovitošću, kao na primjer [34] i [42]. Aproksimacija konstantnog grupnog kašnjenja u smislu najmanje kvadratne pogreške također se koristi u sintezi filtera s konstantnim kašnjenjem [27]. Osim navedenih aproksimacija, u literaturi se mogu pronaći i mnogi drugi kriteriji [1].

Mreže s konstantnim kašnjenjem tipično se primjenjuju u obradi pulseva. U tim primjenama obično se kao glavni zahtjev postavlja malo izobličenje vremenskog odziva. Sustavi dizajnirani korištenjem aproksimacija u frekvencijskoj domeni ne osiguravaju optimalno ponašanje u vremenskoj domeni. Stoga je u tim slučajevima preporučljiv pristup dan u vremenskoj domeni.

Postoje dva različita pristupa u sintezi sustava s konstantnim kašnjenjem u vremenskoj domeni. Prvi pristup je temeljen na sintezi sustava čiji impulsni odziv aproksimira neku određenu funkciju. Kao primjer često korištene funkcije je potencija sinusnog pulsa,  $\sin^m(t)$ ,  $m=1, 2, 3, \dots$  [7]. Drugi pristup je temeljen na korištenju integralnih kriterija, kao u slučaju sustava sa simetričnim impulsnim odzivom [18].

Kao što je već rečeno, pristup koji koristi pogrešku simetrije impulsnog odziva uzima u obzir sve frekvencije. Obzirom da racionalne prijenosne funkcije ne mogu aproksimirati konstantno kašnjenje duž cijele frekvencijske osi, potrebno je aproksimaciju kašnjenja svesti na željeno frekvencijsko područje. U tom smislu pogreška simetrije odziva na sinc puls je dobar kandidat za dizajn sustava s konstantnim kašnjenjem. Navedeni pristup objavljen je u radu [43].

Metoda za dobivanje optimalnih prijenosnih funkcija slična je metodi za dizajn svepropusnih korektora opisanoj u prethodnim poglavljima. Naime, ukoliko se u dizajnu korektora ukloni prijenosna funkcija filtera, a os simetrije proglasi željenim kašnjenjem, tada će optimalni korektor predstavljati sustav s konstantnim kašnjenjem.

Sustav s konstantnim kašnjenjem  $N$ -tog reda opisan je svepropusnom prijenosnom funkcijom

$$H(s) = (-1)^N \frac{\prod_{k=1}^N (s + p_k)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (4.24)$$

gdje su  $p_k$  njegovi polovi. Cilj u dizajnu je pronaći polove  $p_k$  koji osiguravaju minimum pogreške simetrije (4.3) obzirom na zadanu os simetrije. Budući je prijenosna funkcija

svepropusna, energija odziva na sinc puls ne ovisi o polovima, te se tretira kao konstanta tijekom optimizacijskog postupka. Stoga, polovi sustava s konstantnim kašnjenjem mogu se pronaći rješavanjem problema

$$\min_{p_1, \dots, p_N} \left[ -e_s(t_s, \omega_g, p_1, \dots, p_N) \right] \quad (4.25)$$

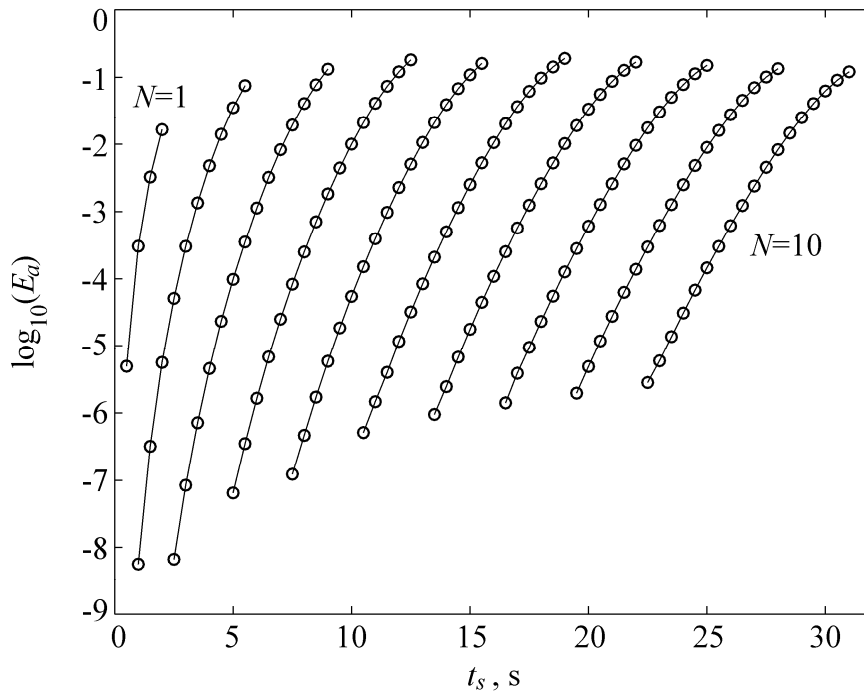
Na isti način kao i kod dizajna korektora, polovi sustava mogu se razdvojiti na realni i imaginarni dio čime se dobiva funkcija cilja s realnim varijablama. Na taj način, problem (4.25) može se riješiti klasičnim metodama za nelinearnu optimizaciju. U primjerima koji slijede korištena je kvazi-Newtonova metoda s BFGS aproksimacijom Hessiana.

Proveden je dizajn sustava s konstantnim kašnjenjem za prijenosne funkcije od prvog do desetog reda. Parametri  $t_s$  i  $\omega_g$  koriste se za kontrolu željenog kašnjenja i željenog frekvencijskog područja. Premda se ti parametri mogu nezavisno zadati, jedino produkt  $t_s \omega_g$  je od praktičnog interesa. Naime, optimalni sustavi s istim produktom  $t_s \omega_g$  predstavljaju isti sustav samo normiran na različite frekvencije. Prema tome, za ilustraciju značajki metode postaviti će se  $\omega_g=1\text{rad/s}$ .

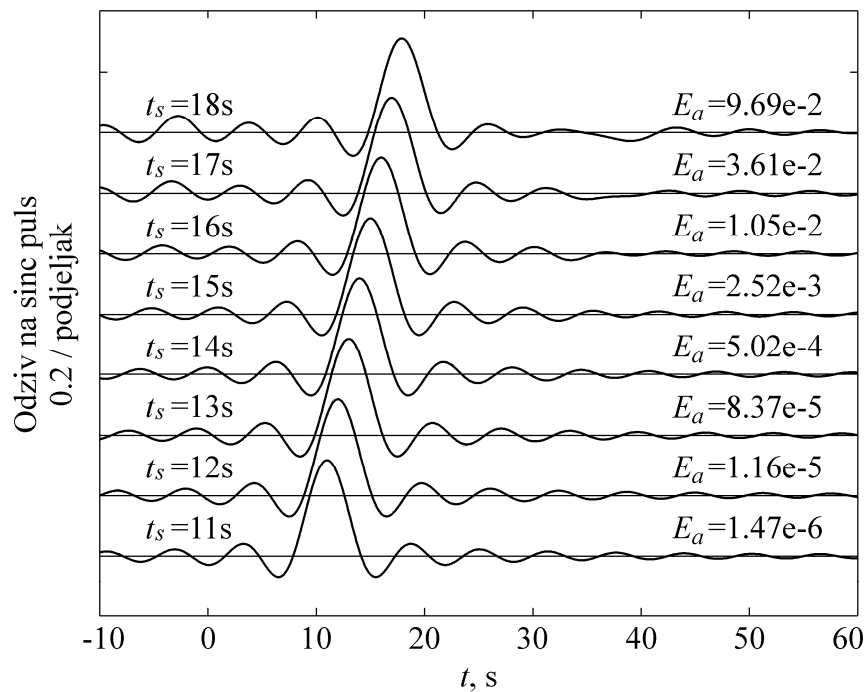
Postignute pogreške simetrije optimalnih sustava prikazane su na slici 4.11. Svaka krivulja odgovara određenom redu sustava. Može se uočiti da povećanje kašnjenja uzrokuje povećanje pogreške simetrije. Za prihvatljivo izobličenje odziva, gornja granica za pogrešku simetrije može se postaviti između  $E_a=0.1$  i  $E_a=0.01$ . Ovakvo ograničenje također određuje i najveću vrijednost kašnjenja  $t_s$  za dani red sustava. Najmanja vrijednost za  $t_s$  određena je pogreškom zaokruživanja funkcije cilja izraženoj u konačnoj preciznosti. Ta pogreška postaje značajnija za male iznose pogreške simetrije  $E_a$ .

Za ilustraciju svojstava dobivene klase sustava, dani su svi podaci za sustave šestog reda i raznih kašnjenja  $t_s$ . Njihovi odzivi na sinc puls s  $\omega_g=1\text{rad/s}$  i krivulje njihovih grupnih kašnjenja prikazani su na slikama 4.12 i 4.13. Kao što se može uočiti, izobličenje vremenskog odziva postaje vidljivo nakon što pogreška simetrije dosegne vrijednost  $E_a=0.01$ . Ta pogreška odgovara kašnjenju  $t_s=16\text{s}$ . Slično ponašanje može se uočiti i u frekvencijskoj domeni. Optimalni sustavi s  $t_s \geq 16\text{s}$  imaju veliku valovitost grupnog kašnjenja, koja se značajno povećava porastom kašnjenja.

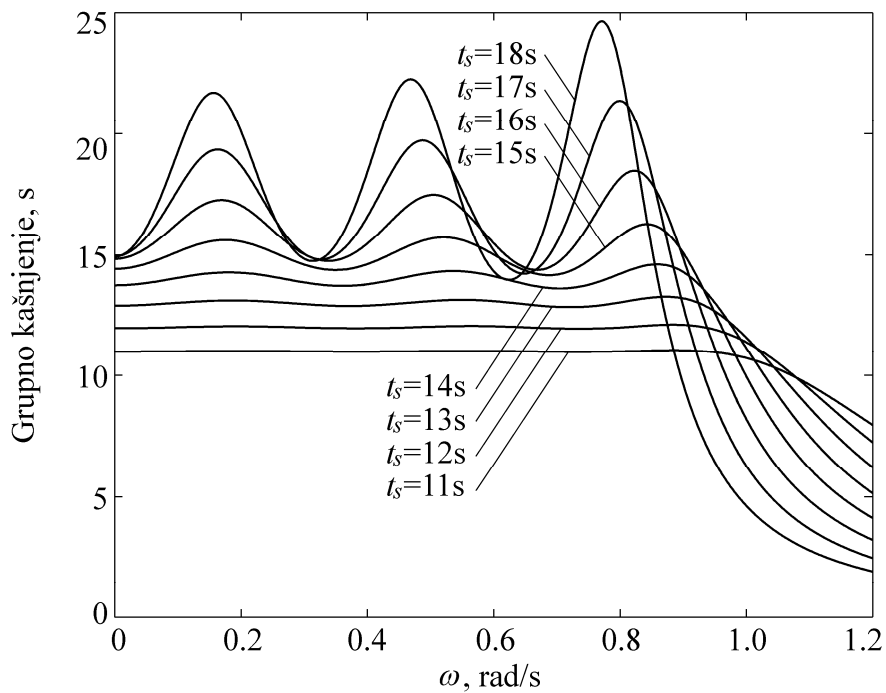
Položaj polova i nula optimalnih svepropusnih sustava šestog reda prikazani su na slici 4.14. Polovi su približno smješteni na elipsama sa središtima u ishodištu kompleksne ravnine. Osim toga, polovi su i približno jednako udaljeni duž imaginarne osi, što je moguće vidjeti u numeričkim vrijednostima danima u tablici 4.1. Ovo posljednje je i očekivano budući je to poznato svojstvo sustava s linearnom fazom [1].



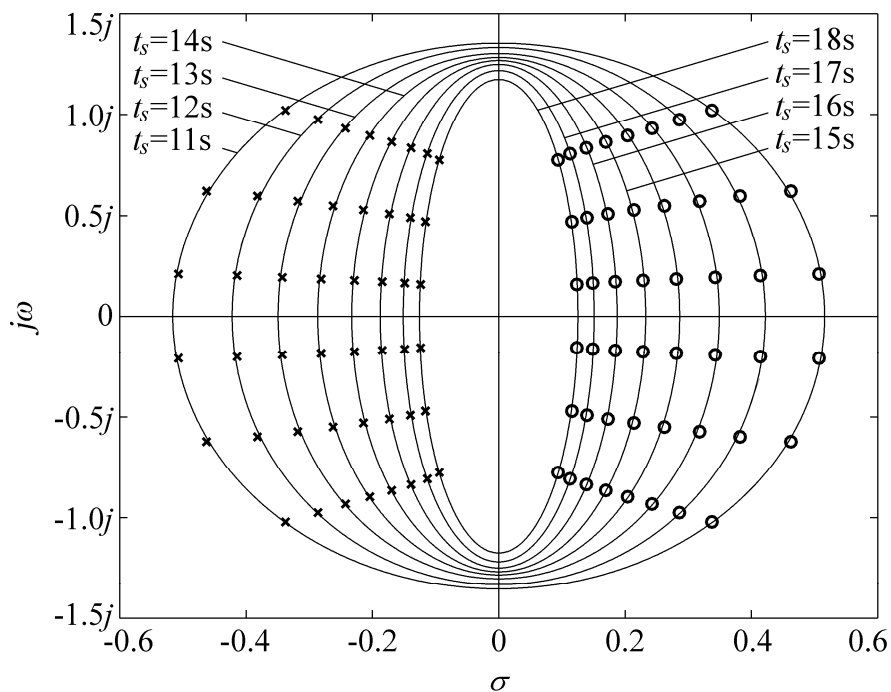
Slika 4.11 Pogreška simetrije optimalnih svepropusnih sustava od prvog do desetog reda.



Slika 4.12 Odziv optimalnih svepropusnih sustava šestog reda na sinc puls s  $\omega_g=1\text{rad/s}$ .



Slika 4.13 Grupno kašnjenje optimalnih svepropusnih sustava šestog reda, uz  $\omega_g=1\text{rad/s}$ .



Slika 4.14 Položaj polova i nula optimalnih svepropusnih sustava šestog reda, uz  $\omega_g=1\text{rad/s}$ .

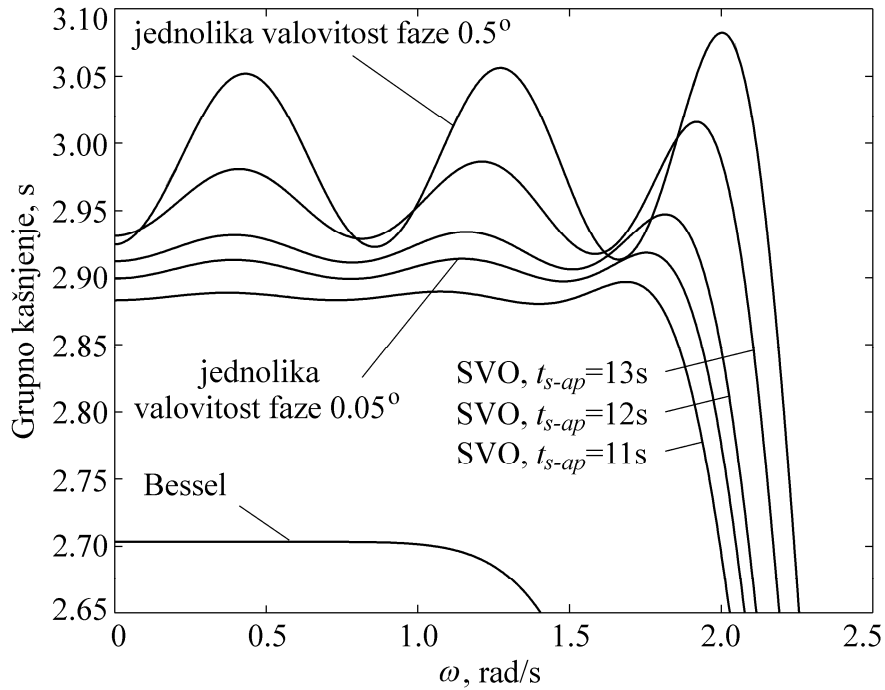
Tablica 4.1 Polovi optimalnih svepropusnih sustava šestog reda, uz  $\omega_g=1\text{rad/s}$ .

$t_s, \text{s}$	$p_k$	$t_s, \text{s}$	$p_k$
11	$-0.3374 \pm 1.0205j$	15	$-0.1694 \pm 0.8637j$
	$-0.4626 \pm 0.6218j$		$-0.2141 \pm 0.5288j$
	$-0.5070 \pm 0.2094j$		$-0.2285 \pm 0.1777j$
12	$-0.2860 \pm 0.9748j$	16	$-0.1388 \pm 0.8345j$
	$-0.3819 \pm 0.5975j$		$-0.1731 \pm 0.5095j$
	$-0.4141 \pm 0.2013j$		$-0.1843 \pm 0.1710j$
13	$-0.2427 \pm 0.9317j$	17	$-0.1129 \pm 0.8057j$
	$-0.3180 \pm 0.5717j$		$-0.1398 \pm 0.4905j$
	$-0.3427 \pm 0.1925j$		$-0.1487 \pm 0.1644j$
14	$-0.2040 \pm 0.8955j$	18	$-0.0939 \pm 0.7748j$
	$-0.2623 \pm 0.5493j$		$-0.1160 \pm 0.4706j$
	$-0.2811 \pm 0.1847j$		$-0.1235 \pm 0.1575j$

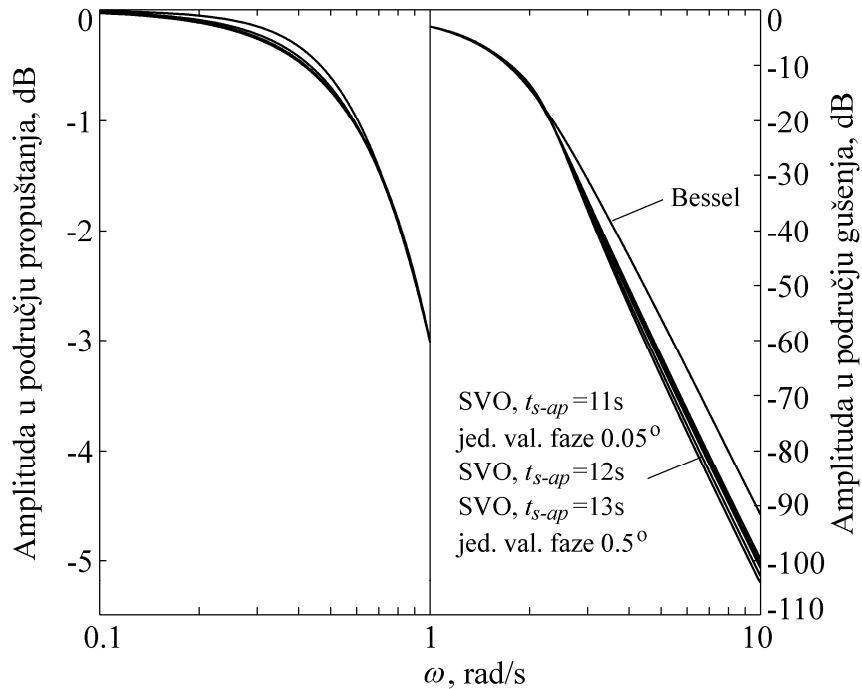
Ukoliko se od sustava s konstantnim kašnjenjem zahtijeva i selektivnost, svepropusni sustav se često transformira u niskopropusni sustav. Transformacija se izvodi uklanjanjem nula iz prijenosne funkcije. Kao rezultat, dobivaju se sustavi s minimalnom fazom.

Grupno kašnjenje niskopropusnih sustava izvedenih iz optimalnih svepropusnih sustava šestog reda s  $t_{s-ap}=11\text{s}$ ,  $t_{s-ap}=12\text{s}$  i  $t_{s-ap}=13\text{s}$  prikazano je na slici 4.15, zajedno s grupnim kašnjenjem Besselovog filtra i filtrima s jednolikom valovitosti fazne pogreške od  $0.5^\circ$  i  $0.05^\circ$ . Svi filtri su normirani na  $\omega_{3\text{dB}}=1\text{rad/s}$ . Može se uočiti da filtri sa simetričnim vremenskim odzivom (SVO) imaju oblik krivulja grupnog kašnjenja dosta sličan onome od filtara s jednolikom valovitosti fazne pogreške. Njihova valovitost se smanjuje sa smanjenjem kašnjenja, zadržavajući pritom široko frekvencijsko područje konstantnog grupnog kašnjenja.

Amplitudna karakteristika SVO filtara pokazuje slično ponašanje za sve slučajeve, kao što se može vidjeti na slici 4.16. Tako gušenje na frekvenciji  $10\omega_{3\text{dB}}$  iznosi 99.7dB, 101.3dB i 102.8dB za filtre s  $t_{s-ap}=11\text{s}$ ,  $t_{s-ap}=12\text{s}$  i  $t_{s-ap}=13\text{s}$ .



Slika 4.15 Grupno kašnjenje niskopropusnih filtara šestog reda sa simetričnim vremenskim odzivom (SVO), Besselovog filtra i filtara s jednolikom valovitosti fazne pogreške od  $0.5^\circ$  i  $0.05^\circ$ , normirani na  $\omega_{3dB}=1\text{rad/s}$ .



Slika 4.16 Amplitudna karakteristika niskopropusnih filtara šestog reda sa simetričnim vremenskim odzivom (SVO), Besselovog filtra i filtara s jednolikom valovitosti fazne pogreške od  $0.5^\circ$  i  $0.05^\circ$ , normirani na  $\omega_{3dB}=1\text{rad/s}$ .

### 4.3 Frekvencijska reprezentacija simetrije odziva

Mjera fazne linearnosti definirana je u vremenskoj domeni. Međutim, budući se radi o neizravnoj analizi faze, ilustrativno je odrediti njen ekvivalent u frekvencijskoj domeni [40]. Izraz (4.1) predstavlja polovinu energije signala

$$f(t) = y(t) - y(2t_s - t) \quad (4.26)$$

Primjenom Parsevalovog teorema, energija, tj. pogreška simetrije, može se dobiti iz

$$e_a(t_s) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)F(-j\omega)d\omega \quad (4.27)$$

gdje  $F(j\omega)$  predstavlja Fourierovu transformaciju signala  $f(t)$ , te je dana s

$$F(j\omega) = Y(j\omega) - Y(-j\omega)e^{-j2t_s\omega} \quad (4.28)$$

U ovom slučaju, sustav je pobuđen spektralno ograničenim signalom nulte faze čiji amplitudni dio spektra iznosi 1. Stoga je Fourierova transformacija odziva sustava

$$Y(j\omega) = \begin{cases} |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)} & , \quad |\omega| \leq \omega_g \\ 0 & , \quad |\omega| > \omega_g \end{cases} \quad (4.29)$$

gdje su  $|H(j\omega)|$  i  $\theta(\omega)$  amplitudna i fazna karakteristika sustava. Uvrštavanjem (4.28) i (4.29) u (4.27) dolazi se do

$$e_a(t_s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)|^2 \left\{ 2 - e^{j2[\theta(\omega)+t_s\omega]} - e^{-j2[\theta(\omega)+t_s\omega]} \right\} d\omega \quad (4.30)$$

Primjenom Eulerove formule, integral (4.30) može se zapisati u trigonometrijskoj formi kao

$$e_a(t_s) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)|^2 \{ 1 - \cos[2(\theta(\omega) + t_s\omega)] \} d\omega \quad (4.31)$$

Korištenjem trigonometrijske formule  $1 - \cos(2u) = 2\sin^2(u)$ , dobiva se

$$e_a(t_s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)|^2 \sin^2[\theta(\omega) - (-t_s\omega)] d\omega \quad (4.32)$$

Konačno, izraz  $-t_s\omega$  prepoznaje se kao idealna, odnosno nakon optimizacije, kao željena fazna karakteristika  $\theta_d(\omega, t_s)$ , te pogreška simetrije poprima jednostavan oblik

$$e_a(t_s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)|^2 \sin^2[\theta(\omega) - \theta_d(\omega, t_s)] d\omega \quad (4.33)$$

Potrebno je uočiti da do sada nije učinjena nikakva aproksimacija, tj. pogreška (4.33) je frekvencijska reprezentacija pogreške (4.1). Međutim, ako je fazna pogreška  $\theta(\omega) - \theta_d(\omega, t_s)$  dovoljno mala, vrijedi

$$\sin[\theta(\omega) - \theta_d(\omega, t_s)] \approx \theta(\omega) - \theta_d(\omega, t_s) \quad (4.34)$$

pa se pogreška simetrije (4.33) može aproksimirati najmanjom kvadratnom pogreškom s težinskom funkcijom

$$e_{wls}(t_s) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)|^2 [\theta(\omega) - \theta_d(\omega, t_s)]^2 d\omega \quad (4.35)$$

Optimizacija pogreške (4.35) neće dati sustave optimalne u smislu izobličenja vremenskog odziva. Međutim, takvi sustavi mogu se smatrati suboptimalnima, ukoliko osiguravaju dovoljno malu faznu pogrešku  $\theta(\omega) - \theta_d(\omega, t_s)$ .

U ovom trenutku mogu se provesti dva razmatranja. Prvo, sustavi koji aproksimiraju linearnu fazu vrlo su slični onima koji aproksimiraju konstantno grupno kašnjenje. Ipak, u ovom slučaju pokazalo se da je pogreška simetrije (4.33) zapravo izražena preko fazne pogreške, a ne preko pogreške grupnog kašnjenja. Drugo, fazna pogreška je otežana kvadratom amplitudne karakteristike. To je i očekivano budući se veća fazna pogreška može tolerirati na frekvencijama koje odgovaraju jačem gušenju. Ukoliko se izobličenje vremenskog odziva želi reducirati za neki drugi simetrični puls, pogreška simetrije bit će dodatno otežana kvadratom njegovog amplitudnog dijela spektra. Slična razmatranja su korištena i kao osnova u dizajnu sustava opisanih u [36] i [37]. Međutim, u tim radovima autori optimiraju otežanu pogrešku kašnjenja radije nego faznu pogrešku. Osim toga, u [37] eksponent težinske funkcije tretiran je kao nezavisna varijabla u dizajnu, a ne kao konstanta.

U slučaju selektivnih filtara, amplitudna karakteristika unutar područja propuštanja aproksimira konstantu. Prema tome, kvadrat amplitude, koji se pojavljuje u ulozi težinske funkcije, također se može smatrati konstantom. Osim toga, ako se u sustavima koriste korektori visokog reda, tada se postižu vrlo mali iznosi fazne pogreške. Prema tome, u slučaju korekcije selektivnih filtara, klasična najmanja kvadratna aproksimacija



$$e_{ls}(t_s) = \int_0^{\omega_g} [\theta(\omega) - \theta_d(\omega, t_s)]^2 d\omega \quad (4.36)$$

može se također smatrati suboptimalnim rješenjem. U praksi, amplitudna karakteristika prijenosnog kanala nije konstanta, a njegova faza je prilično nelinearna. Štoviše, red korektora nastoji se držati što je moguće manjim. U tom slučaju, simetrija vremenskog odziva je preporučljiv izbor.

## 4.4 Sinteza vremenski diskretnih sustava

Metoda za dizajn sustava temeljena na najmanjoj pogrešci simetrije u vremenskoj domeni, može se osim na kontinuirane odzive primijeniti i na diskretne odzive. U tom kontekstu ima smisla samo njena primjena u dizajnu sustava s beskonačnim impulsnim odzivom, tj. IIR sustava. U nastavku teksta bit će opisana dva primjera dizajna IIR sustava. Prvi je dizajn Hilbertovih transformatora, a drugi dizajn korektora.

### 4.4.1 Hilbertovi transformatori

Rane metode za dizajn IIR Hilbertovih transformatora temeljene su na transformaciji generaliziranih polupropusnih (engl. half-band) filtara [44] i na parametarskoj estimaciji linearnih sustava [45]. Kasnije, metoda temeljena na svojstvenim vrijednostima primijenila se za dizajn svepropusnih Hilbertovih transformatora s jednolikom valovitosti faze [46]. Jednolika valovitost fazne pogreške je optimalno rješenje, ako se Hilbertov transformator koristi za generiranje signala s jednim bočnim pojasom, jer osigurava minimalnu snagu viših frekvencijskih komponenata iz neželjenog pojasa [47]. Naime, to vrijedi samo ako je amplitudni dio spektra signala konstantan unutar područja interesa. U praksi, komponente signala bliže rubovima područja interesa imaju manju energiju nego komponente smještene u sredini područja. Prema tome, na tim frekvencijama može se dopustiti veća pogreška faze. Takvu pogrešku moguće je postići nedavno razvijenom metodom za dizajn svepropusnih IIR filtara temeljenoj na kriteriju najmanje  $p$ -te fazne pogreške [48]. U navedenim radovima, svi sustavi aproksimiraju frekvencijski odziv idealnog transformatora.

Idealni Hilbertov transformator u frekvencijskoj domeni predstavlja idealni zakretač faze. Njegova amplitudna karakteristika iznosi 1, a fazna karakteristika  $-(\pi/2) \cdot \text{sign}(\omega)$  za  $0 < |\omega| < \pi$ . Ovakva fazna karakteristika uzrokuje neparnu simetriju uzoraka impulsnog odziva. Prema tome, idealni Hilbertov transformator može se definirati kao sustav s konstantnom amplitudnom karakteristikom i neparno simetričnim impulsnim odzivom.

U praksi, konstantna amplitudna karakteristika može se realizirati svepropusnim IIR sustavom. Nažalost, takav sustav ne može učinkovito aproksimirati neparno simetričan impulsni odziv. To je posljedica faznih diskontinuiteta, koji se za idealni Hilbertov transformator nalaze na frekvencijama  $\omega=0$  i  $\omega=\pi$ . Međutim, te frekvencije se uglavnom izbjegavaju postavljanjem zahtjeva samo na područje interesa  $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$ .

U nastavku teksta, mjera temeljena na pogrešci parne simetrije odziva bit će modificirana u cilju dobivanja pogreške neparne simetrije vremenskog odziva. Kao takva bit će primijenjena u dizajnu svepropusnih IIR Hilbertovih transformatora [49].

Za mjerenje izobličenja diskretnog odziva Hilbertovog transformatora, transformator je potrebno jednoliko pobuditi na svim frekvencijama unutar područja  $\omega_1 \leq |\omega| \leq \omega_2$ . Osim toga, pobudni signal mora biti parno simetričan u vremenskoj domeni. Signal koji zadovoljava ove zahtjeve može se izraziti kao linearna kombinacija dva diskretna sinc pulsa nulte faze, a ima oblik dan u (3.92). Za takvu pobudu, odziv transformatora može se zapisati kao

$$y[n] = y_2[n] - y_1[n] \quad (4.37)$$

gdje su  $y_1[n]$  i  $y_2[n]$  odzivi transformatora na sinc pulseve graničnih frekvencija  $\omega_1$  i  $\omega_2$ .

Pogreška neparne simetrije odziva  $y[n]$  definira se sumom

$$e_a[S] = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (y[n] + y[2S - n])^2 \quad (4.38)$$

gdje je  $S$  apscisa vertikalne linije simetrije. Njezina pozicija odgovara kašnjenju transformatora. U ovom slučaju,  $S$  poprima samo cjelobrojne vrijednosti. Kvadriranjem pribrojnika, suma (4.38) može se zapisati kao

$$e_a[S] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y^2[n] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n]y[2S - n] = e_y + e_s[S] \quad (4.39)$$

Prva suma u (4.39) predstavlja energiju odziva, na koju se pogreška simetrije normira, kao u

$$E_a[S] = 1 + \frac{e_s[S]}{e_y} \quad (4.40)$$

Primjenom Parsevalovog teorema, energija  $e_y$  može se dobiti kao

$$e_y = e_{y2} - e_{y1} \quad (4.41)$$

gdje  $e_{y1}$  i  $e_{y2}$  označavaju energije odziva  $y_1[n]$  i  $y_2[n]$ . Suma  $e_s[S]$  u (4.39) je konvolucija odziva  $y[n]$  sa samim sobom izračunata za  $n=2S$ , tj.

$$e_s[S] = y[n] * y[n] \Big|_{n=2S} \quad (4.42)$$

Primjenom (4.37), konvolucija (4.42) može se napisati kao

$$e_s[S] = (y_2[n] * y_2[n] + y_1[n] * y_1[n] - 2y_1[n] * y_2[n])_{n=2S} \quad (4.43)$$

Budući su  $y_1[n]$  i  $y_2[n]$  niskopropusni signali graničnih frekvencija  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , gdje je  $\omega_2 > \omega_1$ , konvolucija (4.43) može se reducirati na

$$e_s[S] = (y_2[n] * y_2[n])_{m=2S} - (y_1[n] * y_1[n])_{n=2S} = e_{s2}[S] - e_{s1}[S] \quad (4.44)$$

Za računanje pogreške simetrije (4.40), (4.41) i (4.44) Hilbertovog transformatora, energije  $e_{y1}$  i  $e_{y2}$ , te konvolucije  $e_{s1}[S]$  i  $e_{s2}[S]$ , treba izraziti preko parametara prijenosne funkcije transformatora. Ukoliko je Hilbertov transformator svepropusni IIR sustav, tada je prijenosna funkcija  $N$ -tog reda transformatora oblika

$$H_{ht}(z) = (-1)^N \frac{\prod_{k=1}^N (d_k - z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})} \quad (4.45)$$

gdje  $d_k$  označavaju polove transformatora. Uz pretpostavku da su polovi jednostruki i smješteni unutar jedinične kružnice, energija (4.41) mjerena na izlazu transformatora (4.45) poprima jednostavan oblik

$$e_y = \frac{\omega_2}{\pi} - \frac{\omega_1}{\pi} \quad (4.46)$$

Za  $S > 0$ , konvolucije  $e_{si}[S]$ ,  $i=1,2$  u (4.44) mogu se jednoznačno izraziti za oba slučaja kao

$$\begin{aligned} e_{si}[S] &= \frac{B_0^2 \omega_i}{\pi} \text{sinc}(\omega_i 2S) \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^N A_r^2 \frac{d_r \sin[\omega_i(2S+1)] - \sin(\omega_i 2S)}{1 - 2d_r \cos(\omega_i) + d_r^2} \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^N A_r d_r^{2S} \left[ 2B_0 + A_r(2S+1) + 2d_r \sum_{q=1, q \neq r}^N \frac{A_q}{d_r - d_q} \right] \\ &\times \left[ \omega_i + \tan^{-1} \frac{d_r \sin(\omega_i)}{1 - d_r \cos(\omega_i)} + \sum_{k=1}^{2S} \frac{\sin(\omega_i k)}{k} d_r^{-k} \right] \end{aligned} \quad (4.47)$$

gdje su konstanta  $B_0$  i reziduumi polova  $A_r$  dani izrazima

$$B_0 = \frac{(-1)^N}{\prod_{k=1}^N d_k} \quad (4.48)$$

$$A_r = (-1)^N \frac{\prod_{k=1}^N (d_k - d_r^{-1})}{\prod_{k=1, k \neq r}^N (1 - d_k d_r^{-1})}, \quad r = 1, 2, \dots, N \quad (4.49)$$

Polovi svepropusnog IIR Hilbertovog transformatora (4.45) koji osiguravaju najmanju pogrešku simetrije (4.40) mogu se dobiti rješavanjem problema

$$E_{opt} = \min_{S, d_1, \dots, d_N} [E_a(d_1, \dots, d_N, S, \omega_1, \omega_2)] \quad (4.50)$$

Frekvencijama  $\omega_1$  i  $\omega_2$  zadaje se područje interesa pa tijekom optimizacijskog postupka predstavljaju konstantu. Apscisa linije simetrije  $S$  je diskretna varijabla pa je optimizaciju potrebno provesti za nekoliko vrijednosti od  $S$ . Međutim, u većini slučajeva njezina optimalna vrijednost iznosi  $S_{opt}=N-1$ . Početni polovi transformatora za optimizacijski postupak moraju biti smješteni unutar jedinične kružnice. Brza konvergencija postiže se ako su jednoliko raspoređeni duž područja interesa.

Razdvajanjem polova na realni i imaginarni dio, problem (4.50) može se jednostavno transformirati u optimizacijski problem s realnim varijablama. Kao takav, može se riješiti klasičnim metodama za nelinearnu optimizaciju.

Za ilustraciju metode, dizajniran je optimalni Hilbertov transformator 6-og i 12-og reda s  $\omega_1=0.06\pi$  i  $\omega_2=0.94\pi$ . Za dobivanje polova korištena je kvazi-Newtonova metoda s BFGS aproksimacijom Hessiana. Slika 4.17 prikazuje dobivenu faznu pogrešku, zajedno s odgovarajućim kašnjenjem  $S_{opt}$  i pogreškom simetrije  $E_{opt}$ .

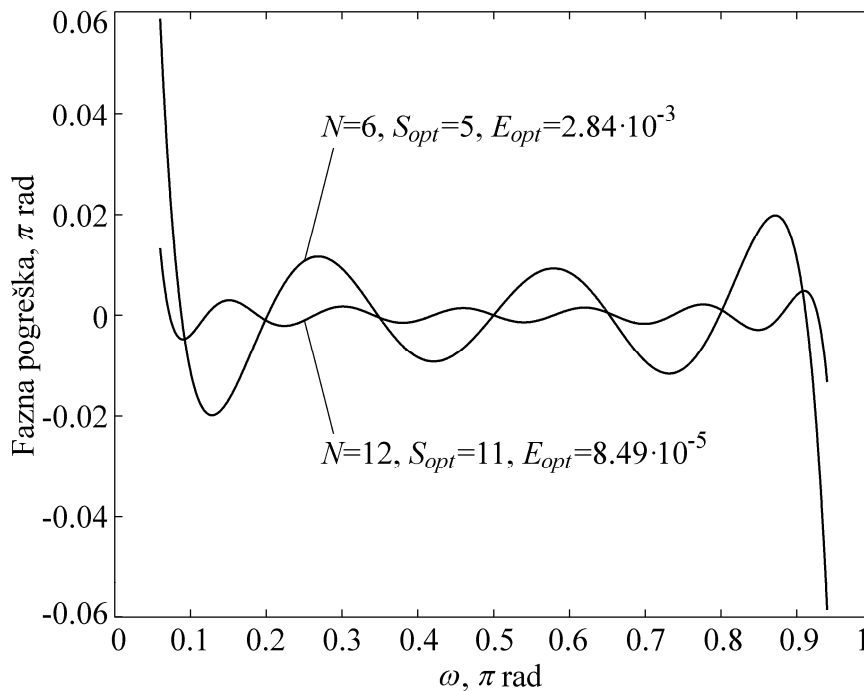
Slika 4.18 prikazuje pogrešku simetrije  $E_a$  izračunatu za Hilbertove transformatore različitih redova, dobivenih metodom temeljenoj na svojstvenim vrijednostima [46], najmanjoj  $p$ -toj aproksimaciji fazne pogreške [48], te optimizaciji pogreške simetrije vremenskog odziva (4.40). Svi transformatori dizajnirani su za područje interesa s centralnom frekvencijom  $\pi/2$ , uz  $\omega_1=0.06\pi$  rad i kašnjenje iznosa  $N-1$ . Najveće izobličenje vremenskog odziva javlja se kod transformatora s jednolikom valovitosti fazne pogreške dobivenih metodom temeljenoj na svojstvenim vrijednostima. Transformatori dobiveni metodom najmanje fazne pogreške 50-og reda unose izobličenje čiji je iznos blizu onih s jednolikom valovitosti. To se moglo i očekivati budući je aproksimacija jednolikom valovitosti granični

slučaj najmanje  $p$ -te aproksimacije za  $p \rightarrow \infty$ . Međutim, pogreška simetrije se smanjuje kako se smanjuje  $p$ . Najmanje izobličenje postiže se za transformatore s najmanjom pogreškom simetrije. Kao što se moglo i očekivati, ti filtri malo su bolji od onih dobivenih najmanjom kvadratnom pogreškom. Naime, može se pokazati da je pogrešku neparne simetrije diskretnog odziva, slično kao i pogrešku simetrije kontinuiranog odziva, moguće izraziti u frekvencijskoj domeni preko fazne pogreške [50] na način

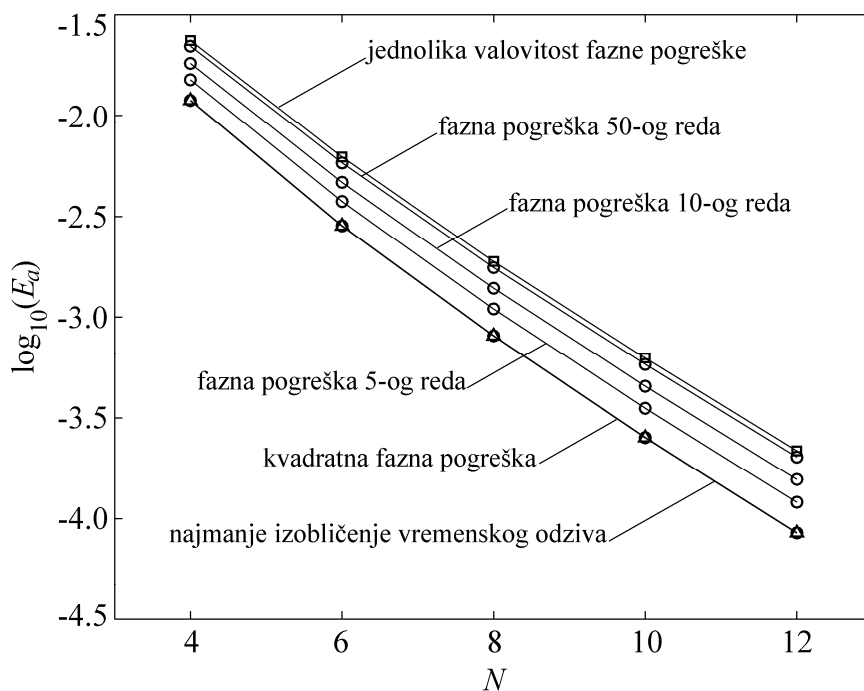
$$e_a[S] = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin^2 \left[ \theta(\omega) - \left( -S\omega - \frac{\pi}{2} \right) \right] d\omega = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} \sin^2 [\theta(\omega) - \theta_d(\omega, S)] d\omega \quad (4.51)$$

Za dovoljno male pogreške ona se može aproksimirati najmanjom kvadratnom faznom pogreškom

$$e_{ls}[S] = \frac{2}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} [\theta(\omega) - \theta_d(\omega, S)]^2 d\omega \quad (4.52)$$



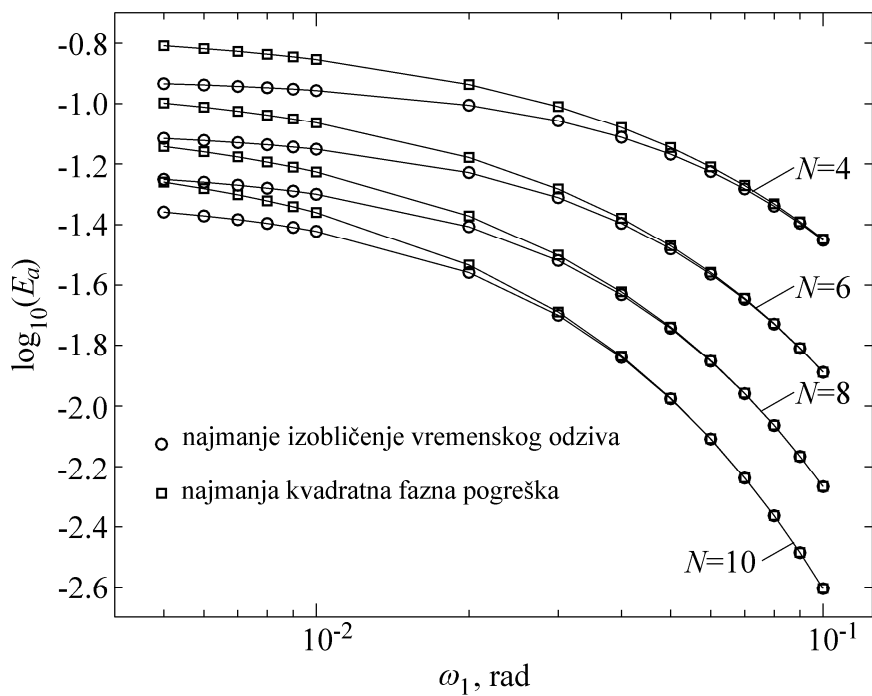
Slika 4.17 Fazna pogreška optimalnih Hilbertovih transformatora šestog i dvanaestog reda s  $\omega_1=0.06\pi$  rad i  $\omega_2=0.94\pi$  rad.



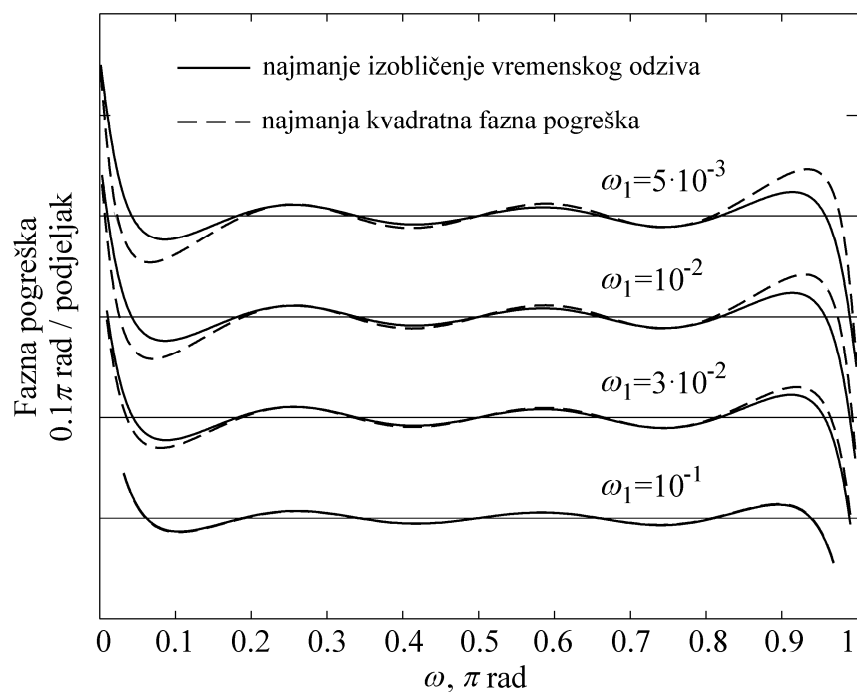
Slika 4.18 Pogreška simetrije za razne svepropusne IIR Hilbertove transformatore s  $\omega_1=0.06\pi$  rad, izračunata za  $S=N-1$ .

Interesantno je razmotriti optimalne transformatore dobivene optimizacijom pogreške simetrije (4.38) i njezine aproksimacije (4.52). Obje funkcije imaju različito ponašanje obzirom na polove. Prema tome, prijenosne funkcije koje osiguravaju njihov minimum opisuju različite sustave. Ipak, ako je područje interesa  $\omega_2-\omega_1$  usko, tada se postiže mala fazna pogreška  $\theta(\omega)-\theta_d(\omega,S)$  u okolini oba optimuma. Iz ovoga slijedi da su i optimumi funkcija blizu.

Na slici 4.19 prikazana je pogreška simetrije za svepropusne IIR Hilbertove transformatore s najmanjim izobličenjem vremenskog odziva i s najmanjom kvadratnom faznom pogreškom [48]. Pogreška je dana kao funkcija najniže frekvencije područja interesa,  $\omega_1$ , uz pretpostavku  $\omega_1+\omega_2=\pi$ . Slika 4.20 pokazuje faznu pogrešku transformatora šestog reda za razne vrijednosti frekvencije  $\omega_1$ . Iz slika je vidljivo da se povećanjem  $\omega_1$ , tj. smanjivanjem područja interesa, kriterij najmanjih kvadrata približava kriteriju simetrije vremenskog odziva. Za  $\omega_1 \geq 0.1$  razlika u ove dvije metode može se vidjeti samo kroz numeričke vrijednosti. S druge strane, smanjivanjem  $\omega_1$  prema nuli, razlika se povećava što je vidljivo i u pogrešci simetrije i u krivuljama fazne pogreške. Iz tog razloga dane su numeričke vrijednosti polova dva Hilbertova transformatora s najmanjom pogreškom simetrije. U tablici 4.2 dani su polovi za  $\omega_1=0.1$  rad. Ti polovi praktički su jednaki onima dobivenima optimizacijom kvadratne fazne pogreške. Ta razlika je značajna kod polova koji odgovaraju frekvenciji  $\omega_1=0.01$  rad, te su oni dani u tablici 4.3.



Slika 4.19 Pogreška simetrije svepropusnih IIR Hilbertovih transformatora s najmanjim izobličenjem vremenskog odziva i najmanjom kvadratnom faznom pogreškom.



Slika 4.20 Fazna pogreška svepropusnih IIR Hilbertovih transformatora šestog reda s najmanjim izobličenjem vremenskog odziva i najmanjom kvadratnom faznom pogreškom.

Iz slike 4.20 može se uočiti da pristup u vremenskoj domeni rezultira manjom faznom pogreškom unutar područja interesa. Štoviše, povećavanjem područja interesa, povećanje valovitosti je manje nego u slučaju korištenja kriterija najmanje kvadratne pogreške.

Tablica 4.2 Polovi svepropusnih IIR Hilbertovih transformatora s najmanjim izobličenjem vremenskog odziva za  $\omega_1=0.1$  rad.

$N$	$d_k$	$N$	$d_k$
4	$\pm 0.464548j$ $\pm 0.848767$	8	$\pm 0.597291j$ $\pm (0.452582 \pm 0.430993j)$ $\pm 0.903109$
6	$\pm (0.292014 \pm 0.476551j)$ $\pm 0.884212$	10	$\pm (0.200644 \pm 0.605453j)$ $\pm (0.550659 \pm 0.383726j)$ $\pm 0.915190$

Tablica 4.3 Polovi svepropusnih IIR Hilbertovih transformatora s najmanjim izobličenjem vremenskog odziva za  $\omega_1=0.01$  rad.

$N$	$d_k$	$N$	$d_k$
4	$\pm 0.488753j$ $\pm 0.868301$	8	$\pm 0.644880j$ $\pm (0.489750 \pm 0.462228j)$ $\pm 0.931123$
6	$\pm (0.313350 \pm 0.508574j)$ $\pm 0.909569$	10	$\pm (0.218974 \pm 0.656858j)$ $\pm (0.598486 \pm 0.411614j)$ $\pm 0.944305$

#### 4.4.2 Korektori

U sustavima za digitalnu obradu signala zahtjevi se obično postavljaju i na amplitudnu i na faznu karakteristiku sustava. Najčešći zahtjev na amplitudu je selektivnost. U aplikacijama koje zahtijevaju malo izobličenje signala, zahtijeva se linearna ili približno linearna faza. Ovi zahtjevi mogu se zadovoljiti korištenjem jedne prijenosne funkcije koja istovremeno aproksimira obje karakteristike. Međutim, više stupnjeva slobode se postiže ako se selektivan sustav realizira nezavisno, a potom spaja u kaskadu sa svepropusnim korektorom koji osigurava zahtjeve postavljene na fazu ili grupno kašnjenje sustava [51]. Dizajn ovih korektora može se provesti u frekvencijskoj domeni korištenjem neke od poznatih metoda za dizajn svepropusnih sustava. Takve metode temelje se na najmanjoj  $p$ -toj pogrešci faze [48], [52]–[57] ili jednolikoj valovitosti fazne pogreške [46], [58]–[60].



Dizajn korektora može se provesti i u vremenskoj domeni. Jedan takav postupak temelji se na minimizaciji simetrije impulsnog odziva [61]. Nedostatak ove metode je taj što ne uzima u obzir frekvencijsko područje unutar kojeg se korekcija vrši, već korekciju izvodi nad cijelom frekvencijskom osi, tj. za  $|\omega| \leq \pi$ . Ukoliko se želi kontrolirati frekvencijsko područje nad kojim se vrši korekcija, tada se metoda u [61] može generalizirati tako da se umjesto pogreške simetrije impulsnog odziva koristi pogreška simetrije odziva na sinc puls [62]. Nadalje, potrebno je razmatrati simetriju kontinuirane reprezentacije odziva, a ne simetriju uzoraka.

Vremenski diskretni sinc puls koji zauzima frekvencijsko područje  $|\omega| \leq \omega_c$  određen je izrazom (3.84) uz  $\omega_g = \omega_c$ . Kontinuirana reprezentacija odziva dana u izrazu (3.91), za slučaj kauzalnih sustava, tj.  $h[n] = 0$  za  $n < 0$ , poprima oblik

$$y_a(t) = \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} h[n] \text{sinc}[\omega_c(t-n)] \quad (4.53)$$

Pogreška simetrije odziva na sinc puls dana u (4.1), u vremenski diskretnoj domeni ima istu definiciju, tj.

$$e_a(t_s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} [y_a(t) - y_a(2t_s - t)]^2 dt \quad (4.54)$$

Uvrštavanjem odziva (4.53) u integral (4.54), pogrešku simetrije moguće je zapisati kao

$$e_a(t_s) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} h[n] [\text{sinc}(\omega_c(t-n)) - \text{sinc}(\omega_c(2t_s - t - n))] \right\}^2 dt \quad (4.55)$$

Kvadriranjem podintegralne funkcije u (4.55) i sređivanjem dobivenog, dolazi se do

$$e_a(t_s) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h[n] h[k] \times \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega_c^2}{\pi^2} \{ \text{sinc}[\omega_c(t-n)] - \text{sinc}[\omega_c(2t_s - t - n)] \} \{ \text{sinc}[\omega_c(t-k)] - \text{sinc}[\omega_c(2t_s - t - k)] \} dt \quad (4.56)$$

Rješavanjem integrala u (4.56) pogreška simetrije može se zapisati u obliku

$$e_a(t_s) = \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h[n] h[k] \text{sinc}[\omega_c(k-n)] - \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h[n] h[k] \text{sinc}[\omega_c(k+n-2t_s)] \quad (4.57)$$

Lako je pokazati da se prvi pribrojnik u (4.57) može izraziti preko uzoraka odziva  $y[n]$  na način

$$e_a(t_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y^2[n] - \frac{\omega_c}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} h[n] h[k] \text{sinc}[\omega_c(k+n-2t_s)] \quad (4.58)$$

Prva suma u (4.58) predstavlja energiju odziva  $y[n]$  pa se pogreška  $e_a(t_s)$  može izraziti u obliku

$$e_a(t_s) = e_y - e_s(t_s) \quad (4.59)$$

Za dizajn korektora koji osigurava najmanju pogrešku simetrije (4.59), potrebno je pogrešku izraziti preko parametara korektora. U ovom dizajnu odabrani su polovi. Prijenosna funkcija svepropusnog korektora  $A$ -tog reda opisana je izrazom

$$H_e(z) = (-1)^A \frac{\prod_{k=1}^A (d_k - z^{-1})}{\prod_{k=1}^A (1 - d_k z^{-1})} \quad (4.60)$$

gdje  $d_k$  označavaju polove korektora. Ako su polovi jednostruki, impulsni odziv može se izraziti kao

$$h_e[n] = \frac{(-1)^A}{\prod_{k=1}^A d_k} \delta[n] + \sum_{r=1}^A K_r d_r^n, \quad n \geq 0 \quad (4.61)$$

gdje su  $K_r$  reziduumi polova oblika

$$K_r = (-1)^A \frac{\prod_{k=1}^A (d_k - d_r^{-1})}{\prod_{k=1, k \neq r}^A (1 - d_k d_r^{-1})}, \quad r = 1, \dots, A \quad (4.62)$$

U praksi je filter koji se korigira često opisan impulsnim odzivom  $h_f[n]$ . Međutim, ako je zadana njegova prijenosna funkcija, impulsni odziv može se jednostavno izračunati korištenjem poznatih izraza koji se, na primjer, mogu naći u [28].

Impulsni odziv kaskade filtra i korektora dan je konvolucijom

$$h[n] = h_f[n] * h_e[n] \quad (4.63)$$

gdje su  $h_f[n]$  i  $h_e[n]$  impulsni odzivi filtra i korektora. Ova konvolucija izračunava se za impulsne odzive koji su odječeni na njihovu efektivnu duljinu kao što je opisano u poglavlju 3.6.

Ovako definiranu pogrešku simetrije potrebno je optimirati u cilju dobivanja najmanjeg izobličenja vremenskog odziva. Obzirom da energija odziva kaskade  $e_y$  ovisi samo o filtru kojeg se korigira, optimalni polovi korektora dobivaju se rješavanjem problema

$$\min_{t_s, d_1, \dots, d_A} \left[ -e_s(\omega_g, t_s, d_1, \dots, d_A) \right] \quad (4.64)$$

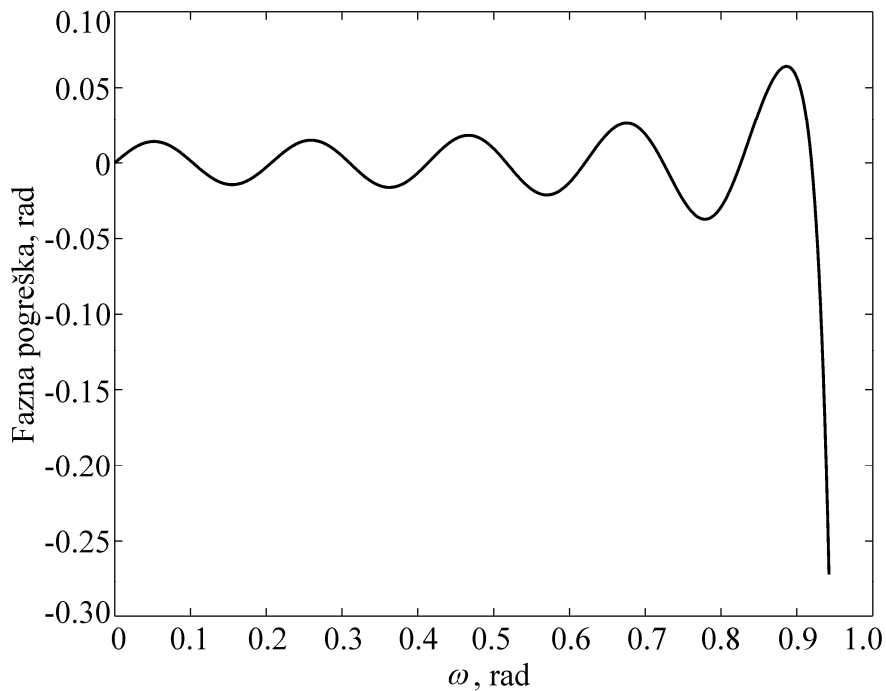
Za provođenje optimizacije, potrebno je odabrati početnu iteraciju, tj. početne polove korektora i početnu os simetrije. Početne polove korektora može se smjestiti u onaj dio unutar jedinične kružnice koji odgovara području propuštanja filtra. Kod visokih redova korektora, neke od njih potrebno je smjestiti i u prijelazno područje. Za početnu os simetrije preporučuje se uzeti položaj najvećeg uzorka impulsnog odziva početne kaskade.

Problem (4.64) sadrži funkciju cilja s kompleksnim varijablama. Razdvajanjem polova na realni i imaginarni dio, optimizacija se svodi na traženje minimuma funkcije cilja s realnim varijablama. U njoj optimizaciji mogu se koristiti klasične metode za nelinearnu optimizaciju.

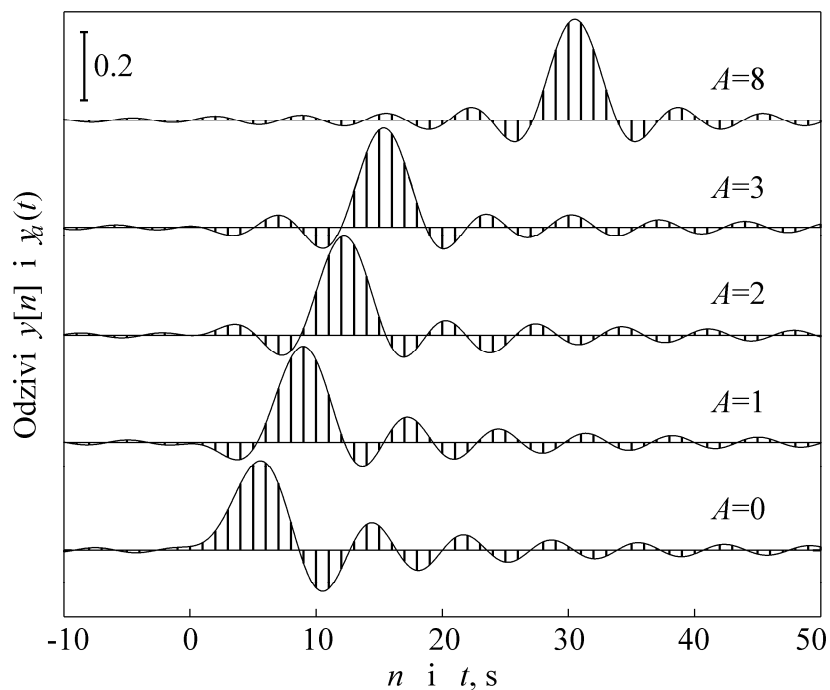
Za ilustraciju robusnosti metode provedena je korekcija niskopropusnog eliptičkog filtra 8-og reda s valovitosti u području propuštanja 0.1dB, valovitosti u području gušenja 60dB i granične frekvencije  $\omega_{0.1dB} = 0.3\pi$  rad. Područje nad kojim se vrši korekcija ograničeno je na područje propuštanja filtra. Za dobivanje optimalnih polova korektora korištena je kvazi-Newtonova metoda s BFGS formulom za aproksimaciju Hessiana. Na slici 4.21 prikazana je fazna pogreška kaskade filtra i optimalnog korektora 8-og reda.

Budući je metoda temeljena na kriteriju u vremenskoj domeni, ilustrativno je pogledati odzive na sinc puls. Slika 4.22 prikazuje odzive  $y[n]$  i  $y_a(t)$  kaskade s  $A=1, 2, 3$  i  $8$ , zajedno s odzivima samog filtra, označenog s  $A=0$ . Odziv samog filtra značajno je izobličen. Povećanjem reda korektora, odziv postaje sve više simetričan. Za visoke redove korektora povećanje simetričnosti više se ne može vidjeti u valnim oblicima već samo kroz numeričke vrijednosti.

Mjera simetrije za vremenski diskretne sustave u frekvencijskoj domeni ima sličnu reprezentaciju kao i njezin ekvivalent za vremenski kontinuirane sustave [62].



Slika 4.21 Fazna pogreška kaskade eliptičkog niskopropusnog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 60dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora osmog reda, uz  $\omega_g = \omega_{0.1dB} = 0.3\pi$  rad.



Slika 4.22 Odzivi  $y[n]$  i  $y_a(t)$  kaskade eliptičkog niskopropusnog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 60dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora  $A$ -tog reda, uz  $\omega_g = \omega_{0.1dB} = 0.3\pi$  rad.

## 5 Sinteza sustava primjenom maksimuma odziva na sinc puls

U poglavlju 4 opisan je dizajn sustava s minimalnim izobličenjem vremenskog odziva koje je bilo opisano pogreškom simetrije odziva na sinc puls. U ovom poglavlju opisan je dizajn koji se temelji na izravnom računanju maksimuma sličnosti pobude i odziva.

### 5.1 Mjera izobličenja valnog oblika signala

Mjera izobličenja valnog oblika signala na izlazu nekog sustava može se definirati kao maksimum normirane korelacije između pobude  $x(t)$  i odgovarajućeg odziva sustava  $y(t)$ , tj. kao

$$\mu = \max_t \left[ \frac{x(t) \circ y(t)}{\sqrt{e_x e_y}} \right] \quad (5.1)$$

pri čemu  $e_x$  i  $e_y$  označavaju energiju pobude odnosno energiju odziva sustava. Pritom je korelacija definirana integralom

$$x(t) \circ y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) y(t + \tau) d\tau \quad (5.2)$$

U ovoj mjeri mogu se koristiti razni modeli pobudnog signala. Ako se radi o korekciji selektivnog filtra, tada je poželjno koristiti model signala koji jednoliko pobuđuje filtar na svim frekvencijama unutar područja propuštanja. U sklopu ove mjere uzet je opet sinc puls nulte faze opisan izrazom (3.1). Obzirom da je odziv sustava konvolucija

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (5.3)$$

a autokorelacija sinc pulsa opet isti taj puls, tj.

$$x(t) \circ x(t) = x(t) \quad (5.4)$$

korelacija pobude i odziva poprima jednostavniji oblik

$$x(t) \circ y(t) = x(t) \circ x(t) * h(t) = x(t) * h(t) = y(t) \quad (5.5)$$

Iz navedenog slijedi da se mjera izobličenja može zapisati kao

$$\mu = \max_t \left[ \frac{y(t)}{\sqrt{e_x e_y}} \right] \quad (5.6)$$

Budući energija pobude i energija odziva nisu funkcija vremena, slijedi da je mjera izobličenja valnog oblika proporcionalna maksimumu odziva sustava na sinc puls. Ova mjera prvi put je definirana u [63].

## 5.2 Sinteza vremenski kontinuiranih korektora

Pretpostavimo da je zadan niskopropusni filter  $N$ -tog reda s  $M < N$  nula. Njemu u kaskadu neka je spojen svepropusni korektor  $A$ -tog reda. Prijenosna funkcija kaskade filtra i korektora opisana je izrazom (4.11) koji je ovdje ponovljen zbog potpunosti

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \times (-1)^A \frac{\prod_{q=N+1}^{N+A} (s + p_q)}{\prod_{q=N+1}^{N+A} (s - p_q)} \quad (5.7)$$

gdje  $p_k$ ,  $z_i$  i  $H_0$  označavaju polove, nule i pojačanje filtra. Korektor je opisan sa svojim polovima  $p_q$ .

Odziv sustava (5.7) na sinc puls izveden je u poglavlju 3.2 za  $-\infty < t < \infty$ . Ovdje će biti ponovljen samo dio odziva i to za  $t > 0$  budući je sustav kauzalan. Za jednostruke polove kaskade koji se nalaze u lijevoj poluravnini odziv na sinc puls je oblika

$$y(t) = \frac{H_0 (-1)^A \alpha \omega_c}{2\pi} \text{sinc}(\omega_c t) + \frac{j H_0 (-1)^A \pi}{2\pi} \sum_{r=1}^{N+A} K_r \exp(p_r t) \{ \text{ei}[-t(p_r + j\omega_c)] - \text{ei}[-t(p_r - j\omega_c)] \} \quad (5.8)$$

gdje je  $\alpha=1$  za  $M=N$  i  $\alpha=0$  za  $M < N$ . Reziduumi polova prijenosne funkcije  $K_r$ ,  $r=1, \dots, N+A$ , dani su izrazom

$$K_r = \frac{\prod_{i=1}^M (p_r - z_i) \prod_{q=N+1}^{N+A} (p_r + p_q)}{\prod_{k=1, k \neq r}^{N+A} (p_r - p_k)} \quad (5.9)$$

Cilj dizajna je pronaći optimalni korektor koji smanjuje izobličenje signala unesenog filtrom. Drugim riječima, optimalni korektor mora osigurati maksimum mjere (5.6). Energija odziva kaskade  $e_y$  određena je samo prijenosnom funkcijom filtra. Stoga će ona predstavljati konstantu tijekom optimizacijskog postupka. Nadalje, energija pobude  $e_x$  je konstantna za dani ulazni signal. Prema tome polovi korektora koji osigurava maksimum odziva na sinc puls mogu se dobiti rješavanjem problema

$$\min_{t, p_{N+1}, \dots, p_{N+A}} \left[ -y(t, \omega_g, p_1, \dots, p_{N+A}, z_1, \dots, z_M) \right] \quad (5.10)$$

Parametar  $\omega_g$  služi za kontrolu frekvencijskog područja unutar kojeg se korekcija vrši. Stoga se on tijekom optimizacijskog postupka tretira kao konstanta.

Problem (5.10) sadrži funkciju cilja s kompleksnim varijablama. Razdvajanjem polova korektora na realni i imaginarni dio, taj problem se svodi na optimizacijski problem s realnim varijablama. Kao takav može se riješiti bilo kojom metodom za nelinearnu optimizaciju. U ovom radu korištena je kvazi-Newtonova metoda s BFGS formulom za aproksimaciju Hessian matrice.

Premda funkcija cilja u (5.10) nije konveksna, izbor početnih polova korektora koji vode rješenju nije kritičan. Međutim, brza konvergencija može se postići ako se oni razmjeste ekvidistantno unutar područja  $-\omega_g \leq \omega \leq \omega_g$ , malo lijevo ili desno od polova filtra. Dobar izbor početne osi maksimuma odziva  $t$  je pozicija maksimuma odziva kaskade s početnim polovima korektora. Ona se može pronaći rješavanjem problema

$$\min_t \left[ -y(t, \omega_g, p_1, \dots, p_{N+A}, z_1, \dots, z_M) \right] \quad (5.11)$$

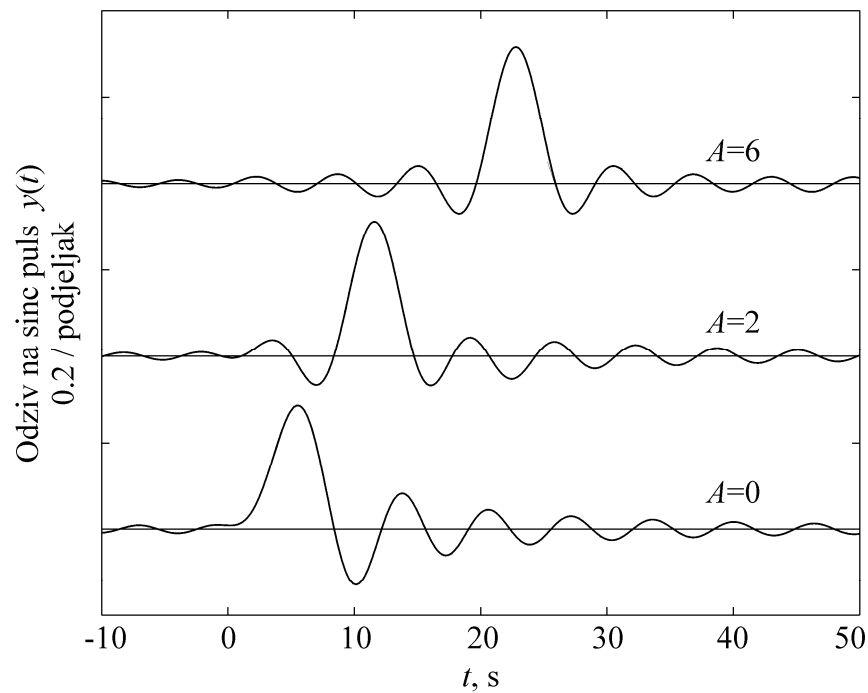
gdje su  $p_{N+1}, \dots, p_{N+A}$  polovi početnog korektora.

Na sličan način može se izvesti i korekcija pojasnopropusnih filtara. Pritom se u njihovom dizajnu traži maksimum linearne kombinacije odgovarajućih odziva na sinc puls.

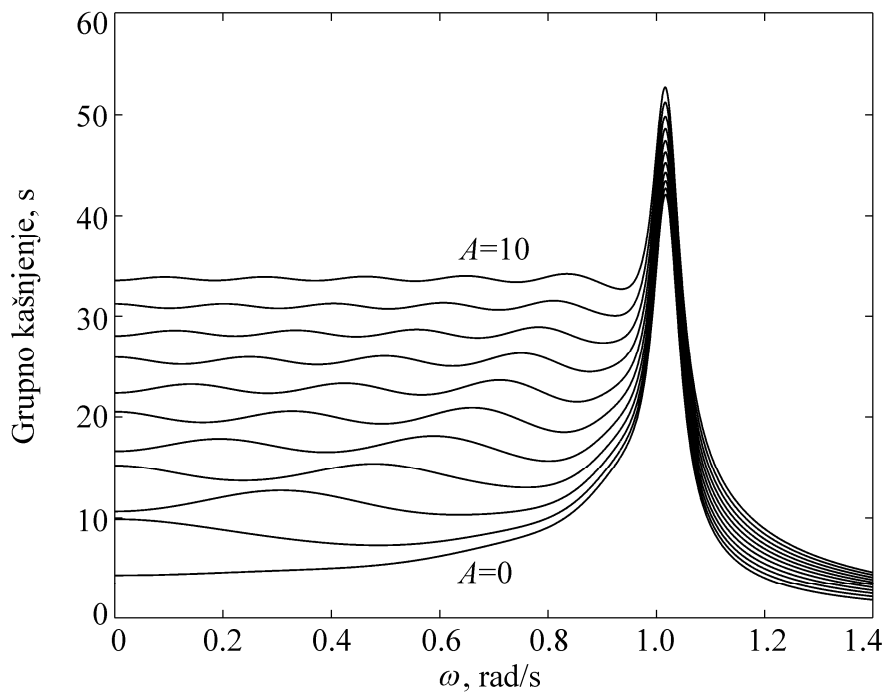
Za ilustraciju postupka opisana je korekcija niskopropusnog eliptičkog filtra osmog reda s valovitošću u području propuštanja 0.1dB i valovitošću u području gušenja 60dB. Optimizacijski postupak (5.10) proveden je za korektore od prvog,  $A=1$ , do desetog reda,  $A=10$ . Frekvencijsko područje unutar kojeg se korekcija vrši uzeto je da odgovara graničnoj frekvenciji filtra i u ovom primjeru ono iznosi  $\omega_g=1$  rad/s. Na slici 5.1 prikazan je odziv na sinc puls dobivenih kaskada, pretpostavljajući da slučaj  $A=0$  odgovara zadanom filtru. Kao što se može vidjeti na slici, sam filter značajno izobličuje signal. Korektor drugog reda smanjuje izobličenje, ali valni oblik je još značajno različit od valnog oblika ulaznog signala, u ovom slučaju sinc pulsa. Ta razlika se smanjuje povećanjem reda korektora, i za  $A \geq 6$  može se vidjeti samo u numeričkim podacima.

Iako je dizajn izveden u vremenskoj domeni, ilustrativno je pogledati i odgovarajuće krivulje grupnog kašnjenja. Slika 5.2 prikazuje krivulje grupnog kašnjenja dobivenih kaskada.

Kao što se moglo i očekivati, one aproksimiraju konstante s određenom valovitošću unutar područja korekcije. Ta valovitost je veća na rubu područja, ali se značajno smanjuje povećanjem reda korektora.



Slika 5.1 Odziv na sinc puls kaskade eliptičkog filtra osmog reda i optimalnog korektora  $A$ -tog reda.



Slika 5.2 Grupno kašnjenje kaskade eliptičkog filtra osmog reda i optimalnog korektora  $A$ -tog reda.



### 5.3 Frekvencijska reprezentacija maksimuma odziva

Za bolje razumijevanje mjere izobličenja valnog oblika (5.6), potrebno je mjeru izraziti u frekvencijskoj domeni. Odziv  $y(t)$  može se izračunati iz poznate Fourierove transformacije  $Y(j\omega)$  kao

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.12)$$

U ovom slučaju, sustav je pobuđen sinc pulsom nulte faze čiji amplitudni dio spektra iznosi 1. Prema tome, Fourierova transformacija odziva sustava je dana s

$$Y(j\omega) = \begin{cases} |H(j\omega)| e^{j\theta(\omega)} & , 0 \leq |\omega| \leq \omega_g \\ 0 & , |\omega| > \omega_g \end{cases} \quad (5.13)$$

gdje su  $|H(j\omega)|$  i  $\theta(\omega)$  amplitudna i fazna karakteristika sustava. Uvrštavanjem (5.13) u integral (5.12) dolazi se do

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\omega_g}^0 |H(j\omega)| e^{j[\theta(\omega)+\omega t]} d\omega + \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)| e^{j[\theta(\omega)+\omega t]} d\omega \right\} \quad (5.14)$$

Fazna karakteristika realnog sustava je neparna funkcija. Korištenjem svojstva  $\theta(-\omega) = -\theta(\omega)$ , integral (5.14) može se zapisati na način

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)| \left\{ e^{-j[\theta(\omega)+\omega t]} + e^{j[\theta(\omega)+\omega t]} \right\} d\omega \quad (5.15)$$

Primjenom Eulerove formule, jednakost (5.15) može se izraziti u trigonometrijskoj formi kao

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)| \cos[\theta(\omega) - (-\omega t)] d\omega \quad (5.16)$$

Izraz  $-\omega t$  prepoznaje se kao idealna fazna karakteristika, odnosno kao posljedica optimizacije kao željena fazna karakteristika  $\theta_d(\omega)$  pa se može pisati

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)| \cos[\theta(\omega) - \theta_d(\omega)] d\omega \quad (5.17)$$

Primjenom trigonometrijske formule  $\cos(u)=1-2\sin^2(u/2)$ , te razdvajanjem dobivenog integrala na dva pribrojnika dolazi se do

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)| d\omega - \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)| \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} [\theta(\omega) - \theta_d(\omega)] \right\} d\omega \quad (5.18)$$

Prvi pribrojnik u (5.18) je konstanta za dani sustav. Prema tome, traženje maksimuma odziva  $y(t)$  svodi se na traženje minimuma drugog pribrojnika

$$\varepsilon = \frac{2}{\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)| \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} [\theta(\omega) - \theta_d(\omega)] \right\} d\omega \quad (5.19)$$

Ako je fazna pogreška  $\theta(\omega) - \theta_d(\omega)$  dovoljno mala, može se pretpostaviti

$$\sin \left\{ \frac{1}{2} [\theta(\omega) - \theta_d(\omega)] \right\} \approx \frac{1}{2} [\theta(\omega) - \theta_d(\omega)] \quad (5.20)$$

pa se pogreška (5.19) može aproksimirati najmanjom kvadratnom pogreškom s težinskom funkcijom oblika

$$\varepsilon_{wls} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\omega_g} |H(j\omega)| [\theta(\omega) - \theta_d(\omega)]^2 d\omega \quad (5.21)$$

Potrebno je uočiti da u  $\theta_d(\omega) = -\omega t$ , vrijednost za  $t$  treba uzeti takvu da osigurava minimum od  $\varepsilon_{wls}$ . Budući ta vrijednost nije poznata unaprijed,  $t$  treba tretirati kao varijablu u funkciji cilja, slično kao u (5.10).

Kao što se može vidjeti iz izraza (5.21) mjera temeljena na maksimumu odziva na sinc puls može se aproksimirati kvadratnom pogreškom s težinskom funkcijom. Pri tom se kao težinska funkcija pojavljuje amplitudna karakteristika sustava. Za razliku od maksimuma odziva, pokazano je da se mjera temeljena na simetriji odziva također može aproksimirati kvadratnom pogreškom. Međutim, u njenom slučaju težinska funkcija odgovara kvadratu amplitudne karakteristike sustava, kao što je vidljivo u izrazu (4.35).

## 5.4 Sinteza vremenski diskretnih korektora

Mjera izobličenja valnog oblika u diskretnoj domeni u suštini se ne razlikuje od mjere izobličenja u kontinuiranoj domeni. Može se dobiti tako da se u mjeri izobličenja u kontinuiranoj domeni, (5.6), koristi kontinuirana reprezentacija diskretnog odziva na sinc puls,  $y_a(t)$ . Izraz za kontinuiranu reprezentaciju odziva izveden je u poglavlju 3.6, a ovdje je ponovljen radi potpunosti. Za poznati impulsni odziv diskretnog sustava  $h[n]$ , odziv na sinc puls je oblika

$$y_a(t) = \frac{\omega_g}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \text{sinc}[\omega_g(t-n)] \quad (5.22)$$

U nastavku teksta opisan je primjer dizajna svepropusnog IIR korektora koji osigurava minimalno izobličenje valnog oblika [64]. Prijenosna funkcija korektora  $A$ -tog reda opisana je izrazom (4.60). Impulsni odziv korektora ima oblik dan izrazima (4.61) i (4.62).

U praksi je filter često opisan impulsnim odzivom  $h_f[n]$ . Međutim, ukoliko je zadana njegova prijenosna funkcija, impulsni odziv može se jednostavno izračunati korištenjem izraza (3.82) i (3.83).

Impulsni odziv kaskade filtra i korektora je konvolucija

$$h[n] = h_f[n] * h_e[n] \quad (5.23)$$

Odziv (5.23) je kauzalan. Prema tome suma u (5.22) kreće od nultog indeksa umjesto od  $-\infty$ . Nadalje, u implementaciji odziva praktično je koristiti konačnu sumu. Stoga suma u izrazu za odziv ide do konačnog broja  $P$  umjesto do  $+\infty$ . Budući je vrijednost svih uzoraka sinc pulsa manja od 1, vrijednost za  $P$  može se estimirati korištenjem efektivne duljine impulsnog odziva kao što je opisano u poglavlju 3.6.

Optimalni korektor dobiva se rješavanjem problema

$$\min_{t, d_1, \dots, d_A} [-y_a(t, \omega_g, d_1, \dots, d_A)] \quad (5.24)$$

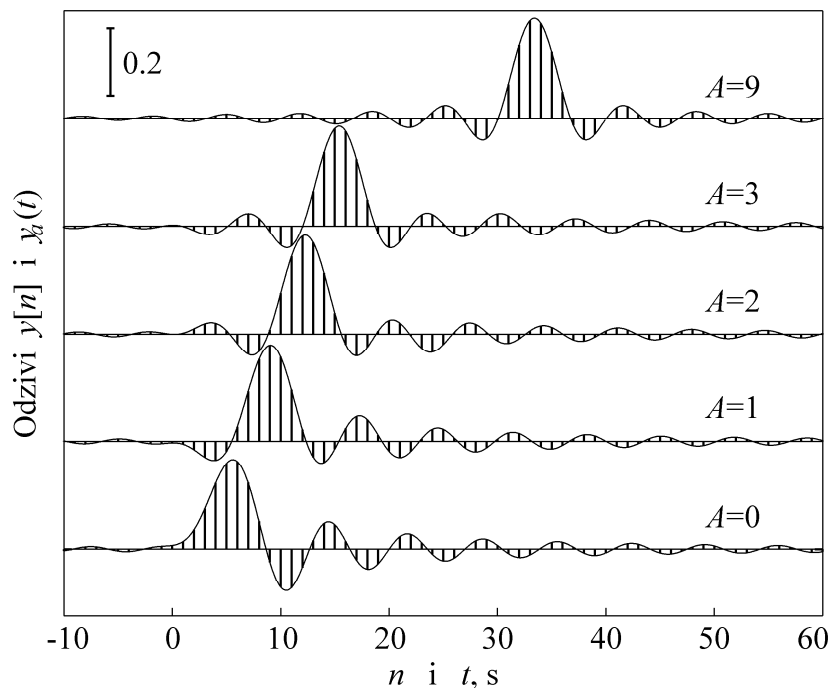
Izbor početnih polova koji vode optimalnom korektoru nije kritičan. Brža konvergencija može se postići ako se oni razmjeste ekvidistantno unutar područja koje odgovara području propuštanja filtra. Dobar izbor za početnu poziciju maksimuma dobiva se rješavanjem problema

$$\min_t [-y_a(t, \omega_g, d_{01}, \dots, d_{0A})] \quad (5.25)$$

gdje su  $d_{01}, \dots, d_{0A}$  početni polovi korektora.

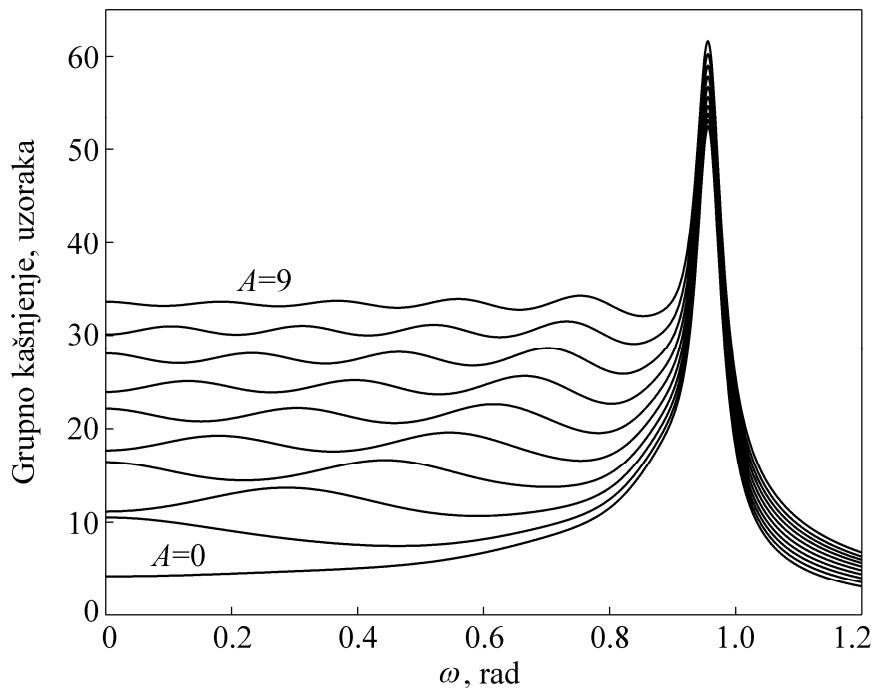
Problemi (5.24) i (5.25) sadrže nekonveksne funkcije cilja. U ovom primjeru za njihovo rješavanje korištena je kvazi-Newtonova metoda s BFGS formulom za aproksimaciju Hessiana.

Za ilustraciju metode opisat će se korekcija niskopropusnog eliptičkog filtra osmog reda granične frekvencije  $0.3\pi$  rad, s valovitošću u području propuštanja 0.1dB i valovitošću u području gušenja 60dB. Optimizacijski postupak (5.24) proveden je za korektore od prvog,  $A=1$ , do devetog reda,  $A=9$ . Frekvencijsko područje unutar kojeg se korekcija vrši uzeto je da odgovara graničnoj frekvenciji filtra. Na slici 5.3 prikazani su odzivi kaskada na sinc puls  $y[n]$  i  $y_a(t)$  za  $A=1, 2, 3$  i  $9$ , zajedno s odzivima filtra koji su označeni s  $A=0$ . Razmatranja valnih oblika slična su onima kod vremenski kontinuiranih korektora koji osiguravaju maksimum odziva, opisanim u poglavlju 5.2. Polazni filter značajno izobličuje signal. Korektor prvog reda smanjuje izobličenje, ali valni oblik lijevo od glavne latice odziva još je uvijek prilično različit od njegove desne strane. Ta razlika se smanjuje povećanjem reda korektora, i za veće redove može se vidjeti samo u numeričkim podacima.



Slika 5.3 Odzivi  $y[n]$  i  $y_a(t)$  kaskade eliptičkog niskopropusnog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 60dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora  $A$ -tog reda, uz  $\omega_g = \omega_{0.1\text{dB}} = 0.3\pi$  rad.

U poglavlju 5.3 pokazano je kako se kriterij maksimuma odziva može aproksimirati najmanjom kvadratnom faznom pogreškom, pri čemu je amplitudna karakteristika filtra težinska funkcija pogreške. Međutim, fazna pogreška se bolje ilustrira kroz grupno kašnjenje. Stoga, na slici 5.4 prikazane su krivulje grupnog kašnjenja dobivenih kaskada. Kao što se moglo i očekivati, one aproksimiraju konstante s određenom valovitošću unutar područja korekcije. Ta valovitost je veća na rubu područja što je karakteristično svojstvo za sustave dizajnirane po kriteriju najmanje kvadratne pogreške.



Slika 5.4 Grupno kašnjenje kaskade eliptičkog niskopropusnog filtra osmog reda s 0.1dB valovitosti u području propuštanja, te 60dB valovitosti u području gušenja i optimalnog korektora  $A$ -tog reda, uz  $\omega_g = \omega_{0.1\text{dB}} = 0.3\pi$  rad.

## 6 Sinteza sustava sa zadanim impulsnim odzivom

U poglavljima 4 i 5 razmatrani su sustavi od kojih se traži malo izobličenje vremenskog odziva. Sinteza ovakvih sustava provedena je u vremenskoj domeni, a temeljena je sinc pulsu koji se koristio kao model pobude. U praksi ovako dobiveni sustavi služe za obradu signala koji u manjoj ili većoj mjeri odgovaraju korištenom modelu. S druge strane, sinteza u vremenskoj domeni uključuje i sustave koji za danu pobudu daju točno određen vremenski odziv [1]. Takvi sustavi često se susreću u komunikacijama [65]–[68] i mjernoj instrumentaciji [69], [70]. Do danas su razvijene mnoge metode za njihov dizajn. Dobar pregled klasičnih metoda dan je u [1]. Posljednjih godina, razvijene su nove metode za sintezu sustava čiji impulsni odziv [7], [70] ili odziv na stepenicu [71] aproksimira zadanu funkciju. Navedene metode korištene su u dizajnu oblikovača pulseva za ultra širokopolasne (engl. ultra-wideband, UWB) prijenosne sustave [66], analognim implementacijama valične transformacije, sintezi mreža za kašnjenje [7] i sintezi visokonaponskih oblikovača pulseva [71], [72]. U daljnjem tekstu opisana je nova metoda za sintezu sustava u vremenskoj domeni. Metoda je temeljena na optimizaciji linearne funkcije nad prostorom ograničenim stošcima drugog reda (engl. second-order cone programming, SOCP), vrlo popularnoj optimizacijskoj tehnici posljednjih godina.

Optimizacija linearne funkcije nad prostorom ograničenim stošcima drugog reda je konveksno optimiranje koje se može izraziti kao [24], [73]

$$\min_{\mathbf{x}} \mathbf{f}^T \mathbf{x} \quad (6.1)$$

$$\text{uz: } \|\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b}_i\| \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{x} + d_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (6.2)$$

gdje je  $\mathbf{x} \in \mathfrak{R}^n$  varijabla optimizacije, a  $\mathbf{f} \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\mathbf{A}_i \in \mathfrak{R}^{(n_i-1) \times n}$ ,  $\mathbf{b}_i \in \mathfrak{R}^{n_i-1}$ ,  $\mathbf{c}_i \in \mathfrak{R}^n$  i  $d_i \in \mathfrak{R}$  su parametri koji opisuju optimizacijski problem. Norma koja se pojavljuje u (6.2) je standardna Euklidska norma, dana s  $\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u}^T \mathbf{u})^{1/2}$ . Svako ograničenje u (6.2) naziva se ograničenje stošcem drugog reda budući je ono identično izrazu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i \\ \mathbf{c}_i^T \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \mathbf{b}_i \\ d_i \end{bmatrix} \in C_i \quad (6.3)$$

gdje je  $C_i$  stožac drugog reda dimenzije  $n_i$ , definiran izrazom

$$C_i = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ t \end{bmatrix} \mid \mathbf{u} \in \mathfrak{R}^{n_i-1}, t \in \mathfrak{R}, \|\mathbf{u}\| \leq t \right\} \quad (6.4)$$

Za rješavanje problema u (6.1) i (6.2) razvijene su učinkovite metode kao na primjer [74]. Osim toga, postoji i čitav niz programskih alata koji implementiraju spomenute metode. Jedan takav skup alata je *SeDuMi Optimization Toolbox* [75], a predviđen je za rad u MATLAB programskom okruženju.

Mnogi problemi u obradi signala mogu se izravno izraziti u obliku pogodnim za optimizacije nad prostorom omeđenim stošcima drugog reda [24]. S druge strane, ovakva optimizacija može se upotrijebiti i u rješavanju problema kod kojih to nije slučaj. Takvi problemi mogu se riješiti iterativno, pri čemu se funkcija cilja u svakom koraku linearizira, te se formulira i rješava odgovarajući SOCP problem. Jedna takva metoda primijenjena je u sintezi rekurzivnih digitalnih filtara u frekvencijskoj domeni, a može se pronaći u [76] i [77].

U daljnjem tekstu opisana je metoda za sintezu vremenski kontinuiranih sustava koji imaju zadani impulsni odziv. Metoda se temelji na iterativnom postupku koji je preuzet iz [76] i [77], koji je ovdje prilagođen sintezi u vremenskoj domeni. Ovakav pristup prvi put je opisan u [78] i [79].

## 6.1 Formulacija problema

Cilj je pronaći sustav čiji impulsni odziv osigurava minimum integrala kvadratne pogreške dane s

$$e_{w/s}(\mathbf{x}) = \int_0^{\infty} w(t)[h(t, \mathbf{x}) - h_d(t)]^2 dt \quad (6.5)$$

gdje su  $h(t, \mathbf{x})$  impulsni odziv sustava,  $\mathbf{x}$  vektor parametara sustava,  $h_d(t)$  zadani impulsni odziv i  $w(t)$  težinska funkcija.

Dizajn sustava započinje odabirom vektora  $\mathbf{x}$ , tj. odabirom modela sustava. Kao i u prethodno opisanim postupcima, odabran je model opisan nulama, polovima i pojačanjem. Prijenosna funkcija sustav  $N$ -tog reda s  $M$  konačnih nula opisana je izrazom (3.4) koji je ovdje ponovljen zbog potpunosti,

$$H(s) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (6.6)$$

gdje su  $p_k$ ,  $z_i$  i  $H_0$  polovi, nule i pojačanje sustava. Obzirom da je sustav jednoznačno opisan s  $p_k$ ,  $z_i$  i  $H_0$ , ovi parametri predstavljaju dobre kandidate za komponente vektora  $\mathbf{x}$ . Da bi  $\mathbf{x}$  bio realan vektor, potrebno je kompleksne parove polova i nula opisati njihovim realnim i

imaginarnim dijelovima. Ako prijenosna funkcija sadrži  $M_1$  realnih nula,  $M_2$  kompleksnih nula,  $M_3$  imaginarnih nula,  $N_1$  realnih polova i  $N_2$  kompleksnih polova, gdje je  $M_1+M_2+M_3=M$  i  $N_1+N_2=N$ , tada se  $\mathbf{x}$  može definirati kao

$$\mathbf{x} = \left[ H_0, z_1, \dots, z_{M_1}, \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_{M_2/2}, \beta_{M_2/2}, \gamma_1, \dots, \gamma_{M_3/2}, p_1, \dots, p_{N_1}, \sigma_1, \omega_1, \dots, \sigma_{N_2/2}, \omega_{N_2/2} \right]^T \quad (6.7)$$

gdje su  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_k, \sigma_l$  i  $\omega_l$  realni i imaginarni dijelovi kompleksnih nula i polova, kao što je pokazano izrazima

$$z_{M_1+i} = \alpha_i + j\beta_i, z_{M_1+i}^* = \alpha_i - j\beta_i, i = 1, \dots, M_2/2 \quad (6.8)$$

$$z_{M_1+M_2+k} = j\gamma_k, z_{M_1+M_2+k}^* = -j\gamma_k, k = 1, \dots, M_3/2 \quad (6.9)$$

$$p_{N_1+l} = \sigma_l + j\omega_l, p_{N_1+l}^* = \sigma_l - j\omega_l, l = 1, \dots, N_2/2 \quad (6.10)$$

Može se uočiti da su imaginarne nule odvojene od kompleksnih nula. Razlog za to bit će ilustriran u jednom od primjera u daljnjem tekstu.

Korištenjem  $\mathbf{x}$  danim izrazom (6.7), parametri željenog sustava dobivaju se kao

$$\mathbf{x}_{opt} = \arg \min_{\mathbf{x}} [e_{wls}(\mathbf{x})] \quad (6.11)$$

## 6.2 Optimizacijski postupak

Za rješavanje problema u (6.11) koristi se iterativni postupak opisan u [76] i [77] koji je prilagođen sintezi u vremenskoj domeni. Postupak kreće od početne točke,  $\mathbf{x}_0$ . Na temelju ponašanja  $e_{wls}(\mathbf{x})$  u okolini  $\mathbf{x}_0$  pronalazi se odgovarajuća korekcija  $\delta_0$ . Nova točka se dobiva kao  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \delta_0$ . Ovaj postupak se ponavlja sve dok se ne postigne uvjet za završetak postupka. U svakom koraku, korekcija se dobiva rješavanjem SOCP problema. Pretpostavimo da je nakon  $k$  koraka postupak došao do točke  $\mathbf{x}_k$  i da se traži korekcija  $\delta_k$ . Ako je  $h(t, \mathbf{x})$  glatka funkcija, u okolini  $\mathbf{x}_k$  ona se može aproksimirati linearnom formom, kao u

$$h(t, \mathbf{x}_k + \delta) \approx h(t, \mathbf{x}_k) + \mathbf{g}^T(t, \mathbf{x}_k) \delta \quad (6.12)$$

gdje je  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x}_k)$  gradijent od  $h(t, \mathbf{x})$  obzirom na  $\mathbf{x}$ , izračunat u točki  $\mathbf{x}_k$ . Pogreška ove aproksimacije je mala unutar neke okoline,  $V$ , točke  $\mathbf{x}_k$ , tj. za  $\delta \in V$ .



Uvrštavanjem aproksimacije iz (6.12) u pogrešku (6.11) dobiva se njena aproksimacija oblika

$$e_{wls}(\mathbf{x}) \approx \int_0^{\infty} \left\{ \sqrt{w(t)} \mathbf{g}^T(t, \mathbf{x}_k) \boldsymbol{\delta} + \sqrt{w(t)} [h(t, \mathbf{x}_k) - h_d(t)] \right\}^2 dt \quad (6.13)$$

Ako je  $M < N$ ,  $h(t)$  se može smatrati spektralno ograničenim u smislu da postoji frekvencija uzorkovanja  $f_s = 1/T_s$ , dovoljno velika da je pogreška aliasinga zanemariva. Ako je i  $h_d(t)$  spektralno ograničen u istom smislu, tada je  $h(t)$  i  $h_d(t)$  moguće reprezentirati skupovima uzoraka  $h(t_q)$  i  $h_d(t_q)$  gdje je  $t_q = qT_s$ ,  $q = 0, 1, 2, \dots, \infty$ . Uz pretpostavku da je  $h(qT_s) \approx 0$  i  $h_d(qT_s) \approx 0$  za  $q > Q$ , integral u (6.13) može se aproksimirati konačnom sumom, te se pogreška može zapisati na način

$$e_{wls}(\mathbf{x}) \approx T_s \sum_{q=0}^Q \left\{ \sqrt{w(t_q)} \mathbf{g}^T(t_q, \mathbf{x}_k) \boldsymbol{\delta} + \sqrt{w(t_q)} [h(t_q, \mathbf{x}_k) - h_d(t_q)] \right\}^2 \quad (6.14)$$

Izraz (6.14) može se zapisati u matričnom obliku kao

$$e_{wls}(\mathbf{x}) \approx T_s \|\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\delta} + \mathbf{b}\|^2 \quad (6.15)$$

gdje su

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{w(t_0)} \mathbf{g}^T(t_0, \mathbf{x}_k) \\ \sqrt{w(t_1)} \mathbf{g}^T(t_1, \mathbf{x}_k) \\ \vdots \\ \sqrt{w(t_Q)} \mathbf{g}^T(t_Q, \mathbf{x}_k) \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \sqrt{w(t_0)} [h(t_0, \mathbf{x}_k) - h_d(t_0)] \\ \sqrt{w(t_1)} [h(t_1, \mathbf{x}_k) - h_d(t_1)] \\ \vdots \\ \sqrt{w(t_Q)} [h(t_Q, \mathbf{x}_k) - h_d(t_Q)] \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

Korekcija  $\boldsymbol{\delta}_k$  može se pronaći optimiranjem pogreške  $e_{wls}(\mathbf{x})$  u (6.15) uz ograničenje  $\boldsymbol{\delta} \in V$ . Međutim, uvažavajući jednakost

$$\arg \min_{\mathbf{x}} [e_{wls}(\mathbf{x})] = \arg \min_{\mathbf{x}} \left[ \sqrt{e_{wls}(\mathbf{x})} \right] \quad (6.18)$$

problem se može preoblikovati i  $\boldsymbol{\delta}_k$  se može pronaći rješavanjem problema

$$\min_{\boldsymbol{\delta}} \sqrt{T_s} \|\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\delta} + \mathbf{b}\| \quad (6.19)$$

$$\text{uz: } \boldsymbol{\delta} \in \mathcal{V} \quad (6.20)$$

Korištenjem  $\eta$  kao pomoćne varijable, problem u (6.19) i (6.20) može se zapisati u obliku

$$\min_{\eta, \boldsymbol{\delta}} \eta \quad (6.21)$$

$$\text{uz: } \|\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\delta} + \mathbf{b}\| \leq \frac{1}{\sqrt{T_s}} \eta$$

$$\boldsymbol{\delta} \in \mathcal{V} \quad (6.22)$$

Dobiveni problem prepoznaje se kao SOCP problem s dva ograničenja, dan kao

$$\min_{\mathbf{u}} \mathbf{f}^T \mathbf{u} \quad (6.23)$$

$$\text{uz: } \|\mathbf{A}_i \cdot \mathbf{u} + \mathbf{b}_i\| \leq \mathbf{c}_i^T \mathbf{u} + d_i, \quad i = 1, 2 \quad (6.24)$$

gdje su funkcija cilja,  $\mathbf{f}$ , i optimizacijska varijabla,  $\mathbf{u}$ , dane izrazima

$$\mathbf{f} = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad (6.25)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \eta \\ \boldsymbol{\delta} \end{bmatrix} \quad (6.26)$$

Prvo ograničenje u (6.24) sadrži optimizacijski problem. Njegovi parametri su

$$\mathbf{A}_1 = [\mathbf{0} \quad \mathbf{A}] \quad (6.27)$$

$$\mathbf{b}_1 = \mathbf{b} \quad (6.28)$$

$$\mathbf{c}_1 = [1/\sqrt{T_s} \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad (6.29)$$

$$d_1 = 0 \quad (6.30)$$

Drugo ograničenje u (6.24) definira okolinu,  $\mathcal{V}$ , unutar kojeg se koristi linearna aproksimacija. Mogući izbor za  $\mathcal{V}$  je kugla, dana s  $\|\boldsymbol{\delta}\| \leq \delta_{max}$ . Ovakav izbor je opravdan za ograničavanje

kretanja polova i nula, obzirom da su oni grupirani u kompleksnoj ravnini. S druge strane, pojačanje,  $H_0$ , može poprimiti vrijednosti koje su nekoliko redova veličine veće od koordinata polova i nula, te tako uzrokovati sporu konvergenciju postupka. Da se to izbjegne, ograničenje za  $H_0$  ima iznos koji se izračunava iz prethodnog koraka iterativnog postupka. Drugo ograničenje u tom slučaju ima parametre oblika

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1/a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (6.31)$$

$$b_2 = \mathbf{0} \quad (6.32)$$

$$c_2 = \mathbf{0} \quad (6.33)$$

$$d_2 = \delta_{max} \quad (6.34)$$

gdje je  $a$  prva komponenta od  $x_k$ .

### 6.3 Gradijent impulsnog odziva

Za formiranje SOCP problema potrebno je poznavati impulsni odziv sustava  $h(t, \mathbf{x})$ . Primjenom (6.8), (6.9) i (6.10),  $\mathbf{x}$  se može lako transformirati u nule i polove. Ako su polovi jednostruki i  $M < N$ , impulsni odziv može se dobiti kao

$$h(t) = \sum_{r=1}^N K_r e^{p_r t}, \quad t \geq 0 \quad (6.35)$$

gdje su  $K_r$ ,  $r=1, \dots, N$  reziduumi polova oblika

$$K_r = H_0 \frac{\prod_{i=1}^M (p_r - z_i)}{\prod_{k=1, k \neq r}^N (p_r - p_k)} \quad (6.36)$$

Za dobivanje gradijenta impulsnog odziva,

$$\mathbf{g}(t, \mathbf{x}) = \frac{\partial h(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (6.37)$$

potrebno je prvo odrediti parcijalne derivacije odziva u (6.35) obzirom na pojačanje, nule i polove. Parcijalne derivacije su dane izrazima

$$\frac{\partial h(t)}{\partial H_0} = \frac{1}{H_0} \sum_{r=1}^N K_r e^{p_r t} \quad (6.38)$$

$$\frac{\partial h(t)}{\partial z_q} = - \sum_{r=1}^N F_{rq} e^{p_r t} \quad (6.39)$$

$$\frac{\partial h(t)}{\partial p_q} = \sum_{r=1, r \neq q}^N \frac{K_r e^{p_r t} + K_q e^{p_q t}}{p_r - p_q} + e^{p_q t} \sum_{v=1}^M F_{qv} + K_q t e^{p_q t} \quad (6.40)$$

gdje je

$$F_{uv} = H_0 \frac{\prod_{i=1, i \neq v}^M (p_u - z_i)}{N \prod_{k=1, k \neq u} (p_u - p_k)} \quad (6.41)$$

Komponente od  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$  koje odgovaraju pojačanju,  $H_0$ , realnim nulama,  $z_1, \dots, z_{M_1}$ , te realnim polovima,  $p_1, \dots, p_{N_1}$ , dobivaju se primjenom izraza od (6.38) do (6.41). Komponente koje odgovaraju realnim i imaginarnim dijelovima kompleksnih nula i polova, dobivaju se primjenom pravila za derivaciju kompozicije funkcija. Parcijalna derivacija od  $h(t, \mathbf{x})$  po realnom dijelu kompleksne nule,  $\alpha_i$ , ima oblik

$$\frac{\partial h(t, \mathbf{x})}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial h(t)}{\partial z_{M_1+i}} \frac{dz_{M_1+i}}{d\alpha_i} + \frac{\partial h(t)}{\partial z_{M_1+i}^*} \frac{dz_{M_1+i}^*}{d\alpha_i} \quad (6.42)$$

Iz (6.8) slijedi  $dz_{M_1+i}/d\alpha_i=1$  i  $dz_{M_1+i}^*/d\alpha_i=1$ . Stoga vrijedi

$$\frac{\partial h(t, \mathbf{x})}{\partial \alpha_i} = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial h(t)}{\partial z_{M_1+i}} \right] \quad (6.43)$$

Na sličan način mogu se dobiti i ostale komponente gradijenta  $\mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ . One imaju oblik

$$\frac{\partial h(t, \mathbf{x})}{\partial \beta_i} = -2 \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial h(t)}{\partial z_{M_1+i}} \right] \quad (6.44)$$

$$\frac{\partial h(t, \mathbf{x})}{\partial \gamma_k} = -2 \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial h(t)}{\partial z_{M_1+M_2+k}} \right] \quad (6.45)$$

$$\frac{\partial h(t, \mathbf{x})}{\partial \sigma_l} = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{\partial h(t)}{\partial p_{N_1+l}} \right] \quad (6.46)$$

$$\frac{\partial h(t, \mathbf{x})}{\partial \omega_l} = -2 \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial h(t)}{\partial p_{N_1+l}} \right] \quad (6.47)$$

Opisani optimizacijski postupak može se koristiti bez ikakvih dodatnih modifikacija. Međutim, u postupak se mogu dodati i dodatna ograničenja kao što su ograničenja za stabilnost i za minimalnu fazu. Za ilustraciju bit će opisano ograničenje za stabilnost.

Potrebno je napomenuti da mnoge metode za sintezu sustava u vremenskoj domeni ne uzimaju u obzir stabilnost. Autori to objašnjavaju činjenicom da ako je  $h_d(t)$  apsolutno integrabilan i ako je aproksimacija dobra, dobiveni  $h(t)$  je također apsolutno integrabilan, te je stoga pripadajući sustava stabilan. Međutim, uvođenjem ograničenja za stabilnost čini metodu robusnijom. Osim toga, ovo ograničenje omogućava postavljanje margine stabilnosti koja je poželjna u nekim aplikacijama.

## 6.4 Stabilnost sustava

Za osiguravanje stabilnosti, realne dijelove polova potrebno je držati manjima ili jednakima nekoj zadanoj granici  $-\varepsilon_s$ , gdje je  $\varepsilon_s > 0$ . Formalno se ovo ograničenje može izraziti skupom linearnih nejednadžbi

$$\mathbf{D} \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \eta \\ \delta \end{bmatrix} \right) \leq -\varepsilon_s \quad (6.48)$$

gdje  $\mathbf{D}$  sadrži  $N_1$  redaka koji odgovaraju realnim polovima i  $N_2/2$  redaka koji odgovaraju kompleksnim parovima, oblika

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix}
0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0
\end{bmatrix} \quad (6.49)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2+M_1+M_2+M_3/2} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{N_1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{N_2}$

Označavanjem

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{x}_k \end{bmatrix} \quad (6.50)$$

ograničenja u (6.48) mogu se zapisati u obliku linearnih ograničenja

$$-\boldsymbol{\varepsilon}_s - \mathbf{D}\hat{\mathbf{x}}_k - \mathbf{D}\mathbf{u} \geq \mathbf{0} \quad (6.51)$$

U svakom koraku optimizacijskog postupka rješava se SOCP problem dan izrazima (6.21), (6.22) i (6.51). Kao što se može vidjeti iz izraza, ovaj problem sadrži dva ograničenja u obliku stošca drugog reda, danih u (6.22), i  $N_1+N_2/2$  linearnih ograničenja, danih u (6.51). Ovaj problem može se riješiti nekom od poznatih metoda koje su opisane u [24] i [74]. U ovom radu korišten je skup alata SeDuMi 1.05, koji se može pronaći u [75].

## 6.5 Praktična razmatranja

Na početku optimizacijskog postupka, tj. za male  $k$ , modul vektora  $\boldsymbol{\delta}_k$  je obično određen ograničenjem  $\|\mathbf{A}_2\mathbf{u}\| \leq \delta_{max}$ . Kad se  $\mathbf{x}_k$  približi  $\mathbf{x}_{opt}$ , njegov modul počinje značajno padati. Postupak završava nakon što je zadovoljen uvjet  $\|\mathbf{A}_2\mathbf{u}\| < \varepsilon$ , gdje je  $\varepsilon$  zadana tolerancija optimizacije.

Izbor početne točke,  $\mathbf{x}_0$ , nije kritičan, uz pretpostavku da ona pripada dijelu prostora koji određuju ograničenja dana u (6.22) i (6.51). Pritom treba imati na umu da se vrijeme potrebno za izvođenje postupka povećava ako se  $\mathbf{x}_0$  nalazi daleko od  $\mathbf{x}_{opt}$ . Nadalje, budući prijenosna funkcija u (6.6) iščezava za  $H_0=0$ , preporučljivo je započeti optimizaciju s odgovarajućim predznakom od  $H_0$  ili provesti optimizaciju za oba predznaka.

Opisana metoda za dizajn ne podržava višestruke polove. To je posljedica odziva u (6.35), koji je definiran samo za jednostruke polove. Međutim, to ne predstavlja nedostatak budući su takvi slučajevi vrlo rijetki u praksi. Provedeni su primjeri dizajna za koje je unaprijed bilo poznato da optimalno rješenje sadrži višestruki pol. Međutim, u dobivenim rješenjima polovi se nisu preklapali. Polovi za koje se očekivalo preklapanje završili su kao jednostruki, blizu jedan drugom, što je posljedica konačne tolerancije  $\varepsilon$ .

Iz (6.7) je vidljivo da prijenosna funkcija sustava kojeg se optimira sadrži zadani broj realnih i imaginarnih polova, te realnih, imaginarnih i kompleksnih nula. Stoga je tijekom rješavanja problema potrebno eksperimentiranje s raznim prijenosnim funkcijama. To ne predstavlja nedostatak već je to uobičajeno u dizajnu, pogotovo u cilju ostvarivanja kompromisa između zahtjeva na točnost aproksimacije i složenosti implementacije. U tom smislu model sustava opisan nulama, polovima i pojačanjem koji je ovdje korišten, predstavlja dobar izbor s aspekta korisnika.

Optimizacijski problem u (6.11) može se riješiti i primjenom klasičnih metoda za nelinearnu optimizaciju. Ovdje je za usporedbu uzeta kvazi-Newtonova metoda s BFGS formulom za aproksimaciju Hessiana. Odabirom raznih početnih točaka pokazalo se da kvazi-Newtonova metoda rezultira istim optimumom, ali puno većim brojem poziva funkcije cilja. Nadalje, kod sustava velikih redova izbor početne točke za kvazi-Newtonovu metodu je osjetljiviji nego za opisanu metodu. Naime, moguća je pojava malih područja u kompleksnoj ravnini iz kojih početna točka u slučaju korištenja kvazi-Newtonove metode vodi prema lošijem lokalnom rješenju. Nadalje, opisana metoda pokazuje se robusnom u dizajnu optimalnih sustava koji sadrže velik broj nula. Kvazi-Newtonova metoda u tom slučaju daje lošije lokalno rješenje. Prema tome, može se zaključiti da metoda temeljena na stošcima drugog reda osigurava veću brzinu konvergencije, omogućava sintezu složenih struktura prijenosne funkcije, te je robusnija od kvazi-Newtonove metode.

## 6.6 Sinteza valićnih filtara

Kriterij najmanje kvadratne pogreške predstavlja dobar izbor za aproksimaciju valića [80], [81]. U ovom poglavlju bit će opisana dva primjera dizajna valićnih filtara. Ovi filtri se koriste u analognim implementacijama valićne transformacije. Analogna implementacija valićne transformacije često se koristi u uređajima kod kojih je kritična potrošnja energije.

Kontinuirana valićna transformacija signala  $x(t)$  uz skalu  $a$  i na poziciji  $\tau$  definirana je kao

$$C(\tau, a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t - \tau}{a} \right) dt \quad (6.52)$$

gdje  $\psi(t)$  predstavlja jezgru valične transformacije, a  $*$  označava kompleksnu konjugaciju. Iz (6.52) je vidljivo da se  $C(\tau, a)$  može dobiti filtracijom signala  $x(t)$  filtrom čiji je impulsni odziv određen s  $\psi(t/a)$ . Štoviše, skup takvih filtara koji odgovaraju raznim skalama mogu raditi paralelno, računajući pritom valičnu transformaciju u realnom vremenu.

### 6.6.1 Morletov filtar

Nedavno je predložen analogni sustav za računanje Morletove valične transformacije [70]. U tom radu, filtar je dizajniran tako da njegov impulsni odziv aproksimira vremenski okrenut i vremenski pomaknut Morletov valić oblika

$$\tilde{\psi}_M(t) = \cos[5\sqrt{2}(3-t)]e^{-(3-t)^2} \quad (6.53)$$

Prijenosna funkcija filtra dobivena je metodom temeljenoj na Padéovoj aproksimaciji.

U ovom radu, dizajn filtra je proveden za  $h_d(t) = \tilde{\psi}_M(t)$ . Za formiranje optimizacijskog problema,  $h_d(t)$  je uzorkovan u 1001 točki u intervalu  $0 \leq t \leq 10$ , tj. s  $T_s = 0.01$  i  $Q = 1000$ . Odabrana struktura prijenosne funkcije je ista kao i u radu [70]. Ona sadrži osam kompleksnih nula i 10 kompleksnih polova, tj.  $M_1 = 0$ ,  $M_2 = 8$ ,  $M_3 = 0$ ,  $N_1 = 0$  i  $N_2 = 10$ . Optimizacija je provedena uz  $\delta_{max} = 0.05$ ,  $\varepsilon_s = 0.05$ ,  $\varepsilon = 1e-5$  i  $w(t) = 1$  za svaki  $t$ . Dobiveni polovi, nule i pojačanje dani su u tablici 6.1. Impulsni odzivi zadanog i optimalnog filtra prikazani su na slici 6.1. Usporedbom s odzivom danim na slici 4b u [70], može se uočiti da dobiveni filtar aproksimira zadani odziv s manjom pogreškom. U [70], autori koriste srednju kvadratnu pogrešku

$$e_{mse} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [h(t) - h_d(t)]^2 dt \quad (6.54)$$

kao mjeru kvalitete aproksimacije. S  $t_1 = 0$  i  $t_2 = 10$  oni dobivaju pogrešku  $1.08e-3$ . Za usporedbu, ovdje je korištena ista mjera. Za dobiveni filtar ona iznosi  $1.44e-4$ . Očigledno, ako je cilj u dizajnu držati pogrešku manju od  $1.08e-3$ , sustav je moguće pojednostavniti. Na primjer, pogreška  $9.7e-4$  se dobiva s optimalnim filtrom osmog reda sa šest nula. Njegov impulsni odziv prikazan je na slici 6.2, a parametri prijenosne funkcije dani su u tablici 6.2.

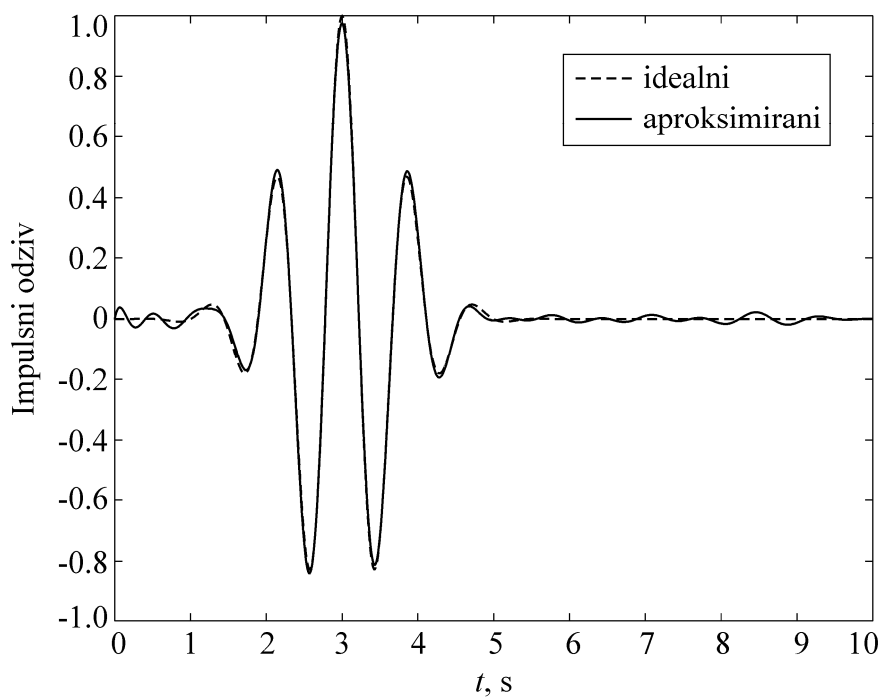
Nedvojbeno je da korištena funkcija cilja nije konveksna. Unatoč tomu, optimizacijski postupak je malo osjetljiv na odabir početne točke. Na primjer, u posljednjem primjeru proveden je veći broj optimizacija s različitim početnim točkama pri čemu je uzeto  $-5 \leq H_0 \leq -0.5$ ,  $-2 \leq \alpha_i \leq 2$ ,  $2 \leq |\beta_i| \leq 11$ ,  $-2 \leq \sigma_i \leq -0.1$  i  $2 \leq |\omega_i| \leq 11$ . Za sve početne točke, optimizacija je dala isti rezultat pa je on smatran optimumom. Tipična početna točka dana je nulama u  $1 \pm 3j$ ,  $1 \pm 6j$  i  $1 \pm 9j$ , polovima u  $-0.3 \pm 2j$ ,  $-0.3 \pm 5j$ ,  $-0.3 \pm 8j$  i  $-0.3 \pm 11j$ , te pojačanjem iznosa  $-3$ .



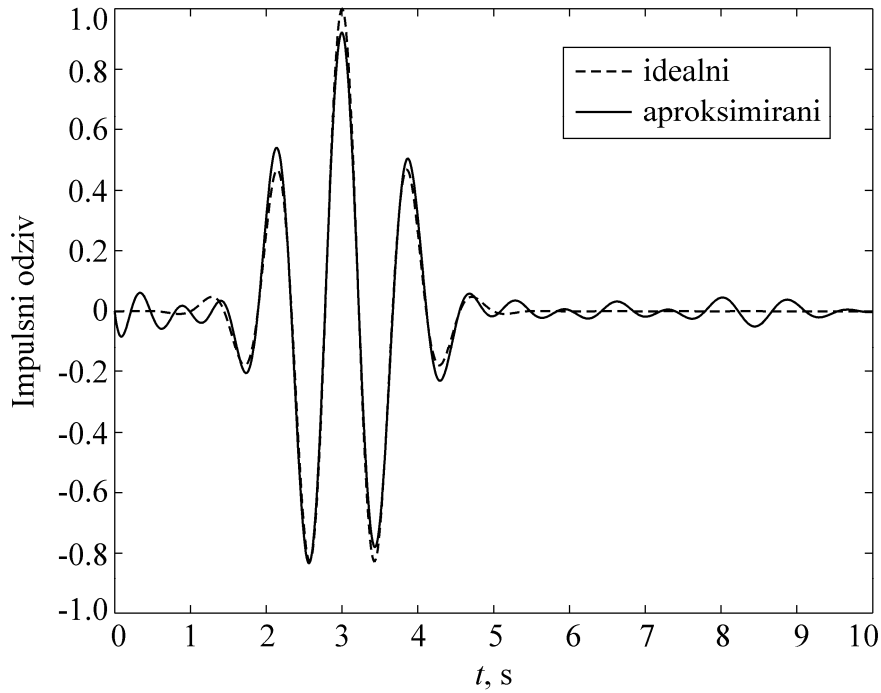
Očigledno je ova točka smještena prilično daleko od optimuma. Ipak, optimum je dobiven nakon 219 koraka koji su trajali 108 sekundi na osobnom računalu Pentium 4 koje je radilo na taktu frekvencije 3GHz.

Tablica 6.1 Polovi, nule i pojačanje za Morletov filtar s 10 polova i 8 nula.

$H_0$	$z_i$	$p_k$
1.22010	$1.29679 \pm 9.94755 j$	$-0.56068 \pm 9.26594 j$
	$2.34045 \pm 7.51959 j$	$-0.72129 \pm 8.05721 j$
	$1.57777 \pm 4.54594 j$	$-0.76520 \pm 6.91601 j$
	$0.61452 \pm 1.64465 j$	$-0.72704 \pm 5.77005 j$
		$-0.57060 \pm 4.54480 j$



Slika 6.1 Impulsni odziv idealnog Morletovog filtra i njegova aproksimacija filtrom 10-og reda s 8 nula.



Slika 6.2 Impulsni odziv idealnog Morletovog filtra i njegova aproksimacija filtrom 8-og reda sa 6 nula.

Tablica 6.2 Polovi, nule i pojačanje za Morletov filter s 8 polova i 6 nula.

$H_0$	$z_i$	$p_k$
-2.01438	$1.38806 \pm 8.78546 j$	$-0.46574 \pm 8.70385 j$
	$1.71775 \pm 5.97484 j$	$-0.59775 \pm 7.50321 j$
	$1.14252 \pm 3.25812 j$	$-0.60100 \pm 6.33388 j$
		$-0.47481 \pm 5.12192 j$

Osnovno svojstvo valične funkcije je

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (6.55)$$

Međutim, kauzalni dio od  $h_d(t)$ , te posljedično njegova aproksimacija,  $h(t)$ , mogu sadržavati istosmjernu komponentu. Istosmjerna komponenta je veća za male vremenske pomake u  $\tilde{\psi}_M(t)$ . U ovom primjeru, vremenski pomaci su veliki, što daje zanemarive istosmjerne komponente. One iznose  $2.8e-3$  i  $-1.6e-2$ , što je prihvatljivo. Ipak, zahtjev za nultom istosmjernom komponentom može se uključiti u postupak sinteze. To je opisano u sljedećem primjeru.

## 6.6.2 Gaussov filtar

Ovaj primjer ilustrira dizajn sustava čiji impulsni odziv nema istosmjernu komponentu. Sličan primjer opisan je u [80] i [81] gdje su autori opisali dizajn Gaussovog valićnog filtra. Impulsni odziv takvog filtra aproksimira vremenski okrenut i vremenski pomaknut Gaussov valić oblika

$$\tilde{\psi}_G(t) = -2C_1 \left( \frac{2}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} (t_0 - t) e^{-(t_0 - t)^2} \quad (6.56)$$

gdje su  $t_0$  vremenski pomak, a  $C_1$  konstanta koja osigurava jediničnu energiju od  $\tilde{\psi}_G(t)$ . Kauzalnost odziva nužno uvodi istosmjernu komponentu koja je velika za mali  $t_0$ . U navedenim radovima, autori je smatraju nedopustivom, te dizajniraju filtar koji ima impulsni odziv s nulom istosmjernom vrijednošću.

Metoda opisana u prethodnim poglavljima lako se može prilagoditi zahtjevu za nulom istosmjernom komponentom. Takvo ponašanje se dobiva ako se prijenosnoj funkciji filtra doda nula smještena u ishodištu kompleksne ravnine. U tom slučaju prijenosna funkcija dana u (6.6) postaje

$$H(s) = H_0 \frac{s \prod_{i=1}^M (s - z_i)}{\prod_{k=1}^N (s - p_k)} \quad (6.57)$$

gdje je  $M < N - 1$ . Ovdje je potrebno naglasiti da nula u ishodištu nije optimizacijska varijabla nego je ona dio funkcije cilja. Prema tome, vektor optimizacijskih varijabli dan u (6.7) ostaje nepromijenjen. Štoviše, i cijela procedura opisana u prethodnim poglavljima ostaje ista, osim izraza u (6.36), (6.39) i (6.40) koji su u ovom slučaju dani s

$$K_r = H_0 \frac{p_r \prod_{i=1}^M (p_r - z_i)}{\prod_{k=1, k \neq r}^N (p_r - p_k)} \quad (6.58)$$

$$\frac{\partial h(t)}{\partial z_q} = - \sum_{r=1}^N p_r F_{rq} e^{p_r t} \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial h(t)}{\partial p_q} = \sum_{r=1, r \neq q}^N \frac{K_r e^{p_r t} + K_q e^{p_q t}}{p_r - p_q} + e^{p_q t} \left( \frac{K_q}{p_q} + p_q \sum_{v=1}^M F_{qv} \right) + K_q t e^{p_q t} \quad (6.60)$$

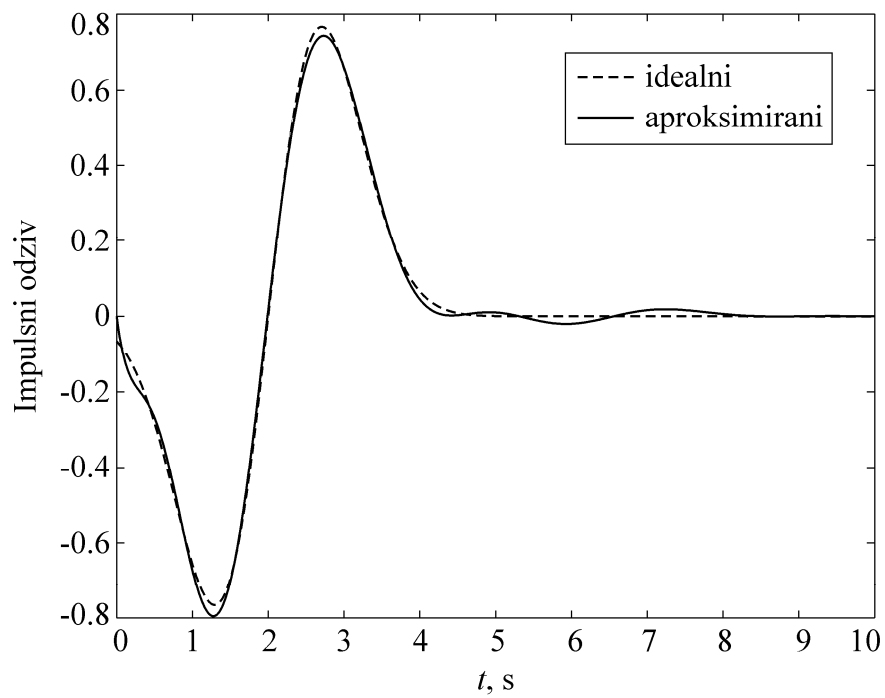
Za ilustraciju, provedena je optimizacija filtera trećeg, petog, sedmog i devetog reda. Zadani impulsni odziv definiran je kao  $h_d(t) = \tilde{\psi}_G(t)$  uz  $t_0=2$ . Odziv je uzorkovan u 2001 točaka u intervalu  $0 \leq t \leq 20$ , tj. s  $T_s=0.01$  i  $Q=2000$ . Optimizacija je pokrenuta uz  $\delta_{max}=0.05$ ,  $\varepsilon_s=0.05$ ,  $\varepsilon=1e-5$  i  $w(t)=1$  za svaki  $t$ . Dobiveni su filteri s pogreškama aproksimacije  $3.975e-1$ ,  $4.753e-2$ ,  $6.961e-3$  i  $2.197e-3$ . Usporedbom s odgovarajućim rezultatima iz [80] i [81], poboljšanje je ostvareno za filter devetog reda. Potrebno je napomenuti da ovako bliske aproksimacije imaju samo teorijsko značenje.

Provedene optimizacije pokazale su malu osjetljivost na izbor početne točke. Ipak, potrebno je eksperimentiranje s  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  i  $M_3$  u cilju dobivanja odgovarajuće strukture prijenosne funkcije.

Kao što je već spomenuto, u sintezi filtera temeljenoj na optimizacijama, korištenje modela prijenosne funkcije s nulama, polovima i pojačanjem je vrlo praktičan. Za ilustraciju toga, bit će ponovo razmotren filter petog reda. U njegovom dizajnu korištena je prijenosna funkcija iste složenosti kao u [80], tj. s pet polova, jednom nulom u ishodištu kompleksne ravnine i tri slobodne nule. Dobiveni rezultat pokazuje da je realna nula smještena jako daleko od ishodišta kompleksne ravnine. Njezin utjecaj je zanemariv pa se ona može ukloniti iz prijenosne funkcije. Optimizacija je ponovo provedena za prijenosnu funkciju s jednim parom kompleksnih nula, te nulom u ishodištu. Tako dobivenim filtrom ostvarena je pogreška aproksimacije od  $4.763e-2$ . Taj rezultat je 0.3% lošiji od prethodnog, što je s aspekta aproksimacije zanemarivo. Međutim, smanjenje stupnja brojnika prijenosne funkcije pojednostavljuje implementaciju. Polovi, nule i pojačanje optimalnog Gaussovog filtera za ovaj slučaj dani su u tablici 6.3. Na slici 6.3 prikazani su impulsni odzivi zadanog i optimalnog filtera.

Tablica 6.3 Polovi, nule i pojačanje za Gaussov filter s 5 polova, nulom u ishodištu kompleksne ravnine i jednim parom kompleksnih nula.

$H_0$	$z_i$	$p_k$
-1.52756	0 $1.10633 \pm 4.26888 j$	-0.83058 $-0.75515 \pm 2.80125 j$ $-0.85167 \pm 1.39119 j$



Slika 6.3 Impulsni odziv idealnog Gaussovog filtra i njegova aproksimacija filtrom s 5 polova, nulom u ishodištu kompleksne ravnine i jednim parom kompleksnih nula.

Osim sinteze valićnih filtara, opisana metoda može se uspješno primijeniti i u dizajnu generatora visokonaponskih pravokutnih pulsa kao što je opisano u [79].

## 7 Zaključak

U disertaciji je predložen novi model pobude pogodan za analizu i sintezu sustava. Model je definiran u vremenskoj domeni i temelji se na sinc pulsu nulte faze i jedinične amplitude u zadanom frekvencijskom području. Zbog svog simetričnog valnog oblika, te pravokutnog oblika frekvencijske karakteristike, ovaj model pokazao se pogodnim za mjerenje linearnih izobličenja vremenskog odziva. Obzirom da je Diracov impuls specijalan slučaj sinc pulsa, analiza sustava temeljena na sinc pulsu predstavlja poopćenje klasične analize temeljene na impulsnom odzivu.

Za pobudu oblika sinc pulsa, izvedeni su izrazi za odzive vremenski kontinuiranih i vremenski diskretnih sustava. Navedeni odzivi iskorišteni su za definiranje mjera izobličenja temeljenih na simetriji i na maksimumu odziva na sinc puls. Pokazano je da su u frekvencijskoj domeni ove mjere izražene integralnom faznom pogreškom s težinskom funkcijom koja uključuje amplitudnu karakteristiku sustava.

Predložene mjere izobličenja mogu se uspješno iskoristiti u sintezi sustava u vremenskoj domeni. U tom kontekstu, razvijene su nove metode za sintezu, temeljene na numeričkoj optimizaciji. Razvijene metode omogućavaju sintezu korektora vremenskih odziva niskopropusnih i pojasnopropusnih filtara, Hilbertovih transformatora i sustava s konstantnim kašnjenjem. Dobiveni sustavi osiguravaju minimalno izobličenje vremenskog odziva.

Na kraju, u sklopu sinteze u vremenskoj domeni razmatrani su i sustavi sa zadanim odzivom. Razvijena je učinkovita i robusna metoda za sintezu sustava sa zadanim impulsnim odzivom, temeljena na optimiranju linearne funkcije nad prostorom ograničenim stošcima drugog reda. Metoda se uspješno može primijeniti u sintezi valićnih filtara visokih redova.

## 8 Literatura

- [1] Su, K. L., *Time-Domain Synthesis of Linear Networks*, Prentice-Hall Inc., 1971.
- [2] Vučić, M., Filtri sa simetričnim impulsnim odzivom, doktorska disertacija, Fakultet elektrotehnike i računarstva, Zagreb, 1999.
- [3] Dishal, M., "Gaussian-response filter design", *Electrical Communication*, Vol. 36, pp. 3–26, 1959.
- [4] Temes, G. C., "The prolate filter: an ideal lowpass filter with optimum step-response", *Journal of The Franklin Institute*, Vol. 293, pp. 77-103, February 1972.
- [5] Halpern, P. H., "Monotonic step response filters with maximum asymptotic cutoff", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-23, pp. 380-383, June 1976.
- [6] Halpern, P. H., "Trigonometric pulse-forming networks revisited", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-19, pp. 81–86, January 1972.
- [7] Filanovsky, I. M., Matkhanov, P. N., "Synthesis of time delay networks approximating the pulse response described by an integer power of a sinusoid over its semi-period", *Analog Integrated Circuits & Signal Processing*, July 28, 2001, pp. 83–90.
- [8] Babić, H., "An optimum transfer function for amplifiers with nondecreasing step response", *International Symposium on Network Theory - ISYNT*, pp. 66, Beograd, Yugoslavia, September 1968.
- [9] Babić, H., "Filtri s nenegativnim impulsnim odzivom", *Zbornik radova XXI Jugoslavenske konferencije ETAN*, str. 189–195, Banja Luka, Jugoslavija, lipanj 1977.
- [10] Vucic, M., Babić, H., "Filter families with minimum impulse response moments", *Proceedings of 2000 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 2, pp. 557–560, Geneva, Switzerland, May 28-31, 2000.
- [11] Jess, J., Schussler, H. W., "A class of pulse-forming networks", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-12, pp. 296–299, June 1965.
- [12] Jess, J., Schussler, H. W., "On the design of pulse-forming networks", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-12, pp. 393–400, September 1965.
- [13] Babić, H., Vucic, M., "Filter families with minimum time-bandwidth products", *Proceedings of 2001 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 1, pp. 691–694, Sydney, Australia, May 6-9, 2001.
- [14] Babić, H., Vucic, M., "System functions with minimum time-bandwidth product based on the higher order moments", *Proceedings of 2nd International Symposium on Image and Signal Processing and Analysis*, pp. 479–484, Pula, Croatia, June 19-21, 2001.
- [15] Morrison, R., "Linear phase versus step response," *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-14, pp. 429–430, December 1967.
- [16] Ulstad, M. S., "Time domain approximations and an active network realization of transfer functions derived from ideal filters", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-15, pp. 205–210, September 1968.

- [17] Pottle, C., Wong, J. C. K., "Optimum least-squares approximations to the ideal low-pass filter", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-17, pp. 282–284, May 1970.
- [18] Vucic, M., Babic, H., "A class of systems with symmetric impulse response", *Proceedings of 1998 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 3, pp. 485–488, Monterey, CA, USA, May 31 - June 3, 1998.
- [19] Mneina, S.S.; Martens, G.O., "Maximally flat delay Nyquist pulse design", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, Vol. 51, No. 6, pp. 294–298, June 2004.
- [20] Vasiliu, C. G., "A practical method for time-domain network synthesis", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-12, pp. 234–241, June 1965.
- [21] Harman, R. K., Fairman, F. W., "Exponential approximation via a closed-form Gauss-Newton method", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-20, pp. 361–369, July 1973.
- [22] Svensson, T., "An approximation method for time domain synthesis of linear networks", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-20, pp. 142–144, March 1973.
- [23] Fletcher, R., *Practical Methods of Optimization*, Vol. 1, John Wiley & Sons, 1980.
- [24] Ben-Tal, A., Nemirovski, A. S., *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms, and Engineering Applications*. Philadelphia, PA: SIAM, 2001.
- [25] Antoniou, A., Lu, W-S., *Practical Optimization - Algorithms and Engineering Applications*. Springer Science Business Media, LLC, 2007.
- [26] Abramowitz, M., Stegun, I. A., *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [27] Blinchikoff, H. J., Zverev, A. I., *Filtering in the Time and Frequency Domains*, John Wiley & Sons, 1987.
- [28] Mitra, S. K., *Digital Signal Processing: A Computer Based Approach*, The McGraw-Hill Companies, Inc., 1998.
- [29] Laakso, T. I., Valimaki, V., "Energy-based effective length of the impulse response of a recursive filter", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 48, No. 1, pp. 7–16, February 1999.
- [30] Clements, M. A., Pease, J. W., "On causal linear phase IIR digital filters", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 37, No. 4, pp. 479–484, April 1989.
- [31] Humpherys, D.S., "A figure of merit for frequency selective filters", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-10, pp. 19–24, 1963.
- [32] Carvalho, D.B., Filho, S.N., Seara, R., "Impulse response symmetry error for designing phase equalisers", *IEE Electronics Letters*, Vol. 35, No.13, June 1999, pp. 1052–1054.
- [33] Vucic, M., Molnar, G., "Measure for phase linearity based on symmetry of time-domain response", *IEE Electronics Letters*, Vol. 39, No. 19, September 2003, pp. 1425–1426.
- [34] Crane, R. L., "All-pass network synthesis", *IEEE Transactions on Circuit Theory*, Vol. CT-15, pp. 474–478, December 1968.
- [35] Carvalho, D. B., Filho, S. N., Seara, R., "Phase equalisers via phase delay", *IEE Electronics Letters*, Vol. 34, No. 6, pp. 509–511, June 1998.



- [36] Crane R. L., Klopfenstein R. W., "Optimum weights in delay equalization", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-26, No. 1, pp. 46–51, January 1979.
- [37] El-Masry E. I., Josephs L. C., "Optimum weighting functions in delay equalization", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-31, No. 2, pp. 226–229, February 1984.
- [38] Vucic, M., Babic, H., "A robust method for equalizer design based on the impulse response symmetry", *Proceedings of 2002 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 3, pp. 539–542, Phoenix, Arizona, USA, May 26-29, 2002.
- [39] Vucic, M., Molnar, G., Babic, H., "Method for equalizer design based on time-domain symmetry", *Proceedings of 2004 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. I, pp. 149–152, Vancouver, Canada, May 23-26, 2004.
- [40] Vucic, M., Molnar, G., Babic, H., "Time-domain symmetry as criterion for band-pass equalizer design", *Proceedings of 2005 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 3283–3286, Kobe, Japan, May 23-26, 2005.
- [41] Thomson, W. E., "Delay networks having maximally flat frequency characteristics", *Proceedings IEE*, Vol. 96, pp. 487–490, November 1949.
- [42] Humpherys, D. S., *The Analysis, Design, and Synthesis of Electrical Filters*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1970.
- [43] Molnar, G., Vucic, M., "Design of constant-delay systems based on symmetry of time-domain response", *Proceedings of 2004 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. I, pp. 1024–1027, Vancouver, Canada, May 23-26, 2004.
- [44] Ansari, R., "IIR discrete-time Hilbert transformers", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 35, No. 8, pp. 1116–1119, August 1987.
- [45] Kollar, I., Pintelon, R., Schoukens, J., "Optimal FIR and IIR Hilbert transformer design via LS and minimax fitting", *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, Vol. 39, No. 6, pp. 847–852, December 1990.
- [46] Zhang, X., Iwakura, H., "Design of IIR digital allpass filters based on eigenvalue problem", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 47, No. 2, pp. 554–559, February 1999.
- [47] Czarnach, R., Schussler, H., Rohrlein, G., "Linear phase recursive digital filters for special applications", *Proceedings of 1982 IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 7, pp. 1825–1828, Paris, France, May 3-5, 1982.
- [48] Tseng, C.C., "Design of IIR digital all-pass filters using least pth phase error criterion", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, Vol. 50, No. 9, pp. 653–656, September 2003.
- [49] Molnar, G., Vucic, M., "IIR Hilbert transformers based on symmetry of time-domain response", *IEE Electronics Letters*, Vol. 40, No. 20, September 2004, pp. 1309–1310.
- [50] Molnar, G., Vucic, M., "Time-domain distortion as criterion for design of IIR Hilbert transformers", *Proceedings of 2005 European Conference on Circuit Theory and Design*, Vol. III, pp. 261–264, Cork, Ireland, August 29 - September 1, 2005.
- [51] Regalia, P. A., Mitra, S. K., Vaydyanathan, P. P., "The digital all-pass filter: a versatile signal processing building block", *IEEE Proceedings*, Vol. 76, No. 1, pp. 19–37, January 1988.

- [52] Pei, S. C., Shyu, J. J., "Eigenfilter design of 1-D and 2-D IIR digital all-pass filters", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 41, No. 4, pp. 966–968, April 1994.
- [53] Chen, C. K., Lee, J. H., "Design of digital all-pass filters using a weighted least squares approach", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, Vol. 41, No. 5, pp. 346–351, May 1994.
- [54] Nguyen, T. Q., Laakso, T. I., Koilpillai, R. D., "Eigenfilter approach for the design of allpass filters approximating a given phase response", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 42, No. 9, pp. 2257–2263, September 1994.
- [55] Lang, M., Laakso, T., "Simple and robust method for the design of allpass filters using least-squares", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Analog and Digital Signal Processing*, Vol. 41, No. 1, pp. 40–48, January 1994.
- [56] Kidambi, S. S., "Weighted least-squares design of recursive allpass filters", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 44, No. 6, pp. 1553–1557, June 1996.
- [57] Gregorian, R., Temes, G. C., "Design techniques for digital and analog all-pass circuits", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, Vol. CAS-25, No. 12, pp. 981–988, 1978.
- [58] Jing, Z., "A new method for digital all-pass filter design", *IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. ASSP-35, No.11, pp. 1557–1564, November 1987.
- [59] Lang, M., "Allpass filter design and applications", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 46, No. 9, pp. 2505–2514, September 1998.
- [60] Chan, S. C., Chen, H. H., Pun, C. K. S., "The design of digital all-pass filters using second-order cone programming (SOCP)", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, Vol. 52, No. 2, pp. 66–70, February 2005.
- [61] Vucic, M., Babic, H., "IIR equalizer design based on the impulse response symmetry criterion", *Proceedings of 2003 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Vol. 4, pp. 245–248, Bangkok, Thailand, May 25-28, 2003.
- [62] Vucic, M., Molnar, G., "Time-domain synthesis of IIR phase equalizers", *Proceedings of 13th IEEE International Conference on Electronics, Circuits, and Systems*, pp. 236–239, Nice, France, December 10-13, 2006.
- [63] Vucic, M., Molnar, G., "Equaliser design based on maximum of response to sinc pulse", *IEE Electronics Letters*, Vol. 41, No. 19, pp. 1089–1090, September 2005.
- [64] Molnar, G., Vucic, M., "Design of IIR all-pass equalizers based on minimum of waveform distortion", *Proceedings of 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 4435–4438, Island of Kos, Greece, May 21-24, 2006.
- [65] Haykin, S., *Communication Systems*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [66] Bagga, S., Haddad, S. A. P., Serdijn, W. A., Long, J. R., "An FCC compliant pulse generator for IR-UWB communications", *Proceedings of 2006 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 81–84, Island of Kos, Greece, May 21-24, 2006.
- [67] Datta, P. K., Fan, X., Fischer, G., "A transceiver front-end for ultra-wide-band applications", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, Vol. 54, No. 4, pp. 362–366, April 2007.

- [68] Ang, W. T., Chen, J., Lv, T., "High-order monocycle design and its waveform-generating circuit for UWB communications", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, Vol. 54, No. 8, pp. 1657–1665, August 2007.
- [69] Smith, P. W., *Transient Electronics*. New York, NY: John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [70] Haddad, S. A. P., Bagga, S., Serdijn, W. A., "Log-domain wavelet bases", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, Vol. 52, No. 10, pp. 2023–2032, October 2005.
- [71] Filanovsky, I. M., Matkhanov, P. N., "Synthesis of a pulse-forming reactance network shaping a quasi-rectangular delayed output pulse", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, Vol. 51, No. 4, pp. 190–194, April 2004.
- [72] Filanovsky, I. M., Matkhanov, P. N., "Synthesis of reactance networks shaping a quasi-rectangular pulse", *IEEE Transactions on Circuits and Systems II: Express Briefs*, Vol. 52, No. 5, pp. 242–245, May 2005.
- [73] Lobo, M. S., Vandenberghe, L., Boyd, S., Lebret, H., "Applications of second-order cone programming", *Linear Algebra and its Applications*, Vol. 284, No. 1-3, pp. 193–228, November 1998.
- [74] Nesterov, Y., Nemirovskii, A. S., *Interior-Point Polynomial Algorithms in Convex Programming*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994.
- [75] Sturm, J. F., "Using SeDuMi1.02, a MATLAB toolbox for optimization over symmetric cones", *Optimization Methods and Software*, Vol. 11-12, pp. 625–653, 1999 (The latest version of SeDuMi software is available on <http://sedumi.mcmaster.ca/>).
- [76] Lu, W-S., Hinamoto, T., "Optimal design of IIR digital filters with robust stability using conic-quadratic-programming updates", *IEEE Transactions on Signal Processing*, Vol. 51, No. 6, pp. 1581–1592, June 2003.
- [77] Lu, W-S., Hinamoto, T., "Optimal design of IIR frequency-response-masking filters using second-order cone programming", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Fundamental Theory and Applications*, Vol. 50, No. 11, pp. 1401–1412, November 2003.
- [78] Vucic, M., Molnar, G., "Design of systems with prescribed impulse response based on second-order cone programming", *Proceedings of 2007 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, pp. 3311–3314, New Orleans, LA, USA, May 27-30, 2007.
- [79] Vucic, M., Molnar, G., "Time-domain synthesis of continuous-time systems based on second-order cone programming", *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*, Vol. 55, No. 10, pp. 3110–3118, November 2008.
- [80] Karel, J. M. H., Peeters, R. L. M., Westra, R. L., Haddad, S. A. P., Serdijn, W. A., "Wavelet approximation for implementation in dynamic translinear circuits", *Proceedings of 16th World Congress of International Federation of Automatic Control*, pp. 1101–1106, Prague, Czech Republic, July 2005.
- [81] Karel, J. M. H., Peeters, R. L. M., Westra, R. L., Haddad, S. A. P., Serdijn, "An L2-based approach for wavelet approximation", *Proceedings of 44th IEEE Conference on Decision and Control, and European Control Conference*, pp. 7882–7887, Seville, Spain, December 2005.

## Sažetak

U sintezi sustava od kojih se traže mala izobličenja vremenskog odziva, zahtjevi mogu biti dani u frekvencijskoj ili u vremenskoj domeni. Pristup u frekvencijskoj domeni je uobičajen jer su postupci u toj domeni jednostavniji. S druge strane, bolji rezultati mogu se očekivati sintezom u vremenskoj domeni. U tom slučaju, potrebno je odabrati odgovarajući model pobudnog signala. Zahtjevi na sustav obično su dani unutar određenog frekvencijskog područja. Stoga je u disertaciji predložen model frekvencijski ograničene pobude temeljene na sinc pulsu nulte faze. Ovaj puls jednoliko pobuđuje sve komponente sustava unutar zadanog frekvencijskog područja. Korištenjem odziva na sinc puls, definirane su nove mjere izobličenja temeljene na simetriji valnog oblika, te maksimumu odziva. Optimiranjem ovih mjera dobivene su nove klase sustava koji osiguravaju minimalno izobličenje vremenskog odziva. Sinteza takvih sustava ilustrirana je na primjerima korektora niskopropusnih i pojasnopropusnih filtara, sustava s konstantnim kašnjenjem, te Hilbertovih transformatora. Nadalje, u sklopu sinteze u vremenskoj domeni razmatrani su i sustavi sa zadanim impulsnim odzivom. Opisana je učinkovita i robusna metoda za njihovo projektiranje. Metoda koristi iterativan postupak koji se temelji na optimizaciji linearne funkcije nad prostorom ograničenim stošcima drugog reda. Metoda je primijenjena u sintezi valićnih filtara.

Ključne riječi: sinc puls, odziv na sinc puls, simetrija odziva, maksimum odziva, mjera izobličenja, impulsni odziv, optimizacija, Hilbertov transformator, filtar, korektor

## Abstract

In the design of systems with minimum time-domain distortion, requirements can be specified in the frequency or in the time domain. The frequency domain approach is common since the design procedures are simpler. On the other hand, better results are expected using the time-domain synthesis. In that case, an appropriate model of system's input signal should be chosen. The requirements set on the system are usually given within some finite band of interest. In this thesis, the frequency-selective model of the input signal is proposed. The model is based on the zero-phase sinc pulse. This pulse uniformly excites the system at all frequencies within the prescribed band. By using the response to sinc pulse, new measures of time-domain distortion are defined, which are based on the symmetry and on the maximum of the response. These measures are suitable for optimization based design, which is used to obtain new classes of systems ensuring minimum distortion of time-domain response. Several design examples are given, including the design of lowpass and bandpass equalizers, constant-delay systems, and Hilbert transformers. Furthermore, the time-domain synthesis of systems having a desired impulse response is also considered. An efficient and robust method for the design of such systems is described. The method involves the iterative procedure based on the second-order cone programming. The features of the method are illustrated through the design of wavelet filters.

Key words: sinc pulse, response to sinc pulse, symmetry of time-domain response, maximum of time-domain response, measure of time-domain distortion, impulse response, optimization, Hilbert transformer, filter, equalizer

## Životopis

Goran Molnar rođen je 1978. godine u Zagrebu, Republika Hrvatska, gdje je 1996. završio prirodoslovnu matematičku gimnaziju. Godine 2001. diplomirao je na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, smjer Industrijska elektronika. Za postignut uspjeh tijekom diplomskog studija dobio je brončanu plaketu "Josip Lončar".

Od 2001. radi kao znanstveni novak na Zavodu za elektroničke sustave i obradbu informacija Fakulteta elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu.

Područje njegovog znanstvenog djelovanja obuhvaća analognu i digitalnu obradu signala, a posebno dizajn filtara, programski izvedene prijemnike, te projektiranje digitalnih sustava. Objavio je 12 znanstvenih radova, od kojih su najznačajniji iz područja sinteze Hilbertovih transformatora, filtara s konstantnim kašnjenjem, korektora, te sustava sa zadanim impulsnim odzivom. Od 2001. godine radio je na sljedećim znanstvenoistraživačkim projektima Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske; *Dizajn analognih i digitalnih sustava primjenom optimizacijskih postupaka*, broj 0036-029, te *Razvoj i implementacija učinkovitih postupaka za digitalnu obradu signala*, broj 036-0362214-2217, pod vodstvom prof. dr. sc. Mladena Vučića.

Godine 2002. sudjeluje kao istraživač na tehnologijskom istraživačko-razvojnem projektu Ministarstva znanosti, obrazovanja i športa Republike Hrvatske pod nazivom *Implementacija procesorskih jezgri na programabilnom logičkom sklopovlju*, broj TP-01/036-07, pod vodstvom prof. dr. sc. Mladena Vučića.

Član je udruženja IEEE.

## Biography

Goran Molnar was born in Zagreb, Croatia, in 1978, where he finished the mathematical secondary school, in 1996. He received the Diploma degree in Electrical Engineering, line Industrial Electronics, from the Faculty of Electrical Engineering and Computing, University of Zagreb, in 2001. For outstanding success during the study, he was awarded by the bronze plaque "Josip Lončar".

Since 2001, he has been a Research Assistant at the Department of Electronic Systems and Information Processing of the Faculty of Electrical Engineering and Computing, University of Zagreb.

His research interests include analog and digital signal processing, filter design, software radio receivers, and digital system design. He published 12 papers covering the design of Hilbert transformers, constant-delay systems, equalizers, and systems having a desired impulse response. Since 2001, he worked on two scientific research projects supported by the Ministry of Science, Education and Sports of the Republic of Croatia; *Analog and digital system design based on optimization procedures*, project number 0036-029 and *Design and implementation of efficient methods for digital signal processing*, project number 036-0362214-2217, with the principal investigator professor Mladen Vučić.

In 2002, he worked as a researcher on the technological research project *Implementation of processor cores on programmable logic devices*, project number TP-01/036-07, supported by the Ministry of Science, Education and Sports of the Republic of Croatia, with the principal investigator professor Mladen Vučić.

Goran Molnar is a member of the IEEE organization.